
Abgabe: 25. April 2022

Serie 07

Aufgabe 1: Fledermäuse

Fledermäuse stossen Ultraschallschreie mit einer Frequenz von etwa 100 kHz aus und benutzen deren Echos zur Orientierung und zum Orten von Jagdbeute. Die Schalleistung eines solchen Schreies liegt zwischen 10^{-6} und 10^{-5} W. Schätzen Sie ab, aus welcher Entfernung die Fledermaus Objekte wie Bäume und Wände orten kann falls das Fledermausohr eine Hörschwelle von 10^{-12} W/m² hat.

Lösung:

Annahme: isotrope Schallabgabe (Kugelwelle)

$$\begin{aligned}\Rightarrow I(r) &= \frac{P_0}{4\pi r^2} \\ \Rightarrow r &= \sqrt{\frac{P_0}{4\pi I(r)}}\end{aligned}\tag{1}$$

Wir setzen die Intensität gleich der Hörschwelle, $I(r) = 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$, und erhalten

$$\begin{aligned}r_1 &= \sqrt{\frac{10^{-5} \text{ W}}{4\pi \cdot 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}}} \cong 892 \text{ m} \\ r_2 &= \sqrt{\frac{10^{-6} \text{ W}}{4\pi \cdot 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}}} \cong 282 \text{ m}\end{aligned}\tag{2}$$

Die Entfernung entspricht dem halben Laufweg (Hin- und Rückweg), also $892 \text{ m}/2 \cong 450 \text{ m}$ bzw. $282 \text{ m}/2 \cong 140 \text{ m}$. Man macht hierbei die Annahme, dass das Objekt den Anteil der auftreffenden Schallwelle völlig reflektiert.

Aufgabe 2: Autohupe

Ein Auto nähert sich einer schallreflektierenden Plakatwand (siehe Abbildung). Ein sich hinter dem Auto in Ruhe befindender Beobachter mit absolutem Gehör nimmt den direkt von der Hupe ausgesendeten Schall bei einer Frequenz von 745 Hz und den von der Plakatwand reflektierten Schall bei einer Frequenz von 863 Hz wahr.

- Wie schnell fährt das Auto?
- Welche Frequenz hat die Autohupe?
- Mit welcher Frequenz nimmt der Autofahrer die von der Wand reflektierte Welle wahr?

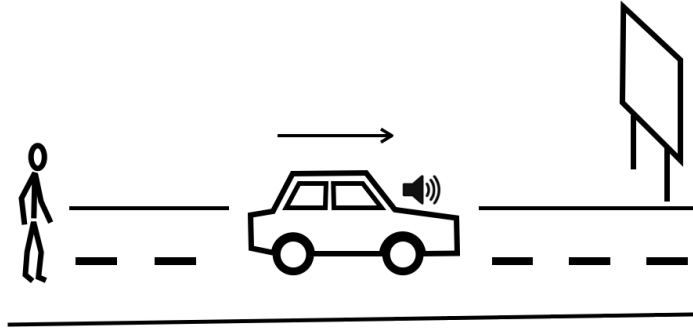


Abbildung 1: Auto und Plakatwand

Lösung: Wir verwenden die folgende Notation:

f_Q Frequenz der Quelle

f_E Frequenz beim Empfänger

v_Q Geschwindigkeit der Quelle

v_s Schallgeschwindigkeit

a) Der ruhende Beobachter hört die Frequenz

$$f_E = \frac{1}{1 + v_Q/v_s} f_Q \quad \text{von der Hupe des Autos,} \quad (3)$$

$$f_{E'} = \frac{1}{1 - v_Q/v_s} f_Q \quad \text{von der Reflektion der Hupe an der Wand.} \quad (4)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \frac{f_{E'}}{f_E} &= \frac{1 + v_Q/v_s}{1 - v_Q/v_s}, \\ \Rightarrow v_Q &= \frac{f_{E'} - f_E}{f_{E'} + f_E} v_s \approx 25.2 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 90.7 \frac{\text{km}}{\text{h}}. \end{aligned} \quad (5)$$

b) Wir lösen Gleichung (3) nach f_Q auf

$$f_Q = (1 + v_Q/v_s) f_E \approx 800 \text{ Hz} \quad (6)$$

c) Der Fahrer stellt einen sich mit der Geschwindigkeit v_Q bewegenden Beobachter dar. Die von ihm wahrgenommene Frequenz des reflektierten Schalls ist

$$f_{E''} = (1 + v_Q/v_s) f_{E'} \approx 926 \text{ Hz} \quad (7)$$

Aufgabe 3: Überlagerung von Wellen

In diesem Experiment werden zwei Wellen, die von demselben Lautsprecher erzeugt werden, überlagert, siehe Abb. 2. Die Schallwellen durchlaufen zwei unterschiedlich lange Wege bis zum Mikrophon, da einer der Wege um $2L$ verlängert werden kann. Deswegen haben die am Ort des Mikrophons erzeugten Schwingungen generell unterschiedliche Phasen. Der Lautsprecher sendet einen Ton mit einer Frequenz von $\nu = 1500 \text{ Hz}$. Die Überlagerung der Schallwellen bzw. Schwingungen wird mit einem Mikrophon aufgezeichnet, siehe Abb. 2. Zwei aufeinander folgende Minima der Amplitude werden jeweils erreicht wenn L um $d = 11.5 \text{ cm}$ erhöht wird. Bestimmen Sie daraus die Schallgeschwindigkeit.

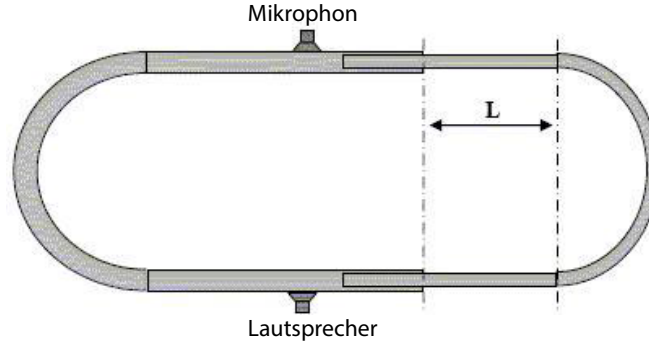


Abbildung 2: Lautsprecherexperiment

Lösung: In diesem Fall handelt es sich um eine Überlagerung von zwei Schallwellen mit identischer Amplitude und Frequenz. Durch die unterschiedlich langen Wege unterscheiden sich allerdings die Phasen der entsprechenden Schwingungen am Ort des Mikrophons.

Sei t_1 der Zeitpunkt an dem die erste Welle am Mikrophon ankommt. Die zweite Welle braucht für den längeren Weg $t_2 = t_1 + 2L/v$ mit v der Schallgeschwindigkeit. Für die überlagerte Schwingung am Ort des Mikrophons gilt daher:

$$\begin{aligned} x(t_1) &= A \left[\cos(\omega t_1 + \delta_1) + \cos \left(\omega \left(t_1 + \frac{2L}{v} \right) + \delta_1 \right) \right] \\ &= A \left[\cos(\omega t_1 + \delta_1) + \cos \left(\omega t_1 + \omega \frac{2L}{v} + \delta_1 \right) \right] \\ &= A [\cos(\omega t_1 + \delta_1) + \cos(\omega t_1 + \delta_2)] \\ &= 2A \left[\cos \left(\omega t_1 + \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} \right) \cos \left(\frac{\delta_1 - \delta_2}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

wobei $\delta_2 = \delta_1 + \omega \frac{2L}{v} = \delta_1 + 4\pi\nu \frac{L}{v}$.

Die Amplitude A' der überlagerten Schwingung ist also gegeben durch

$$A' = 2A \cos \left(\frac{\delta_1 - \delta_2}{2} \right).$$

A' ist minimal wenn $\cos(\frac{\delta_1 - \delta_2}{2}) = 0$, also wenn $\delta_1 - \delta_2 = \pi(2m + 1)$ mit $m \in \mathbb{Z}$. Also ist der Phasenunterschied $\Delta\delta$ zwischen zwei aufeinanderfolgenden Minima der Amplitude

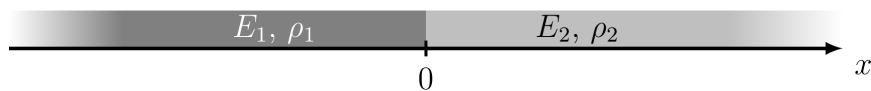
$$\Delta\delta = \pi(2(m+1) + 1) - \pi(2m + 1) = 2\pi.$$

Dies ist der Fall für $L=d$. Also gilt

$$\begin{aligned}\delta_2 - \delta_1 &= 4\pi\nu \frac{d}{v} \stackrel{!}{=} 2\pi \\ \Rightarrow v &= 2\nu d \\ &= 2 \cdot 1500 \text{ Hz} \cdot 11.5 \text{ cm} \\ &= 345 \text{ m s}^{-1}.\end{aligned}$$

Aufgabe 4: Longitudinalwellen in Metallstäben

Zwei Stäbe mit gleichem Querschnitt A_{\square} seien an der Stelle $x = 0$ verbunden. Der erste Stab habe die Dichte $\rho_1 = 9 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ und das Elastizitätsmodul $E_1 = 144 \text{ GPa}$, für den zweiten Stab gelte $\rho_2 = 20 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ und $E_2 = 80 \text{ GPa}$.



Betrachten Sie eine sich von links auf die Grenzfläche zubewegende Longitudinalwelle der Form

$$\xi_{\text{in}}(x, t) = A e^{i\omega(\frac{x}{v_1} - t)},$$

wobei ω die Kreisfrequenz bezeichnet und der Realteil von ξ_{in} der longitudinalen Auslenkung entspricht.

- a) Formulieren Sie einen allgemeinen Ansatz zur Beschreibung der an der Grenzfläche reflektierten Welle ξ_{r} und der transmittierten Welle ξ_{t} in Abhängigkeit der Amplitude A und der Kreisfrequenz ω . Berechnen Sie unter Verwendung der Randbedingungen bei $x = 0$ (Stetigkeit der Auslenkung und Energieerhaltung) den Transmissions- und den Reflektionskoeffizienten.

Lösung: Wir betrachten einen Ansatz, der neben der einfallenden Welle ξ_{in} auch eine reflektierte Welle ξ_{r} und eine transmittierte Welle ξ_{t} beschreibt

$$\begin{aligned}\xi_{\text{in}} &= A e^{i\left(\frac{\omega}{v_1}x - \omega t\right)} \\ \xi_{\text{r}} &= A_{\text{r}} e^{i\left(-\frac{\omega}{v_1}x - \omega t\right)} \\ \xi_{\text{t}} &= A_{\text{t}} e^{i\left(\frac{\omega}{v_2}x - \omega t\right)}\end{aligned}$$

und definieren den Reflektionskoeffizienten $r = \frac{A_{\text{r}}}{A_{\text{in}}}$ sowie den Transmissionskoeffizienten $t = \frac{A_{\text{t}}}{A_{\text{in}}}$, wobei $r, t \in \mathbb{R}$.

Die Randbedingung bei $x = 0$ fordert die Stetigkeit der Auslenkung zwischen den beiden Medien

$$\begin{aligned}\xi_{\text{in}}|_{x=0} + \xi_{\text{r}}|_{x=0} &= \xi_{\text{t}}|_{x=0} \\ A + A_{\text{r}} &= A_{\text{t}} \\ 1 + r &= t\end{aligned}$$

Aufgrund von Energieerhaltung muss die von ξ_{in} transportierte Leistung der von ξ_r und ξ_t transportierten Leistung entsprechen

$$\begin{aligned}\langle P_{\text{in}} \rangle &= \langle P_r \rangle + \langle P_t \rangle \\ \frac{1}{2} \rho_1 \omega^2 A^2 v_1 A_{\square} &= \frac{1}{2} \rho_1 \omega^2 A_r^2 v_1 A_{\square} + \frac{1}{2} \rho_2 \omega^2 A_t^2 v_2 A_{\square} \\ \rho_1 v_1 &= \rho_1 v_1 r^2 + \rho_2 v_2 t^2 \\ 1 &= r^2 + \frac{\rho_2 v_2}{\rho_1 v_1} t^2\end{aligned}$$

Mit $t = 1 + r$ lässt sich dieser Ausdruck vereinfachen zu

$$\begin{aligned}1 - r^2 &= \frac{\rho_2 v_2}{\rho_1 v_1} (1 + r)^2 \\ (1 - r) &= \frac{\rho_2 v_2}{\rho_1 v_1} (1 + r) \\ 1 - \frac{\rho_2 v_2}{\rho_1 v_1} &= \left(1 + \frac{\rho_2 v_2}{\rho_1 v_1}\right) r\end{aligned}$$

Wir merken an, dass wir hier durch Kürzen von $(1 + r)$ die unphysikalische Lösung $r = -1$ ausschliessen (Totalreflexion in einer Dimension ist nur im Grenzfall unendlich verschiedener Ausbreitungseigenschaften möglich), siehe auch die ausführlichere Herleitung im Skript..

Schliesslich finden wir für den Reflektions- und Transmissionskoeffizienten

$$\begin{aligned}r &= \frac{1 - \frac{\rho_2 v_2}{\rho_1 v_1}}{1 + \frac{\rho_2 v_2}{\rho_1 v_1}} = \frac{\rho_1 v_1 - \rho_2 v_2}{\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2} \\ t = 1 + r &= \frac{2\rho_1 v_1}{\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2}\end{aligned}$$

- b) Geben Sie den Intensitätspegel der reflektierten Welle relativ zur Intensität der einfallenden Welle in dB an. Nähern Sie Ihr Ergebnis mit Hilfe von $\log_{10}(2) \approx 0.3$.

Lösung: Den relativen Intensitätspegel finden wir als das Verhältnis

$$\frac{\langle I_r \rangle}{\langle I_{\text{in}} \rangle} = \frac{\rho_1 \omega^2 A_r^2 v_1}{\rho_1 \omega^2 A_{\text{in}}^2 v_1} = r^2$$

Für die Umrechnung in Dezibel erhalten wir unter Verwendung von $v_i = \sqrt{E_i/\rho_i}$ ($i = 1, 2$)

$$\begin{aligned}Q_{(I)} &= 10 \log_{10} \frac{\langle I_r \rangle}{\langle I_{\text{in}} \rangle} \text{ dB} \\ &= 10 \log_{10} r^2 \text{ dB} = 20 \log_{10} |r| \text{ dB} = 20 \log_{10} \frac{-\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2}{\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2} \text{ dB} \\ &= 20 \log_{10} \frac{-\sqrt{\rho_1 E_1} + \sqrt{\rho_2 E_2}}{\sqrt{\rho_1 E_1} + \sqrt{\rho_2 E_2}} \text{ dB} \\ &= 20 \log_{10} \frac{\sqrt{20000 \text{ kg/m}^3 \cdot 80 \cdot 10^9 \text{ Pa}} - \sqrt{9000 \text{ kg/m}^3 \cdot 144 \cdot 10^9 \text{ Pa}}}{\sqrt{20000 \text{ kg/m}^3 \cdot 80 \cdot 10^9 \text{ Pa}} + \sqrt{9000 \text{ kg/m}^3 \cdot 144 \cdot 10^9 \text{ Pa}}} \text{ dB} \\ &= 20 \log_{10} \frac{40 - 36}{40 + 36} \text{ dB} = 20 \log_{10} \frac{1}{19} \text{ dB} \\ &\approx -20(\log_{10}(10) + \log_{10}(2)) \text{ dB} \approx -26 \text{ dB}\end{aligned}$$