

Abgabe: 7. März 2022

## Serie 01

### Aufgabe 1: Masse an einer Feder

Eine Masse  $M = 2\text{ kg}$  hängt an einer Feder mit vernachlässigbarer Masse und Federkonstante  $k = 100\text{ N/m}$ . Auf die Masse wirkt die in negative  $y$ -Richtung gerichtete Gravitationsbeschleunigung  $g$ , siehe Abbildung 1.

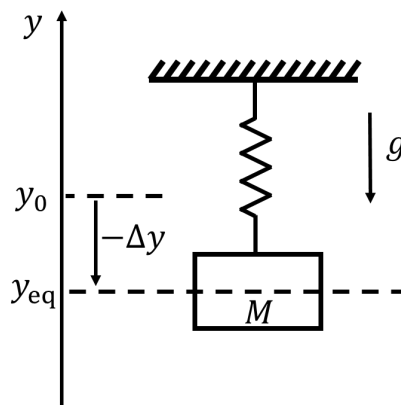


Abbildung 1: Masse an einer vertikal aufgehängten Feder

- Die Position am Ende der Feder, wenn keine Masse an ihr hängt, sei  $y_0$ . Um welche Distanz  $(-\Delta y)$  wird die Feder gestreckt wenn wir die Masse anhängen?
- Finden Sie einen Ausdruck für die kinetische Energie als Funktion der Zeit, wenn die Masse zum Zeitpunkt  $t = 0$  von einer Distanz  $+\Delta y$  über diesem neuen Gleichgewichtspunkt  $y_{\text{eq}}$  aus dem Ruhezustand ( $\dot{y} = 0$ ) losgelassen wird. Stellen Sie dazu die zugehörige Differentialgleichung auf und lösen Sie diese mit einem passenden Ansatz. Setzen Sie die Anfangsbedingungen ein, um die Zeitabhängigkeit der Auslenkung  $y(t) = \dots$  zu erhalten. Bestimmen Sie anschliessend die kinetische Energie  $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}m\dot{y}^2$ .

*Hinweis: Setzen Sie Zahlen (immer!) erst am Ende ein.*

### Lösung:

- Wir berechnen den neuen Gleichgewichtspunkt mit dem zweiten Newtonschen Gesetz:

$$M\ddot{y} = \sum F = -Mg - k(y - y_0) \quad (1)$$

Im Gleichgewicht ist die Summe der Kräfte gleich null,  $\sum F = 0$ , deshalb gilt

$$-\Delta y = y_{\text{eq}} - y_0 = -\frac{Mg}{k}, \quad (2)$$

wobei  $y_{\text{eq}}$  der neue Gleichgewichtspunkt ist. (Hier steht der Subskript von  $y_{\text{eq}}$  für Englisch *equilibrium*. Auf Deutsch ist auch die Bezeichnung  $y_{\text{gg}}$  für *Gleichgewicht* üblich.)

b) Die kinetische Energie ist gegeben durch:

$$E_{\text{kin}} = \frac{p^2}{2M} = \frac{M\dot{y}^2}{2}. \quad (3)$$

Um  $\dot{y}$  zu finden, verwenden wir erneut

$$M\ddot{y} = -Mg - k(y - y_0), \quad (4)$$

aus (??) mit den Anfangsbedingungen

$$y(t=0) = y_{\text{eq}} + \Delta y, \quad (5)$$

$$\dot{y}(t=0) = 0. \quad (6)$$

Die Inhomogenität in dieser Gleichung  $(-Mg + ky_0)$  führt lediglich zu einer Verschiebung der Lösung. Wir könnten der Inhomogenität Rechnung tragen, indem wir das homogene Problem lösen und dann eine spezielle Lösung für die inhomogene DGL hinzuaddieren. Alternativ werden wir hier die Koordinate  $y$  transformieren, damit sie ihren Ursprung im Gleichgewichtspunkt hat. Mit  $y' = y - y_{\text{eq}}$  und

$$-Mg - k((y' + y_{\text{eq}}) - y_0) = -ky' - \underbrace{Mg - k(y_{\text{eq}} - y_0)}_{=0, \text{ siehe a)}} = -ky' \quad (7)$$

erhalten wir somit den reduzierten Ausdruck

$$M\ddot{y}' = -ky' \quad (8)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$y'(t=0) = +\Delta y, \quad (9)$$

$$\dot{y}'(t=0) = 0. \quad (10)$$

Was folgt ist das Standardvorgehen zur Lösung von beliebigen Differentialgleichungen: Zuerst brauchen wir einen passenden Ansatz. Wir erkennen an der Form  $\ddot{y}' = -\omega^2 y'$  die Gleichung für den harmonischen Oszillator. Wir benutzen daher den Ansatz

$$y'(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t). \quad (11)$$

Wir setzen unseren Ansatz in die Differentialgleichung ein:

$$M(-A\omega^2 \cos(\omega t) - B\omega^2 \sin(\omega t)) = -k(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)), \quad (12)$$

$$-M\omega^2 y'(t) = -ky'(t) \quad (13)$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir die Kreisfrequenz:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}} \quad (14)$$

wobei wir die negative Lösung der Wurzel ignorieren können, weil dem Vorzeichen durch die Koeffizienten  $A$  und  $B$  Rechnung getragen werden kann.

Als nächstes setzen wir die Anfangsbedingungen ein, um die Koeffizienten  $A$  und  $B$  zu bestimmen:

$$y'(t=0) = +\Delta y \Rightarrow A = \Delta y, \quad (15)$$

$$\dot{y}'(t=0) = 0 \Rightarrow B\omega^2 = 0. \quad (16)$$

Wir ignorieren die triviale Lösung  $\omega = 0$  und setzen daher  $B = 0$ . Wir erhalten somit folgende Lösung:

$$y'(t) = \Delta y \cos\left(\sqrt{\frac{k}{M}} \cdot t\right). \quad (17)$$

Die Geschwindigkeit ist gegeben durch

$$\dot{y}'(t) = -A\omega \sin(\omega t), \quad (18)$$

und wir erhalten für die kinetische Energie

$$E_{\text{kin}} = \frac{M\dot{y}^2}{2}, \quad (19)$$

$$= \frac{1}{2}\Delta y^2 \cdot k \sin^2\left(\sqrt{\frac{k}{M}} \cdot t\right), \quad (20)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(Mg)^2}{k} \sin^2\left(\sqrt{\frac{k}{M}} \cdot t\right). \quad (21)$$

Am Ende setzen wir die Zahlen ein. Das Einsetzen von Zahlen erst am Ende der Berechnung ist gute Praxis, da man davor einen symbolischen Ausdruck für die Lösung erhält. Damit erhalten wir ein besseres Verständnis für die Lösung und können mögliche Fehler besser erkennen. (Auch in Prüfungen kann ein Teil der Punkte Punkte trotz Fehler gegeben werden, wenn der finale Ausdruck nicht aus einer Mischung Zahlen besteht, sondern aus Symbolen, die Sinn ergeben.)

$$E_{\text{kin}} = 2\text{J} \cdot \sin^2\left(\sqrt{50}\text{s}^{-1}t\right) \quad (22)$$

## Aufgabe 2: Kieselstein auf einem Sprungbrett

Ein Sprungbrett schwingt in harmonischer Schwingung mit einer Frequenz von einer Periode pro Sekunde. Wie gross ist die maximale Amplitude, mit der das Brettende schwingen darf, ohne dass ein dort liegender Kieselstein während der Schwingung den Kontakt mit dem Sprungbrett verliert? Hängt diese maximale Amplitude von der Masse des Steins ab? Argumentieren Sie wieso (nicht).

**Lösung:** Da der Stein sich oberhalb des Bretts befindet, verliert er den Kontakt, wenn das Brett stärker in negative Richtung (nach unten) beschleunigt wird als der Stein selbst. Im Fall, in dem der Stein den Kontakt verliert, wirkt auf ihn nur die Erdbeschleunigung  $g$ .

Anmerkung: Falls die Beschleunigung des Bretts in negative Richtung geringer ist als  $g$  oder das Brett in positive Richtung beschleunigt wird, so wirkt vom Brett auf den Stein eine Normalkraft, die dazu führt, dass der Stein die gleiche Beschleunigung erfährt wie das Ende des Bretts.

Das Ende des Sprungbretts schwingt harmonisch gemäss

$$z(t) = z_0 \sin \omega t. \quad (23)$$

Die Beschleunigung des Bretts ist

$$\ddot{z}(t) = -\omega^2 z_0 \sin \omega t. \quad (24)$$

Den grössten negativen Wert nimmt die Beschleunigung dann an, wenn die Auslenkung den grössten positiven Wert annimmt, siehe Abbildung ???. Wenn wir also sicherstellen, dass der Stein am oberen Umkehrpunkt des Sprungbretts nicht abhebt, kann er auch an keinem anderen Punkt abheben.

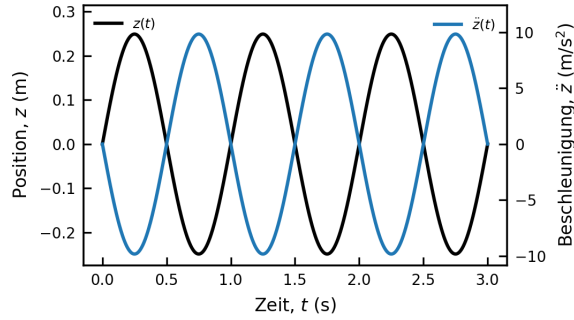


Abbildung 2:  $z(t)$  und  $\ddot{z}(t)$ , beispielhaft für den Fall  $z_0 = 24.9 \text{ cm}$ , in dem die maximale Beschleunigung den Wert  $g$  erreicht.

Damit der Stein am oberen Umkehrpunkt nicht abhebt, darf die Beschleunigung des Bretts dort betragsmässig nicht grösser als  $g$  sein. Die Beschleunigung am oberen Umkehrpunkt ist

$$\ddot{z}(t = t_u = \pi/(2\omega)) = -\omega^2 z_0. \quad (25)$$

Somit haben wir die Bedingung

$$\omega^2 z_0 < g \quad (26)$$

$$\Leftrightarrow z_0 < g/\omega^2 = \frac{g}{(2\pi f)^2} = \frac{9.81 \text{ m/s}^2}{(2\pi \cdot 1 \text{ s}^{-1})^2} \approx 24.9 \text{ cm}. \quad (27)$$

Diese maximale Amplitude hängt nicht von der Masse des Steins ab. Grund hierfür ist, dass wir eine Bedingung an eine Beschleunigung haben, welche aus einem Gravitationsfeld resultiert. In diesem Fall ist die Beschleunigung unabhängig von der Masse.