

Abgabe: 14. März 2021

## Serie 02

### Aufgabe 1: LC-Schwingkreis

Wir betrachten einen Stromkreis bestehend aus einer Spule, einem Kondensator und einem Schalter (siehe Abbildung 1). Auf der oberen Platte des Kondensators befindet sich die Ladung  $Q_0$ . Zum Zeitpunkt  $t = 0$  wird der Schalter geschlossen. Der Kondensator entlädt sich, und die Ladung beginnt durch die Spule zu fließen.

- a) Berechnen Sie den zeitlichen Verlauf der Ladung  $Q(t)$ .

*Hinweis: Wenden Sie die Kirchhoff'sche Maschenregel auf die Kondensatorspannung  $U_C = Q/C$  und die induzierte Spulenspannung  $U_L = L \frac{dI}{dt}$  an.*

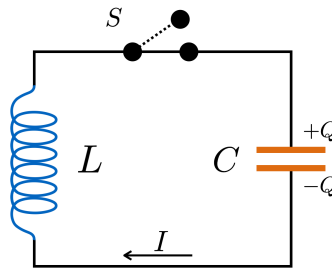


Abbildung 1: LC Schwingkreis

### Lösung:

- a) Wir benutzen die Kirchhoff'sche Maschenregel und setzen die Ausdrücke für Kondensatorspannung und Spulenspannung ein,

$$\begin{aligned}
 U_L + U_C &= 0 \\
 \Rightarrow L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} &= 0 \\
 \Rightarrow L \frac{d}{dt} \left( \frac{dQ}{dt} \right) + \frac{Q}{C} &= 0 \\
 \Rightarrow L \ddot{Q} &= -\frac{1}{C} Q \\
 \Rightarrow \ddot{Q} &= -\underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega^2} Q
 \end{aligned} \tag{1}$$

Da der Schalter anfangs geschlossen ist, ist der Strom  $\dot{Q}$  anfangs Null und die Ladung auf dem Kondensator entsprechend maximal. Dies führt uns direkt zu folgender Lösung der Differentialgleichung

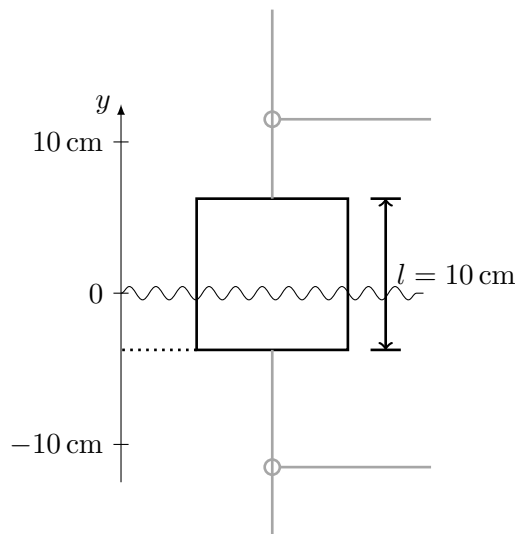
$$Q(t) = Q_0 \cos \omega t \quad (2)$$

$$\text{mit } \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (3)$$

Etwas formaler erhalten wir diese Lösung, in dem wir den allgemeinen Ansatz  $Q(t) = Q_1 \cos \omega t + Q_2 \sin \omega t$  zur Lösung der Differentialgleichung des harmonischen Oszillators verwenden. Durch Einsetzen dieses Ansatzes in die Differentialgleichung erhalten wir  $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ . Die Anfangsbedingungen  $Q(t=0) = Q_0$  und  $\dot{Q}(t=0) = I = 0$  legen die Konstanten zu  $Q_1 = Q_0$  und  $Q_2 = 0$  fest.

## Aufgabe 2: Schwingung eines Holzwürfels im Wasser [ $\sum 16$ ]

Wir betrachten den folgenden Versuchsaufbau aus einem Holzwürfel der Kantenlänge  $l = 10 \text{ cm}$  und Dichte  $\rho_H = 650 \text{ kg m}^{-3}$  in einem Wasserbecken. Durch eine Führungsstange, deren Masse und Volumen vernachlässigt werden kann, wird sichergestellt, dass sich das Holz nur in vertikaler Richtung bewegen kann (in grau dargestellt). Das Wasserbecken sei ausreichend gross, so dass Änderungen des Wasserstandes vernachlässigt werden können. Die Position der Unterseite des Würfels relativ zur Wasseroberfläche werde mit  $y(t)$  bezeichnet.



Wir betrachten den Fall, dass der Würfel stets teilweise ins Wasser eintaucht, also nie komplett auftaucht und nie komplett untertaucht.

Zunächst soll Reibung vernachlässigt werden.

- a) Drücken Sie die beiden Kräfte, die auf den Holzwürfel wirken, durch gegebene Größen und/oder bekannte Konstanten aus. [2]

**Hinweis:** Die Auftriebskraft entspricht der Gewichtskraft des verdrängten Wassers und ist eine Funktion von  $y$ .

**Lösung:** Die Gewichtskraft ist

$$F_G = -m_H g \text{ [0.5]} = -\rho_H l^3 g. \text{ [0.5]}$$

(Als Lösung wird es hier auch akzeptiert, wenn der Betrag der Gewichtskraft  $|F_G|$  ohne Vorzeichen angegeben werden. Dann muss in der folgenden Teilaufgabe eine Differenz  $F_A - |F_G|$  gebildet werden.)

Die Auftriebskraft ist

$$F_A = V_{\text{verdrängt}} \rho_{\text{Wasser}} g \text{ [0.5]} = (-y) l^2 \rho_{\text{Wasser}} g \text{ [0.5]}$$

- b) Stellen Sie für die Position der Unterseite des Holzwürfels  $y(t)$  eine Differentialgleichung in der Form  $\ddot{y} = -\alpha y - \beta$  auf. Berechnen Sie  $\alpha$  und  $\beta$  für die gegebenen Zahlenwerte. [2]

**Lösung:** Die Beschleunigung in  $y$ -Richtung ergibt mit Hilfe des 2. Newton'schen Gesetzes aus der Summe der Gewichtskraft und der Auftriebskraft:

$$m_H \ddot{y} = F_G + F_A \text{ [0.5]} = -m_H g + (-y) l^2 \rho_{\text{Wasser}} g$$

Aufgelöst nach  $\ddot{y}$  lautet die Differentialgleichung

$$\ddot{y} = -g - \frac{\rho_{\text{Wasser}} l^2 g}{m_H} y = -g - \frac{\rho_{\text{Wasser}} l^2 g}{\rho_H l^3} y = -\frac{\rho_{\text{Wasser}} g}{\rho_H} y - g \text{ [0.5]}$$

Mit den gegebenen Zahlenwerten folgt

$$\alpha = \frac{\rho_{\text{Wasser}} g}{\rho_H} \approx 151 \text{ s}^{-2} \text{ [0.5]}$$

und

$$\beta = g = 9.81 \text{ m s}^{-2} \text{ [0.5]}$$

- c) Geben Sie einen Ausdruck für die Kreisfrequenz  $\omega_0$  des Oszillators an und berechnen Sie die zugehörige Periodendauer  $T_0$ . [1.5]

**Lösung:** Die Kreisfrequenz lässt sich direkt aus der Differentialgleichung ablesen:

$$\omega_0 = \sqrt{\alpha} \text{ [0.5]} = \sqrt{\frac{\rho_{\text{Wasser}} g}{\rho_H}} \approx 12.3 \text{ s}^{-1} \approx 2\pi \cdot 1.96 \text{ Hz.}$$

Für die Periodendauer ergibt sich

$$T = 2\pi/\omega_0 \text{ [0.5]} \approx 0.51 \text{ s. [0.5]}$$

- d) Berechnen Sie die  $y$ -Koordinate der Ruhelage  $y_{\text{gg}}$ . [1.5]

**Lösung:** Im Gleichgewichtspunkt gilt  $\ddot{y} = 0$  und somit

$$0 = -\frac{\rho_{\text{Wasser}} g}{\rho_H} y_{\text{gg}} - g \text{ [0.5]}$$

Daraus folgt

$$y_{\text{gg}} = -\frac{\rho_{\text{H}} l g}{\rho_{\text{Wasser}} g} = -\frac{\rho_{\text{H}}}{\rho_{\text{Wasser}}} l \quad [0.5]$$

(alternativ:  $y_{\text{gg}} = -\beta/\alpha$ ).

Durch Einsetzen der Zahlenwerte erhalten wir

$$y_{\text{gg}} = -\frac{650}{1000} 10 \text{ cm} = -6.5 \text{ cm}. \quad [0.5]$$

- e) Der Holzwürfel wird aus einer Anfangsposition  $y(0) = y_0$  mit der Anfangsgeschwindigkeit  $\dot{y}(0) = 0$  losgelassen. In welchem Intervall muss  $y_0$  liegen, damit die Annahme erfüllt ist, dass der Würfel stets teilweise ins Wasser eintaucht, also nie komplett auftaucht und nie komplett untertaucht? Begründen Sie Ihre Antwort. [2]

**Lösung:** Der Würfel taucht komplett auf, wenn er sich 6.5 cm über der Gleichgewichtslage befindet und er taucht komplett unter, wenn er sich  $10 \text{ cm} - 6.5 \text{ cm} = 3.5 \text{ cm}$  unterhalb der Gleichgewichtslage befindet. [0.5]

Die Amplitude darf also maximal 3.5 cm betragen. [0.5]

Die Amplitude ist gleich dem anfänglichen Abstand vom Gleichgewichtspunkt  $y_0 - y_{\text{gg}}$  (weil die Anfangsgeschwindigkeit 0 ist und somit die maximale Auslenkung gleich der Anfangsauslenkung ist).

Demnach muss

$$-10 \text{ cm} \stackrel{[0.5]}{<} y_0 \stackrel{[0.5]}{<} -3 \text{ cm}$$

gelten.

- f) Es soll nun eine neue Koordinate  $\tilde{y}$  eingeführt werden, so dass wir eine homogene Differentialgleichung erhalten. Geben Sie an, wie  $\tilde{y}$  hierzu definiert werden muss. [0.5]

**Lösung:**  $\tilde{y} = y - y_{\text{gg}}$  [0.5]

Um von nun an die Reibung zu berücksichtigen, modifizieren wir die Differentialgleichung zu  $\ddot{\tilde{y}} = -\alpha\tilde{y} - \gamma\dot{\tilde{y}}$ .

- g) Für welche Werte von  $\gamma$  liegt ein schwach gedämpfter Oszillator vor? [2]

**Lösung:** Die charakteristische Gleichung lautet

$$\lambda^2 + \gamma\lambda + \alpha \quad [0.5]$$

mit den Lösungen

$$\lambda_{1/2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \alpha}. \quad [0.5]$$

Schwache Dämpfung liegt vor, wenn der Radikand negativ ist, [0.5] d.h. für  $\gamma^2 < 4\alpha$ . [0.5]  $\Leftrightarrow \gamma < 2\sqrt{\alpha}$ .

- h) Geben Sie  $\tilde{y}(t)$  für den Fall von schwacher Dämpfung an. Verwenden Sie den Anfangszustand  $\tilde{y}(0) = \tilde{y}_0$  und  $\dot{\tilde{y}}(0) = 0$  und drücken Sie Ihr Ergebnis durch  $\tilde{y}_0$ ,  $\alpha$  und  $\gamma$  aus. [4.5]

**Lösung:** Der allgemeine Lösungsansatz für die schwach gedämpfte Schwingung lautet

$$\tilde{y}(t) = (C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)) e^{-\rho t} \quad [0.5]$$

mit  $\rho = \gamma/2$  [0.5] und  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \rho^2}$  [0.5]  $= \sqrt{\alpha - \gamma^2/4}$ . [0.5]

Aus  $\tilde{y}(0) = \tilde{y}_0$  folgt

$$\tilde{y}_0 = (C_1 \cos(0) + 0) e^0 \quad [0.5] \quad \Rightarrow \quad C_1 = \tilde{y}_0. \quad [0.5]$$

Aus  $\dot{\tilde{y}}(0) = 0$  folgt dann

$$\begin{aligned} 0 &= \omega(-C_1 \sin(0) + C_2 \cos(0)) e^0 + (C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0)) (-\rho) e^0 \quad [0.5] \\ \Rightarrow \quad C_2 &= \frac{\rho}{\omega} C_1 = \frac{\gamma}{2\omega} C_1. \quad [0.5] \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\tilde{y}(t) = \tilde{y}_0 \left( \cos \left( \sqrt{\alpha - \frac{\gamma^2}{4}} t \right) + \frac{\gamma}{2\sqrt{\alpha - \gamma^2/4}} \sin \left( \sqrt{\alpha - \frac{\gamma^2}{4}} t \right) \right) e^{-\frac{\gamma}{2} t} \quad [0.5]$$