
Abgabe: 09. Mai 2022

Serie 09

Aufgabe 1: Unterwasserscheinwerfer

Ein in einer ruhigen Bucht auf dem Meeresboden installierter LED-Scheinwerfer sendet einen kollimierten Lichtstrahl unter einem Winkel θ_1 zur Normalen in Richtung Wasseroberfläche. Der Brechungsindex von Wasser beträgt $n_w = 1.33$.

- a) Unter welchem Winkel zur Normalen tritt der Lichtstrahl aus dem Wasser aus, wenn $\theta_1 = 45^\circ$?
- b) Berechnen Sie den maximalen Winkel θ_1 , für den der Lichtstrahl noch aus dem Wasser austreten kann.
- c) Im Datenblatt des LED-Scheinwerfers steht, dass das abgestrahlte Licht (in Luft) um eine Wellenlänge von $\lambda = 640 \text{ nm}$ (roter Farbton) zentriert ist. Wie gross ist die Wellenlänge des Lichtstrahls im Wasser? Welche Farbe nimmt ein Taucher wahr?

Lösung:

- a) Das Brechungsgesetz lautet

$$n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2) \quad (1)$$

Hier haben wir $n_1 = n_w$ und $n_2 = n_{\text{Luft}} = 1$. Der Ausfallswinkel berechnet sich demnach zu

$$\theta_2 = \arcsin(\sin(\theta_1) n_w / n_{\text{Luft}}) = 70.1^\circ \quad (2)$$

- b) Der Grenzwinkel $\theta_{1,c}$ für Totalreflektion folgt aus dem Brechungsgesetz wenn man $\sin(\theta_2) = 1$ setzt. Der maximale Einfallswinkel, für den der Lichtstrahl noch aus dem Wasser austreten kann, ist also

$$\theta_{1,c} = \arcsin(n_2 / n_1) = \arcsin(1 / 1.33) = 48.8^\circ. \quad (3)$$

- c) Die Wellenlänge im Wasser berechnet sich zu

$$\lambda_w = \lambda / n_w = 481 \text{ nm}. \quad (4)$$

Die menschlichen Nervenzellen im Auge sind sensitiv auf die Energie des einfallenden Lichts, d.h. auf die Frequenz. Da sich diese im Wasser nicht ändert, nimmt der Taucher ebenso einen roten Farbton wahr. Selbst wenn das Auge sensitiv auf die Wellenlänge reagieren würde, wäre diese durch den Brechungsindex im Inneren des Auges bestimmt.

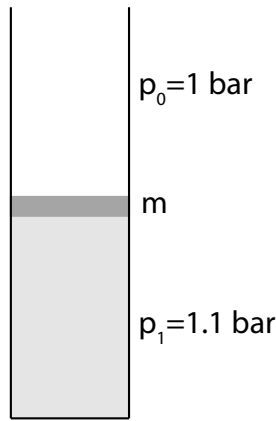


Abbildung 1

Aufgabe 2: Gay-Lussac Gesetz

Ein Block der Masse m dichtet einen Zylinder mit Durchmesser $d = 1 \text{ cm}$ ab, siehe Abb. 1. Die Masse bewege sich vertikal ohne Reibung. Unterhalb der Masse befindet sich ein Gas mit einem Druck von $p_1 = 1.1 \text{ bar}$, überhalb der Masse sei der Druck $p_0 = 1 \text{ bar}$.

- Das Gesamtsystem habe eine Temperatur von 20 Grad Celsius. Wie gross ist die Masse m ?
- Das untere Gas wird nun auf 50 Grad Celsius erwärmt. Wie ändert sich die Höhe der Masse im Zylinder?
- Nun soll weiterhin bei 50 Grad Celsius die Masse zurück in die ursprüngliche Höhe gebracht werden. Hierfür wird ein zusätzliches Gewicht auf die Masse gestellt. Wie schwer muss dieses Gewicht sein?

Lösung:

- Im statischen Gleichgewicht wird die Gravitationskraft $F_g = mg$ durch eine entsprechende Kraft aufgrund des Überdrucks des Gases unterhalb der Masse kompensiert. Diese Kraft berechnet sich zu $F_p = \Delta p A = (p_1 - p_0)\pi(d/2)^2$. Gleichsetzen der Kräfte liefert

$$m = (p_1 - p_0)\pi(d/2)^2/g = 80.1 \text{ g}. \quad (5)$$

- Im statischen Gleichgewicht muss der Druck wieder gleich gross wie vorher sein. Nach dem idealen Gasgesetz ändert sich das Volumen V gemäss

$$V = \tilde{n}RT/p. \quad (6)$$

Da der Durchmesser konstant ist, hängt das Volumen linear von der Höhe h ab und wir finden

$$\frac{h'}{h} = \frac{V'}{V} = \frac{T'}{T} = \frac{273.15 + 50}{273.15 + 20} \approx 1.10 \quad (7)$$

bei konstantem Druck. Die Höhe bei 50° C ist also 10% grösser als die Höhe bei 20° C.

- c) Bei konstantem Volumen ist laut idealer Gasgleichung der Druck direkt proportional zur Temperatur. D.h. der Druck ist nun 10% grösser als am Anfang: $p'_1 = 1.1p_1 = 1.21$ bar. Die Masse m und das Zusatzgewicht zusammen kompensieren den Druckunterschied von $(p'_1 - p_0) = 0.21$ bar ähnlich wie in Teil a):

$$(m + m_{ZG})g = (p'_1 - p_0)\pi(d/2)^2. \quad (8)$$

Wir erhalten $(m + m_{ZG}) = 0.21/0.1 m = 164.9$ g bzw. $m_{ZG} = 84.8$ g.

Aufgabe 3: Gasthermometer

Zwei Gasthermometer (konstantes Volumen) werden mit zwei verschiedenen Gasen betrieben. Das eine Gas sei ideal, d.h. es folgt der Zustandsgleichung $pV = nRT$. Das andere Gas folgt der Zustandsgleichung

$$\left(p + \frac{\tilde{n}^2 a}{V^2}\right)(V - \tilde{n}b) = \tilde{n}RT.$$

Hierbei handelt es sich um ein sogenanntes van-der-Waals-Gas, in dem die Gasmoleküle Kräfte aufeinander ausüben. Die Parameter a, b beschreiben dabei die Wechselwirkungsstärke bzw. das Eigenvolumen der Moleküle. Die Messskalen der Thermometer sind so kalibriert, dass sie am Gefrierpunkt und am Siedepunkt von Wasser die gleiche Temperatur anzeigen. Liefern die beiden Thermometer auch für andere Temperaturen das gleiche Ergebnis? Begründen Sie ihre Antwort.

Hinweis: Ein Gasthermometer hat ein konstantes Volumen. Betrachten Sie den Zusammenhang zwischen Druck und Temperatur für beide Fälle.

Lösung:

Das Volumen ist konstant, nur der Druck ändert sich. Beide Thermometer liefern auch für andere Temperaturen dieselben Messwerte. Begründung: Der Zusammenhang zwischen Temperatur und Druck ist sowohl für das ideale Gas wie auch für das van-der-Waals-Gas linear (genau genommen affin-linear für das van-der-Waals-Gas):

Ideales Gas:

$$T = \frac{pV}{\tilde{n}R} \quad (9)$$

Van-der-Waals-Gas:

$$\begin{aligned} T &= \frac{\left(p + \frac{\tilde{n}^2 a}{V^2}\right)(V - \tilde{n}b)}{\tilde{n}R} \\ &= \frac{V - \tilde{n}b}{\tilde{n}R} p + \frac{V - \tilde{n}b}{\tilde{n}R} \frac{\tilde{n}^2 a}{V^2} \end{aligned} \quad (10)$$

wobei der erste Term die Steigung, und der zweite Term der Offset ist. Wir sehen also, dass auch beim van-der-Waals-Gas die Temperatur eine (affin-)lineare Funktion des Druckes ist. Deshalb sind alle Punkte definiert, sobald wir zwei Punkte fixieren.

Aufgabe 4: Luftausdehnung

Ein Zimmer hat ein Volumen von $6\text{ m} \times 5\text{ m} \times 3\text{ m}$.

- a) Wie viel Mol Luft befinden sich im Zimmer, falls der Luftdruck 1 bar beträgt und eine Temperatur von 300 K herrscht?
- b) Wie viel Mol Luft entweichen aus dem Zimmer, wenn die Temperatur um 5 K ansteigt, während der Luftdruck gleich bleibt?

Lösung:

- a) Gesucht ist die Stoffmenge \tilde{n} , gegeben ist der Druck p , das Volumen V und die Temperatur T . Wir können also sofort die ideale Gasgleichung einsetzen:

$$\begin{aligned} pV &= \tilde{n}RT \\ \tilde{n} &= \frac{pV}{RT} = \frac{10^5 \text{ Pa} \cdot 90 \text{ m}^3}{8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \cdot 300 \text{ K}} = 3.61 \cdot 10^3 \text{ mol} \end{aligned} \quad (11)$$

- b) Sei \tilde{n}' die Stoffmenge des wärmeren Zimmers. Die Änderung $\Delta\tilde{n}$ ist dann $\Delta\tilde{n} = \tilde{n} - \tilde{n}'$ bzw.

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{n} &= \frac{pV}{RT} - \frac{pV}{R(T + \Delta T)} \\ &= \frac{pV}{RT} \left(1 - \frac{T}{T + \Delta T}\right) \\ &= \tilde{n} \left(1 - \frac{T}{T + \Delta T}\right) \\ &= \tilde{n} \left(1 - \frac{300 \text{ K}}{305 \text{ K}}\right) = 59.2 \text{ mol} \end{aligned} \quad (12)$$