Quizzes und Aufgaben

Lösungen

nicht während dem PVK spicken ! 😉

Quiz 1

v_0 bestimmen:

Wir haben einen harmonischen Oszillator mit einer Masse m und einer Feder mit Federkonstante k. Sie wird um $x = x_{max}$ ausgelenkt und anschliessend losgelassen. Zum Zeitpunkt $t = 0$ geht die Masse zum 1. Mal durch die Ruhelage $x = 0$.
Bestimme die Geschwindigkeit $v_0 = v(t=0)$ wenn die Masse die Ruhelage passiert.

a) $v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\, x_{max}$

b) $v_0 = \sqrt{x_{max}}\, \frac{k}{m}$

c) $v_0 = \frac{m}{2k}$

d) $v_0 = \sqrt{\frac{2m}{k}}\, x_{max}$

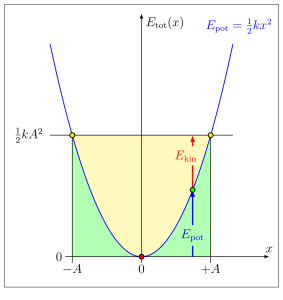
Lösung:

E_{tot} bei maximaler Auslenkung:

$$E_{tot}(x = x_{max}) = E_{pot} + \underbrace{E_{kin}}_{=0} = E_{pot} = \frac{1}{2} k x_{max}^2$$

E_{tot} bei minimaler Auslenkung:

$$E_{tot}(x = x_{min}) = \underbrace{E_{pot}}_{=0} + E_{kin} = E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$$



Da E_{tot} konstant $\forall t$: $E_{tot}(x = x_{max}) = \frac{1}{2} k x^2 \overset{!}{=} E_{tot}(x = x_{min}) = \frac{1}{2} m v^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m v^2 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{v = \sqrt{\frac{k}{m}}\, x_{max}}}$$

Quiz 2

Die Energie eines schwach gedämpften harmonischen Oszillators ist nach 60 Sekunden auf $0.7\,E_0$ abgefallen, wobei E_0 die Anfangsenergie bezeichnet.

1) Wie gross ist die Zeitkonstante τ, welche die exponentielle Abnahme der Energie $E(t) = E_0 e^{-t/\tau}$ beschreibt?

a) 343 s
c) 247 s
b) 168 s
d) 532 s

2) Auf welchen Bruchteil der Anfangsamplitude A_0 ist seine Amplitude gefallen?

a) 0.71
c) 0.55
b) 0.63
d) 0.84

Lösung: 1) $E(60) = E_0 e^{-\frac{60}{\tau}} = 0.7\,E_0$

$\Leftrightarrow e^{-\frac{60}{\tau}} = 0.7$

$\Leftrightarrow -\frac{60}{\tau} = \ln(0.7)$

$\Leftrightarrow \tau = -\frac{60}{\ln(0.7)} \cong 168\,s$

2) $E \propto A^2$

$\Rightarrow A^2 \propto E_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow A \propto \sqrt{E_0}\, e^{-\frac{t}{2\tau}} \Rightarrow A(t) = A_0 e^{-\frac{t}{2\tau}}$

$\Rightarrow A(60) = A_0 e^{-\frac{60}{2\tau}} \cong 0.84\,A_0$

$\tau \cong 168$

Quiz 3

Eine gedämpfte Schwingung sei beschrieben durch die Differenzialgleichung

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \text{wobei} \quad \gamma = 5, \quad \omega_0 = 200\pi.$$

Was ist der Gütefaktor dieser Schwingung?

a) 340

c) 536

b) 126

d) 52

Lösung: Da $\frac{\gamma}{2} = 2.5 < \omega_0 = 200\pi$, haben wir eine schwache Dämpfung.

Ferner haben wir $\gamma = 5 \ll \frac{1}{T} = f = \frac{\omega_0}{2\pi} = 100$.

Also können wir die folgende Formel verwenden:

$$Q = \frac{\omega_0}{\gamma} = \frac{200\pi}{5} = \underline{\underline{126}}$$

Quiz 4

Violinist A will mit Hilfe der korrekt gestimmten Violine von Violinist B seine Violine stimmen. Violinist B spielt den Ton C mit der Frequenz $f_B = 260\,Hz$. Violinist A spielt seinen Ton C dazu und es entsteht eine Schwebung mit Schwebungsfrequenz $f_S = 10Hz$. Violinist B versucht seine Violine zu stimmen und erhöht die Frequenz f_A. Dabei wird die Schwebung schneller.

Was war die ursprüngliche Frequenz f_A von Violinist A ?

a) 270 Hz

b) 250 Hz

c) 265 Hz

d) 245 Hz

Lösung: $\begin{cases} f_S \downarrow \Rightarrow \text{Schwebung langsamer} \Rightarrow \text{Frequenzen werden näher} \\ f_S \uparrow \Rightarrow \text{Schwebung schneller} \Rightarrow \text{Frequenzen entfernen sich} \end{cases}$

$f_A \uparrow \Rightarrow f_S \uparrow$, d.h. die Frequenzen entfernen sich. folglich ist $f_A > f_B$

$$f_S = |f_A - f_B| \underset{f_A > f_B}{=} f_A - f_B \quad \Leftrightarrow \quad f_A = f_S + f_B = 10Hz + 260Hz = \underline{\underline{270\,Hz}}$$

Prüfungsaufgabe 1

Prüfung Sommer 2020, Aufgabe 1

1. **Harmonische Schwingungen und Wellen** [$\sum 13.5$]

Die in Abb. 1 gezeigte Anordnung aus einer Masse m und zwei identischen Federn mit der selben Federkonstante k wird in Schwingung versetzt, indem die Masse zwischen den Federn aus der Ruhelage $y = 0$ in eine Lage $y_{\text{start}} < 0$ entlang der y-Richtung ausgelenkt und von dort losgelassen wird. Die Masse der Federn soll vernachlässigt werden.

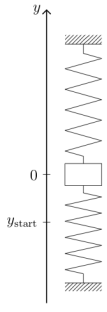


Abbildung 1 – Anordnung aus einer Masse und zwei Federn.

(a) Stellen Sie eine Differentialgleichung auf, die das dynamische Verhalten des Systems beschreibt. *Hinweis:* Benutzen Sie das vorgegebene Koordinatensystem, in dem die Ruhelage an der Koordinate $y = 0$ liegt, und vernachlässigen Sie Reibungskräfte. [2.5]

(b) Die Zeitmessung wird bei $t = 0$ in dem Moment gestartet, in dem die Masse nach dem Loslassen zum ersten Mal die Ruhelage passiert. Geben Sie unter dieser Annahme die korrekte Wahl der Konstanten $A > 0$, $\omega > 0$ und $\varphi \in [0; 2\pi)$ im Ansatz

$$y(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

an. *Hinweis:* Beachten Sie, dass Sie diejenige Lösung bestimmen sollen, bei der die Amplitude A positiv ist und die Phase φ im Bereich $[0; 2\pi)$ liegt. [3]

(c) Bestimmen Sie die Gesamtenergie des Oszillators zum Zeitpunkt $t > 0$ unter Vernachlässigung von möglichen Reibungsverlusten. [2]

Nun wird eine andere Anordnung betrachtet. Das in Abb. 2 gezeigte Seil mit Spannkraft F und linearer Dichte $\mu = 0.09\,\frac{\text{kg}}{\text{m}}$ werde bei der Koordinate $x = 0$ ab dem Zeitpunkt $t = 0$ gemäss der Gleichung

$$y(0, t) = A\sin(2\pi f t), \quad \text{für } t \geq 0$$

mit $f = 2.5\,\text{Hz}$ und $A > 0$ periodisch ausgelenkt.

Es wird angenommen, dass das Seil lang genug ist, sodass innerhalb des betrachteten Zeitintervalls keine Reflexionen am anderen Seilende berücksichtigt werden müssen.

Abbildung 2 – Seil.

An der Stelle $x = 10\,\text{m}$ wird zum Zeitpunkt $t = 0.3\,\text{s}$ die erste Auslenkung beobachtet.

(d) Mit welcher Kraft F muss das Seil demnach gespannt sein? [2]

(e) Skizzieren Sie die Auslenkung $y(x, t)$ zum Zeitpunkt $t = 0.3\,\text{s}$ für $x \in [0; 10\,\text{m}]$. Achten Sie auf eine ausreichende Beschriftung der Achsen. [2]

Nun wird die in Abb. 3 gezeigte Kombination der beiden Anordnungen betrachtet. Die durch eine anfängliche Auslenkung in Schwingung versetzte Masse dient dabei als Anregung der Seilwelle. Eine Bewegung der Masse in x-Richtung auf Grund der Spannkraft wird dabei durch eine Führungsschiene (nicht abgebildet) verhindert.

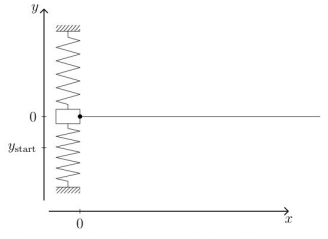


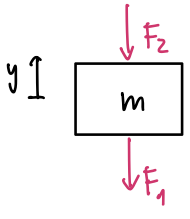
Abbildung 3 – Kombination aus Federoszillator und Seil.

(f) Wie verändert sich in dieser Anordnung Ihre Lösung zu Aufgabe 1c), selbst wenn mögliche Reibungsverluste weiterhin vernachlässigt werden? Geben Sie eine qualitative Antwort (keine Rechnung) mit Begründung. [2]

⚠ ausführlichere Lösung auf Webseite.

a) Da sich das System bei $y=0$ im Gleichgewicht befindet, können wir die Gewichtskraft vernachlässigen

Schritt 1: Freischnitt:



wobei $F_1 = k \cdot y = F_2$

Schritt 2: Differenzialgleichung aufstellen:

$$m\ddot{y} = \sum_i F_i = -F_1 - F_2 = -2ky$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{m\ddot{y} + 2ky = 0}}$$

b) Zum Zeitpunkt $t=0$ passiert die Masse zum 1. Mal nach dem loslassen die Ruhelage ($y=0$).

D.h. die Anfangsbedingungen sind:

$$\begin{cases} y(t=0) = 0 & \text{Position zum Zeitpunkt } t=0 \\ \dot{y}(t=0) = v_0 & \text{Geschwindigkeit zum Zeitpunkt } t=0 \end{cases}$$

(v_0 ?)

v_0 bestimmen: Wir haben $E_{tot} = E_{kin} + E_{pot} = \text{konstant}!$

$$E_{tot}\,(\text{bei maximaler Auslenkung}) = \underbrace{E_{kin}}_{=0} + E_{pot} = E_{pot,max} = \frac{1}{2} 2k y_{start}^2$$

$$E_{tot}\,(\text{beim passieren der Ruhelage}) = E_{kin} + \underbrace{E_{pot}}_{=0} = E_{kin,max} = \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$\Rightarrow E_{tot}\,(\text{bei maximaler Auslenkung}) \overset{!}{=} E_{tot}\,(\text{beim passieren der Ruhelage}) \quad (\text{wegen } E_{tot} \text{ konstant})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 2k \cdot y_{start}^2 = \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$\Leftrightarrow v_0^2 = \frac{2k}{m} y_{start}^2 \quad \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}\, y_{start}$$

Folglich haben wir die Anfangsbedingungen:

$$\begin{cases} y(t=0) = 0 \\ \dot{y}(t=0) = \sqrt{\frac{2k}{m}}\, y_{start} \end{cases}$$

DGL aus a): $m\ddot{y} + 2ky = 0 \quad / \div m$

$$\Leftrightarrow \ddot{y} + \frac{2k}{m} y = 0$$

$$:= \omega_0^2 \quad \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

Wir haben den Ansatz $y(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ erhalten.

Um A und φ zu bestimmen, verwenden wir die Anfangsbedingungen:

$y(t=0) = A\cos(\varphi) \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow$ 2 Möglichkeiten: $A=0$ oder $\cos(\varphi)=0$

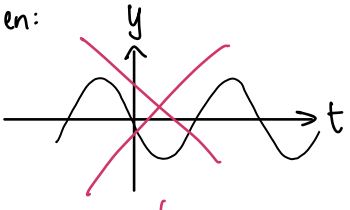
$A=0 \Rightarrow$ wir erhalten die triviale Lösung $y(t)=0$ ↯
(Wir suchen nicht nach der trivialen Lösung, denn das wäre viel zu langweilig!)

$\cos(\varphi)=0 \quad \Rightarrow \varphi = k\cdot\frac{\pi}{2}, \quad k=2n+1, \quad n\in\mathbb{N}$

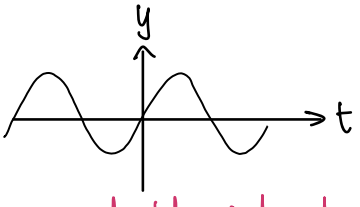
Nach Aufgabenstellung soll $\varphi \in [0, 2\pi)$ sein $\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \vee \frac{3\pi}{2}$

$\Rightarrow$ Plotten:

$\varphi = \frac{\pi}{2}$:



$\varphi = \frac{3\pi}{2}$



↳ falsch, da die Masse nach unten ausgelenkt wird und anschliessend losgelassen wird: Bei $t=0$ bewegt sich die Masse nach oben!

$\Rightarrow \varphi = \frac{3\pi}{2}$

$\dot{y}(t=0) = \left(A\cos(\omega t+\varphi)\right)\Big|_{t=0} = -\omega A\sin(\omega t+\varphi)\Big|_{t=0} = -\omega A\sin(\varphi) \overset{\varphi=\frac{3\pi}{2}}{=} \omega A \overset{!}{=} v_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}\, y_{start}$

$\Leftrightarrow A = \frac{\sqrt{\frac{2k}{m}}\, y_{start}}{\omega} = y_{start}$ (mit $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$)

Nach Aufgabenstellung soll $A>0$ sein $\Rightarrow A = -y_{start}$ (da $y_{start}<0$)

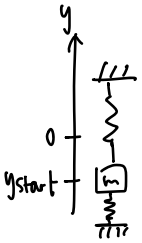
Somit erhalten wir: $y(t) = -y_{start}\cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t + \frac{3\pi}{2}\right) = -y_{start}\sin\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t\right)$

$\cos\left(x+\frac{3\pi}{2}\right) = \sin(x)$

c) Gesamtenergie: $E = E_{kin} + E_{pot} \quad \forall t.$

Berechne Gesamtenergie bei $y=y_{start}$:

Hier ist E_{pot} maximal und $E_{kin}=0$



$\Rightarrow E = E_{kin} + E_{pot} = 0 + \frac{1}{2}\cdot 2k\, y_{start}^2 = k\, y_{start}^2$

↑ Zeitunabhängig !!

d) Wir haben $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{10}{0.3}\ m/s$

Und bei Seilwellen gilt: $v = \sqrt{\frac{F}{\rho}}$ ← Seilspannung, ← Seildichte

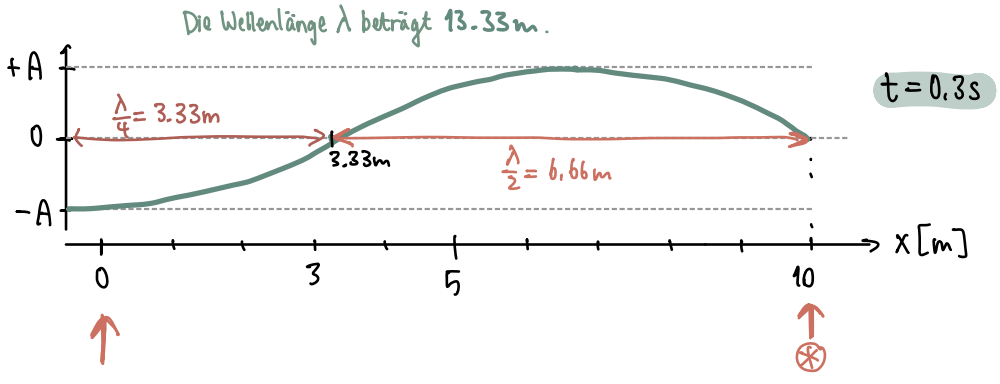
$$\Leftrightarrow F = \rho \cdot v^2 = \rho \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 = 0{,}09\ \frac{kg}{m} \left(\frac{10}{0.3}\ \frac{m}{s}\right)^2 = \underline{\underline{100\ N}}$$

e) $y(x;t)$ zum Zeitpunkt $t = 0.3s$ für $x \in [0, 10m]$ Bei $x=0$: $y(0;t) = A\sin(2\pi f t)$

1) Wellenlänge bestimmen:

Wir verwenden die Formel $\lambda = \frac{v}{f} = \frac{\sqrt{\frac{F}{\rho}}}{f} = \frac{\sqrt{\frac{100N}{0{,}09\ kg/m}}}{2{,}5\ Hz} = 13{,}33\ m$

⊛ → Bei $t = 0.3s$ haben wir an der Stelle $x = 10m$ die 1. Auslenkung



Bei $x=0$ haben wir zum Zeitpkt. $t = 0.3s$

$$y(0, t=0.3s) = A\sin(2\pi f \cdot 0.3s) = A\sin\left(2\pi \cdot \frac{25}{10} \cdot \frac{3}{10}\right) = A\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -A$$

↑ in RAD!

f) Gar nicht. Die Gesamtenergie bleibt unverändert, da diese nur von der anfänglichen Auslenkung abhängt, welche hier nicht verändert wird. Die anfangs eingeführte potentielle Energie bestimmt die Gesamtenergie und bleibt erhalten (da Reibungsverluste vernachlässigt werden).

Weitere Aufgaben zu Schwingungen:

- Serien 1 ~ 4
- alte Prüfungen: es kam bisher an fast jeder Prüfung eine Aufgabe zu Schwingungen.

Quiz 5

Welche der folgenden Funktionen ist eine gültige Wellenfunktion?

a) $\sin(kx+\omega t+2\pi)$

b) $e^{-i(k\cdot(x-vt))}$

c) $\sin(kx-\omega t)\cdot e^{-(kx+\omega t)}$

d) $\sin(kx)\cos(-\omega t)$

Lösung: Wellenfunktionen erfüllen die Wellengleichung: $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$.

Das sind alle Funktionen der Form $f(x-vt) + g(x+vt)$.

a) $\sin(kx+\omega t+2\pi) = \sin(k\cdot(x+vt)+2\pi) = g(x+vt)$ ✓ (mit $f(x-vt)=0$)

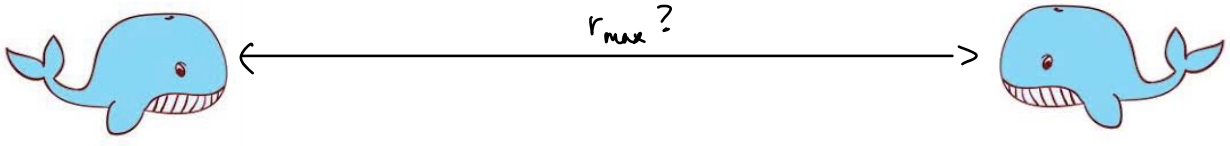
b) $e^{-i(k\cdot(x-vt))} = f(x-vt)$ ✓ (mit $g(x+vt)=0$)

c) $\sin(kx-\omega t)\cdot e^{-(kx+\omega t)} \neq f(x-vt)+g(x+vt)$ → keine Wellenfunktion

d) $\sin(kx)\cos(-\omega t) = \sin(kx)\cdot\cos(\omega t) =$ ↑ trigrule

Quiz 6

Wale können über Ultraschallwellen kommunizieren. Die Schallleistung eines "Schreis" liegt bei ca. 10 W. Wie nah müssen sich 2 Wale mind. befinden um zusammen kommunizieren zu können, falls die Wale eine Hörschwelle von 30^{-6} W/m² haben? Tipp: Nehme an, das die Wale Kugelwellen aussenden.



a) 24 km

b) 2000 km

c) 131 km

d) 31 m

Lösung: $I(r) = \frac{P_0}{4\pi r^2}$ (Kugelwelle)

$$\Rightarrow \quad r^2 = \frac{P_0}{4\pi I(r)} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{\frac{P_0}{4\pi I(r)}}$$

Setze $I(r) = 30^{-6}$ W/m² (Hörschwelle), $P_0 = 10$W

um die Distanz zu bestimmen, wo genau diese Hörschwelle erreicht wird:

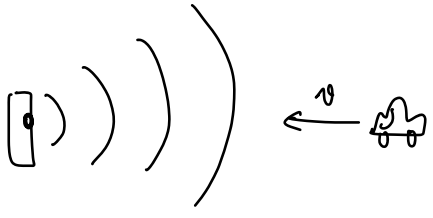
$$\Rightarrow r = \sqrt{\frac{10\text{W}}{30^{-6}\,\text{W/m}^2 \times 4\pi}} = \underline{\underline{24\text{ km}}}$$

Quiz 7

Ein Radar sendet eine Schallwelle mit einer Frequenz von $f_R = 70\,GHz$, welche von einem vorbeifahrenden Auto reflektiert und anschliessend wieder vom Radar detektiert wird.

Das Auto fahre mit der Geschwindigkeit $v = 79.2\,km/h$ auf das Radargerät zu.

Was ist die Differenz Δf zwischen ausgesendetem & detektiertem Signal?



a) 10 GHz

c) 22 kHz

b) 43 kHz

d) 30 GHz

Lösung: $79\,km/h = 22\,m/s$ $\qquad c_s = 343\,m/s$

das Auto empfängt die Frequenz

$$f_A = f_R \cdot \frac{c + v_A}{c} = 70 \times 10^9 \times \frac{343 + 22}{343} = 74.5\,GHz$$

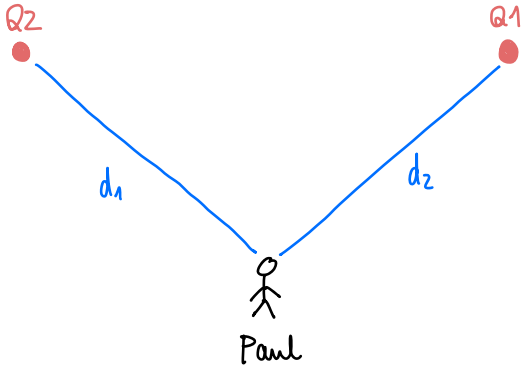
das Auto reflektiert das empfangene Signal. Da Reflexion die Frequenz nicht ändert, kann das Auto nun betrachtet werden als eine sich dem Radar annähernde Quelle, die Signale mit Frequenz $f_A = 76.7\,GHz$ aussendet. Die vom Radar empfangene Frequenz ist:

$$f_E = f_A \cdot \frac{c}{c - v_A} = 74.5\,GHz \cdot \frac{343}{343 - 22} = 80\,GHz$$

Folglich ist $\Delta f = |f_R - f_E| = |70\,GHz - 80\,GHz| = \underline{\underline{10\,GHz}}$

Quiz 8

Wir haben 2 Quellen (Quelle 1 und Quelle 2), die identische, aber Phasenversetze Wellen mit $\omega = 20\pi\,Hz$ und $k = 3m^{-1}$ absenden. Die Phasendifferenz sei $\delta = \pi$. Was ist der minimale Gangunterschied $\Delta d = d_1 - d_2$ die erforderlich ist, sodass bei Paul eine konstruktive Interferenz stattfindet?



a) 12m
b) 5m
c) 1m
d) 0.2m

Lösung: $\xi_1 = \sin(kd_1 - \omega t)$ oder +, egal da nur $|\delta_1 - \delta_2| = \pi$ angegeben.

$\xi_2 = \sin(kd_2 - \omega t - \pi)$ / $d_2 = d_1 - \Delta d$

$= \sin(k\cdot(d_1 - \Delta d) - \omega t - \pi)$

$= \sin(kd_1 - \omega t - k\cdot\Delta d - \pi)$

trigrule $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$\Rightarrow \xi_{tot} = \xi_1 + \xi_2 = 2\cos\left(\frac{1}{2}(\pi + k\cdot\Delta d)\right)\sin\left(kd_1 - \omega t + \frac{1}{2}(\delta + k\cdot\Delta d)\right)$

Term ohne t "bestimmt" ob konstruktive oder destruktive Interferenz

konstruktive Interferenz: $\frac{1}{2}(\pi + k\cdot\Delta d) = n\pi$, $n = 1, 2, \ldots$

$\Leftrightarrow \pi + k\cdot\Delta d = 2n\pi$ n=1, wir suchen für Δd minimal

$\Leftrightarrow \Delta d = \frac{2n\pi - \pi}{k} = \frac{\pi}{3} \simeq 1m$

Quiz 9

Ein mit Luft gefülltes Rohr sei an beiden Enden offen und habe die Länge $L = 1.4\,m$. Wenn man hineinbläst, können stehende Wellen entstehen (longitudinale Auslenkung der Luftmoleküle). Welche Frequenz hat die 2. Oberschwingung?

Tipp: Wir haben hier mit Schallwellen zu tun.

a) 245 Hz

b) 306.25 Hz

c) 490 Hz

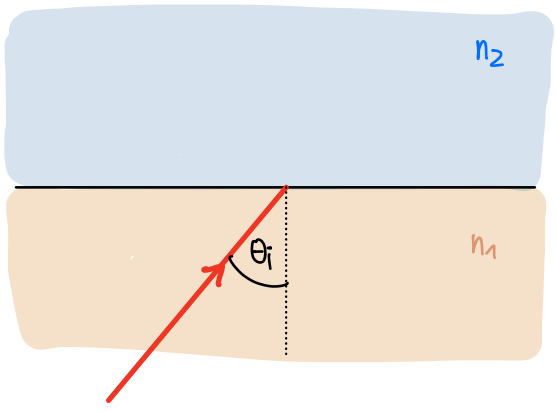
d) 367.5 Hz

Lösung: 2. Oberschwingung $\hat{=}$ 3. Harmonische $\hat{=}$ $n = 3$

2 offene Enden: $f_n = \frac{v}{2L} \cdot n = \frac{3 \times 343}{2 \times 1.4}\,Hz = \underline{\underline{367.5\,Hz}}$

$v = 343\,m/s$ (Schallwelle)
$L = 1.4\,m$
$n = 3$

Quiz 10



Ein Lichtstrahl fällt mit einem Winkel $\theta_i = 30°$ zur vertikalen zwischen 2 Medien mit $n_1 = 1.5$ und $n_2 = 1.2$ ein.

1) Was ist der Winkel θ_2 des transmittierten Lichtstrahls zur Vertikalen?

a) 39°
c) 62°
b) 45°
d) 29°

2) Ab welchem Winkel θ_i tritt Totalreflexion ein?

a) $\theta_i > 35°$
c) $\theta_i > 45°$
b) $\theta_i > 53°$
d) $\theta_i > 67°$

Lösung: 1) Snell: $\theta_t = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_i\right) = \arcsin\left(\frac{1.5}{1.2}\sin(30°)\right) = 39°$

2) Totalreflexion: $\sin\theta_t = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_i > 1$

$\Leftrightarrow \theta_i > \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = \arcsin\left(\frac{1.2}{1.5}\right) = 53°$

Prüfungsaufgabe 2

→ Prüfung Winter 2021 Aufgabe 2

2. **Stehende Welle** [$\sum 10$]
Auf einer Baustelle lagert ein mit Luft gefülltes Stahlrohr der Länge $L = 10\,\text{m}$, in dem der Wind eine Schallwelle der Luft anregt. Die Schallauslenkung werde durch die Wellengleichung

$$\xi(x,t) = A\cos(kx)\cos(2\pi ft - \psi)$$

beschrieben, wobei $x = 0$ und $x = L$ die beiden Enden des Stahlrohres bezeichnen.

(a) Welche Randbedingungen muss eine stehende Welle erfüllen, wenn das Stahlrohr an beiden Enden geöffnet ist? Leiten Sie daraus eine Bedingung an k her. [1.5]

(b) Bestimmen Sie f zunächst allgemein in Abhängigkeit von k und dann als Zahlenwert für den Fall $k = 2\pi/L$. [2]

(c) Skizzieren Sie die Einhüllende der Schallauslenkung der stehenden Schallwelle im Fall $k = 3\pi/L$. Achten Sie auf korrekte Achsenbeschriftungen. [2]

(d) Eine Katze, die nur Töne mit Frequenzen grösser als 45 Hz wahrnehmen kann, setzt sich in das an beiden Enden geöffnete Stahlrohr. Der Wind regt

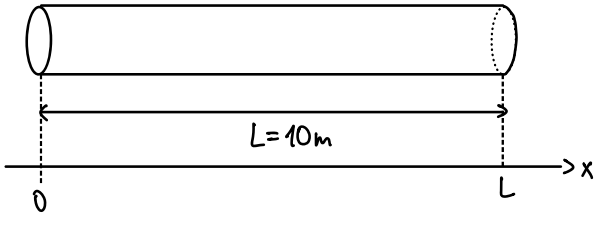
i. nur die Grundschwingung oder

ii. nur die erste Oberschwingung oder

iii. nur die zweite Oberschwingung

an. Beantworten Sie für jeden der drei Fälle mit kurzer Begründung, ob das Katzengehör einen Ton wahrnimmt, und falls ja, an welcher/n Stelle/n im Rohr der Ton am lautesten ist. Nehmen Sie idealisiert an, dass das Katzengehör nur auf Schalldruck sensitiv ist. [4.5]

Hinweis: Sie können annehmen, dass der Rohrdurchmesser ausreichend gross ist, so dass die Anwesenheit der Katze die Ausbreitung der Schallwelle nicht behindert.

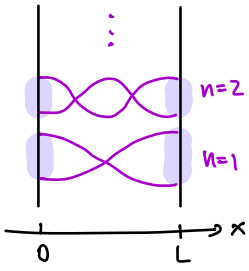


Schallwelle: $v_s = 343\,\text{m/s}$

⚠ longitudinal!

Schallauslenkung: $\xi(x,t) = A\cos(kx)\cos(2\pi ft - \psi)$

a) Beide Enden geöffnet:



Randbedingungen: $|\xi(0,t)| = |\xi(L,t)| = A_{max}$

$$\Rightarrow \xi(0,t) = |A\cos(-\psi)| \stackrel{!}{=} A_{max}$$

maximal wenn $= \pm 1$

$$\Rightarrow |\cos(-\psi)| \stackrel{!}{=} 1$$

$$\Rightarrow \psi = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \xi(L,t) = |A\cos(k\cdot L)\underbrace{\cos(2\pi f t - 2n\pi)}_{=\cos(2\pi f t)}| \stackrel{!}{=} A_{max}$$

$$\Leftrightarrow |A\cos(k\cdot L)\cos(2\pi f t)| = A_{max}$$

$$\Rightarrow |\underbrace{\cos(k\cdot L)}_{\stackrel{!}{=}\pm 1}\underbrace{\cos(2\pi f t)}_{\stackrel{!}{=}\pm 1}| \stackrel{!}{=} 1$$

(da wir den maximalen Wert wollen!)

$$\Rightarrow \cos(kL) \stackrel{!}{=} \pm 1 \Rightarrow kL = n\pi \Rightarrow \underline{\underline{k = \frac{n\pi}{L}}}$$

b) $\underline{\underline{f_n = \frac{v\cdot k_n}{2\pi}}}$

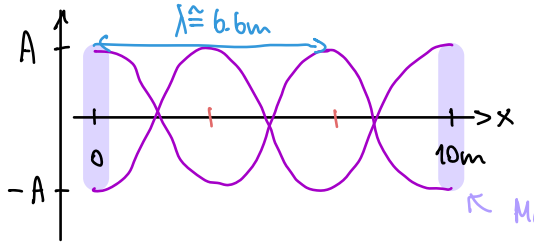
Zahlenwert für Fall $k = \frac{2\pi}{L}$: $f = \frac{v\cdot 2\pi}{2\pi L} = \frac{v}{L} = \frac{343\,m/s}{10\,m} = \underline{\underline{34.3\,Hz}}$

v (Schall) $= 343\,m/s$

c) $k = \frac{3\pi}{L} \Rightarrow f = \frac{v \cdot 3\pi}{2\pi L} = \frac{3}{2}\frac{v}{L} =$

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{v}{\frac{3}{2}\frac{v}{L}} = \frac{2}{3}L = \frac{2}{3}\cdot 10m \cong 6.6m$$

$\Rightarrow$



↖ Maximale Auslenkung an beiden Enden!

d) Katze kann nur $f > 45$ Hz wahrnehmen

$v = 343$ m/s, $L = 10$m

i) Grundschwingung: $n=1 \Rightarrow f = \frac{v}{2L} = 17.15$ Hz ↯ zu tief

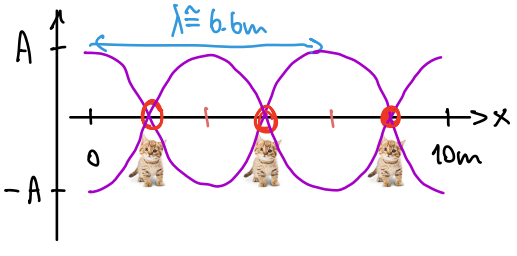
ii) 1. Oberschwingung: $n=2 \Rightarrow f = \frac{2v}{2L} = 34.3$Hz ↯ zu tief

iii) 2. Oberschwingung: $n=3 \Rightarrow f = \frac{3v}{2L} = 51.45$ Hz ✓ Katze kann einen Ton wahrnehmen!

Das Gehör nimmt Druckänderungen wahr. D.h. die Lautstärke ist bei den Knoten der Auslenkung am grössten. Why? → ✱

Bei der 2. Oberschwingung haben wir:

$\lambda = \frac{2L}{3} = \frac{2}{3}L$ → genau das was wir in c) skizziert haben!



Knoten bei $x \in \left\{\frac{L}{6}, \frac{L}{2}, \frac{5}{6}L\right\}$

$\Rightarrow$ Es ist am lautesten bei

$x \cong 1.67$m $x \cong 5$m und $x \cong 8.33$m

Skript S. 99:

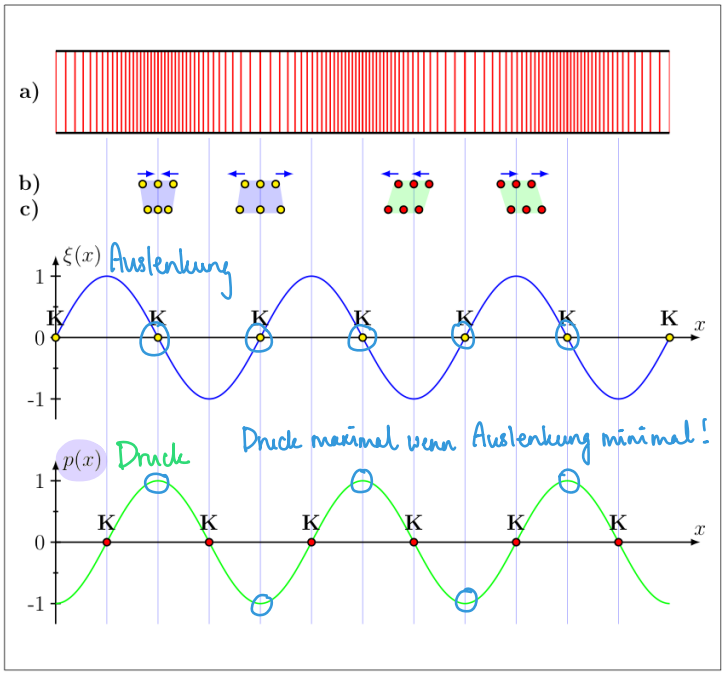


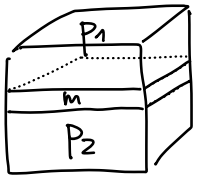
Abbildung 2.35: Druck- und Amplitudenverteilung einer stehenden Schallwelle in einem Gas zu einem festgelegten Zeitpunkt: a) Dichteverteilumg des Gases, b) Ruhelagen einiger ausgewählter Moleküle (dargestellt durch die Kugeln in der oberen Reihe) mit Richtung ihrer Auslenkung gemäss $\xi(x)$ (dargestellt durch die Pfeile und die neuen Positionen der Kugeln in der unteren Reihe). Jedes der vier Beispiele entspricht einem Ort gemäss der x-Achsen in c). Insbesondere treten die blau hinterlegten Szenarien an den Orten auf, bei denen $\xi(x)$ einen Nulldurchgang hat (Extrema des Drucks), während die grün hinterlegten an den Orten der Nulldurchgänge von $p(x)$ (Extrema der Dichte) auftreten. c) Verlauf der Auslenkung $\xi(x)$ und des Drucks $p(x)$ über dem Ort.

Weitere Aufgaben zu Wellen

- Serien 5 ~ 9.1
- alte Prüfungen: Es kam bisher an jeder Prüfung 1~2 Aufgabe(n) zu Wellen.

Quiz 11

Ein Block der Masse m dichtet eine quadratische Box mit Länge $a = 3\,cm$ ab.



Die Masse bewegt sich vertikal ohne Reibung. Unterhalb der Masse befindet sich ein Gas mit einem Druck von $p_2 = 1.2\,bar$, oberhalb ein Gas mit Druck $p_2 = 1\,bar$.

Wie gross ist die Masse m?

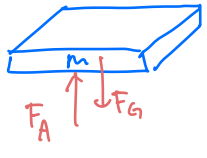
a) 2.3 kg

c) 0.93 kg

b) 1.83 kg

d) 3.33 kg

Lösung:



Im GGW gilt $F_G - F_A \doteq 0$

$\Rightarrow F_G = mg$

$F_A = A \cdot \Delta p = A \cdot (p_1 - p_2) = a^2 \cdot (p_1 - p_2)$

$\Rightarrow \quad mg - a^2 \cdot (p_1 - p_2) = 0$

$\Leftrightarrow \quad m = \frac{a^2 \cdot (p_1 - p_2)}{g} = \frac{(3 \times 10^{-2}\,m)^2 \cdot (1.2 \times 10^5\,Pa - 10^5\,Pa)}{9.81\,m/s^2} \approx 1.83\,kg$

Quiz 12

Einem Festkörper mit einer Stoffmenge von $\tilde{n} = 7$ mol werde eine Wärmemenge von $Q = 4.7$ kJ zugeführt. Um wie viel steigt die Temperatur des Festkörpers an, wenn die molare Wärmekapazität $c_M = 25 \frac{J}{K \cdot mol}$ beträgt?

a) 32.3K

c) 19.2 K

b) 49.2K

d) 26.9 K

Lösung: $Q = \tilde{n} \cdot c_M \cdot \Delta T \quad \Leftrightarrow \quad \Delta T = \frac{Q}{\tilde{n} \cdot c_M} = \frac{4.7 \times 10^3}{7 \times 25} K = \underline{26.9 \text{ K}}$

Quiz 13

In einem Behälter befindet sich $m_E = 1\,g$ Eis. Es werden $m_W = 1\,kg$ Wasser darübergegossen. Wie warm muss das Wasser Anfangs sein, damit das Eis gerade vollständig schmilzt? D.h. Endtemperatur = 0°C

a) $\frac{m_E c_W}{m_W \lambda_S} + 273.15K$

b) $\frac{m_E \lambda_S}{m_W c_W} + 273.15K$

c) $\frac{m_W c_W}{m_E \lambda_S} + 273.15K$

d) $\frac{m_W m_E}{\lambda_S c_W} + 273.15K$

Lösung: benötigte Wärme: $Q_{Eis}^{\downarrow} = m_E \lambda_S$

von Wasser abgegebene Wärme: $Q_{Wasser}^{\uparrow} = -m_W c_W \Delta T \overset{!}{=} Q_{Eis}^{\downarrow}$

$$\Delta T = T_E - T_A = -\frac{Q_{Eis}^{\downarrow}}{m_W c_W} = -\frac{m_E \lambda_S}{m_W c_W}$$

$$\Leftrightarrow T_A = \frac{m_E \lambda_S}{m_W c_W} + T_E = \frac{m_E \lambda_S}{m_W c_W} + 273.15K$$

Prüfungsaufgabe 3 → aus Prüfung Sommer 2019, Aufgabe 3

3. **Kreisprozess** [$\sum 19$] Der in Abbildung 3 gezeigte Kreisprozess eines idealen, einatomigen Gases mit Stoffmenge ν bestehe aus je zwei adiabatischen und zwei isochoren Prozessabschnitten. Der Kreisprozess werde ermöglicht durch kontrollierte Kopplung an ein einzelnes Wärmereservoir konstanter Temperatur T_{res}. Die Temperatur des Gases bei den Punkten 1 und 3 sei identisch $T_1 = T_3 = T_{\text{res}}$.

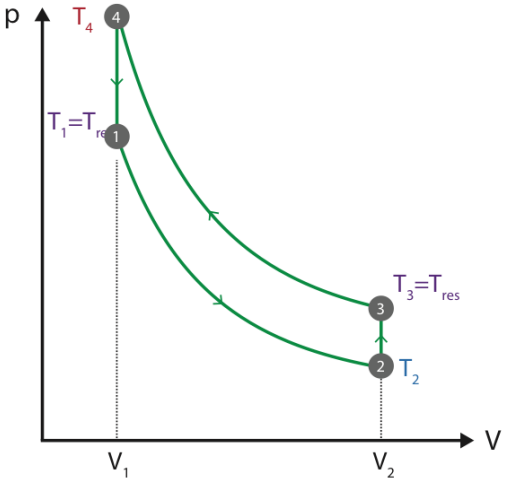


Abbildung 3 – Abbildung des Kreisprozesses im Druck-Volumen-Diagramm.

(a) Geben Sie mit obigen Angaben den numerischen Wert für den Adiabatenkoeffizienten κ sowie einen Ausdruck für die innere Energie U_1 des Gases am Punkt 1 an.

Hinweis: Verwenden Sie den Gleichverteilungssatz. [3]

(b) Bestimmen Sie die Temperaturen des Gases T_2 und T_4 and den jeweiligen Punkten 2 und 4 in Abhängigkeit von T_{res}, V_1 und V_2. [3]

Hinweis: Bei einem adiabatischen Prozess bleibt die Grösse $TV^{\kappa-1}$ konstant.

(c) Wieviel Arbeit $W_{1\to2}$ leistet die Umgebung an dem Gas auf dem Prozessabschnitt von Punkt 1 nach 2? Welches Vorzeichen hat die am Gas geleistete Arbeit während eines gesamten Zyklus des Kreisprozesses (qualitative Begründung genügt)? [4.5]

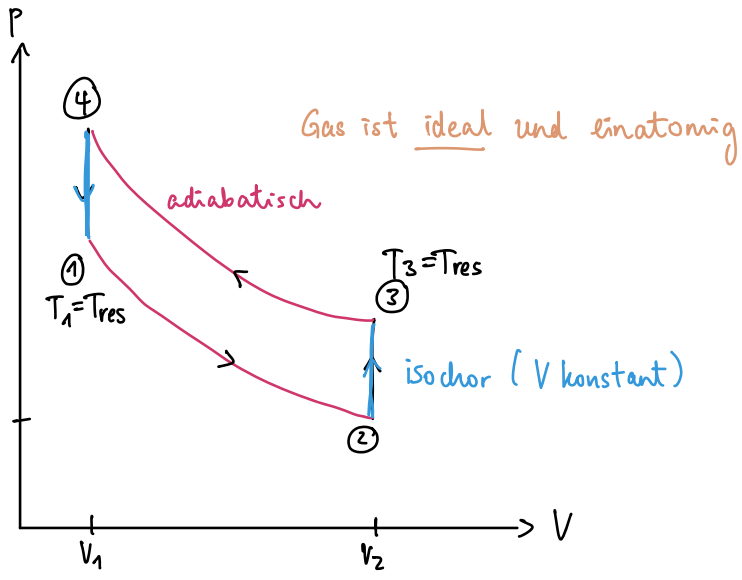
(d) Bestimmen Sie die vom Wärmereservoir an das Gas abgegebene Wärmemenge $Q_{2\to3}$ auf dem isochoren Prozessabschnitt von Punkt 2 nach 3. [2.5]

(e) Bestimmen Sie die Entropieänderung ΔS des Wärmereservoirs während eines gesamten Zyklus des Kreisprozesses. [4]

(f) Könnte der Kreisprozess mit Hilfe eines einzelnen Wärmereservoir auch in umgekehrter Richtung ablaufen? Begründen Sie Ihre Antwort. [2]

Aufgabe 3

Stoffmenge ($\tilde{n}$) $= \nu$



Gas ist ideal und einatomig

a) Adiabatenkoeffizient κ bestimmen:

Verwende Definition: $\kappa = \frac{f+2}{f} = \frac{3+2}{3} = \frac{5}{3}$

$f = 3$, da wir ein einatomiges Gas haben.

Innere Energie U_1 bestimmen:

Benutze Hinweis: Gleichverteilungssatz: $U = \frac{f}{2} pV = \frac{f}{2} \tilde{n} RT$

$$\Rightarrow U_1 = \frac{f}{2} \tilde{n} R T_1 = \frac{3}{2} \nu R T_{res}$$

($\tilde{n} = \nu$, $T_1 = T_{res}$)

b) T_2, T_4 in Abhängigkeit von T_{res}, V_1 und V_2

$\Rightarrow$ Wir verwenden die Poisson'schen Gleichungen (für adiabatische Prozesse):

① → ②: $T_1 V_1^{\kappa-1} = T_2 V_2^{\kappa-1}$

$$\Leftrightarrow T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\frac{5}{3}-1} = T_{res} \cdot \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\frac{2}{3}} = T_{res} \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\frac{2}{3}}$$

③ → ④: $T_3 V_3^{\kappa-1} = T_4 V_4^{\kappa-1}$

$$\Leftrightarrow T_4 = T_3 \cdot \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{\kappa-1} = T_{res} \cdot \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{\frac{2}{3}} = T_{res} \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\frac{2}{3}}$$

($V_3 = V_2$, $V_4 = V_1$)

c) $W_{1\to 2}^{\swarrow}$? ← Umgebung an dem Gas

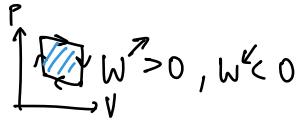
$$W_{1\to 2}^{\swarrow} = \tilde{n} c_V \Delta T = \nu \cdot \frac{f}{2} R (T_2 - T_1) = \frac{5}{2} \nu R \cdot \left(T_{res} \cdot \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\frac{2}{3}} - T_{res} \right) =$$

(↑ adiabatisch)

$$= \frac{3}{2} \nu R T_{res} \left(\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\frac{2}{3}} - T_{res} \right)$$

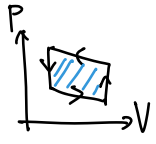
$W^{\swarrow}$ während eines gesamten Zyklus:

Die im Uhrzeigersinn orientiert eingeschlossene Fläche im pV-Diagramm entspricht der Arbeit, welche das Gas in die Umgebung verrichtet.

D.h. 

$W^{\nearrow} > 0$, $W^{\swarrow} < 0$ Da $W^{\swarrow} = -\int_{V_A}^{V_E} p dV$

Da wir hier eine im Gegenuhrzeigersinn eingeschlossene Fläche haben, dreht sich das Vorzeichen um:



$W^{\nearrow} < 0$, $W^{\swarrow} > 0$

Folglich hat hier die Arbeit, welche die Umgebung am Gas während eines gesamten Zyklus verrichtet ein positives Vorzeichen.

d) $Q_{2\to 3}^{\swarrow}$?

Isochore Zustandsänderung: $\Delta Q = \tilde{n} c_V \Delta T$

$$\Rightarrow \quad Q_{2\to 3}^{\swarrow} = \tilde{n} c_V (T_3 - T_2) = \nu \frac{f}{2} R \left(T_{res} - T_{res} \cdot \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\frac{2}{3}} \right) = \frac{3}{2} \nu R T_{res} \left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\frac{2}{3}} \right)$$

($c_V = \frac{f}{2} R$)

e) ΔS während eines gesamten Zyklus?

Zusammenfassung:

Art der Zustandsänderung:	ΔS_{System}	$\Delta S_{Umgebung}$ (= Reservoir)
Allgemein	$\int \frac{dQ^{\swarrow}(T_{sys})}{T_{sys}}$ ↑ Variable	$-\frac{1}{T_{Umg}} \int dQ(T_{Umg})$ ↑ Konstante, Endtemperatur

$$\Delta S = \cancel{\Delta S_{1\to2}} + \Delta S_{2\to3} + \cancel{\Delta S_{3\to4}} + \Delta S_{4\to1} =$$

($\Delta S_{1\to2}$ und $\Delta S_{3\to4}$: 0)

adiabatische Prozesse haben $\Delta S = 0$

$$= -\frac{1}{T_{res}} \int dQ_{Umg} - \frac{1}{T_{res}} \int dQ_{Umg} \qquad (\Delta Q = \tilde{n} c_V \Delta T)$$

Temperatur der Umgebung (konstant)

$$= -\frac{1}{T_{res}} \int_{T_2}^{T_3} \tilde{n} c_V \, dT - \frac{1}{T_{res}} \int_{T_4}^{T_1} \tilde{n} c_V \, dT$$

$$= -\tilde{n} c_V \frac{T_3 - T_2}{T_{res}} - \tilde{n} c_V \frac{T_1 - T_4}{T_{res}} = -\tilde{n} c_V \cdot \left(\frac{T_{res} - T_{res}\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\frac{2}{5}}}{T_{res}} + \frac{T_{res} - T_{res}\left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{\frac{2}{5}}}{T_{res}} \right) =$$

$T_1 = T_3 = T_{res}$

$T_2 = T_{res} \cdot \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\frac{2}{5}}$

$T_4 = T_{res} \cdot \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{\frac{2}{5}}$

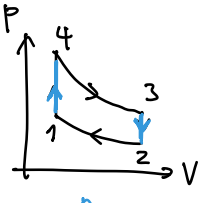
$$= -\tilde{n} c_V \cdot \left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\frac{2}{3}} + 1 - \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{\frac{2}{3}}\right) = -\tilde{n} c_V \cdot \left(2 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\frac{2}{3}}\right) =$$

$V_1 = V_4$

$V_2 = V_3$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\Delta S_{Umg} = \frac{3}{2} \nu R \left\{ \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\frac{2}{3}} - 2 \right\}}}$$

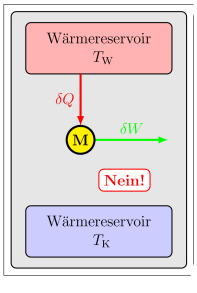
f) Ziel:



mit 1 Wärmereservoir:

↳ Das ist das pV-Diagramm einer Wärmekraftmaschine!

Nein, wegen dem Prinzip von Thompson, wie im Skript gesehen:



1. **Thomson**:
   Es gibt keine *periodisch wirkende* Vorrichtung (Maschine **M**), die es gestattet, einem Körper (Wärmereservoir) Wärme (δQ) zu entziehen und in Arbeit zu verwandeln, ohne dass Veränderungen im System oder in der Umgebung zurückbleiben.

Bem: Mit einem 2. Reservoir würde es gut funktionieren:

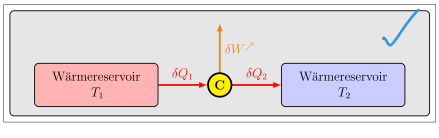


Abbildung 3.18: Prinzip einer Wärmekraftmaschine C.

Weitere Aufgaben zu Thermodynamik

- Serien 10 ~ 13
- alte Prüfungen: Es kam bisher an jeder Prüfung 1 Aufgabe zum Kreisprozess. Manchmal kommt eine random Aufgabe zu Thermodynamik.

↑ nicht wirklich vorhersehbar, deswegen: übt hier auch mit den Serien