PVK Skript

mit Lücken zum Ausfüllen

Physik 1

D-ITET FS22

Lina De Windt

Vorwort:

Dieses Skript wurde im Rahmen des Physik1-PVK für D-ITET im FS22 erstellt. Es deckt nicht den Stoff der gesamten Vorlesung ab, sondern dient eher als Stoffüberblick oder Nachschlageort, falls Grundlagen eines bestimmten Themas nicht gut sitzen.

Es besteht keine Garantie für Korrektheit! Ich bin froh bei Fehler informiert zu werden oder bei Fragen zu helfen: ldewindt@ethz.ch

Alle Unterlagen zum PVK (unter anderem die Quizzes/Aufgaben zum Skript) findest du auf meiner Webseite:

n.ethz.ch/~ldewindt

Lina De Windt

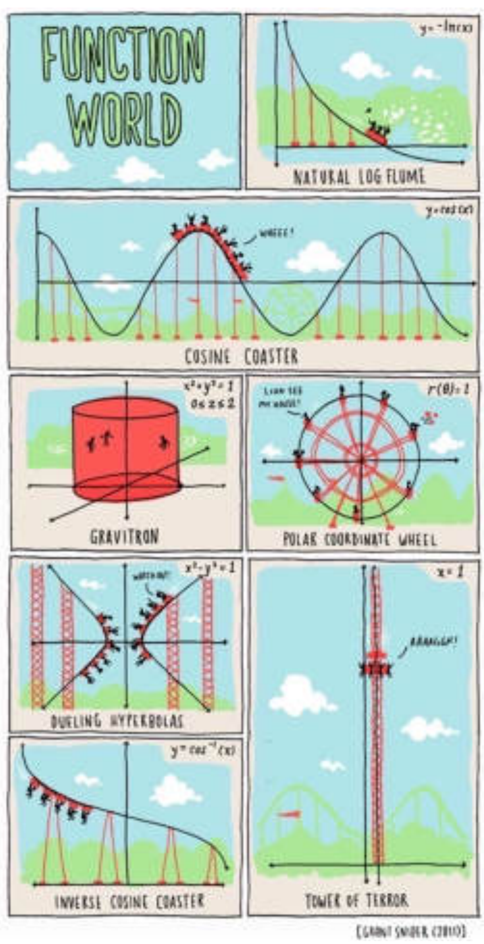
n.ethz.ch

Inhaltsverzeichnis

Teil 1

Mathematische Grundlagen

für Physik 1



Differenzialgleichungen

Eine Differenzialgleichung ist eine Gleichung, in welcher eine unbekannte Funktion $x(t)$ einer oder mehrerer Variablen und ihre Ableitungen vorkommen.

Bem: oft wird die Laufvariable (hier t) der Funktion weggelassen, um Schreibarbeit zu verringern oder um das Ganze übersichtlich zu behalten.

Klassifizierung eines DGL:

Ordnung: Die Ordnung der höchsten Ableitung, die in der DGL vorkommt.

Bsp: $\ddot{x}+x=3 \rightarrow$ Ordnung: 2 $\qquad \alpha x'''(t)+\beta x=0 \rightarrow$ Ordnung: 3

Linearität: $x(t)$ und alle ihre Ableitungen kommen in der DGL linear vor.

Bsp: $\alpha\ddot{x}+\beta\dot{x}+\gamma x=0 \rightarrow$ linear $\qquad \alpha(\ddot{x})^2+\beta\dot{x}+\gamma x \rightarrow$ nicht linear

Homogenität: Wenn keine Terme in der DGL vorkommen, die nicht von der gesuchten Funktion abhängen.

Bsp: $\alpha\ddot{x}+\beta\dot{x}+\gamma x=0 \rightarrow$ homogen $\qquad \alpha\ddot{x}+\beta\dot{x}+\gamma x=3t \rightarrow$ inhomogen

$\ddot{x}+\omega_0^2 x=g \rightarrow$ inhomogen

Anfangswertprobleme:

Ein Anfangswertproblem (AWP) n-ter Ordnung ist eine gewöhnliche DGL n-ter Ordnung zusammen mit n Anfangsbedingungen (AB)

$$\begin{cases} F(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0 \\ x(t_0)=x_0, \dot{x}(t_0)=x_1, \ddot{x}(t_0)=x_3, \dots, x^{(n-1)}(t_0)=x_{n-1} \end{cases}$$

d.h. also: $\boxed{\text{AWP} = \text{DGL} + \text{AB}}$

Bsp: $\begin{cases} \ddot{x}+x=2t^2 \\ x(0)=x_0, \ \dot{x}(0)=v_0 \end{cases}$

Erinnerung: x = Ortsfkt.
$\dot{x}$ = Geschwindigkeit
$\ddot{x}$ = Beschleunigung

↳ Die AB braucht man, um die spezifische Lösung der DGL zu bestimmen.

⚠ In Physik 1 haben unsere DGL immer Anfangsbedingungen.

in Ph1 kommen nur solche DGL vor.

Lineare DGL (bzw. AWP) 2-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten lösen:

Grundprinzip: Die allgemeine Lösung hat folgende Form: $\boxed{x(t) = x_{homogen}(t) + x_{partikulär}(t)}$

$x_{homogen}(t)$: ist die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Problems. (d.h. die DGL ohne den inhomogenen Term)

$x_{partikulär}(t)$: ist eine partikuläre Lösung des inhomogenen Problems. Sie muss schlicht die inhomogene Gleichung erfüllen.

Allgemeine Prozedur zum lösen von linearen DGL:

1) Lösen der homogenen Lösung (falls DGL homogen ist, sind wir hier fertig :))
2) Bestimmung einer partikulären Lösung $x_p(t)$ der inhomogenen Gleichung
3) Die allgemeine Lösung ist dann: $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

falls Anfangswerte vorhanden:

4) Anfangswerte in $x(t)$ einsetzen um unbekannte Koeffizienten zu bestimmen

Schauen wir uns nun an, welche Techniken wir verwenden können, um $x_h(t)$ und $x_p(t)$ zu bestimmen:

1) Homogene DGL: $a_2 x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = 0$ ← lineare, homogene DGL n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

wobei $a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$, $a_2 \neq 0$

Wir machen den Euler-Ansatz: Wir nehmen an, dass $x(t)$ folgende Form hat:

$\boxed{x(t) = e^{\lambda t}}$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$ ein zu bestimmender Parameter ist.

Wir setzen diesen Ansatz in die DGL ein:

$$a_2 (e^{\lambda t})'' + a_1 (e^{\lambda t})' + a_0 e^{\lambda t} = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad a_2 \lambda^2 e^{\lambda t} + a_1 \lambda e^{\lambda t} + a_0 e^{\lambda t} = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0) e^{\lambda t} = 0$$

/ Gleichung muss $\forall t$ gelten!

$$\Rightarrow \quad Chp(\lambda) = a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 \overset{!}{=} 0$$

Wir haben nun eine Gleichung für den unbekannten Parameter λ!

Diese Gleichung heisst Charakteristische Gleichung / Polynom ($Chp(\lambda)$). Wir haben nun also die DGL auf ein Nullstellenproblem überführt! :) Nun müssen wir das Charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerlegen: $Chp(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdot (\lambda - \lambda_2) = 0$

wobei λ_1, λ_2 die Nullstellen von $Chp(\lambda)$ sind.

z.B.: $\ddot{x} + 5x + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad Chp(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 6 \overset{!}{=} 0$

$\Leftrightarrow \quad (\lambda + 3)(\lambda + 2) = 0$

Bei DGL's zweiter Ordnung können wir sogar die Mitternachtsformel verwenden, um λ_1 und λ_2 zu bestimmen: $\boxed{\lambda_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2}}$

Mit diesen Werten können wir das Fundamentalsystem der DGL aufschreiben:

$$\boxed{e^{\lambda_1 t},\ e^{\lambda_2 t}}$$

Bem: Falls eine Nullstelle zwei Mal vorkommt (also $(\lambda-\lambda_1)^2=0$), dann hat diese Nullstelle die Vielfachheit 2. Das Fundamentalsystem sieht dann so aus: $e^{\lambda_1 t},\ te^{\lambda_1 t}$

Die allgemeine Lösung ist eine Linearkombination aller Lösungen im Fundamentalsystem: $\boxed{x(t) = \underline{A}e^{\lambda_1 t} + \underline{B}e^{\lambda_2 t}}$. bzw. $x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Bte^{\lambda_1 t}$ falls λ_1 mit Vielfachheit 2

Die Koeffizienten der Linearkombination werden aus den Anfangsbedingungen bestimmt.

Beispiel:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \omega > 0 & \leftarrow \text{DGL} \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}$$

$\omega > 0$: da physikalisch eine negative Kreisfrequenz keinen Sinn macht

$x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0$: Anfangsbedingungen

Ansatz $x(t) = e^{\lambda t}$ in DGL einsetzen:

$$(e^{\lambda t})'' + \omega^2 e^{\lambda t} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 e^{\lambda t} + \omega^2 e^{\lambda t} = 0 \qquad \Rightarrow \text{Chp}(\lambda):\ \lambda^2 + \omega^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 = -\omega^2$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{-\omega^2} = \pm i\omega$$

$\sqrt{\omega^2} = |\omega|$

$\sqrt{-1} = i$

Fundamentalsystem: $e^{+i\omega t},\ e^{-i\omega t}$

Allgemeine Lösung: $x(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}$

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$$
$$e^{-i\omega t} = \cos(\omega t) - i\sin(\omega t)$$

$$= A\cdot(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)) + B\cdot(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t))$$

$$= \underbrace{(A+B)}_{:=\tilde{A}}\cos(\omega t) + \underbrace{i\cdot(A-B)}_{:=\tilde{B}}\sin(\omega t) \quad , \tilde{A}, \tilde{B} \in \mathbb{R}$$

$$= \tilde{A}\cos(\omega t) + \tilde{B}\sin(\omega t)$$

Anfangsbedingungen einsetzen: $x(0) = \tilde{A}\underbrace{\cos(0)}_{1} + \cancel{\tilde{B}\overset{0}{\sin(0)}} = \tilde{A} = 0$

$$\dot{x}(0) = \omega\tilde{B}\cos(0) = v_0 \Rightarrow \tilde{B} = \frac{v_0}{\omega}$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)$$

2) Inhomogene Gleichung:

Bei inhomogenen DGL's müssen wir neben der homogenen Lösung auch die partikuläre Lösung finden. Das ist einfach eine Lösung, die die inhomogene DGL löst. Um diese zu bestimmen wenden wir die Methode des direkten Ansatzes an.

Das wichtigste hier ist:

$\boxed{\text{Der Ansatz für } x_p(t) \text{ hat dieselbe Form wie der inhomogene Term } b(t).}$

Die Ansatztabelle hilft uns, einen passenden Ansatz zu finden:

Inhomogener Term $b(x)$	Ansatz für $y_p(x)$
Polynom: $\sum_{i=0}^m b_i x^i$	$\sum_{i=0}^m A_i x^i$
Exp-term-Polynom $e^{\alpha x}\sum_{i=0}^m b_i x^i$	$e^{\alpha x}\sum_{i=0}^m A_i x^i$
$\sin(\omega x)\sum_{i=0}^m b_i x^i + \cos(\omega x)\sum_{i=0}^m c_i x^i$	$\sin(\omega x)\sum_{i=0}^m A_i x^i + \cos(\omega x)\sum_{i=0}^m B_i x^i$
$\sinh(\omega x)\sum_{i=0}^m b_i x^i + \cosh(\omega x)\sum_{i=0}^m c_i x^i$	$\sinh(\omega x)\sum_{i=0}^m A_i x^i + \cosh(\omega x)\sum_{i=0}^m B_i x^i$
$e^{\alpha x}\sin(\omega x)\sum_{i=0}^m b_i x^i + e^{\alpha x}\cos(\omega x)\sum_{i=0}^m c_i x^i$	$e^{\alpha x}\sin(\omega x)\sum_{i=0}^m A_i x^i + e^{\alpha x}\cos(\omega x)\sum_{i=0}^m B_i x^i$

Achtung hier ist x die Laufvariable (anstelle von t)

Besonderer Fall: Wenn es vorkommt, dass ein Teil der für $y_p(x)$ zu wählenden Funktion bereits in der Lösung des homogenen Problems vorhanden ist (vgl. Beispiel 24.2.3), wird der Ansatz zusätzlich mit x multipliziert.

Wiederum müssen wir einfach den Ansatz in die DGL einsetzen und die Koeffizienten bestimmen.

Bsp: $\begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 x = g & , \omega > 0 \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$ Inhomogenität (aus Serie 11, Aufgabe 1)

1) homogene Lösung: gleich wie vorheriges Bsp: $x_h(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$

2) partikuläre Lösung: Inhomogenität $= g$ $\longrightarrow$ Ansatz: $x_p(t) = C \in \mathbb{R}$ in DGL

einsetzen: $(C)'' + \omega^2 (C) \overset{!}{=} g$

$\Leftrightarrow \quad \omega^2 C \overset{!}{=} g \quad \Rightarrow \quad C = \frac{g}{\omega^2}$

Somit ist $x_p(t) = \frac{g}{\omega^2}$

3) allgemeine Lösung: $x(t) = x_h(t) + x_p(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) + \frac{g}{\omega^2}$

4) Anfangsbedingungen:

⚠ erst allgemeine Lösung $x_h + x_p$ bestimmen, danach AB einsetzen!

$$x(0) = A\underbrace{\cos(0)}_{1} + B\cancel{\sin(0)}^{0} + \frac{g}{\omega^2} = A + \frac{g}{\omega^2} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow A = -\frac{g}{\omega^2}$$

$$\dot{x}(0) = -A\cancel{\sin(0)}^{0} + B\underbrace{\cos(0)}_{1} = B \overset{!}{=} 0$$

Folglich ist $x(t) = -\frac{g}{\omega^2} \cdot \cos(\omega t) + \frac{g}{\omega^2} = \underline{\underline{\frac{g}{\omega^2} \cdot (1 - \cos(\omega t))}}$

Bemerkungen:

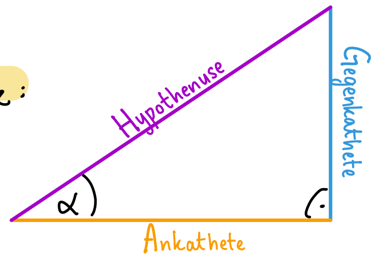
- Wenn ein Ansatz angegeben ist, dann verwendet diesen!
  ↳ einfach noch mit den Anfangsbedingungen die Koeffizienten bestimmen.

- Bei Schwingungen ohne Dämpfung mit einer konstanten Inhomogenität könnt ihr den Ansatz $\boxed{x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) + C}$ verwenden, wobei $\boxed{\omega := \sqrt{\frac{k}{m}}}$ die Kreisfrequenz ist.

  Ihr müsst dann nur noch mit den Anfangsbedingungen die Koeffizienten $A, B, C \in \mathbb{R}$ bestimmen.

Trigonometrie

Rechtwinkliges Dreieck:

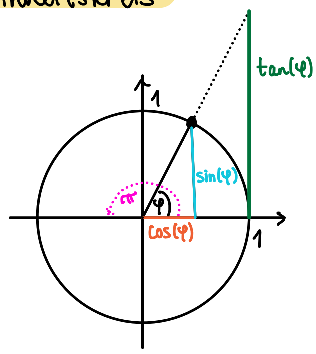


$\sin\alpha \quad \cos\alpha \quad \tan\alpha$

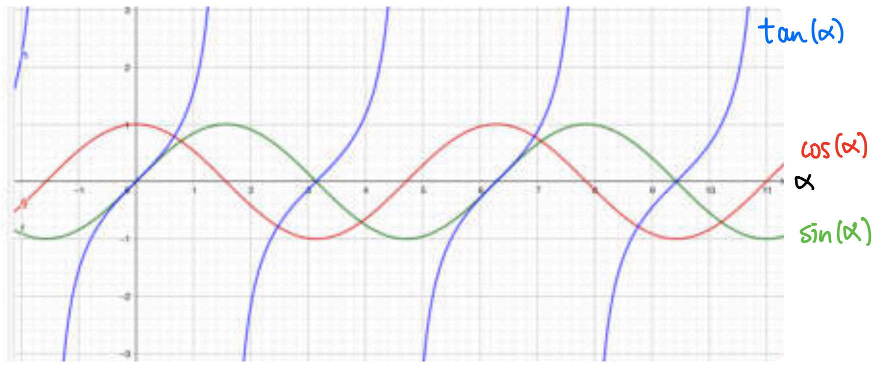
$\frac{G}{H} \quad \frac{A}{H} \quad \frac{G}{A}$

lady "GAGHHA"

Einheitskreis:



Als Funktion von α:



Wichtige Eigenschaften:

- Periode: 2π (d.h. $\cos(x+n\cdot 2\pi)=\cos(x)$, $n\in\mathbb{Z}$)
- $\cos(-x)=\cos(x)$, $\sin(-x)=-\sin(x)$
- $\frac{d}{dx}\cos(x)=-\sin(x)$, $\frac{d}{dx}\cos(kx)=-k\cdot\sin(x)$, $\frac{d}{dx}\sin(x)=\cos(x)$, $\frac{d}{dx}\sin(kx)=k\cdot\cos(x)$ $\quad k\in\mathbb{R}$
- $\cos(x-\frac{\pi}{2})=\sin(x)$, $\sin(x+\frac{\pi}{2})=\cos(x)$
- $\cos(x+\pi)=-\cos(x)$, $\sin(x+\pi)=-\sin(x)$

⊙ $e^{i\varphi}=\cos(\varphi)+i\sin(\varphi)$ (Euler'sche Identität)

⚠ Periode bestimmen von $\cos(\alpha x)$, $\sin(\alpha x)$ $\quad \alpha\in\mathbb{R}$

$\cos(\alpha x)=\cos(\alpha x+2\pi)=\cos(\alpha\cdot(x+\frac{2\pi}{\alpha}))$ funktioniert gleich für $\sin(\alpha x)$.

cos ist 2π-periodisch

Periode von $\cos(\alpha x)$ ist $\frac{2\pi}{\alpha}$

RAD-DEG Umformung

$\boxed{\alpha\,\text{RAD} = \frac{\alpha}{\pi}\cdot 180^\circ}$

$\boxed{\alpha^\circ = \frac{\alpha}{180}\cdot\pi\,\text{RAD}}$

Wichtige Grössen:

$\boxed{\begin{array}{l}\pi\,\text{RAD}=180^\circ\\ 2\pi\,\text{RAD}=360^\circ\end{array}}$

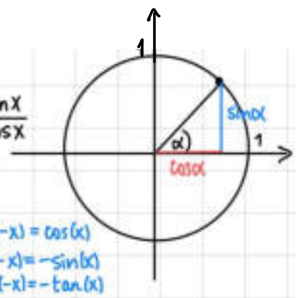
$\cos(\pi)=-1$
$\cos(2\pi)=1$
$\sin(\pi)=\sin(2\pi)=0$

⚠ Passt auf dass ihr jeweils den Taschenrechner richtig einstellt!

Wichtige Trigrules für Physik 1 (auf ZF!)

Potenzreduktion:

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $\qquad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
- $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$
- $\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin(3x))$
- $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$
- $\cos^3 x = \frac{1}{4}(3\cos x + \cos(3x))$



$\cos(-x) = \cos(x)$
$\sin(-x) = -\sin(x)$
$\tan(-x) = -\tan(x)$

Summen von Argumenten

- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$
- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

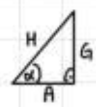
Produkt → Summe

- $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$
- $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))$
- $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta))$

$\sin(\alpha) = \frac{G}{H}$

$\cos(\alpha) = \frac{A}{H}$

$\tan(\alpha) = \frac{G}{A}$



Approximationen für α klein:

$\sin\alpha \cong \alpha$

$\cos\alpha \cong \alpha$

$\sin\alpha \cong \tan\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Summe → Produkt

- $\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha\pm\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha\mp\beta}{2}\right)$
- $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
- $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

andere:

- $\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$
- $A\sin(\omega t+\alpha) + B\sin(\omega t+\beta) = \sqrt{(A\cos\alpha + B\cos\beta)^2 + (A\sin\alpha + B\sin\beta)^2} \cdot$
  $\cdot \sin\left(\omega t + \arctan\left(\frac{A\sin\alpha + B\sin\beta}{A\cos\alpha + B\cos\beta}\right)\right)$

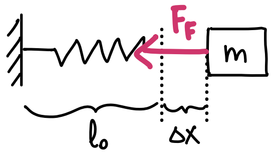
Teil 2

Physikalische Grundlagen

für Physik 1

Feder

Hookesches Gesetz:



$$\boxed{F_{Feder} = \pm k \cdot \Delta x}$$

Vorzeichen: je nach dem in welche Richtung man das Pfeil eingezeichnet hat.

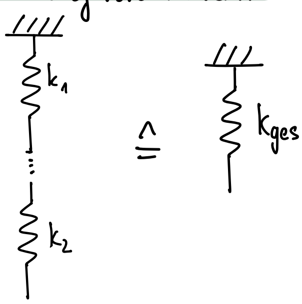
k: Federkonstante: gibt an, wie "steif" eine Feder ist (gegeben).
Δx: Auslenkung

Potentielle Energie einer Feder:

$$\boxed{E_{pot} = \frac{1}{2} k (\Delta x)^2}$$

Auslenkung

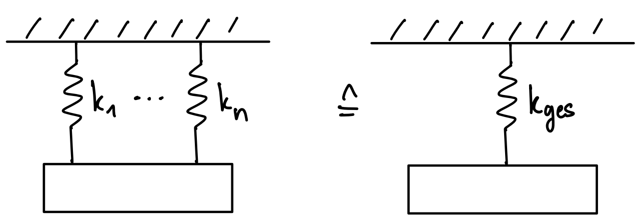
Reihenschaltung von Federn:



wobei $\frac{1}{k_{ges}} = \sum_i \frac{1}{k_i}$

wenn nur 2 Federn: $k_{ges} = \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2}$

Parallelschaltung von Federn:



wobei $k_{ges} = \sum_i k_i = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$

↪ Analog zu Kapazitäten :)

Newtonsche Gesetze

1. Newtonsches Gesetz: Trägheitsprinzip:

"Ein Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmig geradlinigen Bewegung, sofern jener nicht durch einwirkende Kräfte zur Änderung seines Zustands gezwungen wird."

D.h. ohne Einfluss von äusseren Kräften befindet sich ein Körper in Ruhe oder es bewegt sich mit einer konstanten Geschwindigkeit.

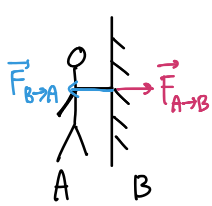
2. Newtonsches Gesetz: Aktionsprinzip:

$$\boxed{\vec{F} = \frac{dp(t)}{dt} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \frac{d^2\vec{x}(t)}{dt^2}}$$

"Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt."

3. Newtonsches Gesetz: Reaktionsprinzip

"Kräfte treten immer paarweise auf. Übt ein Körper A auf einen anderen Körper B eine Kraft aus (actio), so wirkt eine gleich grosse, aber entgegen gerichtete Kraft von Körper B auf Körper A (reactio)."



$$\boxed{\vec{F}_{A\to B} = -\vec{F}_{B\to A}}$$

Bewegungs-Differenzialgleichungen aufstellen

Newton'scher Bewegungssatz: ⚠ Sehr wichtig bei Bewegungs-DGL aufstellen!

$$\boxed{m\ddot{x}(t) = \sum_i F_i}$$

Tech Mech :)

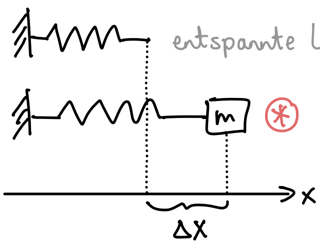
$x(t)$: Koordinate

$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}x(t)$: Geschwindigkeit

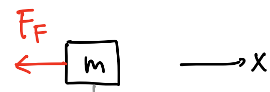
$\ddot{x}(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t)$: Beschleunigung

Kräfte (-komponenten) in Richtung der Koordinate

Bsp:



Freischnitt bei ⊛:

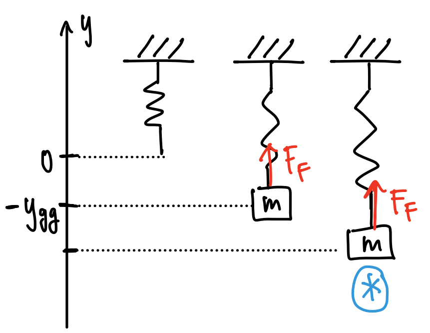


$$\Rightarrow m\ddot{x} = -F_F = -k \cdot \Delta x$$

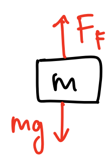
zeigt in andere Richtung wie Koordinate!

⚠ Sehr wichtig in Ph1, wo ~~der~~ das Gleichgewicht ist und wo die Koordinate gesetzt wird!

Fall 1: $y=0$ bei unbelastete Feder

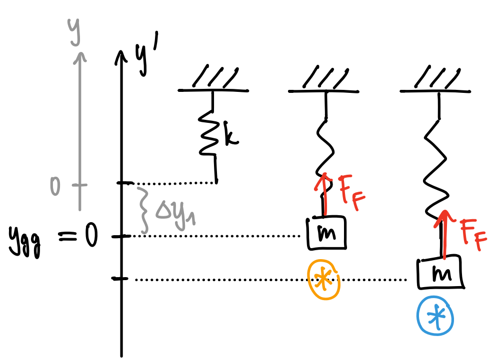


⊛ Freischnitt:



$$\Rightarrow \boxed{m\ddot{y} = F_F - mg = -ky - mg}$$

Fall 2: $y' = 0$ bei Gleichgewicht von der belasteten Feder:

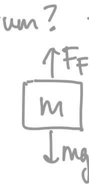


$y' = y - y_{gg}$

In diesem Fall wird die Gewichtskraft schon in der Gleichgewichtslage berücksichtigt!

⊛ $\Rightarrow \boxed{m\ddot{y}' = -ky'}$

Warum? → Wir machen den Freischnitt:



$$\Rightarrow m\ddot{y}' = F_F - mg$$
$$= -ky - mg$$
$$= -k \cdot (y' + y_{gg}) - mg$$

Aber in ⊛ haben wir Gleichgewicht:

d.h. $m\ddot{y} = -k y_{gg} - mg \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{y}' = -ky' \underbrace{-k y_{gg} - mg}_{=0} = -ky'$

⇒ Das ist eigentlich nichts anderes als eine Koordinatentransformation! :)

Drallsatz: Bei ebenen (d.h. 2D) Rotatio

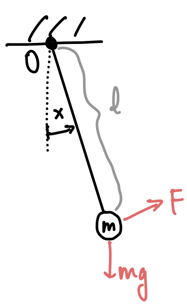
Drallsatz bezüglich O (Inertialpunkt (≙ Punkt in Ruhe)): $\dot{L}_0 = I_0\dot{\omega} = I_0\ddot{\varphi} = M_0^{tot}$ (Drall: $\boxed{L_0 = I_0\omega}$)

Drallsatz bezüglich C (Massenmittelpunkt): $\boxed{\dot{L}_c = I_c\dot{\omega} = I_c\ddot{\varphi} = M_c^{tot}}$ (Drall: $\boxed{L_c = I_c\omega}$)

wobei I_0 bzw. I_c der Massenträgheitsmoment ist.

⚠ Der Drall und das Moment müssen in dieselbe Richtung positiv gerechnet werden.

Bsp: Pendel:



$\dot{L}_0 = I_0\ddot{x} = M_0 = l \cdot F - l \cdot mg \sin(x)$

(M_0: Moment bezüglich O)

⇒ Ich nehme nicht an, dass ihr an der PhM-Prüfung den Drallsatz verwenden müsst, aber schaut bei Interesse/Unsicherheit meine TechMech-Notizen zum Drallsatz an:

https://n.ethz.ch/~ideswindt/TechMechHS21/Uebungen_material/TechMech_Uebung12_mitLoesungen.pdf

Kochrezept DGL in Physik 1

Allgemeine Form: $c_1\ddot{y} + c_3 y = c_2\dot{y} - c_5 + c_4$ linear, konstante Koeffizienten c_i

① Sortieren & gruppieren : $\underbrace{c_1\ddot{y} - c_2\dot{y} + c_3 y}_{\text{Alle Terme mit } y} = \underbrace{c_4 - c_5}_{\text{Inhomogenität}}$ $/ \div c_1$ (höchste Ableitung Koeffizientenfrei machen)

$$\Leftrightarrow \ddot{y} - \underbrace{\frac{c_2}{c_1}}_{:=\alpha}\dot{y} + \underbrace{\frac{c_3}{c_1}}_{:=\beta} y = \underbrace{\frac{c_4 - c_5}{c_1}}_{:=\gamma}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{y} + \alpha\dot{y} + \beta y = \gamma$$

② homogene Lösung finden (Inhomogenität auf 0 setzen!)

$$\ddot{y}_h + \alpha\dot{y}_h + \beta y_h = 0$$

i) Euler-Ansatz: $y_h(t) = e^{\lambda t}$ einsetzen:

$$(e^{\lambda t})'' + \alpha(e^{\lambda t})' + \beta e^{\lambda t} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 e^{\lambda t} + \alpha\lambda e^{\lambda t} + \beta e^{\lambda t} = 0 \quad (\forall t\,!)$$

$$\Rightarrow \mathrm{Chp}(\lambda) = \lambda^2 + \alpha\lambda + \beta = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2} \quad \Rightarrow y_h(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$

ii) falls die DGL so aussieht: $\ddot{y} + \beta y = 0$

Weitere Ansätze:

$y_h = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$

$y_h = A\sin(\omega_0 t + \delta)$

$y_h = A\cos(\omega_0 t + \delta')$ $\delta' = \delta - \frac{\pi}{2}$

mit $A, B \in \mathbb{R}$, $\omega_0 = \sqrt{\beta}$

③ Partikuläre Lösung finden

i) Konstante Inhomogenität : $\ddot{y} + \alpha\dot{y} + \beta y = c$

Ansatz: $y_p(t) = C_1 \in \mathbb{R}$ einsetzen: $\beta C_1 = c \Rightarrow C_1 = \frac{c}{\beta}$

ODER: Koordinatenwechsel: Koordinate so setzen, dass Inhomogenität verschwindet. (siehe BP Winter 2019 Aufgabe 1 oder Serie 1 A1), Serie 2 A2).)

ii) Äussere periodische Kraft : $\ddot{y} + \alpha\dot{y} + \beta y = y_0\cos(\Omega t)$

Ansatz: $y_p(t) = y_0 e^{i\Omega t}$, $y_0 \in \mathbb{C}$ $\rightarrow$ einsetzen, y_0 bestimmen.

Gesuchte Lösung ist $Re\{y_0 e^{i\Omega t}\}$.

(ii) andere Inhomogenität $\rightarrow$ Verwende Ansatztabelle.

(4) Allgemeine Lösung ist $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

(5) Anfangsbedingungen (AB)

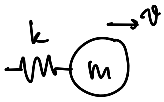
$$\left.\begin{aligned} y(0) &= y_0 \\ \dot{y}(0) &= v_0 \\ \ddot{y}(0) &= a_0 \\ &\vdots \end{aligned}\right\}$$

Man benötigt so viele AB wie die Ordnung der DGL

$\Rightarrow$ einsetzen, Unbekannte finden $\Rightarrow$ spezifische Lösung :)

Energielehre Basics

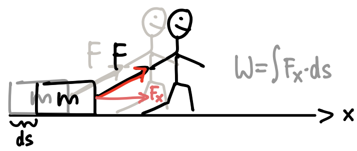
Energie: $\boxed{E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2}$



$\boxed{E_{pot}\ (\text{Feder}) = \frac{1}{2} k x^2}$ (x.. Auslenkung) $E_{pot}\ (\text{Höhe}) = mgh$

$\boxed{E_{tot} = E_{kin} + E_{pot}}$

Arbeit: $\boxed{W = \int \vec{F} \cdot d\vec{x}}$



$W = \int F_x \cdot ds$ "Arbeit = Kraft mal Weg"

$\Rightarrow$ Arbeit bezeichnet die Energiedifferenz

D.h. $W = \Delta E = E_E - E_A \overset{⊛}{=} E = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$ ⊛ falls E_A (Anfangsenergie) $= 0$.

Für uns ist eigentlich immer Arbeit $\hat{=}$ Energie. (falls nichts geschrieben dazu).

Potential ($\hat{=}$ potentielle Energie) $U(x) = -\int \vec{F} d\vec{x}$ $\boxed{\vec{F} = -\frac{dU(\vec{x})}{d\vec{x}}}$

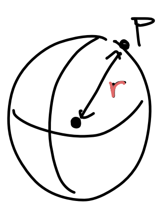
Leistung: $\boxed{P = \frac{dW}{dt}}$ "Leistung ist Arbeit pro Zeit"

Impuls: $\boxed{p = m v}$ "Masse mal Geschwindigkeit"

Intensität: $\boxed{I = \frac{P}{A}}$ "Leistung pro Fläche" $\Rightarrow$ ausgestrahlte Energie $\boxed{E = \int A \cdot I(t)\, dt}$

Zeit, über die die Energie gemessen wird

z.B. Lichtquelle mit $P = 100\,W$: Intensität am Punkt P ist:

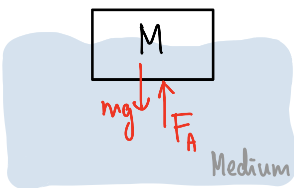


$$I = \frac{P}{A} = \frac{P}{4\pi r^2}$$

Kugeloberfläche: $A = 4\pi r^2$

Auftrieb

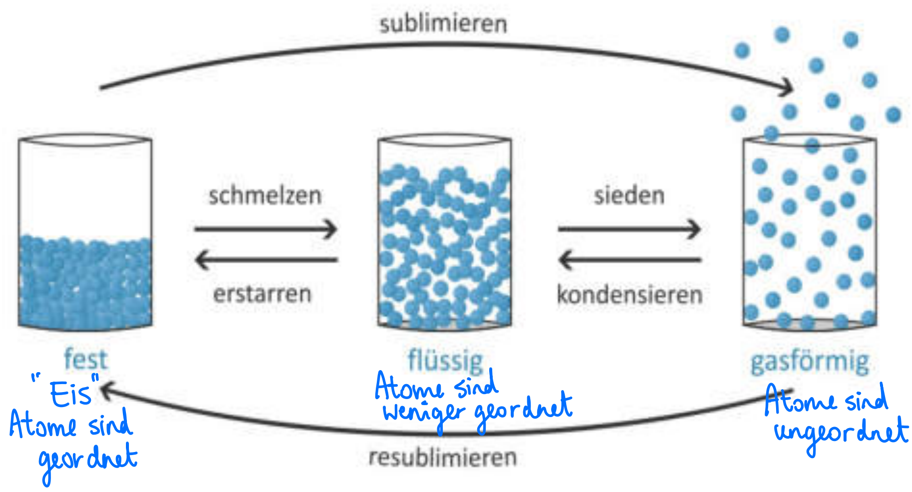
Befindet sich ein Körper in einer Flüssigkeit oder in einem Gas, so verringert sich scheinbar seine Gewichtskraft. Dies ist erklärbar mit der der Gewichtskraft entgegen gerichteten Auftriebskraft!



$$\boxed{F_A = \overbrace{\rho_{Medim} \cdot V}^{=m} \cdot g}$$

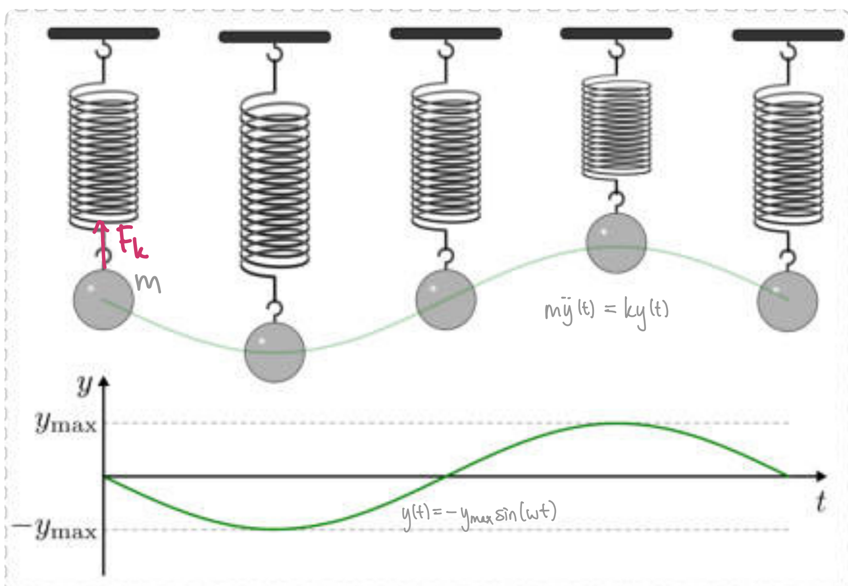
"Auftriebskraft entspricht der Gewichtskraft (m·g) des vom Körper verdrängten Volumens"

Aggregatzustände

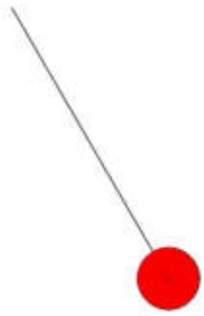


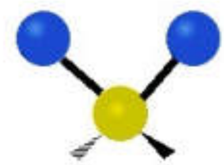
Teil 3

Schwingungen



Eine Schwingung wird erzeugt durch eine Grösse (z.B. eine Masse), die sich als Funktion der Zeit periodisch ändert.





↳ Ein Schwingungsfähiges System hat immer eine

↳ Wenn wir dem System zu viel Energie zuführen kann es sein dass wir es

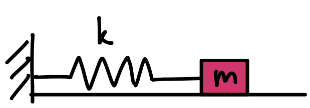
In Physik1 beschäftigen wir uns hauptsächlich mit einer Sorte von Schwingungen:

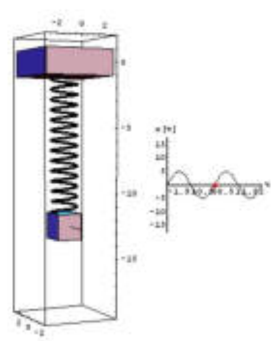
Harmonische Schwingungen

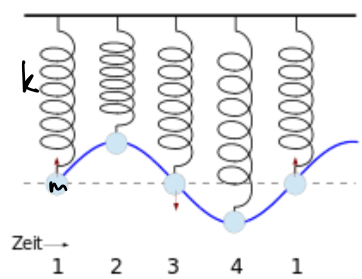
Wichtigster Fall von Schwingungen!

↳ Sind Schwingungen, deren Verlauf durch eine Sinus oder Cosinusfunktion beschrieben werden kann.

Eine harmonische Schwingung modellieren wir durch den harmonischen Oszillator:





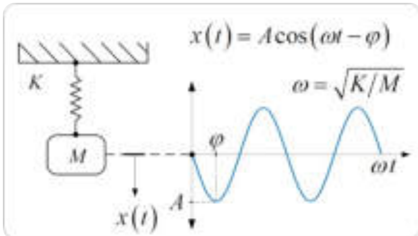


In Physik1 haben wir uns mit 3 "Versionen" vom harmonischen Oszillator beschäftigt:

1. Der freie harmonische Oszillator
2. Der gedämpfte harmonische Oszillator
3. Der erzwungene harmonische Oszillator (von äusseren Kräften angetrieben)

Wir haben jeweils eine Bewegungsdifferenzialgleichung aufgestellt, gelernt wie man diese löst und anschliessend die Lösung analysiert (Wie bewegt es sich, Geschwindigkeit, Beschleunigung, Energie usw.) Wir schauen uns alle 3 Fälle noch einmal genauer an:

① Der freie harmonische Oszillator



Dieser hat die Bewegungsgleichung

mit den entsprechenden Anfangsbedingungen
$x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$

Die allgemeine Lösung dieser Differenzialgleichung ist:

äquivalent
oder

Wird häufiger verwendet

mit $A, \delta \in \mathbb{R}$ und $\delta' = \delta - \frac{\pi}{2}$

↳ ist die Amplitude der Schwingung. Sie ist der Betrag der maximalen Auslenkung von der Ruhelage. $[A] = m$

↳ ist die Kreisfrequenz. Sie legt fest, wie "schnell" das System oszilliert. $[\omega_0] = Hz$

↳ δ ist die der Schwingung. Sie legt die "Verschiebung" des Sin bzw. Cos fest.

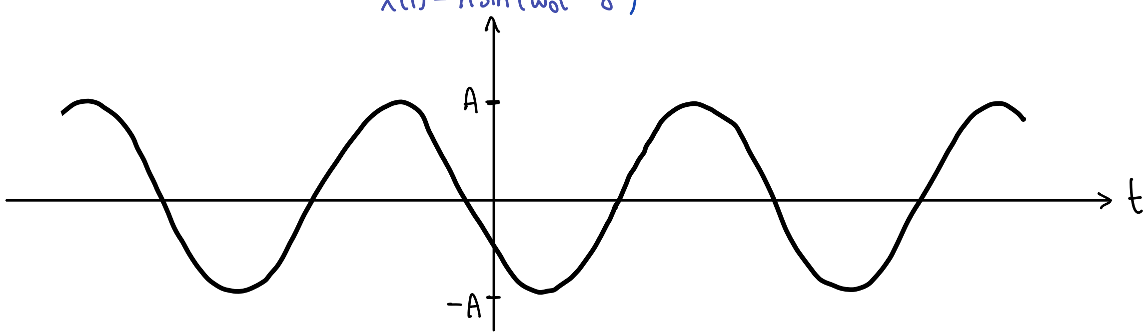
↳ ist die Periode der Schwingung. Sie ist die für eine vollständige Schwingung benötigte Zeit. $[T] = s$ ⚠ $\cos(x)$ und $\sin(x)$ haben die Periode 2π

↳ ist die Frequenz der Schwingung (Manchmal auch ν). Sie beschreibt die Anzahl der Schwingungsperioden pro Zeitintervall. $[f] = s^{-1} = Hz$.

⚠ A, δ werden bestimmt durch die Anfangsbedingungen. → spezifische Lösung.

Wenn wir eine Bewegungsfunktion $x(t)$ einer harmonischen Schwingung nach t plotten haben wir:

$x(t) = A\sin(\omega_0 t - \delta)$



Tipp: Periode T einer harmonischen Schwingung bestimmen:

Sei $x(t) = A\sin(\omega_0 t)$ (Äquivalent für cos.)

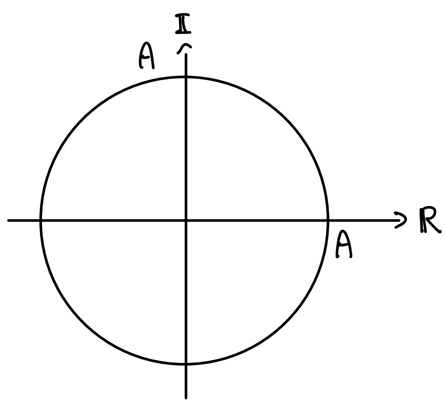
$$\Rightarrow x(t) = A\sin(\omega_0 t) \stackrel{!}{=} A\sin(\omega_0 t + 2\pi) = A\sin\left(\omega_0\left(t + \frac{2\pi}{\omega_0}\right)\right)$$

sin ist 2π-periodisch — Das was vor der Laufvariablen ist ausklammern — Periode von $A\sin(\omega_0 t)$

Das ganze kann auch komplex dargestellt werden!

Dann haben wir als allgemeine Lösung:

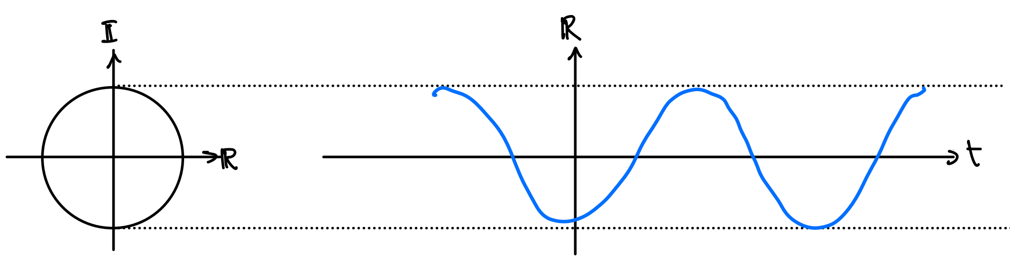
$z(t) =$ mit



Manchmal verwenden wir diese Schreibweise, weil sie praktischer ist.

⚠ Die endgültige (physikalische) Lösung ist dann der Realteil davon:

(Aus KomA:)



Bem: Analog zu vorher können wir A, δ durch die Anfangsbedingungen bestimmen.

Wir erinnern uns:

Geschwindigkeit:

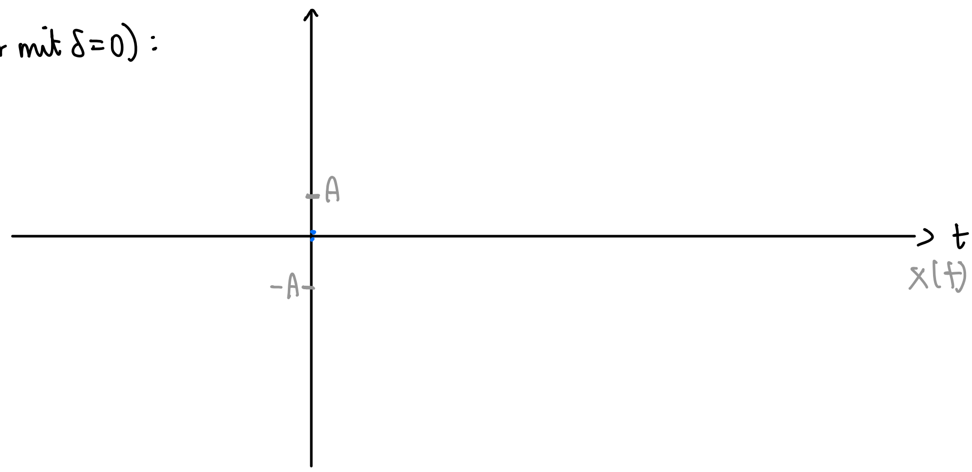
Beschleunigung:

Und wenden das am Beispiel $x(t) = A\sin(\omega_0 t + \delta)$ an:

$v(t) =$

$a(t) =$

Plot (hier mit $\delta = 0$):



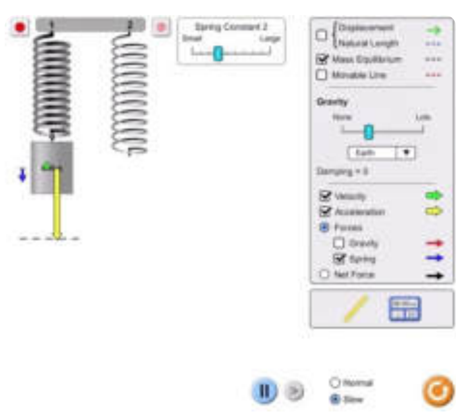
Wir bemerken: • Die Geschwindigkeit ist ...., wenn die Auslenkung .... und die Geschwindigkeit ...., wenn die Auslenkung ....

• Die Beschleunigung ist ...., wenn die Auslenkung .... und ...., wenn die Auslenkung .... Sie ist .... Auslenkung ausgerichtet (d.h. $a(t) > 0$ wenn $x(t) < 0$ und umgekehrt.)

Zusammengefasst:

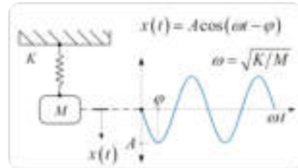
Bei maximaler Auslenkung: $\{$

Beim Nulldurchgang: $\{$



spielt auch selbst mit diesen Simulationen :)

Energiebilanz des freien harmonischen Oszillators:



Die potentielle Energie des harmonischen Oszillators mit Auslenkung x ist:

Die kinetische Energie des harmonischen Oszillators mit Auslenkung x ist:

Die Gesamtenergie des harmonischen Oszillators mit Auslenkung x ist:

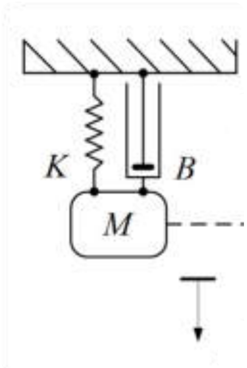
⚠ Bei freien Schwingungen gilt immer (Wir vernachlässigen alle anderen Formen von Energie, z.B. Reibungsverluste)

⚠ Bei freien Schwingungen ist E_{tot} ! (Wir vernachlässigen Energieverluste).

↳ Tipp: Das ausnutzen in den Aufgaben!

go to ⇒ Quiz 1

② Der gedämpfte harmonische Oszillator



Dieser hat die Bewegungsgleichung:

↳ ω_0 ist nach wie vor die Kreisfrequenz

↳ γ ist die

proud Euler

Um diese DGL zu lösen, verwenden wir den Euler-Ansatz:

Wir setzen diesen Ansatz in unsere DGL ein und erhalten:

Die allgemeine Lösung der DGL ist folglich:

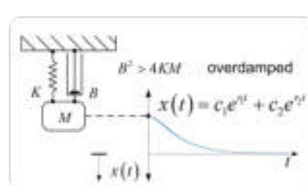
Wir merken, dass $\lambda_{1,2}$ von γ und ω_0 abhängig ist. Je nach dem, was $\lambda_{1,2}$ ist, erhalten wir verschiedene physikalische Systeme! Deswegen machen wir eine Fallunterscheidung:

Fall 1: $\Rightarrow$ Starke (überkritische) Dämpfung / Kriechfall:

Wir haben:

Folglich haben wir die Bewegungsfunktion:

Wir bemerken:

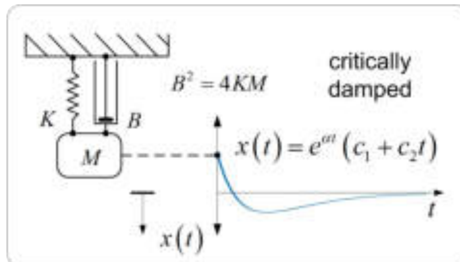


Fall 2: $\boxed{}$: Kritische Dämpfung / Asymptotischer Grenzfall:

Wir haben:

Folglich haben wir die Bewegungsfunktion:

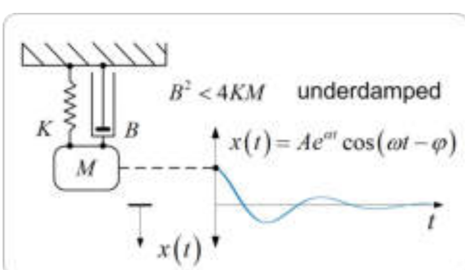
Wir bemerken:

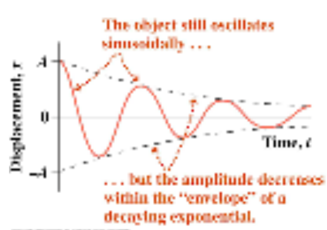


Fall 3: $\boxed{}$: Schwache Dämpfung:

Wir haben:

Folglich haben wir die Bewegungsfunktion:





Energiebilanz der gedämpften Schwingung:

Die Verlustleistung einer allgemeinen gedämpften Schwingung ist:

$$\boxed{P_D = \frac{d}{dt} E_{tot} = -\gamma m \dot{x}^2 = F_D \cdot \dot{x}} \quad \text{mit} \quad \boxed{F_D = -\gamma m \dot{x}} =: \text{Dämpfungskraft}$$

Erinnerung: Leistung = zeitliche Änderung der Energie

Weiter haben wir für schwache Dämpfungen ($\gamma < 2\omega_0$), mit der Annahme $\gamma \ll \frac{1}{T}$

Die Energie nimmt exponentiell ab, mit der

Zerfallskonstante

Der Gütefaktor (Q-Faktor) ist definiert als $\boxed{Q := 2\pi \frac{E_{tot}(t)}{E_{tot}(t) - E_{tot}(t+T)}}$

Sie beschreibt die relative Abnahme der Energie während einer Periode.

Für eine schwache Dämpfung ($\gamma < 2\omega_0$) mit $\underbrace{\gamma \ll \frac{1}{T}}_{\text{zusätzliche Annahme}}$ haben wir

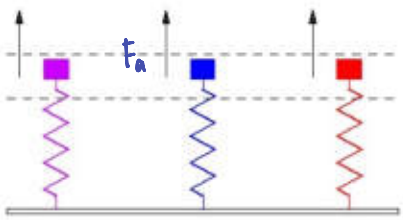
$Q \mathrel{\hat{=}}$ "Wie lange bleibt die Energie im Oszillator erhalten"

go to ⟹ Quiz 2

go to ⟹ Quiz 3

③ Der erzwungene harmonische Oszillator

Nun wird unser Feder-Masse-System von einer periodisch von aussen einwirkende Kraft $F_a(t) = F_0 \cos(\Omega t)$ angetrieben



Dieses System hat die Bewegungsgleichung:

Wir lösen diese DGL:

1) Ansatz: $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ mit $x_h(t)$: homogene Lösung, $x_p(t)$: partikuläre Lösung

2) Homogene Lösung: $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \Longrightarrow x_h(t) = Ae^{-\frac{1}{2}\gamma t}\cos(\omega_0 t + \delta)$

Annahme schwache Dämpfung

3) partikuläre Lösung: $x_p(t)$ bestimmen: Ansatz:

$x_p(t)$ hat die Form $x_p(t) = B\cos(\Omega t) + C\sin(\Omega t)$ ← Schwingt mit der Kreisfrequenz Ω der antreibenden Kraft!

in DGL einsetzen, B und C bestimmen.

4) Allgemeine Lösung: $\boxed{x(t) = x_h(t) + x_p(t) = Ae^{-\frac{1}{2}\gamma t}\cos(\omega_0 t + \delta) + B\cos(\Omega t) + C\sin(\Omega t)}$

5) Anfangsbedingungen einsetzen um den Koeffizienten A zu bestimmen → spezifische Lösung.

⚠ Bemerkung: $x_h(t)$ ist eine abklingende Schwingung! $\lim\limits_{t\to\infty} x_h(t) = 0$

Folglich haben wir $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = \lim\limits_{t\to\infty}(x_h(t) + x_p(t)) = \lim\limits_{t\to\infty} x_p(t)$

$\Rightarrow \boxed{x(t) \mathrel{\hat{=}} x_p(t)}$ nach einer genug langen Zeit. In Worten:

Der Oszillator schwingt nach einer gewissen Einschwingzeit mit der Erregerfrequenz!

Deswegen heissen $\boxed{\begin{cases} x_p(t) & \text{die stationäre Lösung} \\ x_h(t) & \text{der Einschwingvorgang.} \end{cases}}$

⚠ Was macht man wenn man mehrere äussere Kräfte hat?

$\longrightarrow \ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = F_{a1} + F_{a2} + \dots$

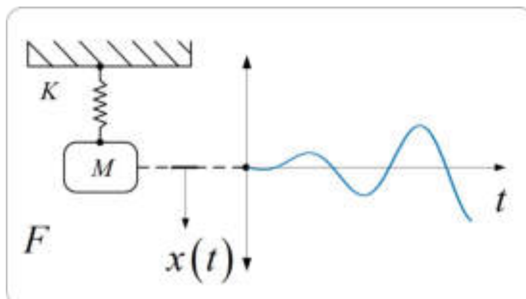
Ganz einfach: Wir verwenden Superposition:

Wir lösen dieses System von DGL:
$$\begin{cases} \ddot{x}_h + \gamma\dot{x}_h + \omega_0^2 x_h = 0 & \Rightarrow x_h(t) \\ \ddot{x}_{p_1} + \gamma\dot{x}_{p_1} + \omega_0^2 x_{p_1} = F_{a_1} & \Rightarrow x_{p_1}(t) \\ \ddot{x}_{p_2} + \gamma\dot{x}_{p_2} + \omega_0^2 x_{p_2} = F_{a_2} & \Rightarrow x_{p_2}(t) \\ \vdots \end{cases}$$

Die allgemeine Lösung ist dann: $x(t) = x_h(t) + x_{p_1}(t) + x_{p_2}(t) + \dots$

Resonanz ist ein Phänomen, welches bei erzwungenen Schwingungen auftreten kann. Dabei schwingt das System so mit der Anregungskraft zusammen, dass dessen Amplitude stark verstärkt wird. Das kann teilweise unerwünschte Konsequenzen haben! Ob Resonanz auftritt oder nicht, kann mit der Anregungsfrequenz gesteuert werden.


Tacoma Bridge Collapse



Schauen wir uns Resonanz genauer an mit einem Beispiel:

Wir haben ein angeregtes System: $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \underbrace{F_0 e^{i\Omega t}}_{F(t)\text{ äussere Kraft}}$

Die stationäre Lösung dieser DGL ist: $x_p(t) = x_0 e^{i\Omega t}$ mit $x_0 = \underbrace{\dfrac{F_0/m}{(\omega_0^2 - \Omega^2) + i\gamma\Omega}}$

Check it yourself: Ansatz $x_p(t) = x_0 e^{i\Omega t}$ in obige DGL einsetzen und sich überzeugen :)

Wir definieren die 2 Grössen: $\boxed{\eta := \dfrac{\Omega}{\omega_0}}$ $\boxed{\xi := \dfrac{\gamma}{2\omega_0}}$

Dann ist die Vergrösserungsfunktion: $\boxed{V(\eta, \xi) = \dfrac{|x_0|}{a_0} = \dfrac{1}{\omega_0^2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4\xi^2\eta^2}}}$ $a_0 = \dfrac{F_0}{m}$ Amplitude der äusseren Kraft

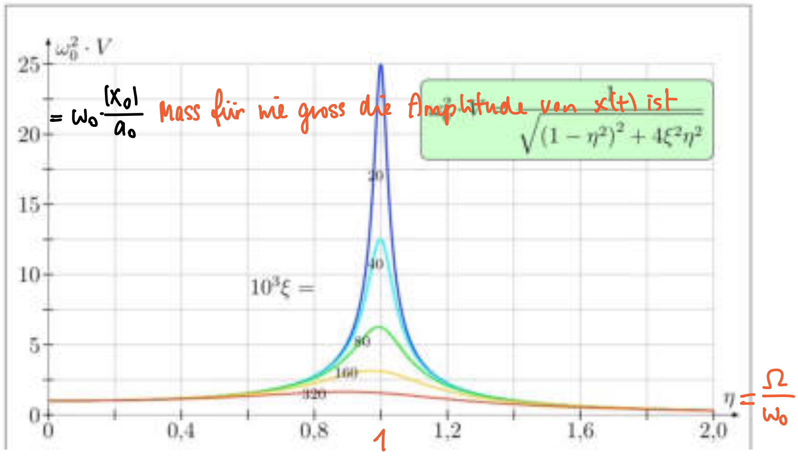
Die Resonanzfrequenz ist die Frequenz, bei der $\boxed{\dfrac{\partial V}{\partial \eta} = 0}$ gilt.

Wenn wir das lösen, erhalten wir: $\boxed{\eta_{res} = \sqrt{1 - 2\xi^2}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\Omega_{res} = \omega_0\sqrt{1 - 2\xi^2}} \cong \omega_0$

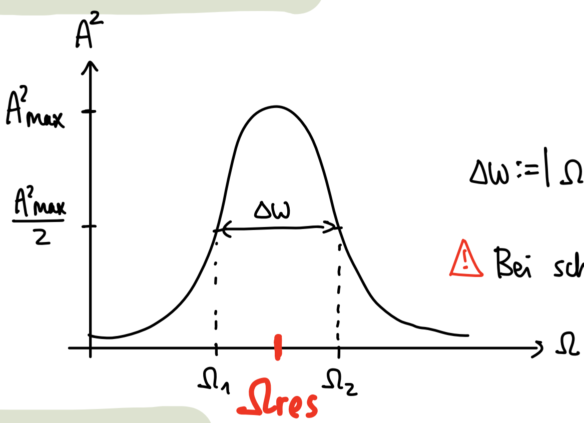
↳ hier tritt Amplitudenresonanz auf!

Was bedeutet das?

$\Rightarrow$ Wenn die äussere Kraft die Frequenz .... hat, tritt Resonanz im System auf.



Resonanzbreite $\Delta\omega$ ist die Halbwertsbreite des Amplitudenquadrats:



A_{max}: Resonanzamplitude

$\Delta\omega := |\Omega_1 - \Omega_2|$, wobei $V(\gamma, \Omega_i) = \frac{1}{\sqrt{2}} V(\gamma, \Omega_{res})$

⚠ Bei schwachen Dämpfungen ist $\boxed{}$

Energiebilanz der erzwungenen Schwingung

Die während einer Periode T_Ω (Periode der äusseren Kraft!) zugeführte mittlere Leistung ist:

$$\boxed{\langle P \rangle_{T_\Omega} = \frac{m a_0^2}{2\gamma} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{\gamma\Omega}\right)^2} = \frac{m a_0^2}{4\omega_0} \cdot \frac{1}{\xi} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{1-\eta^2}{2\xi\eta}\right)^2}}$$

$\xi = \frac{\gamma}{2\omega_0}$ $\quad \eta = \frac{\Omega}{\omega_0}$

$\Rightarrow$ Wir haben eine Leistungsresonanz bei $\boxed{\Omega_{res,p} = \omega_0}$

Schwingungsüberlagerung

Bisher haben wir immer nur 1 Schwingung betrachtet. Doch was passiert, wenn wir ein System mit mehreren Schwingungen haben?

=> Die Gesamtschwingung ist nichts anderes als die $\boxed{}$ aller Teilschwingungen!

z.B.: Wir haben 2 Schwingungen: $x_1(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \delta_1)$

$x_2(t) = A_2 \sin(\omega_2 t + \delta_2)$

Dann ist die Gesamtschwingung: $x_{tot}(t) = x_1(t) + x_2(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \delta_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \delta_2)$

Wir betrachten im folgenden ein Spezialfall der Schwingungsüberlagerung:

Überlagerung von Schwingungen gleicher Frequenz

Sei $x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \delta_1)$

$x_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \delta_2)$

ω gleich!

Dann ist die Überlagerung: $x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A_1 \cos(\omega t + \delta_1) + A_2 \cos(\omega t + \delta_2)$

Wir wollen diese Summe ein bisschen besser verstehen, deswegen formen wir sie um:

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t + \delta)}$$

Wobei $\boxed{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\delta_1 - \delta_2)}}$

und $\boxed{\delta = \arg\{(A_1\cos\delta_1 + A_2\cos\delta_2 + i(A_1\sin\delta_1 + A_2\sin\delta_2))\}}$

⚠ $A \neq A_1 + A_2$ im allgemeinen! Die Phase hat einen grossen Einfluss auf die Superposition.

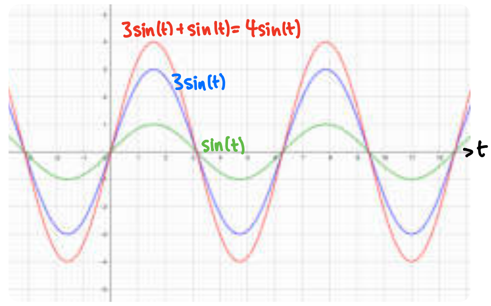
Diese Formeln sehen kompliziert aus, aber keine Angst. Wir schauen uns im folgenden 3 Spezialfälle an. Erfahrungsgemäss kommt kein anderer Fall in den Aufgaben/Prüfungen :)

$x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \delta_1)$

$x_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \delta_2)$

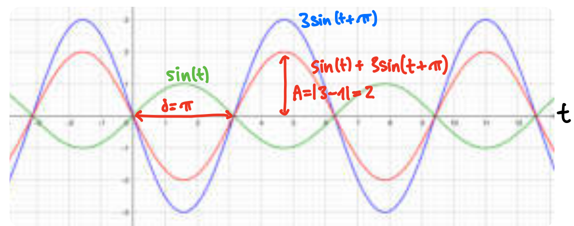
Fall 1: $x_1(t)$ und $x_2(t)$ haben die gleiche Phase $\delta_1 = \delta_2$:

Dann haben wir $A =$ .... und $\delta =$ ....



Fall 2: $x_1(t)$ und $x_2(t)$ haben eine Phasendifferenz von π, $\delta_1 - \delta_2 = \pi$

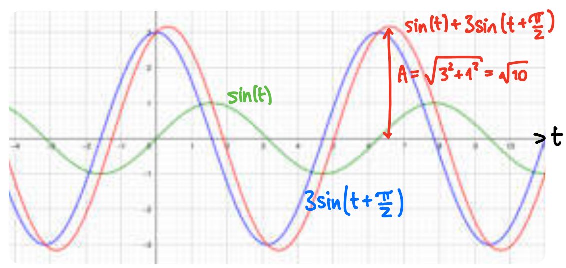
Dann haben wir $A =$ .... und $\delta =$ ....



Fall 3: $x_1(t)$ und $x_2(t)$ haben eine Phasendifferenz von $\frac{\pi}{2}$, $\delta_1 - \delta_2 = \frac{\pi}{2}$

Dann haben wir: $A =$ .... ,

$\delta = \arg\{(A_1\cos\delta_1 + A_2\sin\delta_1 + i(A_1\sin\delta_1 - A_2\cos\delta_1)\}$



Schwebung

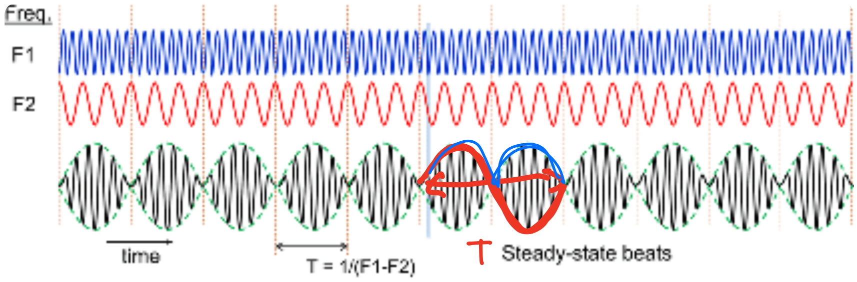
Schwebung ist ein Phänomen, welches bei einer Überlagerung von 2 Schwingungen unterschiedlicher, aber ähnlicher Frequenz auftritt. Dabei weist die resultierende Schwingung eine periodisch zu- und abnehmende Amplitude auf:

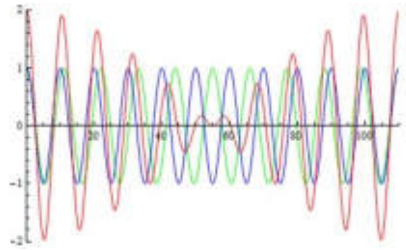
Bsp: Schwebung hören:

Mathematisch wird das so beschrieben: Seien $x_1(t) = A\cos(\omega_1 t)$, $x_2(t) = A\cos(\omega_2 t)$

Dann ist die resultierende Schwingung $x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A\cos(\omega_1 t) + A\cos(\omega_2 t) =$

$=$ Trigrules usw. $=$





Einige Definitionen:

Schwebungsfrequenz:

Schwebungsperiode:

Bem: Warum ohne $\div 2$? $\rightarrow$ Diese Grössen beziehen sich auf die Intensität der Schwebung, da das Gehör die Intensität (-sänderungen) wahrnimmt. Die Lautstärkeänderungen, die wir bei einer Schwebung hören, entsprechen den Intensitätsänderungen der Einhüllenden!

Folglich, da $I \propto \tilde{A}^2(t) = 4A^2\cos^2\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right) \overset{\circledast}{=} \dots = 2A^2\left(1+\cos\left(\underbrace{(\omega_1-\omega_2)}_{=\omega_S}t\right)\right)$ (Schwebungsfrequenz)

$\circledast$ Trigrule $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1+\cos(2x))$

go to Quiz 4

go to Prüfungsaufgabe 1

Kochrezepte Schwingungen:

Harmonische Schwingungen:

① Freischnitt, Kräfte beschreiben (falls im GGW, Gewichtskraft vernachlässigen)

② Bewegungs-DGL aufstellen → Newton!
→ Vorfaktor von x in der Wurzel $\hat{=}$ "Kreisfrequenz"!
(Bsp: $\ddot{x} + \alpha x = c$)
$\sqrt{\alpha} = \omega_0$

③ Gleichung lösen → Ansatz! → allgemeine Lösung bestimmen.

④ Anfangsbedingungen verwenden um die spezifische Lösung zu bestimmen

⑤ Andere Teilaufgaben lösen :)

Wichtig: Wenn ihr eine DGL der Form $\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$ seht, dürft ihr sofort den Ansatz

der Koeffizient von x mit ω_0^2 ersetzen

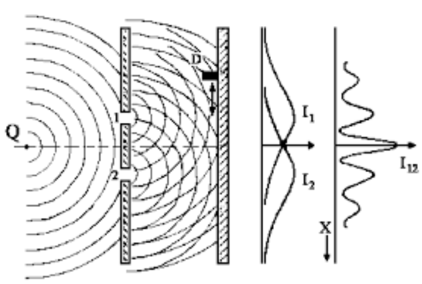
$\ddot{x}$ Koeffizientenfrei machen

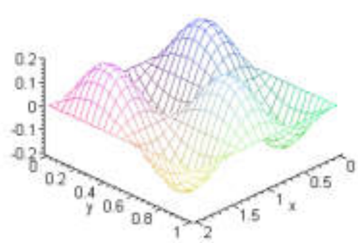
$\boxed{x(t) = A_0 \sin(\omega_0 t + \delta)}$, $\boxed{x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \delta)}$ oder $\boxed{x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)}$ verwenden.

Bem: Der Harmonische Oszillator ist sehr wichtig, da er leicht zu lösen ist und ganz viele (schwierige!) physikalische Systeme durch den harmonischen Oszillator approximiert werden können.

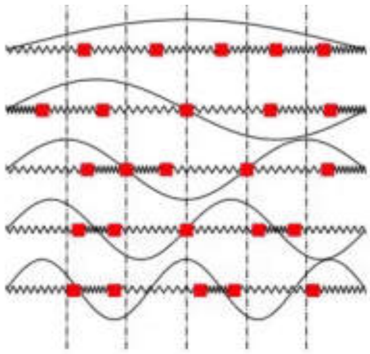
Teil 4

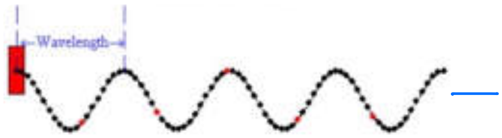
Wellen





Eine Welle ist eine sich räumlich ausbreitende (periodisch oder einmalig) Veränderung des Gleichgewichtszustand eines Systems bezüglich einer Orts- und zeitabhängigen physikalischen Grösse. Wir notieren sie als $\xi(x,t)$ (Wellenfunktion)





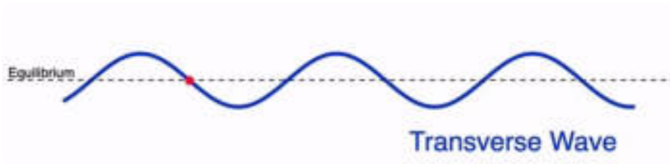
Eine Welle kann auch gesehen werden als eine Energieübertragung durch Schwingungen zahlreicher gekoppelter Oszillatoren ($\hat{=}$ Atome in Materie)

⚠ In Physik 1 beschäftigen wir uns hauptsächlich mit eindimensionalen Wellen, also Wellen, die sich in x-Richtung ausbreiten. Jedoch sind alle Konzepte, die wir in 1D lernen, leicht auf mehrere Dimensionen übertragbar, und kommen manchmal in Prüfungen vor (z.B. letztes Jahr) Also nicht erschrecken wenn plötzlich eine 2D-Kreiswelle kommt an der Prüfung!

Wellentypen

In Physik 1 beschäftigen wir uns mit 2 Typen von Wellen:

Transversale Wellen: Auslenkung senkrecht zur Ausbreitungsrichtung



Bsp: Seilwellen, Licht, ...

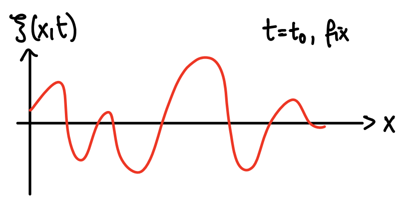
Longitudinale Wellen: Auslenkung in Richtung der Ausbreitung

Bsp: Schallwellen, Druckwellen, ...

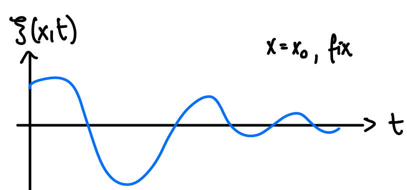
Die Wellenfunktion

↳ Ist eine Funktion von 2 Variablen, welche die örtliche (x) und die zeitliche (t) Ausbreitung einer Welle beschreibt.

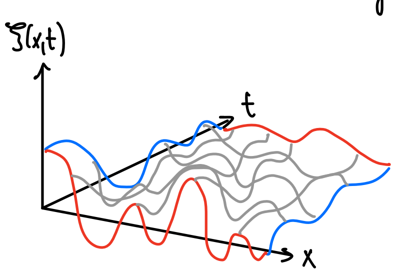
↳ Die Raumabhängigkeit (x) der Wellenfunktion $\xi(x,t)$ beschreibt die Form der Welle:



↳ Die Zeitabhängigkeit (t) der Wellenfunktion $\xi(x,t)$ beschreibt die Ausbreitung der Welle:



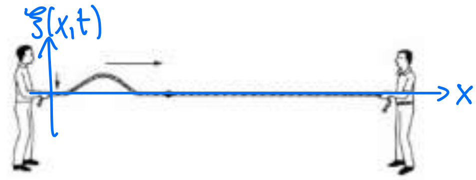
↳ Man kann das Ganze auch 3D-Plotten. Dann sieht es ungefähr so aus:



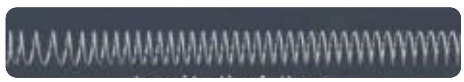
Jede Welle hat ihre eigene Wellenfunktion die sie beschreibt.

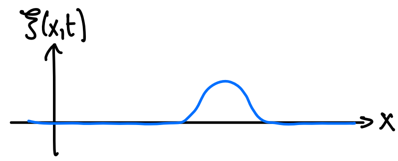
⚠ Je nach Wellentyp beschreibt die Wellenfunktion etwas anderes!

z.B.: → Bei Seilwellen (Transversale Wellen) beschreibt $\xi(x,t)$ die transversale Auslenkung des Seils

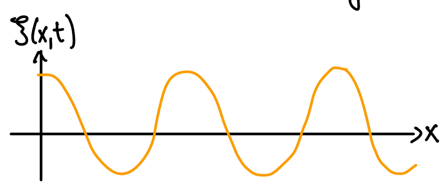


→ Bei Federwellen (longitudinale Wellen) beschreibt $\xi(x,t)$ die longitudinale Verformung der Feder





→ Bei Gas-/Druckwellen beschreibt $\xi(x,t)$ den Druck-/Dichte (-änderung) des Gases



Doch wie sehen diese Wellenfunktionen $\xi(x,t)$ aus, beziehungsweise welche Bedingungen müssen sie erfüllen?

Die Wellengleichung (in 1D)

Jede Funktion, die die Wellengleichung $\boxed{}$ erfüllt, ist eine gültige Wellenfunktion! Das sind alle Funktionen der Form $\boxed{}$

Dies wurde vom Mathematiker/Physiker d'Alembert hergeleitet, deswegen wird es auch "der Ansatz von d'Alembert" genannt.

d'Alembert

⚠ Diese Wellenfunktion $\xi(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)$ ist eine Überlagerung von Wellen, die sich in positive ($f(x - vt)$) und negative ($g(x+vt)$) x-Richtung ausbreiten!

go to → **Quiz 5**

Die Ausbreitung der Welle

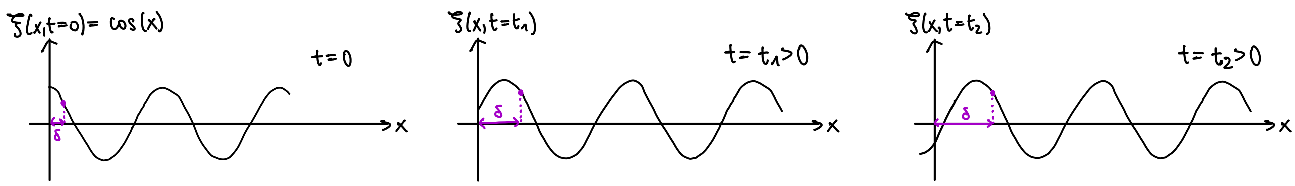
Wir haben eine Welle $\xi(x,t)$, die zum Zeitpunkt $t=0$ durch $f(x)=\xi(x,t=0)$ beschrieben wird.
Die Ausbreitung dieser Welle in die positive / negative Richtung beschreiben wir so:

Dabei ist v die Phasengeschwindigkeit der Welle. Sie gibt die Geschwindigkeit an, mit der sich eine vorgegebene Phase der Wellenfront "bewegt".

Schauen wir uns das Ganze am Beispiel $\xi(x,t)=\cos(x-vt)$ an:

$\rightarrow \xi(x,t=0)=\cos(x)=f(x)$

$\rightarrow \xi(x,t)=\cos(x-vt)$ $\Rightarrow$ rechtslaufende Welle 



Harmonische Wellen

Sind Wellen der Form:

oder)

↳ Wellenfunktion ist ein Sin oder Cos

↳ Warum sind diese wichtig? ⇒ Dank Fourierreihen können beliebige Wellenformen als Superposition von harmonischen Wellen beschrieben werden. Deswegen wollen wir harmonische Wellen gut verstehen :)

↳ ist die Amplitude der Welle (oft auch A, B, C, ...)

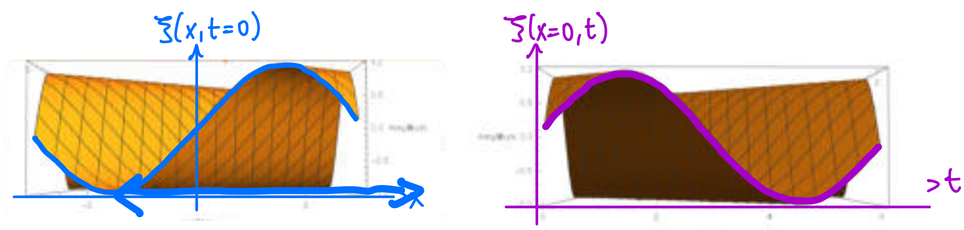
↳ ist die Wellenzahl (oder Wellenvektor in höheren Dimensionen) der Welle. Sie spielt die "Rolle" der Kreisfrequenz für x (und gibt in $\mathbb{R}^n$ die Richtung der Welle an).

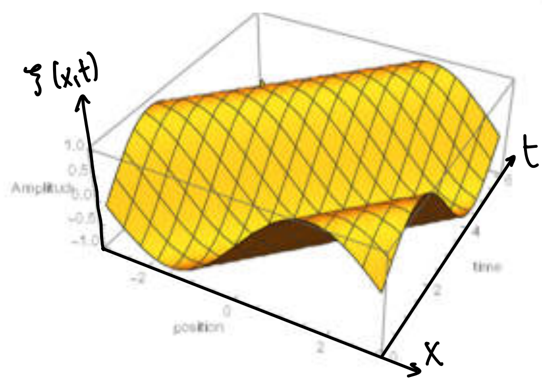
↳ ist die Phasengeschwindigkeit der Welle.

↳ ist die Kreisfrequenz der Welle

↳ ist die Wellenlänge → t fixieren zum graphisch bestimmen

↳ ist die Periode der Welle. → x fixieren zum graphisch bestimmen





Analog zu Schwingungen können auch (harmonische) Wellen komplex dargestellt werden:

$$\boxed{\xi(x,t) = \xi_0 e^{i(kx \pm \omega t)}}$$

Manchmal (im 3. und 4. Semester ITET sehr oft 😉) wählt man diese Schreibweise, weil sie praktischer ist. Das Schlussergebnis (in Physik) ist dann einfach der Realteil davon.

Wellen in Festkörper

Wellen breiten sich u.a. in Festkörper aus. Dabei hängt ihre Phasen- (≙ Ausbreitungs-) geschwindigkeit von Eigenschaften des Mediums ab, in welche sich die Welle ausbreitet.

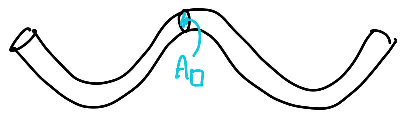
Transversale Wellen, z.B. Seilwellen:

wobei $S = \frac{F}{A_\square}$ Zugspannung

$\rho = \frac{dm}{dV}$ Dichte des Mediums

$F_S =$ Seilkraft / Spannkraft

$\mu =$ lineares Massenelement



Longitudinale Wellen, z.B. Schall:

wobei $E =$ Elastizitätsmodul

$\rho =$ Dichte des Mediums

Energie, Intensität & Leistung

→ Hier: Herleitungen absolut nicht wichtig. Schaut es euch an wenn es euch interessiert :)

Energie:

Wir haben eine harmonische Welle $\xi(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$ und betrachten die Energie eines "Oszillators" in der Welle mit der Masse $\Delta m = \rho \Delta V$

↳ $y(t) = A\sin(\omega t)$

$$E = E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2}\Delta m v^2 + \frac{1}{2}\Delta m \omega^2 y^2 = \frac{1}{2}\rho \cdot \Delta V \cdot A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t) + \frac{1}{2}\rho \cdot \Delta V \cdot A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t)$$

Das zeitliche Mittel davon ist:

$$\langle E \rangle = \langle E_{kin} \rangle + \langle E_{pot} \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T E_{kin}\, dt + \frac{1}{T}\int_0^T E_{pot}\, dt \overset{T = 2\pi}{=} \underset{\cdots}{\text{math}} = \frac{1}{2}\rho \Delta V A^2 \omega^2$$

Energiedichte:

Bei Wellen reden Physiker gerne von Energiedichten: $\frac{dE}{dV}$. Das ist die Energie pro Raumvolumen eines Stoffes.

Die Gesamtenergie der Welle über dem Volumen wäre dann: $E = \iiint_V \frac{dE}{dV}\, dV$

Nehmen wir an, die Wellenfunktion wäre gegeben als $\xi(x,t) = f(u)$ mit $\underbrace{u := x - vt}$

d'Alembert; beschreibt die Ausbreitung der Welle

longitudinale Wellen in einem Stab: (mit ρ = Dichte des Stabs)

$$\frac{dE_{kin}}{dV} = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 \qquad \frac{dE_{pot}}{dV} = \frac{dE_{el}}{dV} = \frac{1}{2}E\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{dE_{tot}}{dV} = \frac{dE_{kin}}{dV} + \frac{\partial E_{el}}{\partial V} = \rho v^2 \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2$$

transversale Seilwellen: (mit $S = \frac{F}{A}$ Seilkraft, $v = \sqrt{\frac{S}{\rho}}$, ρ = Dichte des Seils)

$$\frac{dE_{kin}}{dV} = \frac{1}{2}\rho v^2\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2, \quad \frac{dE_{pot}}{dV} = \frac{1}{2}S\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 \quad \Rightarrow \frac{dE_{tot}}{dV} = \frac{dE_{kin}}{dV} + \frac{dE_{pot}}{dV} = S\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2$$

Die **Intensität** I ist die Flächenleistungsdichte (= Leistung pro Fläche) beim Transport von Energie. Die allgemeine Formel für Intensität ist: , wobei

$[I] = \frac{W}{m^2}$

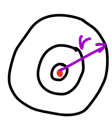
A_0 = eine gegebene Fläche im Raum

P = die Leistung

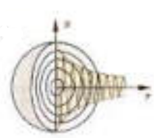
⚠ z.B. bei Schallwellen beschreibt die Intensität die Lautstärke. Intuitiv macht es Sinn, dass die Intensität (bzw. Lautstärke) sinkt, je weiter wir uns von der Quelle befinden.

Und tatsächlich:

Welle in 1D: I nimmt nicht ab



Kreiswelle: $I \propto \frac{1}{r}$



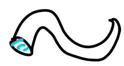
Kugelwelle: $I \propto \frac{1}{r^2}$ ← Lautstärke für uns!

Leistung: allgemein: $[P] = W$

Um die ausgestrahlte Leistung aus der Intensität zu bestimmen, verwenden wir:

Wichtige Grössen: Da es mühsam ist, jedes Mal die Energie & daraus I und P einer Welle zu bestimmen, rate ich euch an der Prüfung diese Tabelle zu verwenden:

	longitudinal / elastische Welle (kontinuierliches Medium)	Transversale Welle (Seilwelle)
⟨Leistung⟩	$\frac{1}{2}\rho v \omega^2 A^2 A_\square$ / $\frac{1}{2}\frac{E}{v}\omega^2 A^2 A_\square$ ↳ Intensität * Fläche	$\frac{1}{2}\mu v \omega^2 A^2$
⟨Intensität⟩	$\frac{1}{2}\rho v \omega^2 A^2$ / $\frac{1}{2}\frac{E}{v}\omega^2 A^2$	$\frac{1}{2}\mu v \omega^2 A^2 \frac{1}{S}$
E_{kin}	$\iiint_V \frac{1}{2}\rho\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 dV$	$\int_0^L \frac{1}{2}\mu\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 dx$
$\langle E_{kin}\rangle$	$\frac{1}{4}\rho\Delta V A^2\omega^2$	$\frac{1}{4}\mu L A^2\omega^2$
E_{pot}	$-\int_0^L F(x)\,dx = -\int_0^\xi (-Dx)\,dx = \frac{1}{2}D\xi^2$	$\int_0^L \frac{1}{2}F_T\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx$
$\langle E_{pot}\rangle$	$\frac{1}{4}\rho\Delta V A^2\omega^2$	$\frac{1}{4}\mu L A^2\omega^2$
u_{tot}	$\frac{E_{tot}}{\Delta V} = \frac{\frac{1}{2}\rho\Delta V A^2\omega^2}{\Delta V} = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2$	$\frac{E_{tot}}{L} = \frac{\frac{1}{2}\mu L A^2\omega^2}{L} = \frac{1}{2}\mu A^2\omega^2$

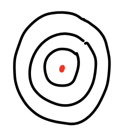
A: Amplitude
$A_\square$: Fläche, auf welche die Welle trifft (z.B. von Seil )
E: Elastizitätsmodul
μ: lineares Massenelement
y, ξ: entsprechende Wellenfunktion

⚠ Intensität von Schallwellen: $\boxed{I = 2\pi^2 f^2 A^2 \rho c}$, $c = 343\,m/s$

Schalldruck, $p = \frac{F}{A}$

⚠ Intensität einer Kugelschallwelle: $\boxed{I = \frac{P_{ak}}{A} = \frac{P_{ak}}{4\pi r^2}}$ mit $P_{ak} = p \cdot v A = \int \vec{I}\, d\vec{A}$

⚠ Mittlere Intensität einer Punktquelle (Kugelwelle): $\langle I\rangle = \frac{\langle P\rangle}{\underbrace{4\pi r^2}_{\text{Fläche gleicher Leistung}}}$



⚠ Der Intensitätspegel beschreibt die Intensität relativ zur Intensität des Schallpegels:

[IP] = dB

Wobei I_0 (Referenzintensität) der Schallpegel ist: $\boxed{I_0 = 10^{-12}\,\frac{W}{m^2}}$ ($\hat{=}$ Hörschwelle)

⚠ Die Energie einer Welle breitet sich mit deren Ausbreitungsgeschwindigkeit v_A aus.

⚠ ⟨...⟩ steht für zeitliches Mittel: $\langle f(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$ Bei Wellen sind wir meistens nur am zeitlichen Mittel interessiert.

⚠ $I, E \propto A^2(t)$

go to ⇒ Quiz 6

Der Dopplereffekt

↳ Ist die zeitliche Stauchung/Dehnung einer Welle durch die Veränderungen des Abstands zwischen Sender und Empfänger. Dabei ändert sich die Empfängerfrequenz zur Quellenfrequenz!

Bsp: Dopplereffekt hören:

DRK Rettungsdienst Mittelhessen - Doppler-Effekt...

Doppel – Doppler

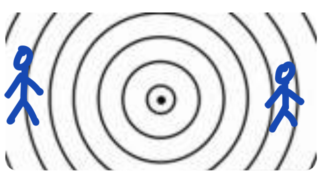
Die allgemeine Formel zur Bestimmung der Empfängerfrequenz ist:

f_E: Frequenz beim Beobachter
f_Q: Frequenz der Quelle

c_s: Schallgeschwindigkeit, 343 m/s
v_E: Geschwindigkeit des Empfängers
v_Q: Geschwindigkeit der Quelle

Es ist wichtig zu unterscheiden, ob die Quelle oder der Empfänger in Ruhe ist oder sich bewegt:

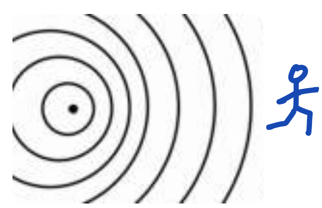
① Quelle und Beobachter in Ruhe:



② Quelle bewegt sich, Beobachter in Ruhe:

③ Quelle in Ruhe, Beobachter bewegt sich:

④ Quelle und Beobachter bewegen sich:

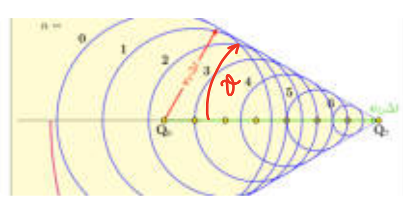


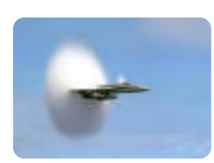
An Prüfung: Tabelle verwenden:

E \ Q	Q in Ruhe	Q nähert sich E	Q entfernt sich von E
E in Ruhe	$f_E = f_Q$	$f_Q \cdot \frac{c_s}{c_s - v_Q}$	$f_Q \cdot \frac{c_s}{c_s + v_Q}$
E nähert sich Q	$f_Q \cdot \frac{c_s + v_E}{c_s}$	$f_Q \cdot \frac{c_s + v_E}{c_s - v_Q}$	$f_Q \cdot \frac{c_s + v_E}{c_s + v_Q}$
E entfernt sich von Q	$f_Q \cdot \frac{c_s - v_E}{c_s}$	$f_Q \frac{c_s - v_E}{c_s - v_Q}$	$f_Q \frac{c_s - v_E}{c_s + v_Q}$

Schockwelle (Mach'scher Kegel): Tritt auf, wenn die Geschwindigkeit der Quelle grösser ist als die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle.

Der halbe Öffnungswinkel ist

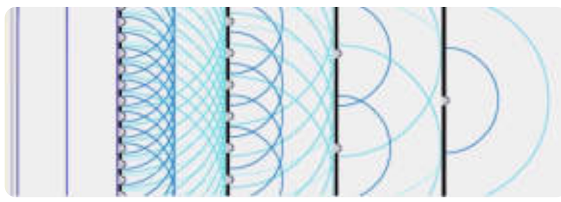




go to ⇒ **Quiz 7**

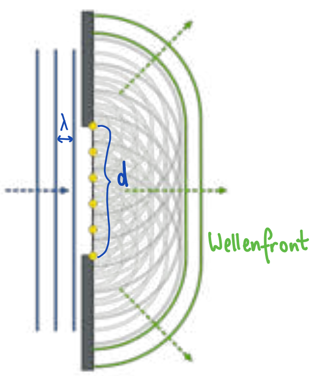
Das Huygens'sche Prinzip

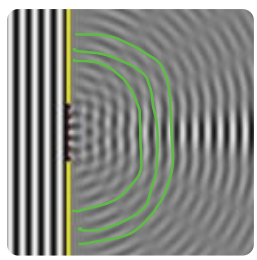
"Jeder Punkt einer bestehenden Wellenfläche ist das Zentrum einer neuen, kugelförmigen Elementarwelle. Die Umhüllende dieser Elementarwellen ergibt die Wellenfront zu einem späteren Zeitpunkt."



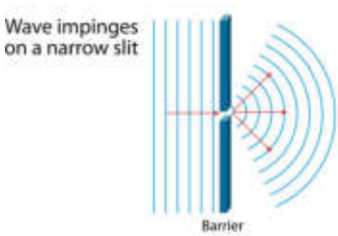
Huygens

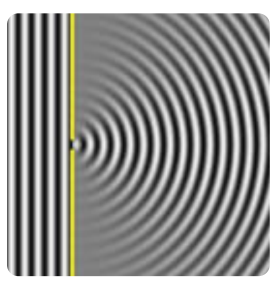
Dieses Prinzip erklärt unter anderem die Beugung (hier am Einzelspalt):





Wenn wir d sehr klein machen, sieht es aus als hätten wir eine neue Punktquelle:





Superposition

Wie bei den Schwingungen, ist eine Überlagerung von Wellen nichts anderes als eine

$$\xi(x,t) = \xi_1(x,t) + \xi_2(x,t)$$

Die neue Welle löst auch immernoch die Wellengleichung, da sie linear ist

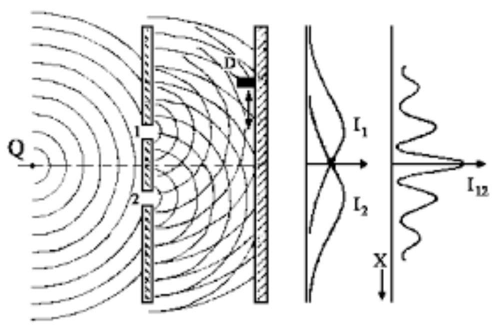
$\Rightarrow$ die Superposition von Lösungen ist wieder eine Lösung :)

⚠ Aufpassen: Energie, Intensität, Leistung usw. darf man nicht einfach zusammenaddieren!

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 \quad \Rightarrow \quad E \neq E_1 + E_2 \text{ i.A.!} \quad (\text{da } E, I \propto \xi_0^2)$$

Interferenz

↳ Ist ein Phänomen, welches nur bei Wellen auftritt. Wenn mehrere Wellen aufeinander-treffen, dann verstärken, schwächen oder heben sich deren Amplituden auf. Dabei kann man interessante Muster erkennen.



Interenzmuster treten auf, wenn wir:

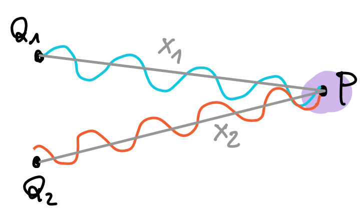
→ 2 identische Wellen mit unterschiedlich langen Laufwegen haben

→ 2 Quellen mit konstantem Phasenunterschied (≙ kohärente Wellen) haben.

Interferenz bei harmonischen Wellen:

Wir betrachten 2 harmonische Wellen in einem Punkt im Raum:

$\xi_1(x,t) = A\sin(kx_1 - \omega t)$ und $\xi_2(x,t) = A\sin(kx_2 - \omega t + \delta)$



heisst Gangunterschied und beschreibt die Wegdifferenz der Welle 1 und Welle 2 von der Quelle zum beobachteten Punkt.

Die Superposition beider Wellen ergibt die resultierende Welle am Punkt P:

$\xi(x,t) = \xi_1(x,t) + \xi_2(x,t) =$

$\Rightarrow$

Wir analysieren diese resultierende Welle:

Konstruktive Interferenz

Wenn die Phasendifferenz ist, haben wir:

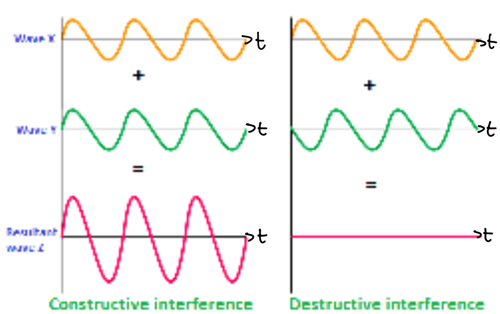
$\Rightarrow$ konstruktive Interferenz! Die resultierende Welle hat die doppelte Amplitude der Einzelwellen.

Destruktive Interferenz

Wenn die Phasendifferenz ist, haben wir:

$\Rightarrow$ Destruktive Interferenz! Die 2 Wellen heben sich auf und $\nexists$ resultierende Welle.

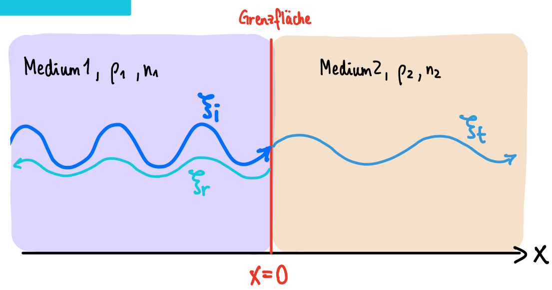
am Punkt P:



⚠ Intensität der resultierenden Welle: $\boxed{\langle I \rangle = \frac{1}{2}(2A)^2 \cos^2\left[\frac{1}{2}(\delta + k\Delta x)\right]}$

go to $\Longrightarrow$ Quiz 8

Reflexion & Transmission



ρ_i: Dichte des Medium

Erinnerung: $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{E}{\rho_1}}, \; v_2 = \sqrt{\frac{E}{\rho_2}}$

$\Rightarrow$ Geschwindigkeit ändert sich!

Was passiert, wenn eine Welle ξ_i auf eine Grenzfläche trifft, welche 2 verschiedene Medien voneinander trennt?

$\Rightarrow$ Ein Teil der Welle läuft im 2. Medium weiter (ξ_t, Transmission)

$\Rightarrow$ Der andere Teil wird reflektiert und läuft in die andere Richtung zurück (ξ_r, Reflexion)

Mathematisch wird das so beschrieben:

oder
$$\begin{cases} \xi_i = Ae^{i(k_1x-\omega t)} \\ \xi_t = A_t e^{i(k_2x-\omega t)} \\ \xi_r = A_r e^{i(-k_1x-\omega t)} \end{cases}$$

Wobei
mit t = Transmissionskoeffizient
mit r = Reflexionskoeffizient

⚠ Merke: Bei Reflexion sowie Transmisson bleibt die Frequenz f (und somit auch $\omega = 2\pi f$) unverändert.

⚠ Bei Reflexion bleibt v unverändert (und somit auch $k = \frac{\omega}{v}$, $\lambda = \frac{v}{f}$), x ändert sein Vorzeichen

⚠ Bei Transmission ändert sich v (und somit auch $k, \lambda, \ldots$), x behält sein Vorzeichen.

Um r und t zu bestimmen, verwenden wir die Randbedingungen (= Bedingungen bei der Grenzfläche, hier $x=0$)

1) Stetigkeit: $\xi_i + \xi_r = \xi_t$ @ $x=0$ $\Rightarrow$

2) Energieerhaltung: $\langle P_i \rangle = \langle P_r \rangle + \langle P_t \rangle$ (oder $\langle I_i \rangle = \langle I_r \rangle + \langle I_t \rangle$) @ $x=0$

Aus diesen Gleichungen erhalten wir: (genaue Herleitung im Skript, ich glaube nicht dass ihr das an der Prüfung machen müsst, aber die Ergebnisse sind wichtig :))

Für transversale Wellen: $\boxed{r = \pm \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1}}$, $\boxed{t = \frac{2v_2}{v_1 + v_2}}$

↳ Herleitung Skript S.86~89

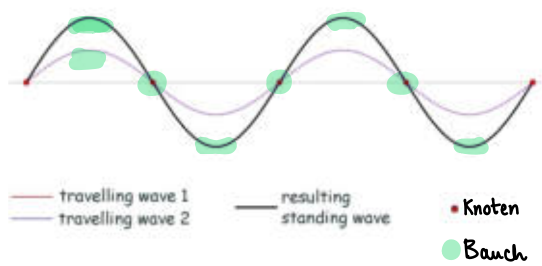
Für longitudinale Wellen: $\boxed{r = \frac{v_1\rho_1 - v_2\rho_2}{v_1\rho_1 + v_2\rho_2}}$, $\boxed{t = \frac{2v_1\rho_1}{v_1\rho_1 + v_2\rho_2}}$

↳ Herleitung Serie 7 4a)

Stehende Wellen

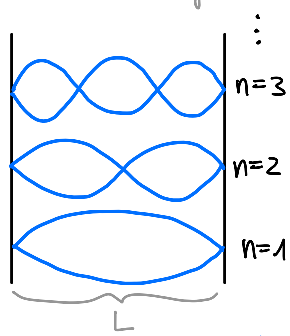
Wir superponieren 2 kohärente, $\overbrace{\text{entgegengesetzt laufende}}^{\text{z.B. } \xi_l \text{ und } \xi_r}$ harmonische Wellen und erhalten:

Dies ist die Gleichung einer stehenden Welle!



Wir unterscheiden zw. 3 Sorten von stehenden Wellen:

Zwei fixe Enden:
(z.B. Saite einer Geige)



$\xi_n = A_n \sin(k_n x)\sin(\omega_n t)$

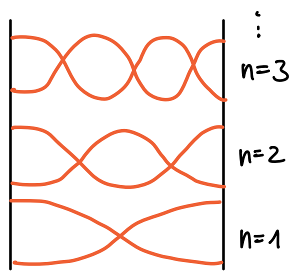
→ $k_n = \frac{n\pi}{L}$

→ $\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2L}{n}$

→ $\omega_n = k_n v = \frac{n\pi}{L} v$

→ $f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{nv}{2L}$

Zwei lose Enden:
(z.B. Rohr)



$\xi_n = A_n \cos(k_n x)\cos(\omega_n t)$

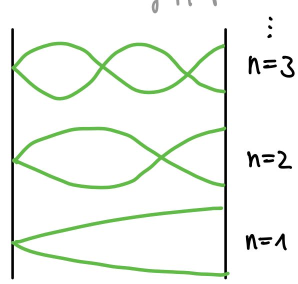
→ $k_n = \frac{n\pi}{L}$

→ $\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2L}{n}$

→ $\omega_n = k_n v = \frac{n\pi}{L} v$

→ $f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{nv}{2L}$

1 fixes und 1 loses Ende:
(z.B. Orgelpfeife)



$\xi_n = A_n \sin(k_n x)\cos(\omega_n t)$

→ $k_n = \frac{2n+1}{2L}\pi$

→ $\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{4L}{2n+1}$

→ $\omega_n = k_n v = \frac{2n+1}{2L}\pi v$

→ $f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{2n+1}{4L} v$

⚠ Grundschwingung $\hat{=}$ 1. Harmonische $\hat{=}$ Fundamentalmode $\hat{=}$ Cos/Sin mit kleinster Frequenz $\Leftrightarrow n=1$
(oft $\xi_0, \lambda_0, \dots$ aber das entspricht $n=1$!)

→ 1. Oberschwingung $\hat{=}$ 2. Harmonische $\hat{=}$ $n=2$

→ $(n-1)$. Oberschwingung $\hat{=}$ n-te Harmonische i.A.

⚠ i.A. bei Saiten: ξ ist Superposition von mehreren Harmonischen: $\xi = \sum_{n=0}^{N} A_n \sin(k_n x)\sin(\omega_n t)$

→ siehe Quiz

Energie von stehenden Wellen:

Energie von 1 Mode: $\xi_n(x,t) = A\sin(k_n x)\sin(\omega_n t)$

$$dE = dE_{kin} + dE_{pot} = dE_{kin,max} = \frac{1}{2} m \dot{\xi}_n^2 \Big|_{\text{bei } \omega_n t = \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \mu dx\, \omega^2 A^2 \sin^2(k_n x)$$

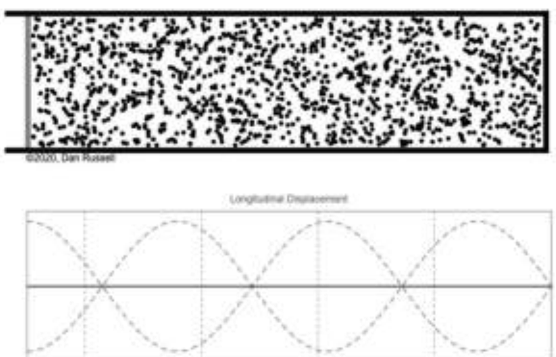
$$\Rightarrow \quad E = \int_0^L dE = \int_0^L \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \sin^2(k_n x)\, dx$$

analog für andere Typen von stehenden Wellen.

⚠ Eine stehende Welle transportiert keine Energie! Sie oszilliert nur lokal
→ wegen Knoten: dort $\xi = 0$ $\forall t$ → es kann keine Energie hindurchfliessen.

⚠ E_{kin} ist bei den Bäuchen konzentriert (Amplitude maximal)

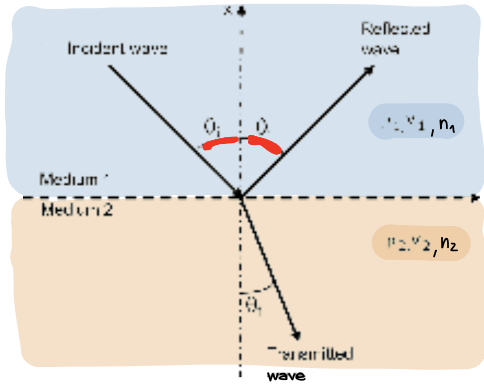
⚠ E_{pot} bei den Knoten konzentriert (Zugspannung maximal)



Bsp. einer stehenden Schallwelle in einem halboffenen Rohr

go to ⇒ **Quiz 9**

Brechung & Reflexion



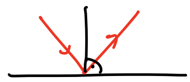
Bending Light - Snell's Law | Refraction | Reflec...
phet.colorado.edu

Snellius'sches Brechungsgesetz:

θ_i, θ_t: Winkel zum Lot hin
n_1, n_2: Brechungsindex, $n_i = \frac{c_0}{c_i}$


Snell

Reflexionsgesetz:



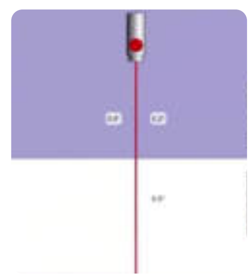
⚠ Beim Eindringen einer Welle in ein anderes Medium ändert sich dessen Geschwindigkeit:

Bei Licht:

$c_0 = 3 \times 10^8$ m/s, Lichtgeschwindigkeit im Vacuum.
n = Brechungsindex, Materialeigenschaft.

⚠ Die Frequenz f (und folglich auch $\omega = 2\pi f$) ändert sich

⚠ $v_1 > v_2 \Rightarrow n_1 < n_2$ Medium 1 ist optisch dünner, Medium 2 ist optisch dichter



Totalreflexion: Wenn nicht mehr transmittiert wird, nur noch reflektiert.

Snell: $\sin\theta_t = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_i$. Wenn nun θ_i so gross wird, dass

$\sin\theta_t = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_i > 1$ haben wir ein Problem, da

$\sin\theta_t = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_i > 1$ mathematisch nicht möglich ist ($\sin(x) \in [-1,1]$).

Also kann ab einem gewissen θ_i, wo , keine Transmission mehr stattfinden und es wird nur noch reflektiert. => Totalreflexion

Der θ_i, wo => heisst **kritischer Winkel**.

⚠ Totalreflexion ist nur möglich für $n_1 > n_2 \Rightarrow \frac{n_1}{n_2} > 1$, da sonst $\underbrace{\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_i}_{\in[-1,1]} > 1$ gar nicht möglich ist.

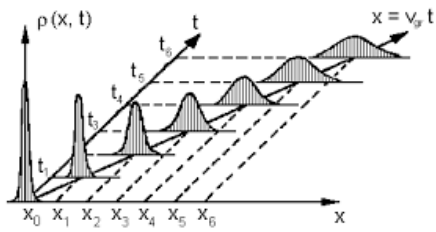
go to => **Quiz 10**

Dispersion & Gruppengeschwindigkeit

→ Kommt wahrscheinlich nicht an Prüfung.

In real life haben wir keine harmonischen Wellen ohne Anfang und Ende (nicht möglich, da sonst $E \to \infty$), sondern eher Wellenpakete.

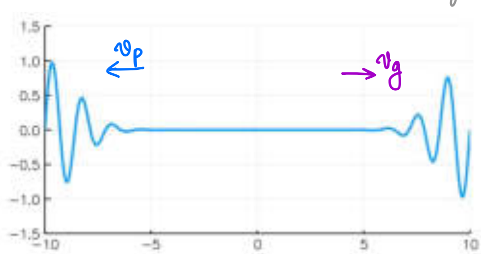
Wir müssen dann auch Dispersion ($\approx n$ ist abhängig von ω) berücksichtigen:



Jetzt ist die Phasengeschwindigkeit nicht mehr gleich der Ausbreitungsgeschwindigkeit!

Die Phasengeschwindigkeit ist nach wie vor $\boxed{v_p = \frac{\omega}{k}}$ (Geschwindigkeit der "inneren" Welle des Wellenpakets)

Die Gruppengeschwindigkeit ist : $\boxed{v_g = v_p - \lambda \cdot \frac{dv_p}{\lambda} = v_p + k \cdot \frac{dv_p}{k}}$
(= Ausbreitungsgeschwindigkeit)
(Geschwindigkeit der Einhüllenden des Wellenpakets)



Es können sehr interessante Phänomene auftreten, wie z.B. wenn v_p und v_g entgegengesetzt sind!

Weitere coole Videos von Dispersion könnt ihr hier finden:

ISVR - Institute of Sound and Vibration Research

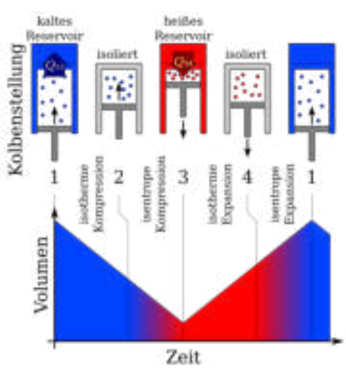
Datei:Wellenpaket mit verschiedenem Dispersionsve...

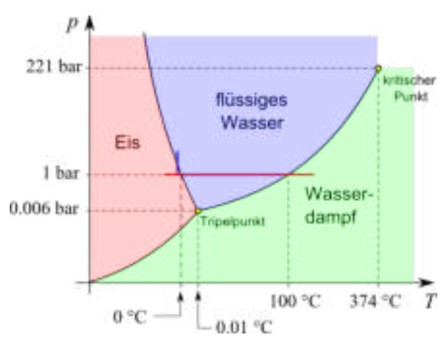
⚠ Für die Ausbreitung von Energie & Information ist die Gruppengeschwindigkeit massgeblich!

go to ⇒ **Prüfungsaufgabe 2**

Teil 5

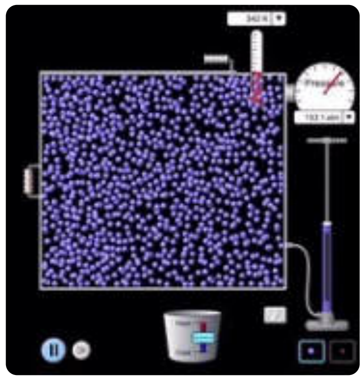
Thermodynamik





"Wie kann man Wärme in mechanische Arbeit umwandeln?" Diese Frage war der Anfang der Thermodynamik, die Lehre der Wärme.

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit Viel-Teilchen-Systemen:



Teilchen: Ordnung 10^{23}+

=> gewöhnt euch daran, euch ganz viele bewegende (oder schwingende) Teilchen vorzustellen, wenn wir über Gase (oder Flüssigkeiten/Festkörper) reden!

Aber warum? $\underbrace{T, p, U}_{\text{Thermodynamische Grössen}}$, ... haben alle einen Zusammenhang mit der Bewegung der Teilchen!

Intuition entwickeln mit einer Simulation:

Gases Intro - Ideal Gas Law | Pressure | Volume -...
phet.colorado.edu

Temperatur

Ein alltäglicher Begriff, aber gar nicht so einfach zu definieren!

→ Mass dafür, wie warm oder kalt ein Körper ist

→ Mass für die thermische Bewegung von Atomen / Molekülen

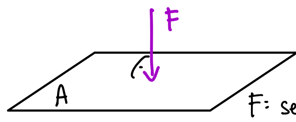
→ Bei Gasen: Mass für die mittlere kinetische Energie der Gasmoleküle

→ Eine Grösse, die in verschiedenen Systemen denselben Wert annimmt, wenn diese Systeme miteinander in Kontakt gebracht werden (impliziert aus 0. HS (nächste Seite))

Druck

Die Wirkung einer flächenverteilten Kraft, die senkrecht auf einen Körper wirkt,

heisst Druck:



F: senkrecht auf die Fläche A ausgeübte Kraft

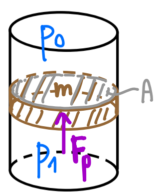
"Pascal", benannt nach dem Physiker Blaire Pascal:

⚠ 1 bar = 10^5 Pa

1 atm = 1.01325 bar = 1.01325×10^5 Pa

frühere Einheit des Drucks

⚠ Wichtig:



Die Gesetze von Gay-Lussac

"Das Volumen eines Gases ist bei konstantem Druck proportional zur Temperatur"

"Der Druck eines Gases ist bei konstantem Volumen proportional zur Temperatur"

Gay-Lussac

$C_p, C_V \in \mathbb{R}$ sind Proportionalitätskonstanten.

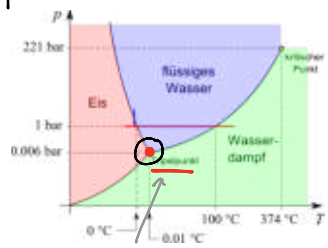
bezeichnet, was jeweils konstant gehalten wird!

⚠ C_p, C_V hier haben mit der molaren Wärmekapazität C_p, C_V (paar Seiten später) nichts zu tun!

Kelvin-Skala: Die absolute Temperatur

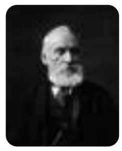
↳ Ist definiert über den absoluten Nullpunkt & über den Tripelpunkt des Wassers:

ist die kleinste Temperatur. Atome führen hier absolut keine thermische Bewegungen mehr aus!



Dort wo Wasserdampf, flüssiges Wasser und Eis im Gleichgewicht stehen
=> Druck ist hier eindeutig.

Absoluter Nullpunkt: $\boxed{}$



Kelvin, benannt nach Lord Kelvin

⚠ Kelvin & Celsius Umrechnung: K ⇄ °C

nichts verrücktes, nur Addition / Subtraktion einer Konstante :)

⚠ In den Aufgaben die Temperatur ______ einsetzen für die Berechnungen.
Ihr werdet sonst falsche Ergebnisse erhalten! (°C ist keine SI-Einheit)

Der 0. Hauptsatz der Thermodynamik

$$A \xleftrightarrow[①]{T_A = T_B} B \xleftrightarrow[②]{T_B = T_C} C$$

① ∧ ② $\Rightarrow T_A = T_C$

"Befinden sich zwei Systeme jeweils in thermischem Gleichgewicht mit einem dritten System, so stehen die beiden Systeme auch untereinander in thermischem Gleichgewicht."

Wärme

Die Wärme Q ist die Energie, welche alleine aufgrund des Temperaturunterschieds zwischen 2 Körpern ausgetauscht wird.

$$T_1 \xrightarrow{Q} T_2 < T_1$$

$[Q] = J$

⚠ Wärme ist eine Form von Energie, da man einem Körper Energie zuführen muss, um seine Temperatur zu erhöhen!

Kalorie: 1 Kalorie (cal) ist die Wärmemenge Q, durch die 1g Wasser unter Normaldruck ($p = 1\,atm = 1.01325 \times 10^5\,Pa$) um 1 K erwärmt wird.

$$\boxed{1\ \text{Kalorie} = 4.1868\ \text{Joule}}$$

Latente Wärme

Um einen Phasenübergang einer Substanz zu bewirken, muss eine gewisse ("zusätzliche") Energie zugeführt werden: Die latente Wärme.

fest $\xrightarrow{Q_S^{\swarrow}}$ flüssig: $\boxed{\quad\quad\quad}$

flüssig $\xrightarrow{Q_D^{\swarrow}}$ gasförmig: $\boxed{\quad\quad\quad}$

λ_S: spezifische Schmelzwärme
m: Masse des Körpers

λ_D: spezifische Verdampfungswärme
m: Masse des Körpers

⚠ Die latente Wärmezufuhr verursacht <u>keine</u> Temperaturerhöhung, sondern "nur" einen Phasenübergang.

⚠ folglich ändert sich bei einem Phasenübergang die potentielle & nicht die kinetische Energie der Teilchen.

Was bedeuten diese Pfeile $\swarrow \nearrow$?

$\swarrow$ dem System zugeführt

$\nearrow$ dem System entzogen

- Wenn nichts steht: $\swarrow$
- $Q^{\swarrow} = -Q^{\nearrow}$ $\Rightarrow Q^{\swarrow} < 0 \mathrel{\hat{=}} Q^{\nearrow} > 0 \Rightarrow$ dem System wird Wärme entzogen
  $\Rightarrow Q^{\swarrow} > 0 \mathrel{\hat{=}} Q^{\nearrow} < 0 \Rightarrow$ dem System wird Wärme zugeführt

go to ⟹ Quiz 11

Ideale Gase

Ein ideales Gas ist eine idealisierte Modellvorstellung eines realen Gases. Ein solches Gas existiert eigentlich nicht, aber wir verwenden es für unsere Berechnungen, da so die Formeln sehr vereinfacht werden können. Viele reale Gase werden annähernd als idealer Gas betrachtet.

Eigenschaften von idealen Gasen:

→ Atome / Moleküle, die nicht miteinander wechselwirken
→ kein Eigenvolumen => punktförmige Teilchen
→ Atome / Moleküle haben keine potentielle Energie
→ können auch mehratomig sein.

Boyle

Gesetz von Boyle-Mariotte:

Boltzmann

Zustandsgleichung des idealen Gases:

p: Druck
V: Volumen
T: Temperatur
$k = 1{,}38 \times 10^{-23}\, J K^{-1}$ = Boltzmann-Konstante
$\boxed{R = N_A k =}\ 8{,}314\ J \cdot (mol \cdot K)^{-1}$ = Gaskonstante
$\boxed{n = \tilde{n} N_A}$ = Teilchenanzahl, $[n]$ = Einheitslos

$\boxed{\tilde{n} = \frac{m}{M} = \frac{n}{N_A}}$ = Stoffmenge $[\tilde{n}]$ = mol
M: molare Masse, $[M] = kg \cdot mol^{-1}$
m: Masse, $[m] = kg$
$N_A = 6{,}022 \times 10^{23}\, mol^{-1}$ = Avogadro-Zahl
gibt an, wie viele Teilchen in einem Mol enthalten sind.

Avogadro

Mittlere kinetische Energie eines idealen Gasteilchens:

Hier wird der Zusammenhang zwischen T und E_{kin} eines Atoms / Moleküls deutlich!

Gleichverteilungssatz des idealen Gases: $U =$

innere Energie

f: Freiheitsgrad des Teilchens

"Für ein System im thermodynamischen Gleichgewicht der Temperatur T entfällt auf jeden Freiheitsgrad im Mittel eine Energie von $\frac{1}{2} kT$ pro Teilchen."

Die Wärmekapazität

Ist eine Materialeigenschaft!

Die Wärmekapazität ist ein Mass für den Zusammenhang zwischen der Energie, die benötigt wird um die Temperatur eines bestimmten Körpers um eine gewisse Temperatur zu erhöhen:

=> $[C] =$

→ diese benötigte Energie ist je nach Material unterschiedlich!

Die spezifische Wärmekapazität ist die Wärmekapazität pro Masse:

=> $[c_m] =$

m: Masse des Körpers

Die molare Wärmekapazität ist die Wärmekapazität pro Stoffmenge $\tilde{n}$:

=> $[c_M] =$

⚠ Da wir in Physik 1 die Wärmekapazität als konstant betrachten:

Die Wärmemenge, die man einem Körper zuführen muss, um ihn von der Temperatur T_A auf die Temperatur T_B zu erwärmen, ist:

go to → Quiz 12

go to → Quiz 13

Wärmekapazität idealer Gase

Gase können im Gegensatz zu Festkörpern ihr Volumen verändern. Die Wärme, die zugeführt werden muss, um die Temperatur um eine gewisse Grösse zu erhöhen, unterscheidet sich, je nach dem ob der Druck oder das Volumen im Gas konstant gehalten wird. Folglich besitzt ein Gas 2 Arten von Wärmekapazität:

① Volumen konstant: ___ mit ___

C_V: molare Wärmekapazität bei konstantem Volumen

f: Freiheitsgrad

② Druck konstant: ___ mit ___

C_p: molare Wärmekapazität bei konstantem Druck

Es gilt: ___ und ___ heisst Adiabatenkoeffizient.

Tabelle 3.3: Molare Wärmekapazitäten und Adiabatenkoeffizient $\kappa = C_p/C_V$ einiger Gase

	Freiheitsgrade					
System	Transl.	Rot.	Total	C_V	C_p	κ
1-atomiges Gas	3	0	3	$\frac{3}{2}R$	$\frac{5}{2}R$	$\frac{5}{3}$
2-atomiges Gas	3	2	5	$\frac{5}{2}R$	$\frac{7}{2}R$	$\frac{7}{5}$
3-atomiges Gas	3	3	6	$3R$	$4R$	$\frac{4}{3}$
feste Körper	3 kin. + 3 pot.		6	$c_M \approx 3R$		

← auf Z.F.!

⚠ Die C's hier haben mit den C's in den Gay-Lussac Gesetzen nichts zu tun!

Die innere Energie U

Wir haben bereits gelernt, dass Wärme und Temperatur in Zusammenhang stehen mit der Bewegungsenergie der Atome / Moleküle eines Körpers / Gases.

Nun lernen wir das Konzept der inneren Energie:

Die innere Energie $\boxed{U = U(p, V, T, \dots)}$ ist eine Zustandsfunktion, welche den Energiegehalt einer Materiemenge beschreibt.

↳ d.h. es hängt nur vom Zustand des Körpers ab.

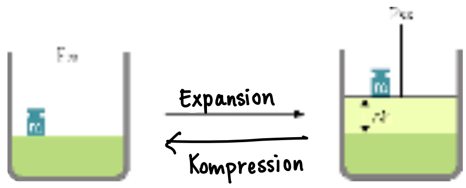
Es gilt: $\boxed{\Delta U = U_E - U_A}$ ⇒ Die Änderung der inneren Energie hängt nur vom Anfangs- und Endzustand ab! Alles, was dazwischen passiert, ist egal :)

↳ d.h. wie in Ana2/KomA gesehen: U ist ein Potential!

Volumenarbeit

1) Ist die an einem geschlossenen System zu leistende Arbeit, um das Volumen V_1 auf das Volumen $V_2 < V_1$ zu komprimieren

2) Ist die von einem geschlossenen System geleistete Arbeit, um das Volumen V_1 auf das Volumen $V_2 > V_1$ zu expandieren.



Dabei ist die gesamte von einem Gas in die Umgebung verrichtete Arbeit:

$W^{\nearrow} < 0$ im Fall 1) (Kompression), $W^{\nearrow} > 0$ im Fall 2) (Expansion)

$W^{\swarrow} > 0$

Und die von der Umgebung an einem Gas verrichtete Arbeit:

$W^{\swarrow} > 0$ im Fall 1) (Kompression), $W^{\swarrow} < 0$ im Fall 2) (Expansion)

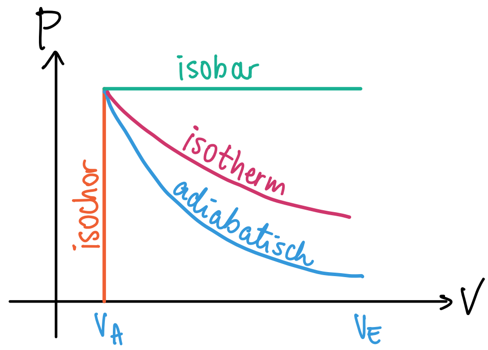
Der 1. Hauptsatz der Thermodynamik

Änderung der inneren Energie eines Systems =

Dem System zugeführte Arbeit $\delta W^{\swarrow}$ + Dem System zugeführte Wärme $\delta Q^{\swarrow}$

Zustandsänderungen eines idealen Gases → kam bisher an jeder Prüfung vor!

pV-Diagramm: Ist ein Graph in der (V,p)-Ebene. Sie wird verwendet, um Zustandsänderungen eines Gases darzustellen.

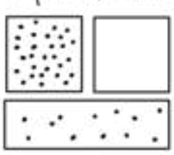


Doch was genau ist eine Zustandsänderung? ⇒ Wir reden von Zustandsänderungen, wenn sich die innere Energie eines Systems von einem Wert zu einem anderen wechselt, z.B. durch Wärmeaustausch mit der Umgebung ($Q^{\swarrow}$, $Q^{\nearrow}$) oder durch mechanische (bzw. Volumen-) Arbeit, die am ($W^{\swarrow}$) oder vom ($W^{\nearrow}$) System verrichtet wird.

In Physik1 haben wir uns 6 Arten von Zustandsänderungen gesehen: Notation: A: Anfang, E: Ende

⚠ An Prüfung: Verwende sofort die passende Formel aus der Z.F., es ist nicht nötig alles herzuleiten!

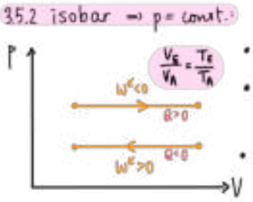
3.5.1 freie Expansion: (irreversibel) → T ist konst. → isotherm



- innere Energie: $\boxed{\Delta U = 0}$
- zugeführte Wärme: $\boxed{Q^{\swarrow} = 0}$
- zugeführte Volumenarbeit: $\boxed{W^{\swarrow} = 0}$
- für ideale Gase: $\boxed{T_E = T_A}$

  $\boxed{p_E = p_A \cdot \frac{V_A}{V_E}}$

3.5.2 isobar ⇒ p = const.:

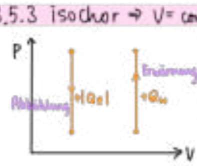


- innere Energie: $\boxed{\Delta U = W^{\swarrow} + Q^{\swarrow} = \tilde{n} c_V \Delta T}$
- zugeführte Volumenarbeit:

  $\boxed{W^{\swarrow} = -p(V_E - V_A) = -\tilde{n} R \Delta T}$
- zugeführte Wärme:

  $\boxed{Q = \tilde{n} c_p \Delta T}$, $c_p = c_{mol}$ bei p konstant

3.5.3 isochor ⇒ V = const.: d.h. $\frac{p}{T} = \text{const.}$

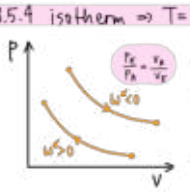


- innere Energie: $\boxed{\Delta U = \Delta Q}$
- zugeführte Wärme: $\boxed{W = 0}$ $(dV = 0)$
- zugeführte Volumenarbeit:

  $\boxed{\Delta Q = \tilde{n} c_V \Delta T}$, $c_V = c_{mol}$

3.5.4 isotherm ⇒ T = const.: $(T \propto pV) \to p(V) = \frac{p_1 V_1}{V}$

beliebige p_1, V_1-Werte aus pV-Diagramm



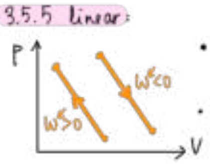
- innere Energie: $\boxed{\Delta U = 0}$
- zugeführte Wärme: $\boxed{Q^{\swarrow} = -W^{\swarrow}} = W^{\nearrow}$

  $= \int_{V_A}^{V_E} p\,dV = \tilde{n} R T_A \int_{V_A}^{V_E} \frac{dV}{V} = \tilde{n} R T_A \ln\left(\frac{V_E}{V_A}\right)$
- zugeführte Volumenarbeit:

  $\boxed{W^{\swarrow} = -\tilde{n} R T \ln\left(\frac{V_E}{V_A}\right) = -\int_{V_A}^{V_E} \frac{\tilde{n} R T}{V}\,dV}$

  $= -p_A V_A \ln\left(\frac{V_E}{V_A}\right)$

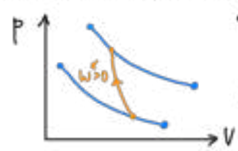
3.5.5 linear:



- Gerade: $\boxed{p(V) = p_1 + \frac{p_2 - p_1}{V_2 - V_1}(V - V_1)}$
- zugeführte Volumenarbeit:

  $\boxed{W^{\swarrow} = -\left[p_1 (V_2 - V_1) + \frac{1}{2} \frac{p_2 - p_1}{V_2 - V_1} (V_2 - V_1)^2\right]}$

3.5.6 adiabatisch: → Entropie ändert sich nicht



$\Delta U = W \propto T$

$\boxed{\text{allg: } W, Q, U \propto T}$

- innere Energie: $\boxed{\Delta U = W}$

  $dU = dW = -p\,dV = -\frac{\tilde{n} R T}{V}\,dV$
- zugeführte Wärme: $\boxed{Q = 0}$

  Bem: T-Änderung ist trotzdem möglich. (ΔT nur durch W)
- zugeführte Volumenarbeit:

  $\boxed{W^{\swarrow} = \tilde{n} c_V \Delta T = \frac{p_E V_E - p_A V_A}{\gamma - 1}}$

  $\frac{dT}{T} = -\frac{R}{c_V} \cdot \frac{dV}{V} = -\frac{c_p - c_V}{c_V} \cdot \frac{dV}{V} = (1-\gamma) \frac{dV}{V}$

↳ **Die Poisson'schen Gleichungen:** für adiabatische Prozesse:

$$\begin{cases} TV^{\gamma-1} = \text{const.} \\ pV^{\gamma} = \text{const.} \\ T^{\gamma} p^{1-\gamma} = \text{const.} \end{cases}$$

$\frac{T_A}{T_E} = \left(\frac{V_E}{V_A}\right)^{\gamma-1}$

Erinnerung: $\gamma = K = \frac{c_p}{c_V}$

d.h. $p_1 V_1^{\gamma} = p_2 V_2^{\gamma}$ usw.

⚠ Es kann alles hergeleitet werden mit $W^{\swarrow} = -\int_{V_E}^{V_A} p\,dV$, $dU = \delta W^{\swarrow} + \delta Q^{\swarrow}$, $U = \frac{f}{2} \tilde{n} R T$, $Q^{\swarrow} = \tilde{n} c_M \Delta T$, …
Kontrolliert die Formels wenn ihr wollt :)

Der 2. Hauptsatz der Thermodynamik

1. **Thomson**:

   Es gibt keine *periodisch wirkende* Vorrichtung (Maschine **M**), die es gestattet, einem Körper (Wärmereservoir) Wärme (δQ) zu entziehen und in Arbeit zu verwandeln, ohne dass Veränderungen im System oder in der Umgebung zurückbleiben.

   Der umgekehrte Prozess, die vollständige Verwandlung von Arbeit in Wärme ist hingegen ohne weiteres möglich (siehe Abb. 3.16).

2. **Clausius**: $\Longleftrightarrow$

   Es gibt keine *periodisch wirkende* Vorrichtung (Maschine **M**), welche gestattet, Wärme von einem Reservoir tieferer Temperatur (T_K) zu einem mit höherer Temperatur ($T_W > T_K$) zu transportieren, ohne dass dazu Arbeit geleistet oder sonst von aussen Energie zugeführt wird.

   Das Umgekehrte ist hingegen ohne weiteres möglich: Wärme fliesst „von selbst" von wärmeren Körpern ($T_W > T_K$) zu kälteren (siehe Abb. 3.17).

Bildlich:

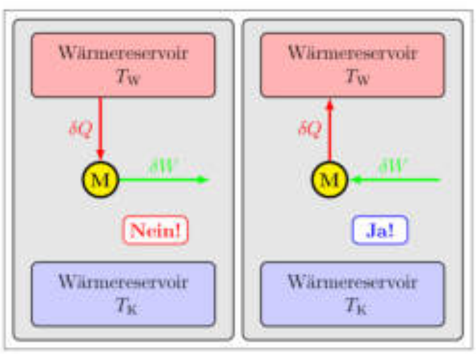


Abbildung 3.16: Prinzip von Thomson.

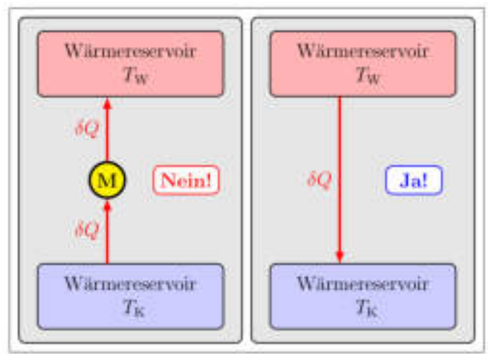
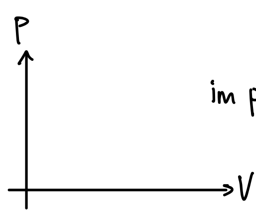


Abbildung 3.17: Prinzip von Clausius.

Thermodynamische Kreisprozesse

↳ Sind Aneinanderreihungen von Zustandsänderungen, wobei Endzustand = Anfangszustand ist. Kreisprozesse beschreiben z.B. Maschinen.

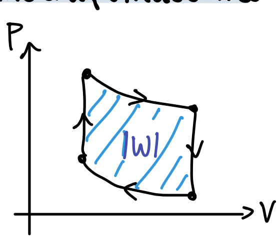


im pV-Diagramm: zyklisch

⚠ eingeschlossene Fläche = $|W|$

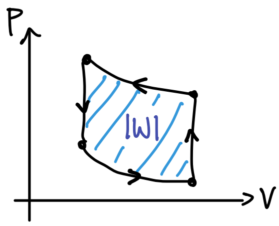
Es gibt 2 Kategorien von Kreisprozessen:

① **Wärmekraftmaschine**: Maschinen, die Wärme ($Q^{\swarrow}$) in Arbeit umwandeln ($W^{\nearrow}$)



Fläche ist im Uhrzeigersinn umschlossen.

② **Wärmepumpe / Kältemaschine**: Maschinen, die Arbeit aufwenden (W^{e}) um Wärme zu transportieren.



Fläche ist im Gegenuhrzeigersinn umschlossen.

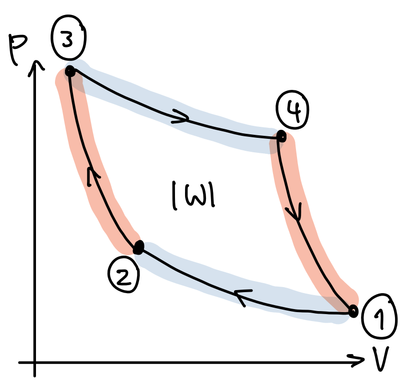
Bem: Wärmepumpen sind Maschinen, die dem wärmeren Reservoir Wärme zufliessen.

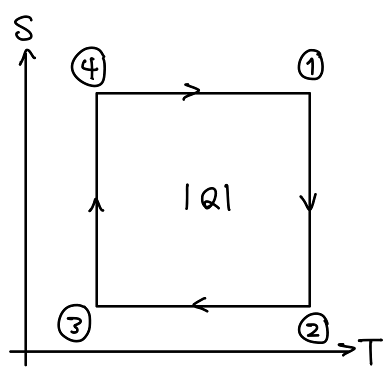
Kältemaschinen sind Maschinen, die dem kälteren Reservoir Wärme entziehen. (z.B. Kühlschrank)

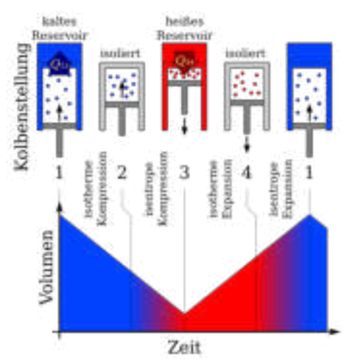
Der Carnot-Kreisprozess

↳ Ist ein idealer, reversibler Prozess, der die effizienteste Wärmekraftmaschine beschreibt. Im reellen existiert keine solche Maschine. Das Arbeitsmedium einer Carnot-Maschine ist ein ideales Gas.

Der Kreisprozess läuft wie folgt ab:



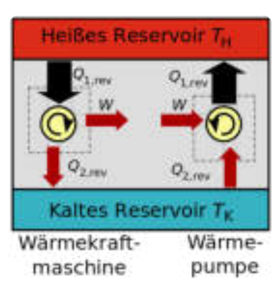




①→② isotherme Kompression
②→③ adiabatische Kompression
③→④ isotherme Expansion
④→① adiabatische Expansion

Richtung wie im Bild: Wärmekraftmaschine.
In andere Richtung: Wärmepumpe / Kältemaschine.

Carnot-Prozess benötigt 2 Wärmereservoire! (1 kalt & 1 warm)



Der Wirkungsgrad : Ein ein Mass dafür, wie effizient ein Prozess / eine Maschine ist.

Im allgemeinen gilt :

Carnot - Wärmekraftmaschine:

$$\eta_c = \frac{\text{gewonnene Arbeit}}{\text{vom warmen Reservoir zugeführte Wärme}} = \frac{T_W - T_K}{T_W} < 1$$

alle $Q^{\leftarrow} > 0$

Carnot - Wärmepumpe:

$$\eta_W = \frac{\text{zum warmen Reservoir zugeführte Wärme}}{\text{zugeführte Arbeit}} = \frac{1}{\eta_c} = \frac{T_W}{T_W - T_K}$$

Carnot - Kältemaschine:

$$\eta_K = \frac{\text{vom kalten Reservoir abgeführte Wärme}}{\text{zugeführte Arbeit}} = \frac{T_K}{T_W - T_K}$$

⚠ Jede reale Maschine hat einen kleineren Wirkungsgrad als die Carnot-Maschine!

Warum? → η_c wird erreicht, wenn der Prozess reversibel ist ($\Delta S = 0$ nach einem ganzen Zyklus, d.h. Prozess könnte jederzeit wieder umgekehrt ablaufen, ohne dass der Körper oder deren Umgebung dabei bleibende Veränderungen erfahren.)

=> Carnot - Maschinen sind reversibel!

Mehr Details über reversible Prozesse kannst du bei Interesse hier erfahren:

Beispiele realer Maschinen: Stirlingmotor (ist eine Wärmekraftmaschine), Ottomotor, Dieselmotor usw.

Entropie

Durch irreversible Prozesse (z.B. Reibung, Diffusion, ...) geht die Gesamtheit aus System & Umgebung ($\hat{=}$ Universum) in einen Zustand geringerer Ordnung über.
Ein Mass für diese Unordnung ist die Entropie S.

Die Entropie kann über 2 Wege definiert werden:

① statistische Definition: $k = \tilde{n}R$, W= W'keit für das Auftreten eines Zustands

② thermodynamische Definition: bei reversiblen Prozessen

"Regeln" von Entropie eines abgeschlossenen Systems (z.B. Universum):

⚠ - Jedes abgeschlossene System strebt seinem wahrscheinlichsten (= ungeordnetsten) Zustand zu. Seine Entropie nimmt nie ab!

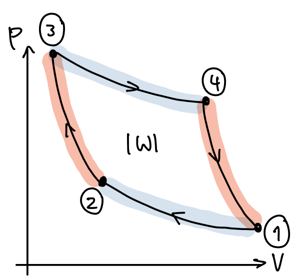
- Bei reversiblen Prozessen , bei irreversiblen Prozessen
- Nur Vorgänge, bei denen die Entropie wächst verlaufen von selbst.
- Entropie hängt vom Zustand des Systems ab, nicht vom Weg: $\Delta S = S_E - S_A$
- Ist ein System nicht abgeschlossen, so kann $\Delta S < 0$ sein. (nicht verwirren lassen: lokal kann ich Ordnung erzeugen ($\Delta S < 0$), aber ΔS vom Universum ist stets ≥ 0)

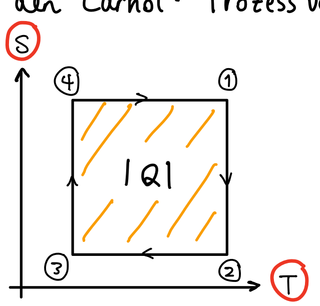
⚠ In den Aufgaben, unterscheide stets zwischen:

① System ② Umgebung ③ Universum = System + Umgebung

Reservoir

ST-Diagramme: Ist ein Graph in der (T,S)-Ebene. Sie wird oft zusammen mit einem pV-Diagramm verwendet, um den Verlauf der Entropie während einer Zustandsänderung darzustellen. z.B. Für den Carnot-Prozess von vorher haben wir:





⚠ Achte auf die Beschriftung der Achsen. Manchmal S und T umgekehrt.

⚠ Die im Uhrzeigersinn eingeschlossene Fläche entspricht der zugeführten Wärme $Q^{\swarrow}$
(Im Gegenuhrzeigersinn: $Q^{\nearrow}$)

Tabelle Entropieänderung bei Zustandsänderungen:

Art der Zustandsänderung:	ΔS_{System}	$\Delta S_{Umgebung}$ (= Reservoir)
Allgemein	$\int \frac{dQ^{r}(T_{sys})}{T_{sys}}$ ← Variable	$-\frac{1}{T_{umg}}\int dQ(T_{umg})$ ⊛ ← Konstante, Endtemperatur
freie Expansion	$\tilde{n}R\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$	$-\tilde{n}R\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$
isobar	$\tilde{n}c_p\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$	$-\tilde{n}c_p\frac{T_2-T_1}{T_2}$
isochor	$\tilde{n}c_v\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$	$-\tilde{n}c_v\frac{T_2-T_1}{T_2}$
isotherm	$\tilde{n}R\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$	$-\tilde{n}R\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$
adiabatisch	0	0
Carnot	$\Delta S_{Universum} = 0$	0

⊛ $dQ(T_{umg})$ heisst Q in abhängigkeit von T_{umg}

z.B. bei isochoren Prozessen: $-\frac{1}{T_{umg}}\int dQ(T_{umg}) = -\frac{1}{T_2}\int_{T_1}^{T_2}\tilde{n}c_v\,dT$

$dQ = \tilde{n}c_v dT$

go to → Prüfungsaufgabe 3

"I blame entropy."

Tipps für die Lernphase & Prüfung

- viele Aufgaben / alte Prüfungen lösen
- Nicht zu viel Zeit für Herleitungen investieren → Herleitungen sind good to know, aber nicht sehr wichtig für die Prüfung.
- gute Zusammenfassung mitnehmen, wissen wo was steht.
  In Ph1 ist es sehr wichtig, dass ihr die benötigte Formel schnell findet!
  ↳ Tipp: vergesst nicht die wichtigsten Trigrules auf die ZF zu schreiben
- An der Prüfung: Wenn ihr irgendwo nicht weiter kommt:
  → weil euch eine Vereinfachung fehlt (z.B. $\gamma \ll \frac{1}{T}$ bei schwach gedämpften Oszillatoren oder es steht nirgens dass es ein idealer Gas ist)
  ⇒ nehmt es einfach mal an. Schreibt hin "mit der Annahme, dass ..")
  Meistens gar nicht falsch, und so kommt ihr weiter!

  → weil ihr einfach nicht versteht was in der Aufgabe verlangt ist
  ⇒ Versucht, die Aufgabe mathematisch zu formulieren. Welche Grössen sind gesucht? Welche Formeln habe ich zur Verfügung?
  ⇒ Übt grosse Aufgaben in kleine Schritte aufzuteilen & dabei den Überblick zu behalten!
- Dieses Semester: viele Fächerübergreifende Themen (z.B. Fourierreihen, DGL kommen fast überall vor). Versucht schlau zu lernen, z.B. indem ihr überlegt in welche Reihenfolge ihr die Fächer lernen wollt.
  (Bsp: In KomA Fourier und Laplace lernen ⇒ nicht mehr nötig in NuS II nochmal die ganze Theorie dazu zu studieren; In Ana I & II DGL lernen ⇒ sofort anwendbar in Physik 1 :))
- Mir hilft es auch, eine kleine Zusammenfassung aufzuschreiben für jeden Aufgabentyp. So sieht man auch schnell, was man nicht verstanden hat.
- Nicht von Anfang an wie verrückt lernen: die Sommer-Lernphase ist sehr lang!

Themen, die wahrscheinlich nicht kommen an der Prüfung (keine Garantie!)

- Grosse Herleitungen
- Polarisierung von Wellen (eigentlich Stoff des 4. Semesters :/)
- Reale Gase & Flüssigkeiten
- Dampfdruck
- Enthalpie
- Joule-Thompson Effekt