

ÜBUNG 09

03.05.2024 - LINA DE WINDT

Alle Unterlagen auf www.inf.ethz.ch/~ldewindt

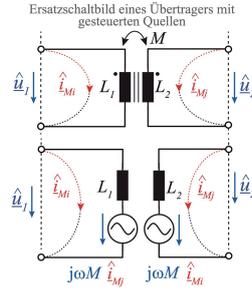
Themen von heute:

0. Zusatz zur Theorie von letzter Woche
1. Recap der Theorie von dieser Woche
 - 1.1 Superposition II
 - 1.2 Fourierreihen
 - 1.3 Harmonische Analyse
2. Beispielaufgaben
3. Vorbesprechung der Serie 9

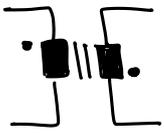
→ Zusammenfassung S.9 & 10

0. Zusatz zur Theorie von letzter Woche

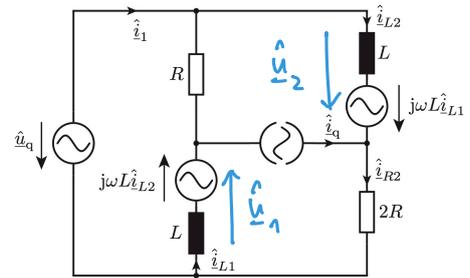
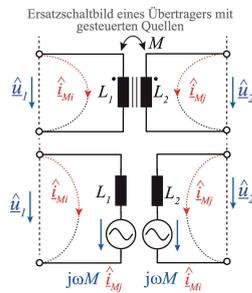
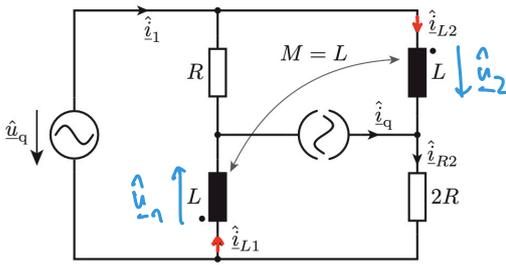
Beim Maschenstrom- / Knotenpotentialverfahren muss man einen Transformator umwandeln, bevor man das Verfahren anwenden kann. Dies geht wie folgt:



Was, wenn der Transformator aber so angeschlossen ist (beachte Punkte)?

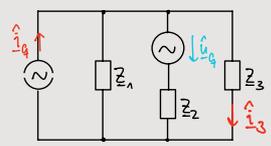


Einfach Strom so definieren, dass es "in den Punkt hineinfließt"
Rest der ZF. folgen. :)



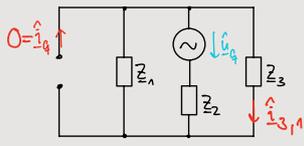
Superpositionsprinzip II

Bisher haben wir das Superpositionsprinzip nur für NWe mit Quellen gleicher Frequenz angewendet:



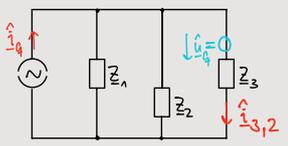
Gesucht: \hat{i}_3

1.) Einfluss von \hat{u}_q : $\rightarrow \hat{i}_q$ zu Null setzen!



$$\hat{i}_{3,1} = \frac{1}{Z_2 + (Z_1 \parallel Z_3)} \cdot \frac{Z_1}{Z_1 + Z_3} \hat{u}_q$$

2.) Einfluss von \hat{i}_q : $\rightarrow \hat{u}_q$ zu Null setzen!



$$\hat{i}_{3,2} = \frac{(Z_1 \parallel Z_2)}{(Z_1 \parallel Z_2) + Z_3} \hat{i}_q$$

\Rightarrow Insgesamt: Lösung: $\hat{i}_3 = \hat{i}_{3,1} + \hat{i}_{3,2} = \frac{1}{Z_2 + (Z_1 \parallel Z_3)} \cdot \frac{Z_1}{Z_1 + Z_3} \hat{u}_q + \frac{(Z_1 \parallel Z_2)}{(Z_1 \parallel Z_2) + Z_3} \hat{i}_q$

Bsp. aus Ü6

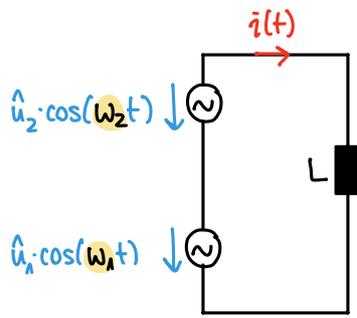
Das Superpositionsprinzip funktioniert auch bei Netzwerken mit Quellen unterschiedlicher Frequenz! **ABER AUFFASSEN:** Bei Netzwerken mit Quellen unterschiedlicher Frequenz darf die Überlagerung stattfinden!
 D.h. dürfen i.A. nicht addiert werden (da Zeiger mit unterschiedlichen Frequenzen mit unterschiedlicher rotieren.

Konkret geht man also bei Netzwerken mit Quellen unterschiedlicher Frequenzen wie folgt vor:

- 1) Alle Quellen ausser einer aus Netzwerk entfernen.
(Stromquellen -> Leerlauf, Spannungsquellen -> Kurzschluss)
- 2) Wechselgröße der Quelle in komplexen Zeiger umwandeln.
 $u(t) = \hat{u} \cos(\omega t + \phi) \Rightarrow \hat{u} = \hat{u} e^{j\phi}$
- 3) Gesuchte Spannung/Strom als Zeiger berechnen.
- 4) Zurücktransformieren in Zeitbereich!
- 5) Wiederholen für alle anderen Quellen.
- 6) Ganz zum Schluss: Die berechneten Teilspannungen/-ströme addieren. (Achtung: nicht Zeiger addieren!)

Beispiel:

Berechne $i(t)$:



1) Quelle 1:

2) in Zeiger umwandeln:

3) Zeiger \hat{i}_1 berechnen:

4) Zurücktransformieren in den Zeitbereich:

5) Wiederholen für alle anderen Quellen:

6) Teilstrome addieren (im Zeitbereich!!):

Spezialfall: AC & DC Quellen in einem Netzwerk:

Das selbe Vorgehen funktioniert auch bei Netzwerken mit Gleich- & Wechselgrößen.

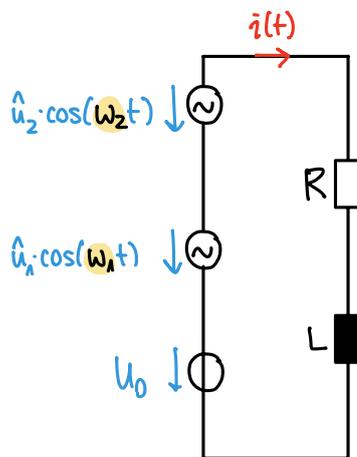
Um die Wechselanteile zu berechnen, verwenden wir wie gewohnt die komplexe Wechselstromrechnung (Zeiger etc.)

Um die Gleichanteile (Erinnerung: Gleichgrößen haben $\omega=0$) zu berechnen,

werden $\left\{ \begin{array}{l} \text{Spulen zu Kurzschlüssen (da } \underline{Z}_L = j\omega L \xrightarrow{\omega=0} \underline{Z}_L = 0) \\ \text{Kondensatoren zu Leerläufen (da } \underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} \xrightarrow{\omega=0} \underline{Z}_C = \infty) \end{array} \right.$

Beispiel:

Berechne $i(t)$:



1) Gleichspannungsquelle:

2) Rest gleich wie vorheriges Bsp.

3) Teilstrome addieren (im Zeitbereich!!):

Beispielaufgabe:

Gegeben ist das einfache Netzwerk in Abbildung 1, das mit Hilfe des Überlagerungsprinzips berechnet werden soll. Berechnen Sie alle Größen zuerst analytisch und dann mit eingesetzten Zahlenwerten und Einheiten. Folgende Zahlenwerte sind gegeben:

$$U_{DC} = 5 \text{ V}, \hat{u}_{AC} = 10 \text{ V}, R = 20 \Omega, L = 15 \text{ mH}, f = 100 \text{ Hz}$$

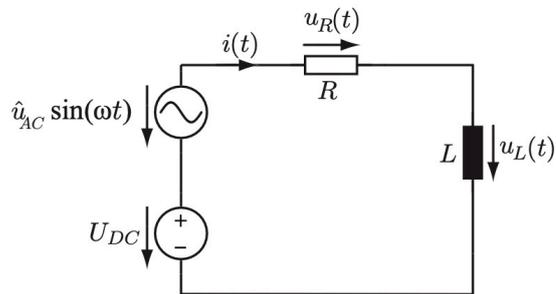


Abbildung 1: Netzwerk mit Gleich- und Wechselspannungsquelle

- Berechnen Sie den Strom I_{DC} , der sich zufolge der Gleichspannungsquelle einstellt.
- Berechnen Sie den Strom $i_{AC}(t)$, der sich zufolge der Wechselspannungsquelle einstellt.
- Bestimmen Sie daraus den Gesamtstrom $i(t)$, der in dem Netzwerk fließt.

a)

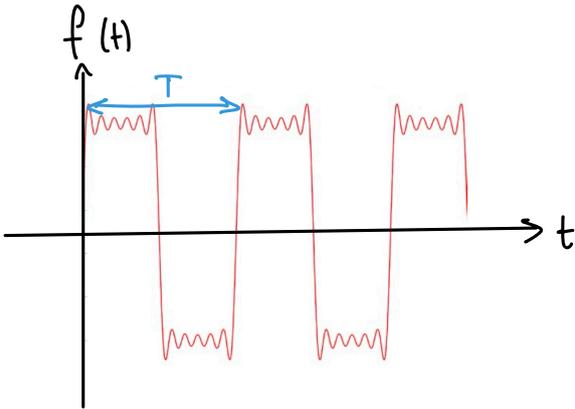
b)

c)

Fourierreihen

→ Mathe-stuff in KomA genauer. Hier nur Crash-course :)

In a nutshell: Alle periodischen Funktionen, welche die Dirichlet'schen Bedingungen erfüllen (endlich & lässt sich in endlich viele Teilintervalle zerlegen, in denen die fkt. stetig & monoton ist) lassen sich als eine Summe von Cos & Sin-funktionen darstellen.



ist der Gleichanteil,

\hat{a}_n, \hat{b}_n sind die der Fourierreihe:

wobei die Periodendauer der Funktion ist.

Im Bsp. der Spannung $u(t)$ lässt sich das wie folgt interpretieren:

$$u(t) =$$

Seeeeehr wichtig für die Prüfung:

Auf der Zusammenfassung befinden sich Fourierreihen von typischen Signalen:

Zeitfunktion	U_{eff}	Fourier-Koeffizienten	Zeitfunktion	U_{eff}	Fourier-Koeffizienten
	$\frac{\hat{u}}{\sqrt{3}}$	$a_0 = \frac{1}{2}\hat{u}, \hat{a}_n = \frac{-4\hat{u}}{\pi^2} \frac{1}{n^2}$ $n = 1, 3, 5, \dots$		$\hat{u}\sqrt{2\delta}$	$a_0 = 2\delta\hat{u}$ $\hat{a}_n = \frac{2\hat{u}}{\pi} \frac{1}{n} \sin(n2\pi\delta)$ $n = 1, 2, 3, \dots$
$u(t) = \frac{\hat{u}}{2} \frac{4\hat{u}}{\pi^2} [\cos(\omega t) + \frac{1}{3^2} \cos(3\omega t) + \frac{1}{5^2} \cos(5\omega t) + \dots]$			$u(t) = 2\delta\hat{u} + \frac{2\hat{u}}{\pi} [\sin(2\pi\delta) \cos(\omega t) + \frac{1}{2} \sin(4\pi\delta) \cos(2\omega t) + \frac{1}{3} \sin(6\pi\delta) \cos(3\omega t) + \dots]$		
	$\frac{\hat{u}}{\sqrt{3}}$	$\hat{b}_n = \frac{8\hat{u}}{\pi^2} \frac{1}{n^2} (-1)^{\frac{n+3}{2}}$ $n = 1, 3, 5, \dots$		$\frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$	$a_0 = \frac{2\hat{u}}{\pi}, \hat{a}_n = \frac{-4\hat{u}}{\pi} \frac{1}{(n+1)(n-1)}$ $n = 2, 4, 6, \dots$
$u(t) = \frac{8\hat{u}}{\pi^2} [\sin(\omega t) - \frac{1}{3^2} \sin(3\omega t) + \frac{1}{5^2} \sin(5\omega t) - \dots]$			$u(t) = \hat{u} \sin(\omega t) $		$u(t) = \frac{2\hat{u}}{\pi} - \frac{4\hat{u}}{\pi} [\frac{\cos(2\omega t)}{1 \cdot 3} + \frac{\cos(4\omega t)}{3 \cdot 5} + \frac{\cos(6\omega t)}{5 \cdot 7} + \dots]$
	$\frac{\hat{u}}{\sqrt{3}}$	$a_0 = \frac{1}{2}\hat{u}, \hat{b}_n = \frac{-\hat{u}}{\pi} \frac{1}{n}$ $n = 1, 2, 3, \dots$		$\frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$	$a_0 = \frac{2\hat{u}}{\pi}, \hat{a}_n = \frac{4\hat{u}}{\pi} \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{(n+1)(n-1)}$ $n = 2, 4, 6, \dots$
$u(t) = \frac{\hat{u}}{2} - \frac{\hat{u}}{\pi} [\sin(\omega t) + \frac{1}{2} \sin(2\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) + \dots]$			$u(t) = \hat{u} \cos(\omega t) $		$u(t) = \frac{2\hat{u}}{\pi} + \frac{4\hat{u}}{\pi} [\frac{\cos(2\omega t)}{1 \cdot 3} - \frac{\cos(4\omega t)}{3 \cdot 5} + \frac{\cos(6\omega t)}{5 \cdot 7} - \dots]$
	$\frac{\hat{u}}{\sqrt{3}}$	$\hat{b}_n = \frac{2\hat{u}}{\pi} \frac{1}{n} (-1)^{n+1}$ $n = 1, 2, 3, \dots$		$\frac{\hat{u}}{2}$	$a_0 = \frac{\hat{u}}{\pi}, \hat{a}_n = \frac{-2\hat{u}}{\pi} \frac{1}{(n+1)(n-1)}$ $\hat{b}_1 = \frac{\hat{u}}{2}$ $n = 2, 4, 6, \dots$
$u(t) = \frac{2\hat{u}}{\pi} [\sin(\omega t) - \frac{1}{2} \sin(2\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) - \dots]$			$u(t) = \hat{u} \sin(\omega t)$ für $0 \leq t \leq T/2$		$u(t) = \frac{\hat{u}}{\pi} + \frac{\hat{u}}{2} \sin(\omega t) - \frac{2\hat{u}}{\pi} [\frac{\cos(2\omega t)}{1 \cdot 3} + \frac{\cos(4\omega t)}{3 \cdot 5} + \frac{\cos(6\omega t)}{5 \cdot 7} + \dots]$
	\hat{u}	$\hat{b}_n = \frac{4\hat{u}}{\pi} \frac{1}{n}$ $n = 1, 3, 5, \dots$		$\hat{u} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{8\pi}}$	$a_0 = \frac{3\sqrt{3}\hat{u}}{2\pi}$ $\hat{a}_n = \frac{-3\sqrt{3}\hat{u}}{\pi} \frac{1}{(n+1)(n-1)}$ $n = 3, 6, 9, \dots$
$u(t) = \frac{4\hat{u}}{\pi} [\sin(\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega t) + \dots]$			$u(t) = \frac{3\sqrt{3}\hat{u}}{\pi} [\frac{1}{2} - \frac{\cos(3\omega t)}{2 \cdot 4} - \frac{\cos(6\omega t)}{5 \cdot 7} - \frac{\cos(9\omega t)}{8 \cdot 10} - \dots]$		

Und auch einige wichtige Definitionen:

Leistung nichtsinusförmiger Größen (\hat{a}_n & \hat{b}_n - Spitzenwerte bei der n -ten Harmonischen)

Effektivwert $U = \sqrt{a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (\hat{a}_n^2 + \hat{b}_n^2)}$

Orthogonalität $\int_0^T \sin(n\omega t) \sin(m\omega t) dt = 0$ für $m \neq n$

$(n, m \in \mathbb{N}^+)$ $\int_0^T \sin(n\omega t) \sin(m\omega t) dt = \frac{T}{2}$ für $m = n$

Wirkleistung [W] $P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)i(t) dt$
 $= U_0 I_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (\hat{u}_n \hat{i}_n \cos(\varphi_{u_n} - \varphi_{i_n}))$

$\int_0^T \cos(n\omega t) \cos(m\omega t) dt = 0$ für $m \neq n$

$\int_0^T \cos(n\omega t) \cos(m\omega t) dt = \frac{T}{2}$ für $m = n$

$\int_0^T \cos(n\omega t) \sin(m\omega t) dt = 0$

Kenngößen nichtsinusförmiger Verläufe (U_n - Effektivwert der n -ten Harmonischen)

Effektivwert des Wechselanteils U_{\sim}

$$U_{\sim} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} U_n^2} = \sqrt{U^2 - U_0^2}$$

Grundschwingungsgehalt g ($0 \leq g \leq 1$)

$$g = \frac{U_1}{U_{\sim}}$$

Gesamtklirrfaktor k ($0 \leq k \leq 1$)

$$k = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} U_n^2}}{U_{\sim}} = \frac{\sqrt{U_{\sim}^2 - U_1^2}}{U_{\sim}} = \sqrt{1 - g^2} = \sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} k_n^2}$$

Total Harmonic Distortion (THD)

$$THD = (\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} U_n^2}) / U_1 = k / \sqrt{1 - k^2}$$

Scheitelfaktor ξ

$$\xi = \frac{\hat{u}}{U_{\sim}}$$

Formfaktor F

$$F = \frac{U_{\sim}}{|\bar{u}|}$$

Welligkeit w

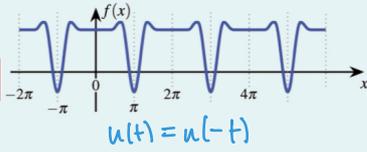
$$w = \frac{U_{\sim}}{|U_0|}$$

Symmetrien & Vereinfachungen

Herrscht Symmetrie in der Funktion, kann die Fourierreihe einfacher bestimmt werden:

$$FR = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{a}_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{b}_n \sin(n\omega t)$$

Achsensymmetrie
(gerade Fkt.)



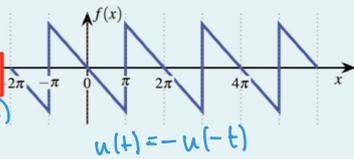
$$\hat{b}_n = 0$$

$$\hat{a}_0 = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} u(t) dt$$

$$\hat{a}_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} u(t) \cos(n\omega t) dt$$

$$\Rightarrow u(t) = \hat{a}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{a}_n \cos(n\omega t)$$

Punktsymmetrie
(ungerade Fkt.)

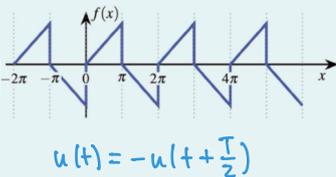


$$\hat{a}_0 = \hat{a}_n = 0$$

$$\hat{b}_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} u(t) \sin(n\omega t) dt$$

$$\Rightarrow u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{b}_n \sin(n\omega t)$$

Halbwelligensymmetrie



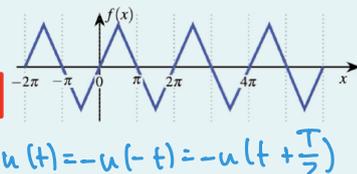
$$\hat{a}_0 = \hat{a}_{2n} = \hat{b}_{2n} = 0 \quad (\text{alle Koeff. mit geradem Index } 0)$$

$$\hat{a}_{2n-1} = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} u(t) \cos((2n-1)\omega t) dt$$

$$\hat{b}_{2n-1} = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} u(t) \sin((2n-1)\omega t) dt$$

$$\Rightarrow u(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \hat{a}_m \cos(m\omega t) + \sum_{m=1}^{\infty} \hat{b}_m \sin(m\omega t) \quad \text{mit } m=2n-1 \text{ (alle ungeraden Zahlen)}$$

Ungerade & Halbwelligensymmetrie

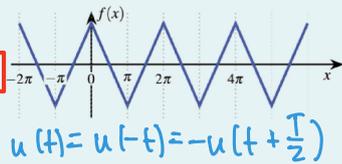


$$\hat{a}_0 = \hat{a}_n = \hat{b}_{2n} = 0$$

$$\hat{b}_{2n-1} = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} u(t) \sin((2n-1)\omega t) dt$$

$$\Rightarrow u(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \hat{b}_m \sin(m\omega t) \quad \text{mit } m=2n-1$$

Gerade & Halbwellensymmetrie



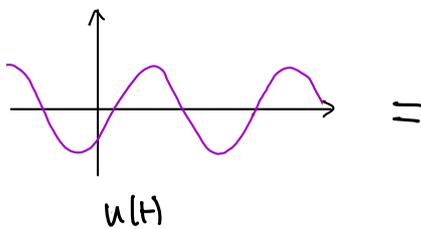
$$\hat{a}_0 = \hat{a}_{2n} = \hat{b}_n = 0$$

$$\hat{a}_{2n-1} = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} u(t) \cos((2n-1)\omega t) dt$$

$$\Rightarrow u(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \hat{a}_m \cos(m\omega t) \quad \text{mit } m = 2n-1$$

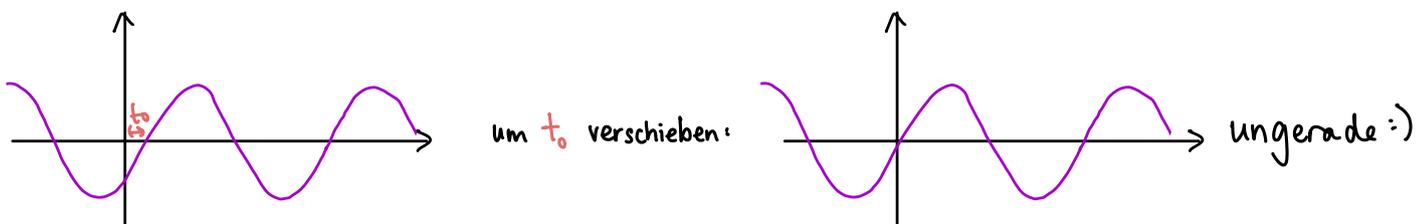
Weitere Vereinfachungen:

Wenn die vorliegende Funktion weder gerade noch ungerade ist, kann man sie in einem geraden & ungeraden Anteil zerlegen:



und dann daraus die Fourierreihe bestimmen.

Eine andere Methode ist es, die Funktion in der Zeit zu verschieben, damit dann eine Symmetrie auftritt:



Dann werden die Koeffizienten der Fourierreihe bestimmt als:

$$\hat{a}_{n,neu} = \hat{a}_n \cos(n\omega t_0) - \hat{b}_n \sin(n\omega t_0) \quad \hat{b}_{n,neu} = \hat{a}_n \sin(n\omega t_0) + \hat{b}_n \cos(n\omega t_0)$$

$$\Rightarrow u(t) = \hat{a}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{a}_{n,neu} \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{b}_{n,neu} \sin(n\omega t)$$

Beispielaufgabe: (Aufgabe aus der Beispielaufgabe 2)

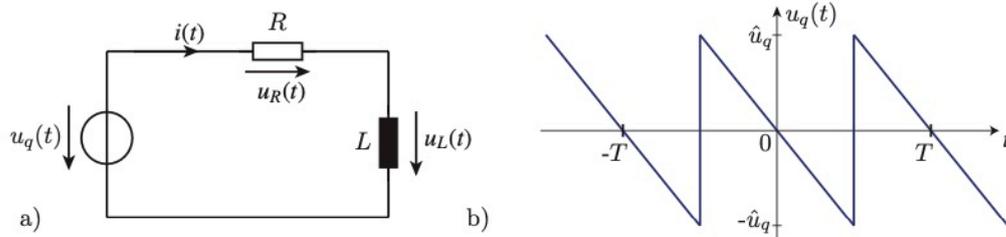


Abbildung 4: a) Gegebene Schaltung, b) Zeitverlauf von $u_q(t)$

Gegeben ist die Schaltung in Abb. 4a) mit dem Spannungsverlauf $u_q(t)$ in Abb. 4b).

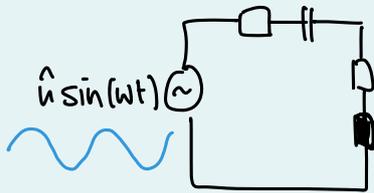
- a.) Der Zeitverlauf der Sägezahnspannung $u_q(t)$ soll mit einer Fourierreihe angenähert werden. Welche Art von Symmetrie liegt bei dem Signal vor? Welche der Fourierkoeffizienten a_0 , \hat{a}_n , \hat{b}_n werden bei dieser Symmetrie zu 0?

- b.) Stellen Sie die Integralausdrücke derjenigen Fourier-Koeffizienten, die nicht durch die Symmetrie zu 0 werden, als Funktion der Variablen t , n , T und \hat{u}_q auf. Lösen Sie die Integrale. Vereinfachen Sie dabei so weit wie möglich. *Hinweis: Partielle Integration:*
- $$\int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx$$

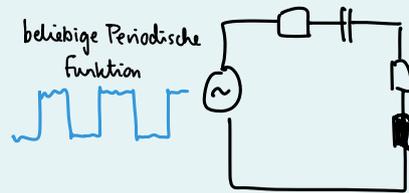
Harmonische Analyse

Bisher haben wir entweder mit Gleichgrößen (NUS1) oder reine Sinus- oder Cosinus-signale gearbeitet. Was aber, wenn am Netzwerk solche Signale anliegen?

Bisher:



Neu:



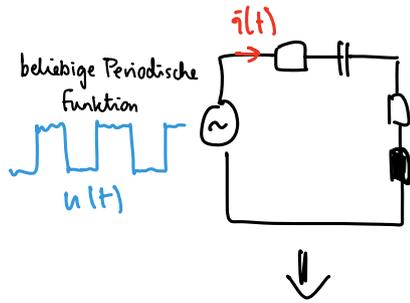
Dann können wir die oben gelernten Prinzipien (Superposition & Fourierreihen) kombinieren um RLC Netzwerke zu berechnen, die mit einem
..... (nicht nur reine Sinus / Kosinus) angeregt werden

Das nennen wir die eines Netzwerks.

Vorgehen:

- 1) Wir benutzen die Fourierreihe, um die Input-Funktion als Linearkombination von Sinus/Kosinus Funktionen auszudrücken.
- 2) Quelle als Superposition dieser gefundenen Funktionen ausdrücken. (**Achtung: unendlich viele**)
- 3) Für jede Frequenz einzeln die Ausgangsspannung/strom berechnen. (Benutze komplexe Wechselstromrechnung)
- 4) Addition aller zuvor gefundenen Teil-ausgangsspannungen/ströme zur Gesamtausgangsspannung/strom im Zeitbereich. (Ergibt eine unendliche Reihe)

Beispiel:



1) Input-Signal als Fourierreihe:

2)

Quelle als Superposition von (unendlich) vielen \sin & \cos Quellen ausdrücken

3) Für jede Quelle einzeln die Ausgangsspannung / -strom berechnen:

4) Zuerst im Zeitbereich zurücktransformieren!

Gesamtstrom:

(Addition aller Teilströme im Zeitbereich)

Beispielaufgabe: (Aufgabe aus der Beispielklausur 1)

Teil 3 Harmonische Analyse (26 Punkte=22%)

Gegeben ist die Schaltung in Abb. 4a) mit dem Stromverlauf $i_q(t)$ in Abb. 4b).

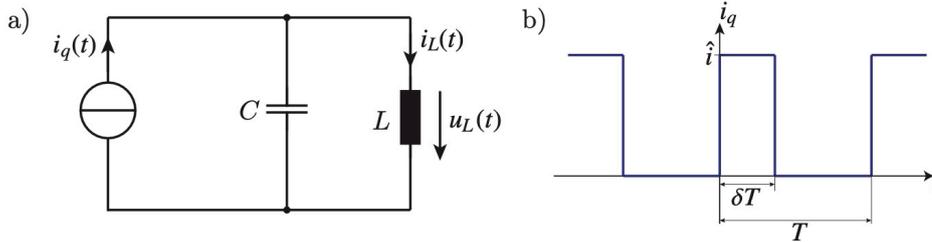


Abbildung 4: a) Gegebene Schaltung, b) Zeitverlauf von $i_q(t)$

skip in ü

a.) Der Zeitverlauf des Rechteckstromes $i_q(t)$ soll mit einer Fourierreihe angenähert werden. Wie muss der Ursprung $t = 0$ gelegt werden, dass sich eine geeignete Symmetrie für $0 < \delta < 1$ ergibt? Welche Art von Symmetrie liegt nach der Verschiebung vor? Was ist die mathematische Bedingung für diese Symmetrie?

b.) Stellen Sie die Integralausdrücke der Fourier-Koeffizienten a_0 , \hat{a}_n und \hat{b}_n als Funktion der Variablen t , n , δ , T und \hat{i} auf. Lösen Sie die Integrale.

Hinweis: Verwenden Sie dafür die gewählte Symmetrie aus Aufgabe a)! $\rightarrow a_0 = \delta \hat{i}, \hat{b}_n = 0$

c.) Berechnen Sie die Welligkeit w von $i_q(t)$ analytisch und vereinfachen Sie soweit wie möglich.

$$\hat{a}_n = \frac{2\hat{i}}{n\pi} \sin(n(\delta-1)\pi)$$

d.) Geben Sie einen analytischen Ausdruck für $u_L(t)$ und $i_L(t)$ an. Gehen Sie davon aus, dass transiente Vorgänge abgeklungen sind und das Netzwerk sich im eingeschwungenen Zustand befindet.

Hinweis: Es gilt $u_L(t), i_L(t) \in \mathbb{R}$

a)~c) wie vorheriges Bsp. Wir kriegen die Fourierreihe für $i_q(t)$:

$$\begin{aligned} i_q(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{a}_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{b}_n \sin(n\omega t) = \\ &= \delta \hat{i} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\hat{i}}{n\pi} \sin(n(\delta-1)\pi) \cos(n\omega t) \end{aligned}$$