
Abgabe: 23. Mai 2022

Serie 11

Aufgabe 1: Adiabatische Kompression

Ein ideales Gas wird adiabatisch von $p_1 = 1 \text{ bar}$, $V_1 = 4 \text{ l}$ und $T_1 = 0^\circ \text{C}$ auf $p_2 = 10 \text{ bar}$ und $V_2 = 1 \text{ l}$ komprimiert.

- Berechnen Sie den Adiabatenkoeffizient γ für dieses Gas. Handelt es sich bei dem Gas um ein mono-, bi- oder polyatomares Gas?
- Berechnen Sie die Temperatur nach der Kompression.

Lösung:

- Bei der (reversiblen) adiabatischen Kompression eines idealen Gases gilt folgender Zusammenhang zwischen p und V :

$$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma, \quad (1)$$

und deshalb

$$\begin{aligned} \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\gamma &= \frac{p_2}{p_1} \implies \ln\left(\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\gamma\right) = \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) \\ \implies \gamma &= \frac{\ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)}{\ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)} = \frac{\ln\left(\frac{10 \text{ bar}}{1 \text{ bar}}\right)}{\ln\left(\frac{4 \text{ l}}{1 \text{ l}}\right)} = \frac{\ln(10)}{\ln(4)} \approx 1.66 = \frac{5}{3} \end{aligned} \quad (2)$$

Der Zusammenhang zwischen γ und der Anzahl Freiheitsgrade f ist:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{R\left(\frac{f}{2} + 1\right)}{R\frac{f}{2}} \quad (3)$$

$$\implies f = \frac{2}{\gamma - 1} = \frac{2}{\frac{5}{3} - 1} = 3 \quad (4)$$

Die Anzahl Freiheitsgrade ist $f = 3$ für einatomige Gase (hier der Fall), $f = 5$ für zweiatomige Gase, und $f = 6$ für dreiatomige Gase.

- Wir benutzen die ideale Gasgleichung für beide Zustände,

$$p_1 V_1 = \tilde{n} R T_1 \quad (5)$$

$$p_2 V_2 = \tilde{n} R T_2 \quad (6)$$

und erhalten

$$T_2 = \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} T_1 = \frac{10 \text{ bar} \cdot 1 \text{ l}}{1 \text{ bar} \cdot 4 \text{ l}} 273 \text{ K} = 273 \cdot 2.5 \text{ K} = 682.5 \text{ K} \quad (7)$$

Aufgabe 2: Messung des Adiabatenkoeffizienten (Methode nach Clément-Desormes)

Das Verhältnis der spezifischen Wärmekapazitäten bei konstantem Druck c_p und bei konstantem Volumen c_V wird Adiabatenkoeffizient $\gamma = \frac{c_p}{c_V}$ genannt. Er kann beispielsweise mit dem Versuch von Clément und Desormes experimentell bestimmt werden.

Dazu nehme man eine Gasflasche mit Volumen V . Über ein Ventil lässt sich mit einer Pumpe ein Überdruck Δp_1 gegenüber dem Umgebungsdruck p_0 erzeugen. Die Flasche habe ferner ein angeschlossenes U-Rohr mit einer Flüssigkeit, um den in ihr herrschenden Druck zu messen. Wartet man nun hinreichend lange, stellt sich ein thermisches Gleichgewicht (Temperatur T_0) mit der Umgebung ein. Wird nun das Ventil kurz geöffnet, erfolgt eine adiabatische Zustandsänderung von $(p_0 + \Delta p_1, T_0)$ zu (p_0, T_1) ¹. Anschließend beobachtet man einen erneuten (isochoren) Druckanstieg Δp_2 bis die Temperatur wieder T_0 beträgt. Nehmen Sie an, dass es sich um ein ideales Gas handelt.

- a) Zeichnen Sie diese Vorgänge in ein pV -Diagramm ein. Beginnen Sie mit dem Zustand, bei dem der erste Überdruck Δp_1 in der Flasche herrscht und das thermische Gleichgewicht mit der Umgebung sich eingestellt hat. In welche Richtung ändert sich die Temperatur der Luft beim Druckausgleich?
- b) Zeigen Sie, dass der Adiabatenkoeffizient durch die Druckunterschiede Δp_1 und Δp_2 gegeben ist als

$$\gamma = \frac{\Delta p_1}{\Delta p_1 - \Delta p_2}$$

unter den Annahmen, dass $\Delta p_1 \ll p_0$ und $\Delta p_2 \ll p_0$ ist.

Hinweis: Benutzen Sie die Poissonsche Gleichung $p^{1-\gamma} T^\gamma = \text{const}$, die man aus der Adiabatangleichung und dem idealen Gasgesetz erhält.

Lösung:

- a) Abbildung ?? zeigt vier Zustände: Um den ersten Zustand (1) zu erreichen, wird wie in der Aufgabe beschrieben durch Pumpen der Druck erhöht und das Eintreten des thermischen Gleichgewichts mit der Umgebung abgewartet. Es erfolgt nun eine adiabatische Expansion gegen den Aussendruck, wodurch der Druck wieder auf den Ursprungsdruck p_0 sinkt (Zustand (2)). Gleichzeitig sinkt die Temperatur, da durch die Expansion die innere Energie sinkt. Nach dem Druckausgleich und Schliessen des Ventils haben wir wieder den ursprünglichen Druck im Volumen der Flasche (Zustand (3)). Durch den Temperatúrausgleich hin zu Zustand (4) steigt wiederum der Druck um Δp_2 .
- b) Für die adiabatische Expansion gilt die Poissonsche Gleichung für Druck und Temperatur

$$p^{1-\gamma} T^\gamma = \text{const}$$

¹Bedenken Sie, dass auch das Schliessen des Ventils eine Zustandsänderung darstellt.

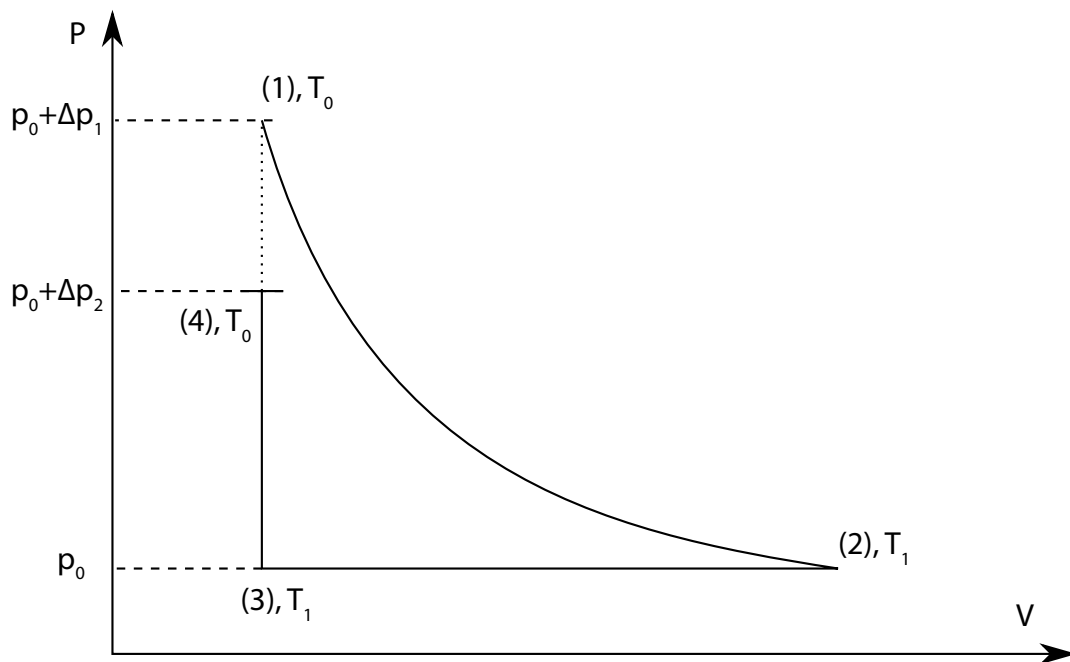


Abbildung 1: Das pV -Diagramm für den Versuch nach Clément-Desormes.

Wir bilden das totale Differential

$$0 = d(p^{1-\gamma}T^\gamma) \quad (8)$$

$$= (1-\gamma)p^{-\gamma}T^\gamma dp + \gamma p^{1-\gamma}T^{\gamma-1}dT \quad (9)$$

$$\Leftrightarrow 0 = (1-\gamma)\frac{dp}{p} + \gamma\frac{dT}{T}. \quad (10)$$

Mit der Näherung $dp_i \approx \Delta p_i$ (wegen $\Delta p_1 \ll p_0$) und mit $dT/T \approx (T_0 - T_1)/T_1$ erhalten wir

$$0 = (1-\gamma)\frac{\Delta p_1}{p_0} + \gamma\frac{T_0 - T_1}{T_1}. \quad (11)$$

Für den isochoren Prozess gilt ferner

$$\begin{aligned} \frac{p}{T} &= \text{const} \\ \Rightarrow \frac{dp}{p} &= \frac{dT}{T}. \end{aligned}$$

bzw. näherungsweise

$$\frac{\Delta p_2}{p_0} = \frac{T_0 - T_1}{T_1} \quad (12)$$

Einsetzen in (??) ergibt

$$\begin{aligned} (1-\gamma)\frac{\Delta p_1}{p_0} + \gamma\frac{\Delta p_2}{p_0} &= 0 \\ \Rightarrow \gamma &= \frac{\Delta p_1}{\Delta p_1 - \Delta p_2}. \end{aligned}$$

Hinweis: Der Schritt (2)-(3) ist nicht reversibel, da bei offenem Ventil Gas austritt, welches nach dem Schliessen des Ventils für das System verloren geht.
Man kann die Aufgabe auch ohne Bildung des totalen Differentials lösen.

Aufgabe 3: Kreisprozess

Eine Wärmekraftmaschine wird mit $m = 3.0 \text{ g}$ Argon (^{40}Ar), einem einatomigen idealen Gas, betrieben und durchläuft die folgenden Zustände:

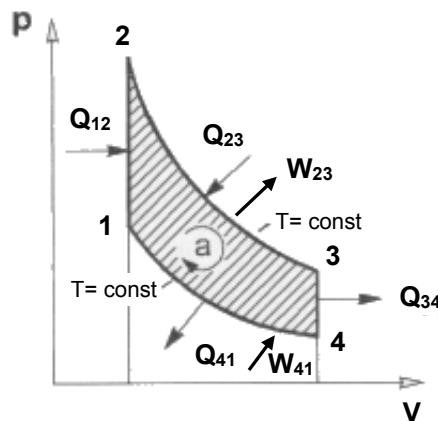
- 1 \rightarrow 2 Isochore Erwärmung um $\Delta T = 65^\circ\text{C}$,
- 2 \rightarrow 3 Isotherme Expansion um $\Delta V = 320 \text{ ml}$,
- 3 \rightarrow 4 Isochore Abkühlung auf die Anfangstemperatur,
- 4 \rightarrow 1 Isotherme Kompression auf den Anfangszustand,

Die Anfangstemperatur ist $T_1 = 135^\circ\text{C}$ und das Arbeitsvolumen am Anfang $V_1 = 100 \text{ ml}$.

- a) Zeichnen sie das pV -Diagramm für den beschriebenen Kreisprozess.
- b) Bestimmen sie den Druck für alle vier Zustände.
- c) Welche Arbeit verrichtet die Maschine während eines Zyklus an der Umgebung?

Lösung:

- a) pV -Diagramm:



- b) Um den Druck aus der idealen Gasgleichung für jeden Punkt des Kreisprozesses zu berechnen, ist es notwendig zuerst die Anzahl der Atome/Stoffmenge im Gas zu bestimmen.

Das molekulare Gewicht von Argon ist $M_{\text{Ar}} = 39.948 \text{ g mol}^{-1}$ ($\approx 40 \text{ g mol}^{-1}$) und damit haben wir für $m = 3 \text{ g}$ Argon:

$$\tilde{n} = \frac{m}{M_{\text{Ar}}} = \frac{3}{40} \frac{\text{g}}{\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}} \simeq 0.075 \text{ mol.} \quad (13)$$

Die ideale Gasgleichung lautet:

$$p \cdot V = \tilde{n} \cdot R \cdot T, \quad (14)$$

wobei $R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$ die Gaskonstante bezeichnet. Damit kann der Druck an jedem Punkt des Kreislaufs berechnet werden:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\tilde{n} \cdot R \cdot T_1}{V_1} = \frac{0.075 \cdot 8.314 \cdot 408.15}{0.00010} = 2.545 \text{ MPa} = 25.25 \text{ bar} \\ p_2 &= \frac{\tilde{n} \cdot R \cdot T_2}{V_1} = \frac{0.075 \cdot 8.314 \cdot 473.15}{0.00010} = 2.950 \text{ MPa} = 29.50 \text{ bar} \\ p_3 &= \frac{\tilde{n} \cdot R \cdot T_2}{V_3} = \frac{0.075 \cdot 8.314 \cdot 473.15}{0.00042} = 0.702 \text{ MPa} = 7.02 \text{ bar} \\ p_4 &= \frac{\tilde{n} \cdot R \cdot T_1}{V_3} = \frac{0.075 \cdot 8.314 \cdot 408.15}{0.00042} = 0.606 \text{ MPa} = 6.06 \text{ bar} \end{aligned}$$

mit $T_2 = T_1 + \Delta T$. Zu beachten ist, dass alle Temperaturen in Kelvin umgerechnet werden müssen.

- c) Das System verrichtet nur in zwei der vier Schritte Arbeit, im Prozess $2 \rightarrow 3$ sowie im Schritt $4 \rightarrow 1$. Für die Isochoren gilt $W_{12} = W_{34} = 0$.

Die von der Umgebung am System geleistete Arbeit ist definiert als:

$$W = - \int_i^f p \cdot dV. \quad (16)$$

Einsetzen des Ausdrucks für den Druck in Schritt $2 \rightarrow 3$ gibt:

$$\begin{aligned} W_{23} &= - \int_2^3 \frac{\tilde{n} \cdot R \cdot T_2}{V} dV \\ &= -\tilde{n} \cdot R \cdot T_2 \int_2^3 \frac{dV}{V} \\ &= -\tilde{n} \cdot R \cdot T_2 \cdot \ln \frac{V_3}{V_2} \\ &= -0.075 \cdot 8.314 \cdot 473.15 \cdot \ln 4.2 = -423.4 \text{ J} \end{aligned}$$

Analog für $4 \rightarrow 1$:

$$\begin{aligned} W_{41} &= -\tilde{n} \cdot R \cdot T_1 \cdot \ln \frac{V_1}{V_4} \\ &= 0.075 \cdot 8.314 \cdot 408.15 \cdot \ln 4.2 = 365.2 \text{ J} \end{aligned}$$

Die totale am System geleistete Arbeit ist damit die Summe der beiden: $\sum W_i = -423.4 + 365.2 = -58.2 \text{ J}$.

Die totale vom System geleistete Arbeit hat das entgegengesetzte Vorzeichen und ist somit 58.2 J.