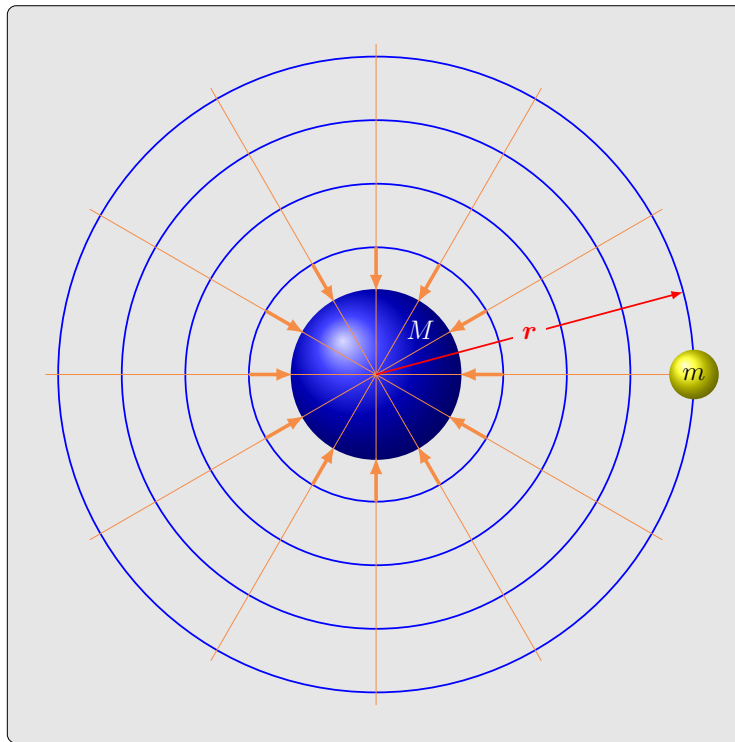


Physik I

Vorlesung gehalten an der ETH Zürich von
Prof. Klaus Ensslin

FS 2022



Das Skript basiert auf einer Bearbeitung von Dr. Christoph Hellings
und Kilian Hanke aus der Gruppe von Prof. Andreas Wallraff

Februar 2022

Inhaltsverzeichnis

1	Schwingungen	1
1.1	Einleitung	1
1.2	Harmonische Schwingungen	2
1.2.1	Beispiel: Schwingwagen	2
1.2.2	Ein angenäherter harmonischer Oszillator	5
1.2.3	Beispiel: Kreispendedel	7
1.2.4	Die Periode der Schwingung	9
1.2.5	Auslenkung, Geschwindigkeit und Beschleunigung	10
1.2.6	Komplexe Darstellung der Schwingung	13
1.2.7	Anfangsbedingungen	14
1.2.8	Energiebilanz des harmonischen Oszillators	15
1.3	Gedämpfte Schwingungen	17
1.3.1	Der gedämpfte harmonische Oszillator	17
1.3.2	Beispiele zum gedämpften harmonischen Oszillator.	21
1.3.3	Energiebilanz der gedämpften Schwingung	21
1.4	Erzwungene Schwingungen, Resonanz	25
1.4.1	Gleichgewichtslösung	25
1.4.2	Resonanz	26
1.4.3	Bemerkungen zu Amplitude und Phase der Resonanz	29
1.4.4	Energiebilanz der erzwungenen Schwingung	30
1.5	Überlagerung von Schwingungen	31
1.5.1	Einleitung	31
1.5.2	Zwei Schwingungen gleicher Frequenz	33
1.5.2.1	Allgemeine Lösung	33

1.5.2.2	Spezialfälle	35
1.5.3	Zwei Schwingungen unterschiedlicher Frequenz	37
1.5.3.1	Schwebung	37
1.5.3.2	Amplitudenspektrum	38
1.5.3.3	Amplitudenmodulation	40
1.6	Gekoppelte Schwingungen	41
1.6.1	Zwei Oszillatoren	41
1.7	Zusammenfassung	46
2	Wellen	49
2.1	Einleitung	49
2.1.1	Beispiel: Seilwellen	49
2.1.2	Beispiel: Wellenausbreitung im Masse-Feder-System	50
2.1.3	Beispiel: Wellenausbreitung in einem Gas	51
2.2	Wellentypen, Wellenausbreitung	52
2.2.1	Beschreibung der eindimensionalen Wellenausbreitung	52
2.2.2	Harmonische Wellen	55
2.2.3	Die Wellengleichung in einer Dimension	58
2.2.3.1	Beweis: Lösung der Wellengleichung	59
2.2.4	Transversale Wellen	60
2.2.5	Beispiel: Transversale elastische Seilwellen	60
2.2.6	Longitudinale Wellen	64
2.2.7	Beispiel: Longitudinalwellen im Festkörper	64
2.2.7.1	Verformungen: Elastizität und Plastizität	64
2.2.7.2	Longitudinale elastische Wellen im Festkörper	67
2.2.8	Räumliche Verteilung von Wellen	69
2.2.8.1	Ebene Wellen	69
2.2.8.2	Polarisation	69
2.2.9	Energietransport	70
2.2.10	Intensität	73
2.3	Dopplereffekt	74
2.3.1	Beobachter bewegt, Quelle ruhend	75
2.3.2	Beobachter ruhend, Quelle bewegt	76

2.3.3	Schockwelle	77
2.3.4	Bemerkungen	77
2.4	Prinzip der Superposition	79
2.4.1	Einleitung	79
2.4.2	Anwendung: Superposition harmonischer Wellen	81
2.4.3	Kohärenz	82
2.4.4	Zwei entgegengesetzt laufende Wellen	83
2.4.5	Zwei in verschiedene Richtungen laufende Wellen	84
2.5	Reflexion und Transmission	85
2.6	Stehende Wellen	91
2.6.1	Amplitude der stehenden Wellen	91
2.6.2	Energieverteilung bei stehenden Wellen	93
2.6.3	Eigenschwingungen einer Saite	94
2.6.3.1	Fest eingespannte Saite	96
2.6.3.2	Einseitig eingespannte Saite	97
2.6.4	Allgemeine Schwingungen einer Saite	100
2.7	Brechung und Beugung	103
2.7.1	Das Prinzip von Huygens	103
2.7.2	Beugung	108
2.7.3	Reflexion und Brechung	110
2.7.3.1	Reflexion	110
2.7.3.2	Brechung	110
2.7.3.3	Fermat'sches Prinzip	111
2.7.3.4	Brechungsindex	112
2.7.3.5	Totalreflexion	113
2.7.3.6	Akustische Linsen	114
2.8	Dispersion und Gruppengeschwindigkeit	114
2.8.1	Einleitung	114
2.8.2	Lineare Näherung der Dispersionskurve	116
2.9	Zusammenfassung	119

3	Wärmelehre und Thermodynamik	123
3.1	Temperatur und der Nullte Hauptsatz der Thermodynamik	123
3.1.1	Die Temperatur und das Gasthermometer	123
3.1.1.1	Das Gasthermometer und die Definition des Drucks	124
3.1.1.2	Gesetz von Gay-Lussac	125
3.1.2	Die absolute Temperatur und die Kelvin-Skala	126
3.1.2.1	Definition der Kelvin-Skala	126
3.1.3	Der Nullte Hauptsatz der Thermodynamik	128
3.1.4	Ideale Gase	129
3.1.4.1	Die Zustandsgleichung für ideale Gase	129
3.1.5	Kinetische Gastheorie	131
3.2	Wärme und der Erste Hauptsatz der Thermodynamik	133
3.2.1	Definition der Wärme	133
3.2.2	Definition der Wärmekapazität	134
3.2.3	Wärmekapazität eines Festkörpers	136
3.2.4	Latente Wärme	137
3.2.5	Definition der Inneren Energie	138
3.2.6	Der Erste Hauptsatz der Thermodynamik	139
3.3	Spezifische Wärme und Zustandsänderungen des Idealen Gases	141
3.3.1	Volumenarbeit und das pV -Diagramm	141
3.3.2	Spezifische Wärme idealer Gase	143
3.3.2.1	Spezifische Wärme bei konstantem Volumen	143
3.3.2.2	Spezifische Wärme bei konstantem Druck	143
3.3.3	Gleichverteilungssatz (Äquipartitionsgesetz)	145
3.3.4	Zustandsänderungen bei idealen Gasen	146
3.3.4.1	Isobare Zustandsänderung	147
3.3.4.2	Isotherme Ausdehnung und Umwandlung von Wärme in mechanische Arbeit	148
3.3.4.3	Adiabatische Zustandsänderungen bei idealen Gasen . . .	149
3.3.4.4	C_p/C_V -Messung nach Ruchardt	152
3.4	Kreisprozesse und der Zweite Hauptsatz der Thermodynamik	152
3.4.1	Phänomenologie	153
3.4.2	Thermodynamische Kreisprozesse	154

3.4.2.1	Carnot-Maschine	154
3.4.2.2	Stirlingmotor	163
3.4.2.3	Verbrennungsmotoren	165
3.4.3	Entropie, Wahrscheinlichkeit, Ordnung	166
3.4.4	Mathematische Formulierung des 2. Hauptsatzes	169
3.5	Reale Gase und Flüssigkeiten	171
3.5.1	Zustandsgleichung nach van der Waals	171
3.5.2	Dampfdruck	173
3.5.2.1	Dampfdruckkurve	173
3.5.2.2	Gleichung von Clausius-Clapeyron	174
3.5.2.3	Bemerkung zur Hygrometrie	175
3.5.3	Phasenübergänge	177
3.6	Enthalpie und Joule-Thompson Effekt	178
3.6.1	Enthalpie H	178
3.6.2	Joule-Thomson-Effekt	178
3.7	Zusammenfassung	181
A	Differentialgleichungen	A1
A.1	Einleitung	A1
A.2	Einige Definitionen	A1
A.3	Die lineare Differentialgleichung 1. Ordnung	A2
A.3.1	Die homogene Gleichung	A3
A.3.2	Die inhomogene Gleichung	A3
A.3.3	Beispiele	A5
A.4	Die lineare Differentialgleichung 2. Ordnung	A10
A.4.1	Die homogene Gleichung	A11
A.4.2	Die inhomogene Gleichung	A13
A.4.3	Beispiele	A13
B	Fouriertransformation	A19
B.1	Fourieranalyse	A19
B.1.1	Fourierreihen	A19
B.1.1.1	Definition und Eigenschaften	A19

B.1.1.2	Beispiel: Mäanderkurve	A21
B.1.1.3	Gibbs'sches Phänomen	A23
B.1.1.4	Komplexe Darstellung der Fourierreihe	A23
B.1.1.5	Anwendungen der Fourierreihe	A24
B.1.2	Fourierintegrale	A25
B.1.2.1	Definition	A25
B.1.2.2	Beispiel: Knall	A25
B.1.2.3	„Unendlich kurzer Knall“ und Deltafunktion	A26
B.2	Gekoppelte Schwingungen	A28
B.2.1	Zwei Oszillatoren	A28
B.3	Zusammenfassung	A33
C	Musikinstrumente	A35
C.1	Akustik, Musikinstrumente	A35

Kapitel 1

Schwingungen

1.1 Einleitung

Überall in der Natur, und damit auch in der Physik, treten Schwingungen auf: In der Astrophysik, Mechanik, Optik, Atom- und Molekülphysik, Quantenphysik, Festkörperphysik, in Feldtheorien, in der Musik und vielen anderen Gebieten. Allen diesen Schwingungen ist gemeinsam, dass eine physikalische Grösse sich als Funktion der Zeit periodisch ändert. Man benötigt dazu ein **schwingungsfähiges System**. Ein solches ist ein physikalisches System mit einer stabilen Gleichgewichtslage, also einer Gleichgewichtslage in die es nach einer Störung durch Energiezufuhr wieder zurückzukehren versucht. Diese Energie wird dann nicht sofort wieder abgegeben, sondern verbleibt eine gewisse Zeit im System und kommt dort in zwei unterschiedlichen Formen vor, potentielle und kinetische Energie, zwischen denen sie periodisch oszilliert.

Ein Beispiel dafür ist eine Kugel in einer Schale im Schwerfeld (siehe Abb. 1.1). Setzt man die Kugel in einer gewissen Höhe h auf die Schale auf, so schwingt sie in Abwesenheit von Reibungskräften unendlich lange von der einen Seite zur anderen und wieder zurück. Eine wesentliche Bedingung für das Eintreten einer Schwingung ist, dass die Energie eine durch das System vorgegebene Schwelle nicht überschreiten darf. Ansonsten wird das

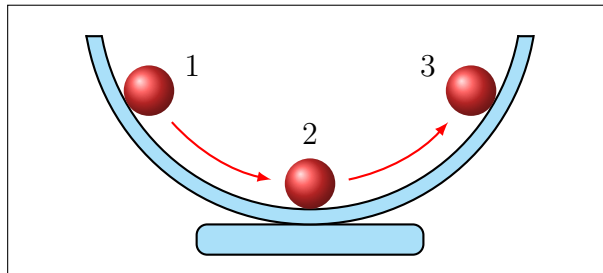


Abbildung 1.1: Eine Kugel schwingt in einer Schale. 1: Anfangspunkt, Kugel in Ruhe, 2: Minimum der potentiellen Energie und Maximum der kinetischen Energie, 3: Rechter Umkehrpunkt.

schwingende System Schale-Kugel zerstört, z.B. indem die Kugel aus der Schale herauspringt.

1.2 Harmonische Schwingungen

1.2.1 Beispiel: Schwingwagen

Abb. 1.2 zeigt die experimentelle Anordnung eines Schwingwagens, der mit zwei Federn verbunden ist. Die Auslenkung des Schwingwagens wird gegen die Zeit aufgetragen und man beobachtet eine sinusförmige Schwingung der Position des Wagens um seine Ruhelage.

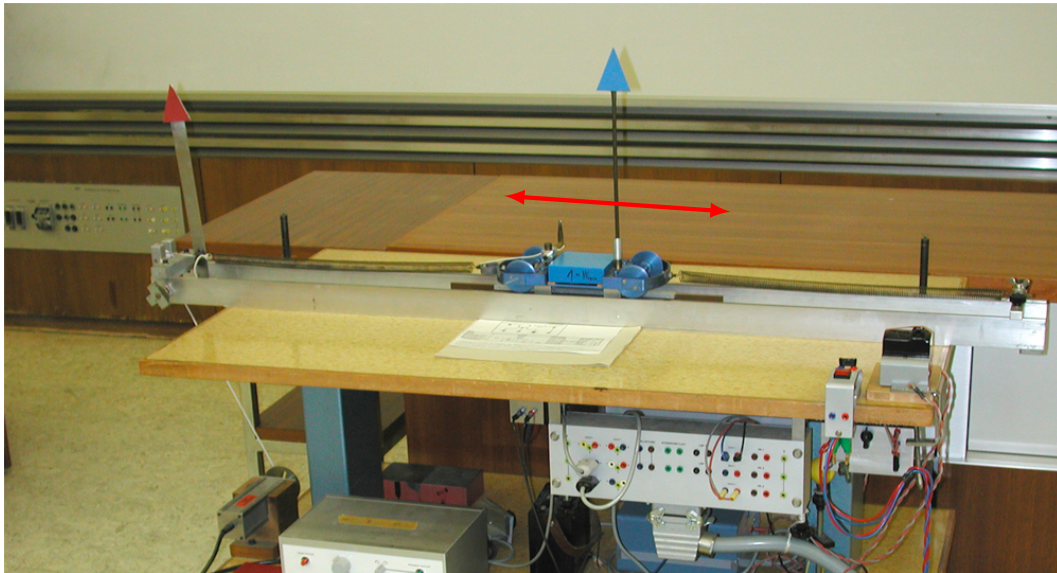


Abbildung 1.2: Schwingwagen: Der Wagen ist über zwei Federn mit den festen Enden der Laufschiene verbunden.

Die Kraft, die wir zum Dehnen einer Feder *aufwenden* müssen, beträgt (näherungsweise, innerhalb der Elastizitätsgrenze), siehe Abb. 1.3:

$$F = k(r - r_0), \quad (1.2.1)$$

wobei k die Federkonstante und $(r - r_0)$ die Auslenkung aus der Ruhelage ist (wo wir den kräftefreien Nullpunkt r_0 annehmen). Dieses Kraftgesetz der Feder ist das **Hooke'sche Gesetz**. Die *rücktreibende* Kraft F_R der Feder ist nach Newtons 3. Axiom entgegengesetzt gleich gross ($F_R = -F$) (siehe Abb. 1.3), sodass wir erhalten:

$$m\ddot{r} = -k(r - r_0). \quad (1.2.2)$$

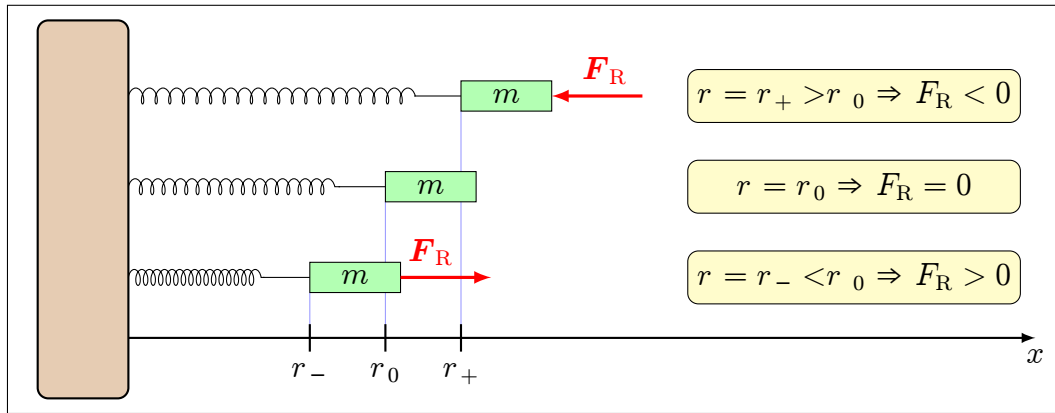


Abbildung 1.3: Federkraft-Diagramm. Weil die Federkraft versucht, die Feder in ihren ursprünglichen Zustand zurückzuführen, spricht man auch von der Rückstellkraft F_R .

Wir wählen die neue Variable $x = (r - r_0)$, für die gilt

$$\ddot{x} = \ddot{r}. \quad (1.2.3)$$

Damit lautet die homogene Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x. \quad (1.2.4)$$

Diese Schwingung stellt einen äusserst wichtigen Sonderfall der möglichen Schwingungen dar, da die rücktreibende Kraft *linear* in der Auslenkung ist. Systeme dieser Art werden als **harmonische Oszillatoren** bezeichnet.

Mit der **Kreisfrequenz** ω_0 , die hier durch

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.2.5)$$

gegeben ist,¹ erhalten wir aus Gleichung (1.2.4) die **Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators**

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (1.2.6)$$

Die charakteristische Gleichung dieser Bewegungsgleichung lautet:

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0 \quad (1.2.7)$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\omega_0. \quad (1.2.8)$$

¹Wir verwenden hier den Index 0 für die Kreisfrequenz einer ungedämpften Schwingung, um ω_0 später von der Kreisfrequenz ω einer gedämpften Schwingung zu unterscheiden. In Fällen, in denen eine solche Unterscheidung nicht nötig ist, wird der Index 0 häufig weggelassen.

Damit ist die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung eine Linearkombination der folgenden beiden komplexen Exponentialfunktionen:

$$x(t) = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t}. \quad (1.2.9)$$

Dabei kann die Kreisfrequenz ω_0 als Winkelgeschwindigkeit einer Rotation in der komplexen Zahlenebene interpretiert werden. Die komplexen Konstanten C_1 und C_2 müssen derart gewählt werden, dass die Auslenkung $x(t)$ stets reell ist, da wir physikalische Ergebnisse verlangen, d.h.²

$$x(t) = x^*(t) \quad \forall t \quad (1.2.10)$$

$$\Rightarrow (C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t}) - (C_1^* e^{-i\omega_0 t} + C_2^* e^{i\omega_0 t}) = 0 \quad \forall t \quad (1.2.11)$$

$$(C_1 - C_2^*) e^{i\omega_0 t} + (C_2 - C_1^*) e^{-i\omega_0 t} = 0 \quad \forall t \quad (1.2.12)$$

$$\Rightarrow C_1 = C_2^* := C \quad (1.2.13)$$

$$\Rightarrow x(t) = C e^{i\omega_0 t} + C^* e^{-i\omega_0 t}. \quad (1.2.14)$$

Die Konstante C ist komplex:

$$C = |C| e^{i\delta'}. \quad (1.2.15)$$

Dabei ist $|C|$ der Betrag der Konstanten, δ' ihre Phase, und $e^{i\delta'}$ wird als Phasenfaktor bezeichnet. Phasenfaktoren sind stets vom Betrag 1 und haben die Wirkung eines Drehoperators, der eine komplexe Zahl um den Winkel ihres Arguments, in diesem Fall um den Winkel δ' , dreht, ohne den Betrag der komplexen Zahl zu ändern. Mit Hilfe von

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad (1.2.16)$$

$$e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi \quad (1.2.17)$$

folgt

$$x(t) = |C| \underbrace{\left(e^{i(\omega_0 t + \delta')} + e^{-i(\omega_0 t + \delta')} \right)}_{=2 \cos(\omega_0 t + \delta')}, \quad (1.2.18)$$

$$\Rightarrow x(t) = \underbrace{2|C|}_{:=A} \cos(\omega_0 t + \delta'). \quad (1.2.19)$$

Wir fassen zusammen:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \delta'). \quad (1.2.20)$$

Dies ist die allgemeine Lösung mit der reellen Amplitude A und der (reellen) Phase δ' . Die Kreisfrequenz ω_0 legt hierbei die Periodendauer des Kosinus fest, worauf wir in Abschnitt 1.2.4 noch näher eingehen.

Eine gleichwertige Lösung erhalten wir, wenn wir die Phase δ' durch

$$\delta' = \delta - \frac{\pi}{2} \quad (1.2.21)$$

² x^* bezeichnet hierbei das Komplement der komplexen Variable x .

ersetzen und verwenden, dass $e^{\pm i\pi/2} = \pm i$, sowie $i^2 = -1$ gilt:

$$\Rightarrow x(t) = |C| \left(e^{i(\omega_0 t + \delta)} e^{-i\pi/2} + e^{-i(\omega_0 t + \delta)} e^{+i\pi/2} \right) \quad (1.2.22)$$

$$= |C| \left(-ie^{i(\omega_0 t + \delta)} + ie^{-i(\omega_0 t + \delta)} \right) \quad (1.2.23)$$

$$= -i|C| \underbrace{\left(e^{i(\omega_0 t + \delta)} - e^{-i(\omega_0 t + \delta)} \right)}_{=2i \sin(\omega_0 t + \delta)} \quad (1.2.24)$$

$$= \underbrace{2|C|}_{=A} \sin(\omega_0 t + \delta). \quad (1.2.25)$$

Wir werden im Folgenden vor allem diese Form der Lösung mit derselben Amplitude A , aber einer um $\pi/2$ verschobenen Phase $\delta = \delta' + \pi/2$ verwenden:

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \delta). \quad (1.2.26)$$

Harmonische Oszillatoren sind in allen Gebieten der Physik anzutreffen. Die mathematische Behandlung ist dabei stets identisch. Zur Vereinfachung beschreibt man nicht-harmonische Oszillatoren für kleine Auslenkungen gerne durch ihre lineare Näherung, um mit dem harmonischen Oszillator rechnen zu können.

1.2.2 Ein angenäherter harmonischer Oszillator

Als Beispiel dazu betrachten wir das in Abb. 1.4 gezeigte Potential. Es sei $U(r)$ die potentielle Energie eines Teilchens in einem Potential $U(r)$ mit der Gleichgewichtslage bei $r = r_0$. Dort besitzt $U(r)$ ein lokales Minimum und dementsprechend eine waagerechte Tangente. Für kleine Auslenkungen ist es deshalb sinnvoll, $U(r)$ in eine Taylorreihe um den Punkt $r = r_0$ zu entwickeln:

$$U(r_0 + \Delta r) \approx U(r_0) + \Delta r U'(r_0) + \frac{1}{2} \Delta r^2 U''(r_0) + \dots \quad (1.2.27)$$

Wir definieren

$$U_0 := U(r_0), \quad k := U''(r_0) \quad \text{und} \quad x := \Delta r \quad (1.2.28)$$

und beachten, dass

$$U'(r_0) = 0 \quad (1.2.29)$$

gilt, da wir uns in einer Ruhelage befinden, also an einem lokalen Minimum. Die Näherung für das Potential lautet dann

$$U(r_0 + x) \approx U_0 + \frac{1}{2} k x^2. \quad (1.2.30)$$

Die Kraft in der Nähe von r_0 ist damit bei kleinen Auslenkungen x gegeben durch

$$F(x) = -U'(x) = -kx. \quad (1.2.31)$$

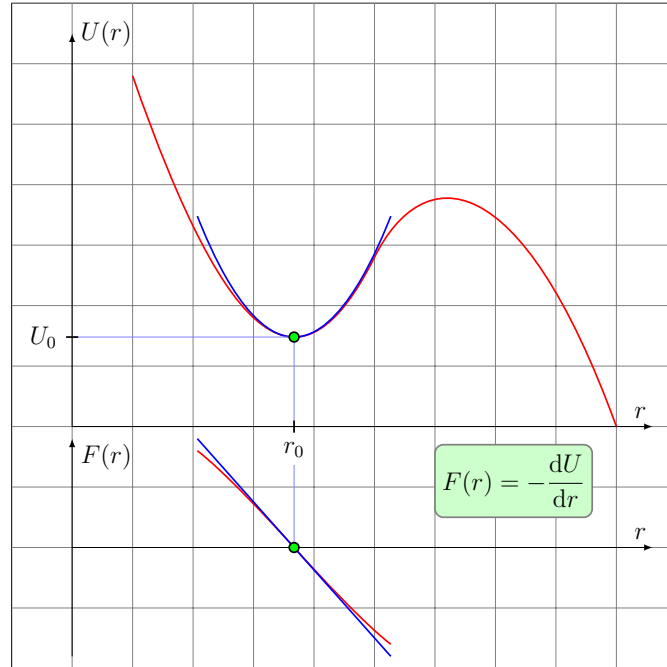


Abbildung 1.4: Das Potential in der Nähe des Minimums wird quadratisch genähert. Die Kraft hängt dann linear vom Abstand $(r - r_0)$ vom Minimum des Potentials r_0 ab.

Dies ist das Hooke'sche Gesetz, das wir bereits beim System Feder-Massenpunkt kennen gelernt haben.

Damit lautet die Bewegungsgleichung für das Teilchen der Masse m im Potential U :

$$m\ddot{x} = F(x) = -kx \quad (1.2.32)$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (1.2.33)$$

Die Kreisfrequenz ist hier erneut gegeben durch

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.2.34)$$

und wir erhalten wieder die Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (1.2.35)$$

Potentiale ähnlich zu dem in Abb. 1.4 gezeigten treten zum Beispiel zwischen zwei Atomen auf, wenn sie ein Molekül formen, welches um seine Ruhelage mit kleinen Amplituden wie ein harmonischer Oszillator schwingt.

1.2.3 Beispiel: Kreispendel

Demonstrationsexperiment: *Pendel bewegt sich sinusförmig.*

Die Kreisbewegung einer Kugel in zwei Dimensionen wird auf eine Dimension (die Wand) projiziert. Wir vergleichen die Bewegung der Projektion der Kugel auf die Wand mit der des Pendels (siehe Abb. 1.5).

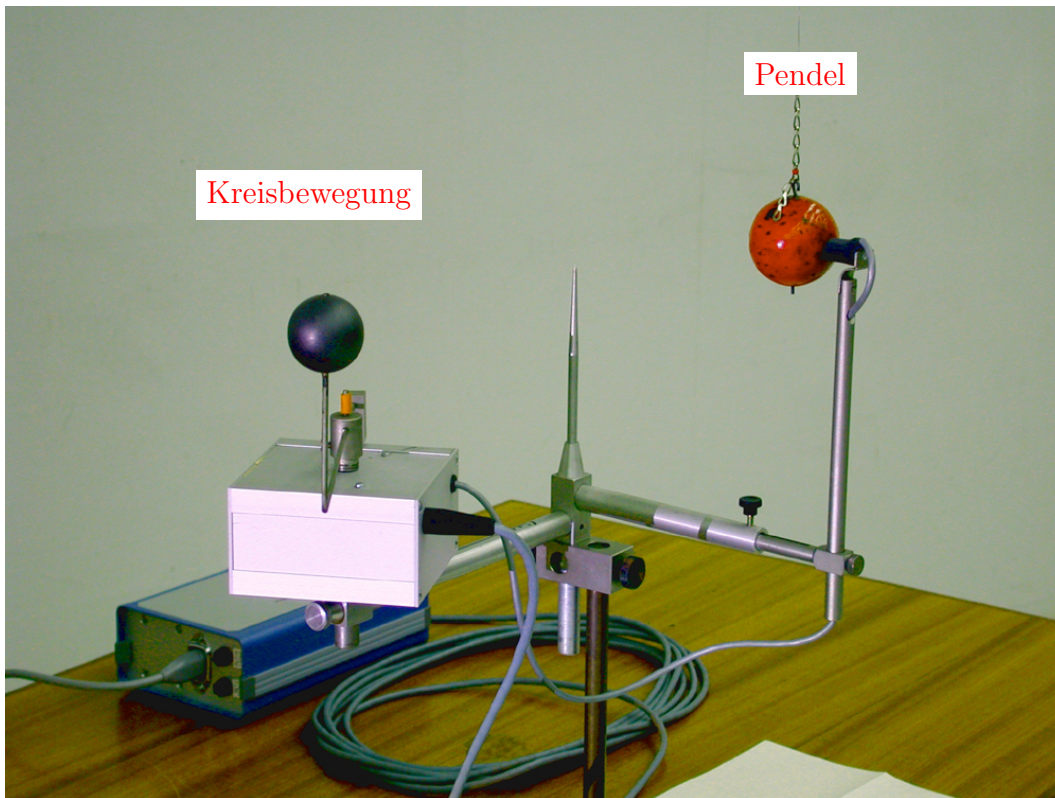


Abbildung 1.5: Das Pendel bewegt sich sinusförmig: Die Bewegung der aufgehängten Masse (Pendel) und die Projektion der Kugel auf die Wand werden verglichen ([Online](#)).

Experimentell beobachten wir:

Für kleine Auslenkungen ist die Pendelbewegung ununterscheidbar von der Projektion einer Kreisbewegung.

Wir können die Kreisbewegung als eine zweidimensionale Bewegung betrachten. Wir wählen dafür ein Koordinatensystem, wie in Abb. 1.6 gezeigt. Die Kreisbewegung der Kugel wird durch den Winkel φ parametrisiert, und die Koordinaten der Kugel sind

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos \varphi(t) \\ R \sin \varphi(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos \omega t \\ R \sin \omega t \end{pmatrix}, \quad (1.2.36)$$

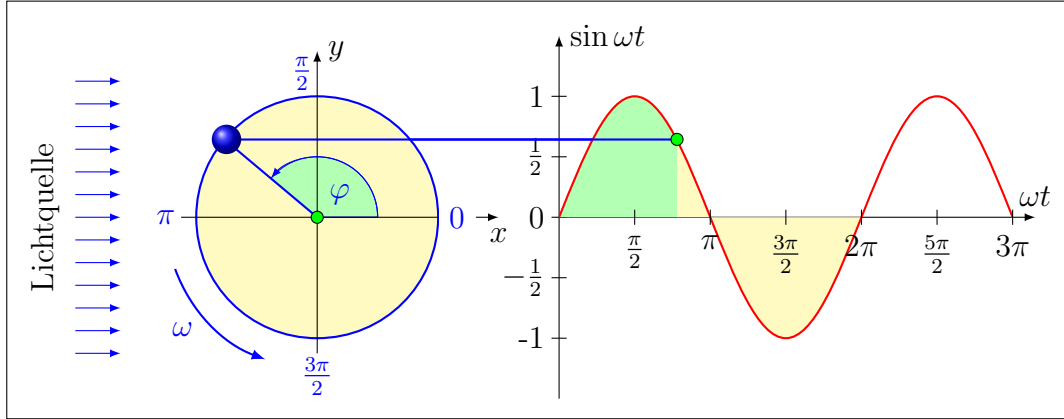


Abbildung 1.6: Die Pendelbewegung ist gleich der Projektion einer Kreisbewegung. Ein Punkt bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit auf dem Kreis mit Radius 1.

wobei R der Radius der Kreisbahn ist. Weil die Kugel mit konstanter Geschwindigkeit auf der Kreisbahn umläuft, ist die Winkelgeschwindigkeit konstant als Funktion der Zeit, so dass der Winkel linear mit der Zeit zunimmt:

$$\varphi(t) = \omega t. \quad (1.2.37)$$

Um die Bewegung des Pendels zu beschreiben betrachten wir die *Projektion der Kreisbewegung* der umlaufenden Kugel auf die y -Achse

$$y(t) = R \sin \varphi(t) = R \sin \omega t. \quad (1.2.38)$$

Wir schliessen aus der Beobachtung, dass sich die Masse des Pendels in der Projektion auf eine Achse ebenfalls sinusförmig um ihre Gleichgewichtslage bewegt:

$$y(t) = A \sin(\omega t + \delta), \quad (1.2.39)$$

wobei A die **Amplitude**, ω die **Kreisfrequenz** und δ die **Phase** ist (siehe Abb. 1.7).

Offensichtlich ist das ebenfalls eine harmonische Schwingung. Zudem illustriert dieses Experiment den Zusammenhang zwischen Kreisfrequenz und Winkelgeschwindigkeit.

Wir bemerken schliesslich, dass harmonische Bewegungen auch als Summe von Kosinus- und Sinusfunktionen ausgedrückt werden können. Aus der Gleichung

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (1.2.40)$$

folgt

$$\begin{aligned} x(t) &= A \sin(\omega t + \delta) \\ &= A \sin \omega t \cos \delta + A \cos \omega t \sin \delta \\ &= (A \cos \delta) \sin \omega t + (A \sin \delta) \cos \omega t \\ &= B \sin \omega t + C \cos \omega t, \end{aligned} \quad (1.2.41)$$

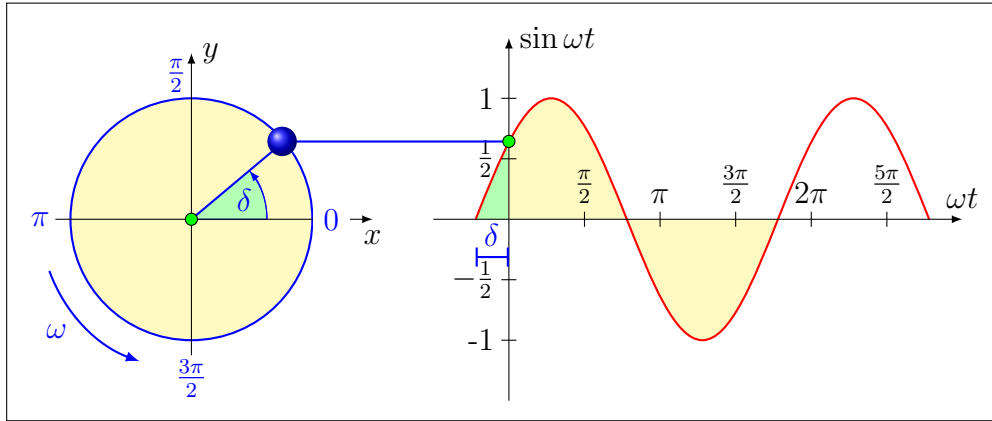


Abbildung 1.7: Die graphische Darstellung der ursprünglichen Phase.

wobei $B = A \cos \delta$ and $C = A \sin \delta$ neue Konstanten (d.h. Amplituden) sind, die die ursprüngliche Phase enthalten.

1.2.4 Die Periode der Schwingung

Die **Periode** T der Schwingung ist definiert als die für eine vollständige Schwingung benötigte Zeit.

Sowohl die Sinus- als auch die Kosinusfunktion haben eine Periode von 2π . D.h., bei einem vollständigen Zyklus erhöht sich die Phase³ φ der Sinusfunktion um 2π . Äquivalent dazu muss sich die Phase zur Zeit $t + T$ um 2π von derjenigen bei t unterscheiden:

$$\varphi(t + T) = \varphi(t) + 2\pi \quad (1.2.42)$$

$$\Rightarrow \omega \cdot (t + T) + \delta = \omega t + \delta + 2\pi \quad (1.2.43)$$

$$\Rightarrow \omega t + \omega T = \omega t + 2\pi, \quad (1.2.44)$$

wobei wir $\varphi(t) = \omega t + \delta$ verwendet haben. Daraus folgt:

$$\boxed{\omega T = 2\pi \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega}.} \quad (1.2.45)$$

Die **Frequenz** ν (häufig auch alternativ mit f bezeichnet) ist die Anzahl der Schwingungsperioden pro Zeitintervall:

$$\boxed{\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}.} \quad (1.2.46)$$

Die SI-Einheit der Frequenz ist das Hertz ($1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$).

³Mit Phase meinen wir hier das Argument des Sinus oder Kosinus und nicht die konstante Phase δ , welche von den Anfangsbedingungen abhängt.

1.2.5 Auslenkung, Geschwindigkeit und Beschleunigung

Weil die Sinusfunktion nur Werte zwischen -1 und 1 annehmen kann, ist die grösste Auslenkung aus der Gleichgewichtslage gleich der Amplitude A , d.h. die Amplitude ist der Betrag der maximalen Auslenkung:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \delta) \Rightarrow -A \leq x(t) \leq A. \quad (1.2.47)$$

Die Amplitude entspricht der *maximalen Entfernung vom Ursprung*.

Die erste zeitliche Ableitung der Auslenkung $x(t)$, die die Geschwindigkeit in Auslenkungsrichtung liefert, ist gleich

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \delta) \quad (1.2.48)$$

und wir erhalten:

$$v(t) = A\omega \cos(\omega t + \delta) \Rightarrow -A\omega \leq v(t) \leq A\omega. \quad (1.2.49)$$

In ähnlicher Weise ist die Beschleunigung gleich

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(A\omega \cos(\omega t + \delta)) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \delta). \quad (1.2.50)$$

Wir bemerken, dass

$$a(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \delta) \Rightarrow -A\omega^2 \leq a(t) \leq A\omega^2. \quad (1.2.51)$$

Zusammenfassend haben wir gefunden:

$$\begin{cases} x(t) &= A \sin(\omega t + \delta) \\ v(t) &= A\omega \cos(\omega t + \delta) \\ a(t) &= -A\omega^2 \sin(\omega t + \delta). \end{cases} \quad (1.2.52)$$

Die Beziehungen zwischen Sinus- und Kosinus-Funktionen sind in Abb. 1.8 gezeigt. Mit diesen kann die Beziehung zwischen Auslenkung, Geschwindigkeit und Beschleunigung graphisch dargestellt werden.

Um die Diskussion zu vereinfachen, nehmen wir an, dass die Anfangsbedingungen so sind, dass die Phase δ verschwindet.

1. Die Auslenkung verhält sich sinusförmig. Zur Zeit $t = 0$ ist die Auslenkung gleich null und ihr Betrag ist maximal, wenn

$$\omega t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots \quad (1.2.53)$$

Das System bewegt sich periodisch zwischen den maximalen Auslenkungen $-A$ und $+A$.

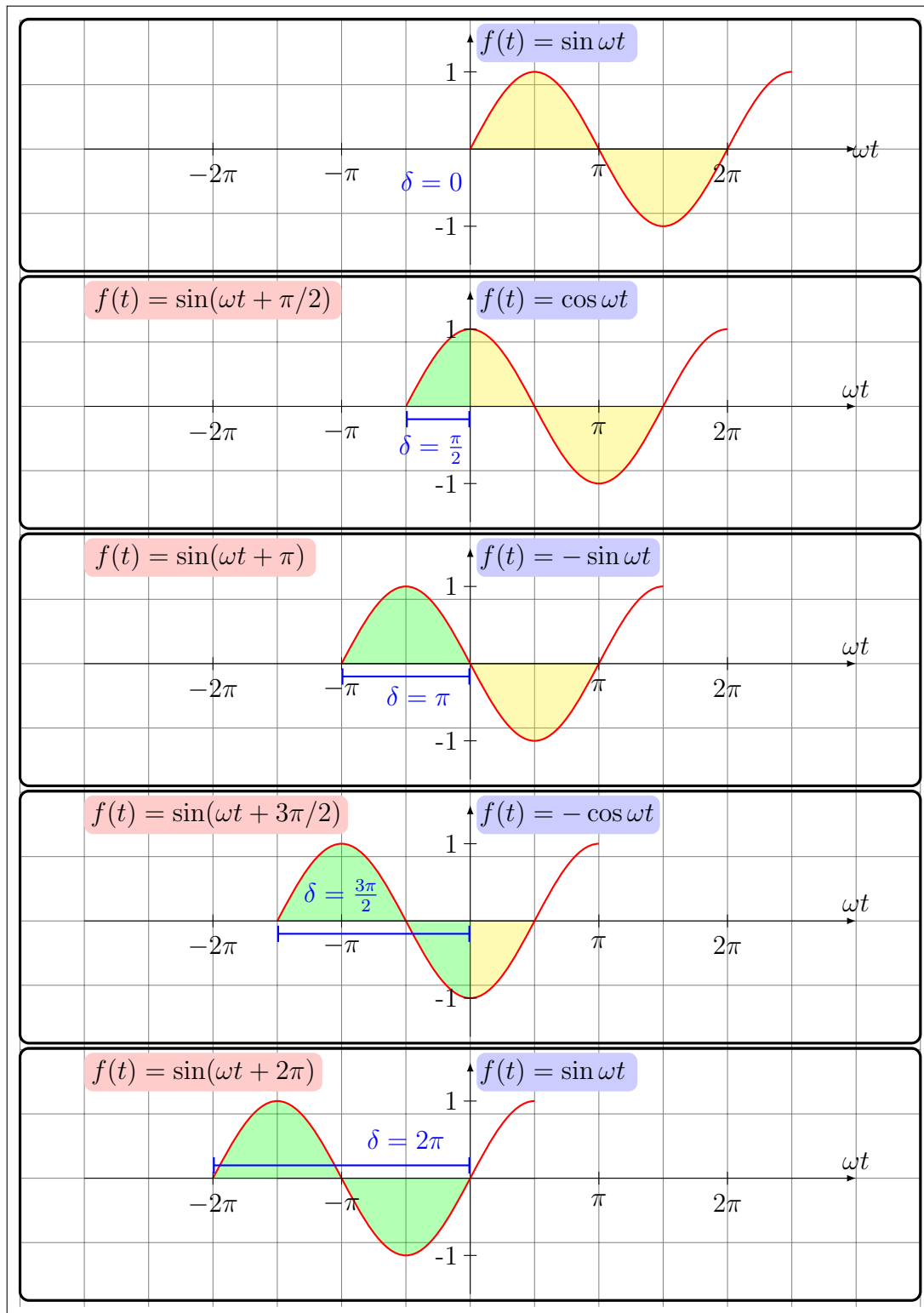


Abbildung 1.8: Beziehung zwischen Sinus- und Kosinus-Funktionen. Die angegebene Phase δ entspricht der Phasenkonstante, die eine Sinusfunktion $\sin(\omega t + \delta)$ haben muss, um die entsprechende Funktion zu liefern.

2. Die Geschwindigkeit verhält sich kosinusförmig, d.h. sie kann als sinusförmig mit einer ursprünglichen Phase gleich $\pi/2$ dargestellt werden (siehe Abb. 1.8). Die Geschwindigkeit verhält sich periodisch zwischen den maximalen Geschwindigkeiten $-A\omega$ und $+A\omega$. Wegen des Phasenunterschieds ist die Geschwindigkeit maximal, wenn die Auslenkung verschwindet, und umgekehrt ist die Geschwindigkeit minimal, wenn die Auslenkung maximal ist, also bei

$$\omega t = 0, \pi, 2\pi, \dots \quad (1.2.54)$$

Man kann das so verstehen: Beim Nulldurchgang ist die Geschwindigkeit maximal. Die Auslenkung nimmt zu und die Bewegung wird gebremst bis die Geschwindigkeit verschwindet. Dieser Punkt entspricht der maximalen Auslenkung. Die Richtung der Bewegung ändert sich und die Bewegung läuft zurück: Die Auslenkung nimmt ab und die Geschwindigkeit nimmt zu, bis der Nulldurchgangspunkt wieder erreicht ist. In diesem Punkt ist die Geschwindigkeit maximal, und die Bewegung wiederholt sich periodisch.

3. Die Beschleunigung verhält sich sinusförmig, wie die Auslenkung, aber mit entgegengesetztem Vorzeichen, d.h. sie kann als sinusförmig mit einer ursprünglichen Phase gleich π dargestellt werden (siehe Abb. 1.8). Die Beschleunigung variiert periodisch zwischen den maximalen Beschleunigungen $-A\omega^2$ und $+A\omega^2$. Sie ist maximal bei maximaler Auslenkung und verschwindet beim Nulldurchgang. Sie ist aber der Auslenkung immer entgegengesetzt. Die Beschleunigung wirkt der Bewegung entgegen. Wenn die Auslenkung positiv ist, ist die Beschleunigung negativ, und umgekehrt, wenn die Auslenkung negativ ist, ist die Beschleunigung positiv.

In mathematischer Form können wir die zwei Grenzfälle so zusammenfassen:

1. Bei maximaler Auslenkung ($\sin(\omega t + \delta) = \pm 1$):

$$\begin{cases} x &= \pm A \\ v &= 0 \\ a &= \mp A\omega^2. \end{cases} \quad (1.2.55)$$

Die Geschwindigkeit verschwindet und die Beschleunigung wird maximal.

2. Beim Nulldurchgang ($\sin(\omega t + \delta) = 0$):

$$\begin{cases} x &= 0 \\ v &= \pm A\omega \\ a &= 0. \end{cases} \quad (1.2.56)$$

Die Geschwindigkeit wird maximal und die Beschleunigung verschwindet.

1.2.6 Komplexe Darstellung der Schwingung

Beim Kreispendedel haben wir gesehen, dass eine Kreisbewegung eines Massenpunktes in der Projektion auf eine Achse eine harmonische Schwingung ergibt. Dieses Ergebnis legt es nahe, die Schwingung in der komplexen Ebene darzustellen:

$$z(t) = Ae^{i\omega t} = Ae^{i\varphi}. \quad (1.2.57)$$

Wir wollen an dieser Stelle daran erinnern, dass die komplexe Exponentialfunktion $e^{i\varphi}$ einer Drehung in der komplexen Ebene um den Winkel φ gegen den Uhrzeigersinn entspricht. Siehe dazu auch die Eulersche Formel (1.2.16). Der Realteil von $e^{i\varphi}$ ist gerade $\cos(\varphi)$, der Imaginärteil ist $\sin(\varphi)$.

Um diese Rechnungen und vor allem die graphische Darstellung zu vereinfachen, leiten wir diese Funktion ausnahmsweise nicht direkt nach der Zeit t ab, sondern nach dem Winkel $\varphi = \omega t$, so dass sich die Ableitung nur um eine multiplikative Konstante von der Zeitableitung unterscheidet:

$$\frac{dz}{d\varphi} = i \cdot Ae^{i\varphi} = iz \quad (1.2.58)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 z}{d\varphi^2} = i \frac{dz}{d\varphi} = -z \quad (1.2.59)$$

$$\frac{d^3 z}{d\varphi^3} = -\frac{dz}{d\varphi} = -iz. \quad (1.2.60)$$

Jede Ableitung entspricht demnach einer Multiplikation des Phasenfaktors mit der Zahl i , die hier als Operator, und zwar als ein sogenannter **Rotator** wirkt, und damit eine Rotation um den Winkel $\pi/2$ verursacht (siehe Abb. 1.9). Man kann also offensichtlich mit komplexen Zahlen rechnen, was wegen der Eigenschaften der Exponentialfunktion im Allgemeinen einfacher ist, und dann entweder den Real- oder den Imaginärteil der Lösung als Resultat verwenden.

Obige komplexe Darstellung der Schwingung $z(t)$ lässt sich noch um die im Reellen bereits eingeführte Phase δ erweitern. Diese entspricht im Komplexen gerade einer Rotation um den konstanten Winkel δ und lässt sich daher als Multiplikation von $z(t)$ mit $e^{i\delta}$ schreiben. Wir erhalten die allgemeine komplexe Darstellung einer Schwingung

$$\tilde{z}(t) = Ae^{i\delta} e^{i\omega t} = Ae^{i(\omega t + \delta)} \quad \text{mit } A, \delta, \omega \in \mathbb{R}. \quad (1.2.61)$$

Alternativ lässt sich der Freiheitsgrad der Phase auch als Teil einer komplexen Amplitude

$$Z_0 = Ae^{i\delta} = A \cos(\delta) + iA \sin(\delta) \quad (1.2.62)$$

schreiben. Dann ist $\tilde{z}(t) = Z_0 e^{i\omega t}$.

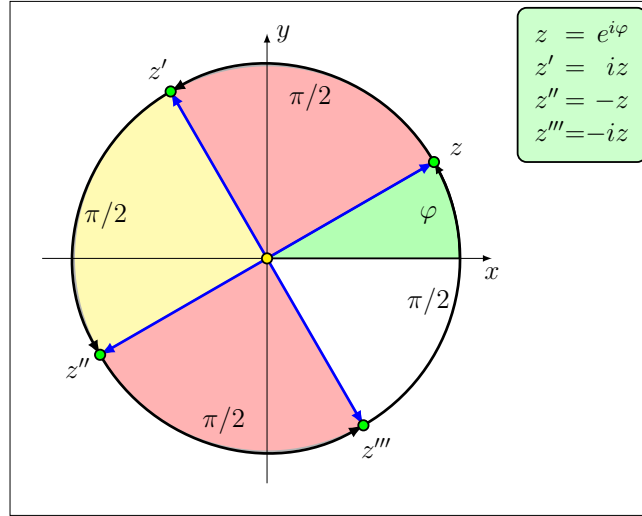


Abbildung 1.9: Komplexe Darstellung der Schwingung. Eine einmalige Ableitung des Phasenfaktors $z = e^{i\varphi}$ nach dem Winkel φ dreht den Phasenfaktor um den Winkel $\pi/2$.

1.2.7 Anfangsbedingungen

Die Kreisfrequenz ω wird durch die Lösung der Bewegungsgleichung bestimmt (siehe Abschnitt 1.2.2). Ist diese aufgestellt, so kann ω mittels Koeffizientenvergleich mit der allgemeinen Bewegungsgleichung (1.2.6) bestimmt werden.

Die Amplitude A und die Phasenkonstante δ sind durch die Anfangsbedingungen festgelegt. Um diese beiden Größen zu bestimmen wollen wir die im letzten Abschnitt eingeführte komplexe Darstellung der Schwingung (1.2.61) verwenden.

Zur Zeit $t = 0$ ist z.B. die Auslenkung $x(t = 0)$ gleich

$$x(0) = A \sin \delta \equiv x_0, \quad (1.2.63)$$

wobei x_0 der Anfangswert der Auslenkung ist.

Zur Zeit $t = 0$ ist die Geschwindigkeit

$$v(0) = A\omega \cos \delta \equiv v_0, \quad (1.2.64)$$

wobei v_0 die Anfangsgeschwindigkeit ist.

Die komplexe Amplitude (1.2.62) lässt sich nun schreiben als

$$Z_0 = Ae^{i\delta} = \frac{v_0}{\omega} + ix_0. \quad (1.2.65)$$

Um δ zu bestimmen verwenden wir die Argumentfunktion

$$\delta = \arg \{Z_0\} = \arg \left\{ \frac{v_0}{\omega} + ix_0 \right\} \quad (1.2.66)$$

$$= \begin{cases} \arctan \left(\frac{x_0 \omega}{v_0} \right) & \text{wenn } v_0 > 0, \\ \arctan \left(\frac{x_0 \omega}{v_0} \right) + \pi & \text{wenn } v_0 < 0 \text{ und } x_0 \geq 0, \\ \arctan \left(\frac{x_0 \omega}{v_0} \right) - \pi & \text{wenn } v_0 < 0 \text{ und } x_0 < 0, \\ +\pi/2 & \text{wenn } v_0 = 0 \text{ und } x_0 > 0, \\ -\pi/2 & \text{wenn } v_0 = 0 \text{ und } x_0 < 0. \end{cases} \quad (1.2.67)$$

Die Amplitude entspricht gerade dem Betrag von Z_0 ,

$$A = |Z_0| \quad (1.2.68)$$

$$= \left| \frac{v_0}{\omega} + ix_0 \right| \quad (1.2.69)$$

$$= \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}. \quad (1.2.70)$$

1.2.8 Energiebilanz des harmonischen Oszillators

Für einen idealen reibungsfreien harmonischen Oszillator ist die Gesamtenergie erhalten. Um dies zu zeigen, betrachten wir die Bewegung eines harmonisch schwingenden Körpers.

Die **potentielle Energie des harmonischen Oszillators** bei der Auslenkung x ist

$$E_{\text{pot}} = - \int_0^x F_R(\tilde{x}) d\tilde{x} = + \int_0^x k\tilde{x} d\tilde{x} = \frac{1}{2}kx^2, \quad (1.2.71)$$

wobei F_R die rücktreibende Kraft bezeichnet.

Die **kinetische Energie des harmonischen Oszillators** bei der Auslenkung x zur Zeit t mit zugehöriger Geschwindigkeit $\dot{x}$ ist

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2. \quad (1.2.72)$$

Mit den Lösungen für die harmonische Schwingung

$$x(t) = A \sin(\omega t + \delta) \quad (1.2.73)$$

$$\dot{x}(t) = A\omega \cos(\omega t + \delta) \quad (1.2.74)$$

erhalten wir schliesslich die **Gesamtenergie des harmonischen Oszillators**

$$E_{\text{tot}} = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} \quad (1.2.75)$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \delta) + \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \delta) \quad (1.2.76)$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 (\cos^2(\omega t + \delta) + \sin^2(\omega t + \delta)) \quad (1.2.77)$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2 A^2, \quad (1.2.78)$$

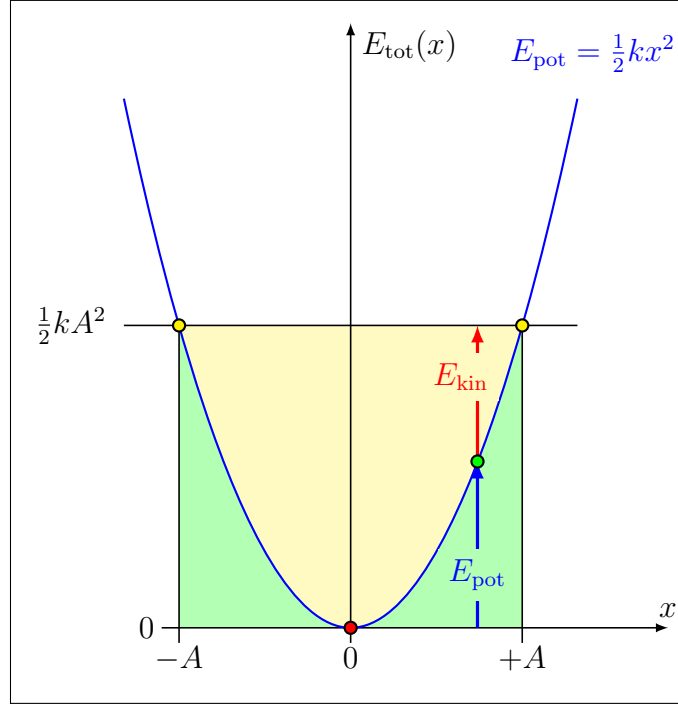


Abbildung 1.10: Energiebilanz des harmonischen Oszillators. Eine vorgegebene Energie $E_{\text{tot}} = \frac{1}{2}kA^2$ legt die Amplitude A fest (horizontaler Schnitt). Ein vertikaler Schnitt $-A \leq x \leq A$ legt die relativen Anteile der Potentiellen Energie E_{pot} und der kinetischen Energie E_{kin} fest.

wobei der Subskript von E_{tot} für *total energy* steht.

Die Gesamtenergie hängt also nicht von der Zeit ab und ist damit zeitlich konstant, die Energie ist also erhalten. An den Umkehrpunkten verschwindet die kinetische Energie, beim Durchgang durch die Ruhelage dagegen die potentielle Energie (siehe Abb. 1.10).

Der zeitliche Mittelwert $\langle E_{\text{kin}} \rangle$ der kinetischen Energie ist gleich dem über eine Periode T gemittelten Wert:

$$\langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{\int_0^T E_{\text{kin}}(t) dt}{\int_0^T dt} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \frac{\int_0^T \cos^2(\omega t + \delta) dt}{T} \quad (1.2.79)$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \frac{\pi/\omega}{T} = \frac{1}{2}E_{\text{tot}}. \quad (1.2.80)$$

Auf Grund der Energieerhaltung können wir folgern, dass sich die Gesamtenergie demnach im zeitlichen Mittel zu gleichen Teilen auf die potentielle und die kinetische Energie verteilt:

$$\langle E_{\text{kin}} \rangle = \langle E_{\text{pot}} \rangle = \frac{1}{2}E_{\text{tot}}. \quad (1.2.81)$$

1.3 Gedämpfte Schwingungen

1.3.1 Der gedämpfte harmonische Oszillator

Wir betrachten einen Wagen, der horizontal auf einer Schiene steht und seitlich durch eine Feder der Federkonstante $k > 0$ mit einer Wand verbunden ist. Wenn man den Wagen um eine Strecke x aus seiner Ruhelage bei $s = 0$ auslenkt, wird die Feder die Rückstellkraft $F_R = -kx$ auf den Wagen ausüben. Mit dem zweiten Satz von Newton erhalten wir

$$m\ddot{x} = -kx \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (1.3.1)$$

Wenn wir jetzt jedoch noch eine zusätzliche, der Geschwindigkeit proportionale und ihr entgegengesetzt wirkende **Dämpfungskraft** (Reibungskraft) $F_D = -d\dot{x}$ einführen, erhalten wir:

$$m\ddot{x} = -kx - d\dot{x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{d}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (1.3.2)$$

Den Koeffizienten d der Dämpfungskraft nennen wir **Dämpfungskonstante**.

Eine solche Dämpfungskraft, welche linear in der Geschwindigkeit $\dot{x}$ ist, stellt einen Spezialfall dar. Wir werden uns in dieser Vorlesung ausschliesslich mit Dämpfungskräften dieser Form auseinandersetzen, da diese Fälle mathematisch gut lösbar sind. Im mechanischen Kontext tritt eine solche Art der Dämpfung im Fall von viskoser Reibung auf, also zum Beispiel wenn sich ein viskoses Schmiermittel an der Kontaktfläche von zwei sich gegeneinander bewegenden Körpern oder in einem Lager befindet, sowie als Strömungswiderstand im Falle einer laminaren Strömung (Stokes-Reibung). Beim Vorliegen anders gearteter Reibungskräfte kann die Formulierung der Bewegungsgleichung mit geschwindigkeitsproportionalem Dämpfungsterm teils zumindest als Näherung verwendet werden. Beispiele für anders geartete Reibungskräfte sind die Gleitreibung (Coulomb-Reibung), die lediglich von der Richtung der Geschwindigkeit abhängt, sowie der Luftwiderstand, der in vielen Anwendungsfällen über eine turbulente Strömung zu modellieren ist und sich dann näherungsweise proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit verhält.

Wir führen die **Dämpfungsrate**

$$\gamma = \frac{d}{m} \quad (1.3.3)$$

ein und verwenden die bereits bekannte Gleichung der Kreisfrequenz

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (1.3.4)$$

um schliesslich die **Gleichung des gedämpften harmonischen Oszillators** zu erhalten:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (1.3.5)$$

Es handelt sich wieder um eine homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Wir bestimmen die allgemeine Lösung mit Hilfe des Euler-Ansatzes $x(t) = e^{\lambda t}$. Die charakteristische Gleichung lautet

$$\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega_0^2 = 0. \quad (1.3.6)$$

Lösen wir diese Gleichung nach λ auf, erhalten wir

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}\gamma \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}. \quad (1.3.7)$$

Wir unterscheiden die folgenden drei Fälle.

1. Fall: Starke (überkritische) Dämpfung ($\gamma > 2\omega_0$)

Im ersten Fall ist der Radikand positiv und wir erhalten die rein reellen Lösungen

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}\gamma \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2} < 0. \quad (1.3.8)$$

Wir finden als allgemeine Lösung

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \quad (1.3.9)$$

mit den beiden reellen Koeffizienten C_1 und C_2 . Für grosse Zeiten findet man, dass

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0, \quad (1.3.10)$$

das heisst, der Wagen nähert sich aufgrund der Reibung exponentiell an einen Stillstand in der Ruhelage an (siehe Abb. 1.11). Betrachten wir die Geschwindigkeit des Wagens,

$$\dot{x}(t) = C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \quad (1.3.11)$$

und suchen nach ihren Nullstellen, das heisst den Stellen, wo der Wagen seine Laufrichtung ändert, dann sehen wir, dass das nur möglich ist, falls

$$e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} = -\frac{\lambda_2 C_2}{\lambda_1 C_1}. \quad (1.3.12)$$

Diese Gleichung hat maximal eine Lösung. In diesem Fall wird der Wagen genau einmal seine Richtung ändern und anschliessend auf den Nullpunkt zukriechen. Daher bezeichnet man die starke Dämpfung häufig auch als **Kriechfall**.

2. Fall: Kritische Dämpfung ($\gamma = 2\omega_0$)

Hier ist der Radikand gerade Null und wir erhalten eine reelle Doppelwurzel $\lambda_{1,2} = -\gamma/2$. Einsetzen in die Bewegungsgleichung (1.3.5) ergibt, dass sowohl $e^{-t\gamma/2}$

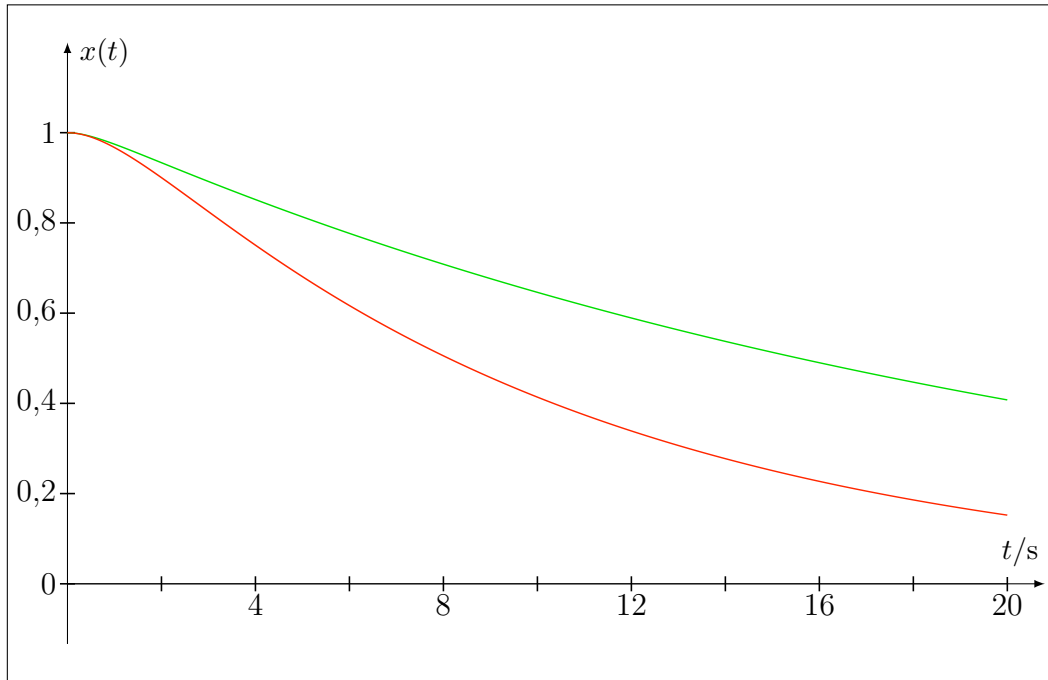


Abbildung 1.11: Gedämpfte Schwingung, überkritische Dämpfung (Kriechfall). Grüne Kurve: $\gamma = 2 \text{ s}^{-1}$, $\omega = 0.3 \text{ s}^{-1}$. Rote Kurve: $\gamma = 1 \text{ s}^{-1}$, $\omega = 0.3 \text{ s}^{-1}$.

als auch $te^{-t\gamma/2}$ diese lösen. Die allgemeine Lösung ist gegeben durch die Kombination dieser beiden speziellen Lösungen:

$$x(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-\frac{1}{2}\gamma t}. \quad (1.3.13)$$

Dieser Bewegungstyp wird auch **asymptotischer Grenzfall** genannt, da hier $\omega \rightarrow 0$ und $T \rightarrow \infty$ gilt (siehe Abb. 1.12).

Auch hier gilt wieder, dass $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$. Ferner kann $\dot{x}(t)$ höchstens einmal null werden (siehe dazu auch Fall 1).

3. Fall: Schwache Dämpfung ($\gamma < 2\omega_0$)

Hier ist der Radikand negativ und wir erhalten

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}\gamma \pm i\sqrt{\left|\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2\right|}. \quad (1.3.14)$$

Durch den Imaginärteil in λ_1 und λ_2 erhalten wir aus den Exponentialfunktionen die trigonometrischen Funktionen. Einsetzen von $\lambda_{1,2}$ in den Euler-Ansatz ergibt mit den beiden komplexen Koeffizienten $C_{1,2}$ und der Kreisfrequenz

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \quad (1.3.15)$$

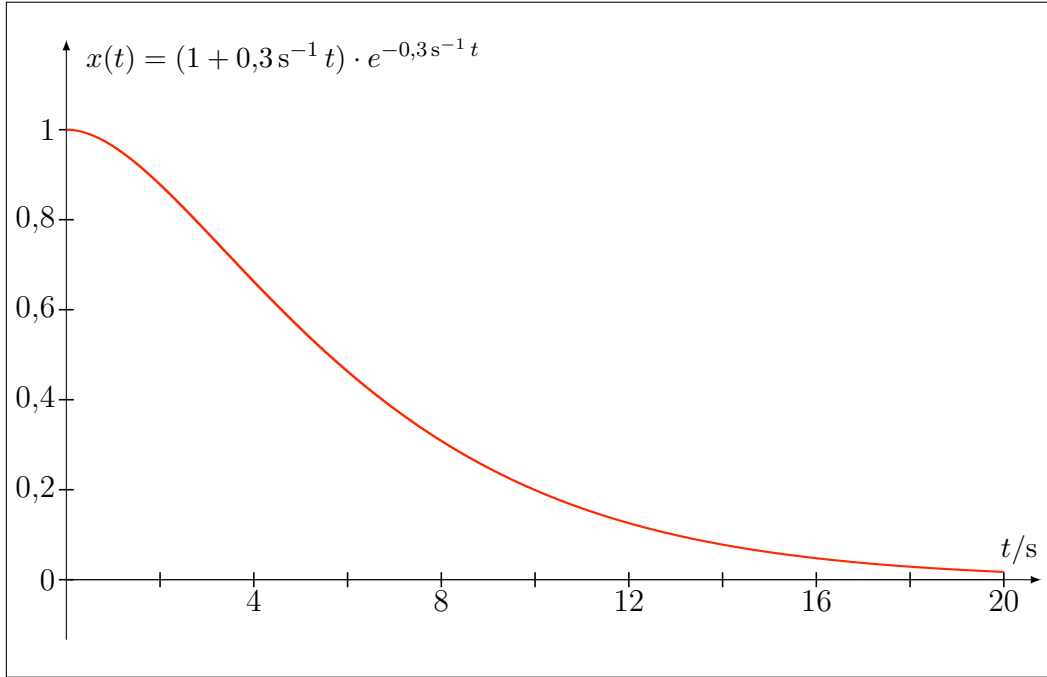


Abbildung 1.12: Gedämpfte Schwingung, kritische Dämpfung.

nun die allgemeine Lösung als Linearkombination

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \quad (1.3.16)$$

$$= C_1 e^{-\frac{1}{2}\gamma t} e^{i\omega t} + C_2 e^{-\frac{1}{2}\gamma t} e^{-i\omega t} \quad (1.3.17)$$

$$= (C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}) e^{-\frac{1}{2}\gamma t}. \quad (1.3.18)$$

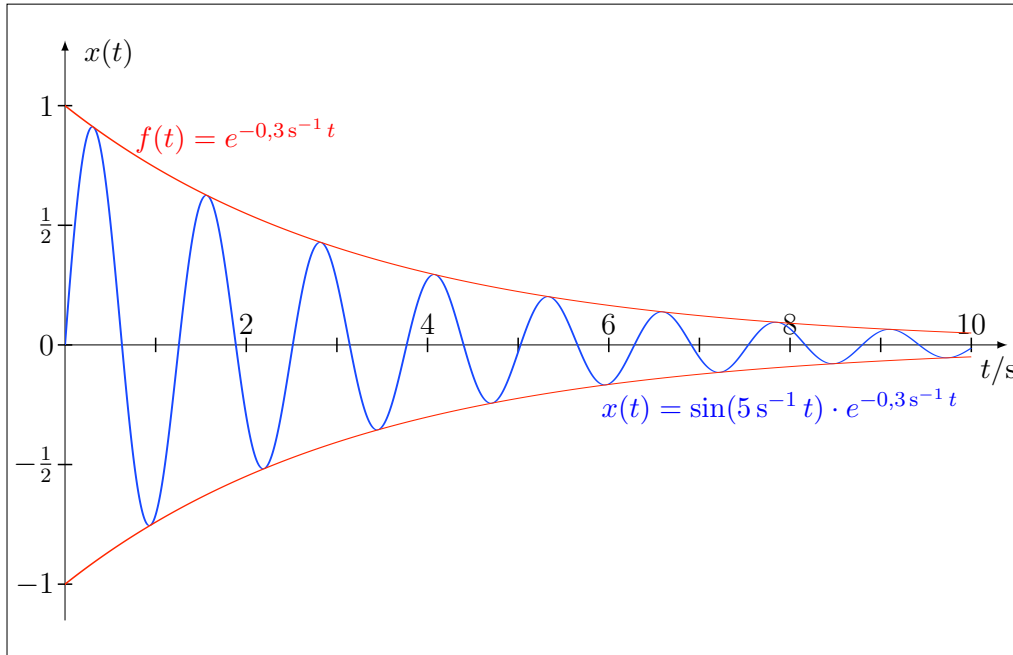
Hierbei muss $C_2 = C_1^*$ gelten, d.h. die Koeffizienten müssen konjugiert komplex zueinander sein, um eine reelle Lösung zu erhalten.

Unter Verwendung der Eulerschen Formel (1.2.16) sowie trigonometrischer Identitäten, können wir die Gleichung (1.3.18) umformen zu

$$x(t) = A e^{-\frac{1}{2}\gamma t} \sin(\omega t + \delta). \quad (1.3.19)$$

Es gilt $\omega < \omega_0$, d.h. die Kreisfrequenz der gedämpften (freien, harmonischen) Schwingung ist kleiner als jene der ungedämpften (freien, harmonischen) Schwingung. Die Frequenzverschiebung ist um so grösser, je stärker die Dämpfung ist.

Es gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$, aber der Sinusterm bewirkt, dass der Wagen unaufhörlich hin und her schwingt (siehe Abb. 1.13). Man kann diese Schwingung auch interpretieren als eine Schwingung mit zeitlich variabler, exponentiell abfallender Amplitude $\tilde{A} := A e^{-t\gamma/2}$ und Kreisfrequenz ω .

Abbildung 1.13: Schwach gedämpfte Schwingung $x(t)$ und ihre Einhüllende $f(t)$.

1.3.2 Beispiele zum gedämpften harmonischen Oszillator.

Aus den vielen möglichen Beispielen greifen wir drei typische heraus: Eine lineare gedämpfte Schwingung einer Masse an einer Feder (Abb. 1.14), eine gedämpfte Drehschwingung einer Masse an einem dünnen Draht (Abb. 1.15) und schliesslich die Schwingung einer Spannung bzw. eines Stroms in einem gedämpften elektrischen Schwingkreis (Abb. 1.16). Tabelle 1.1 vergleicht die wichtigsten Bestimmungsgleichungen und Messgrößen dieser drei Beispiele miteinander. Man beachte, dass alle Beispiele auf denselben Typ von Differentialgleichung führen und damit die selben Klassen von Lösungen haben wie oben diskutiert.

1.3.3 Energiebilanz der gedämpften Schwingung

Zur Berechnung der zeitlichen Änderung der Energie berechnen wir

$$\frac{d}{dt} E_{\text{tot}} = \frac{d}{dt} (E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}) \quad (1.3.20)$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 \right) \quad (1.3.21)$$

$$= m \dot{x} \ddot{x} + m \omega_0^2 x \dot{x} \quad (1.3.22)$$

$$= m \dot{x} (\ddot{x} + \omega_0^2 x) = m \dot{x} \cdot (-\gamma \dot{x}) = -\gamma m \dot{x}^2 \quad (1.3.23)$$

$$= F_D \cdot \dot{x} = P_D \quad (1.3.24)$$

Lineare Schwingung	DrehSchwingung	Elektrischer Schwingkreis
$m\ddot{x} = F + F_D + F_{\text{ext}}$	$J\ddot{\varphi} = M + M_D + M_{\text{ext}}$	$U_{\text{ext}} = U_L + U_R + U_C$
$F = -kx$	$M = -\kappa\varphi$	$U_L = L\dot{I}$
$F_D = -m\gamma\dot{x}$	$M_D = -2J\rho\dot{\varphi}$	$U_R = RI$
		$U_C = Q/C$
k = Federkonstante m = Masse γ = Dämpfungsrate	κ = Richtmoment J = Trägheitsmoment	Q = Ladung, $I = \dot{Q}$ = Strom R = Ohmscher Widerstand C = Kapazität
$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2x = \frac{F_{\text{ext}}}{m}$	$\ddot{\varphi} + 2\rho\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = \frac{M_{\text{ext}}}{J}$	$\ddot{Q} + \frac{R}{L}\dot{Q} + \omega_0^2Q = \frac{U_{\text{ext}}}{L}$
$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{J}}$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$

Tabelle 1.1: Vergleich von drei verschiedenen gedämpften Schwingungen.

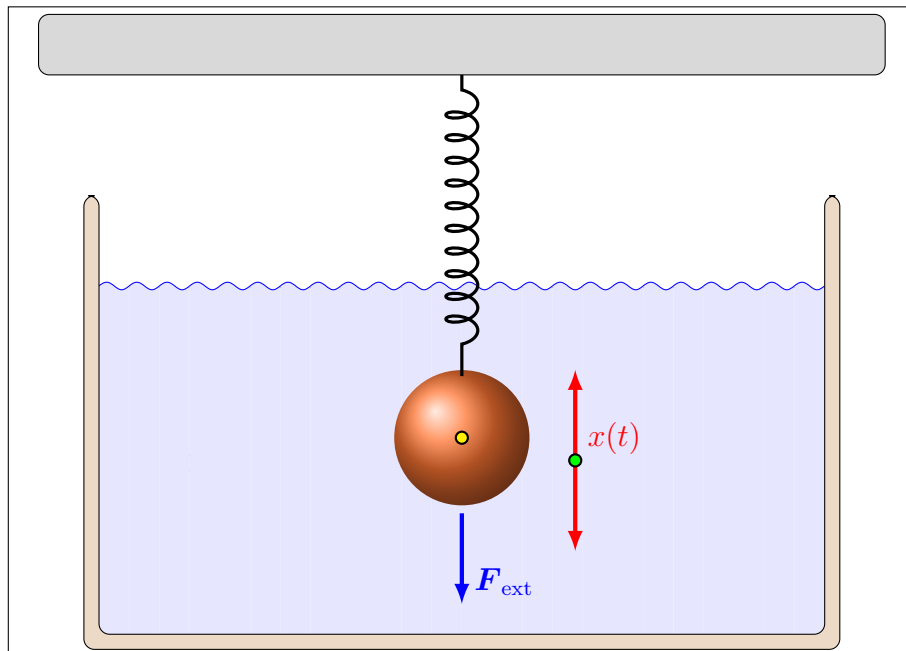


Abbildung 1.14: Gedämpfte lineare Schwingung.

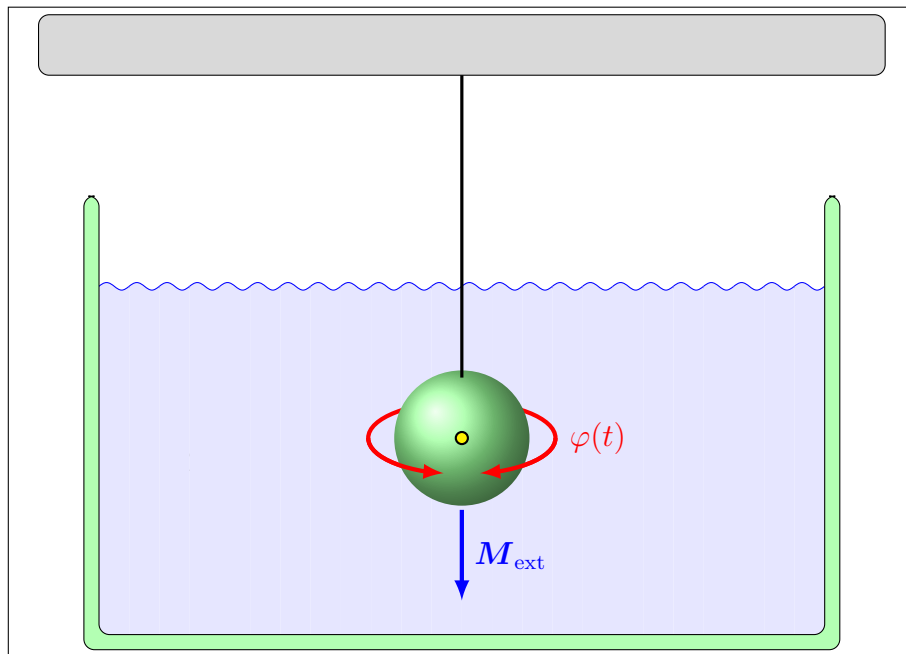


Abbildung 1.15: Gedämpfte Drehschwingung.

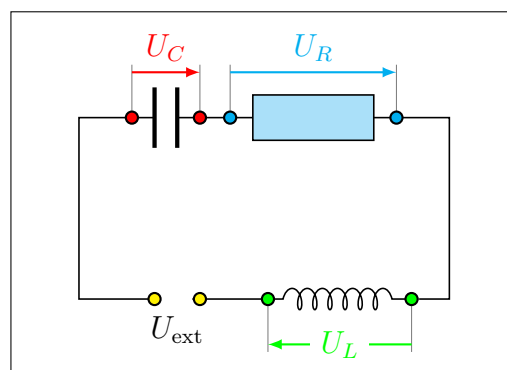


Abbildung 1.16: Gedämpfter elektrischer Schwingkreis.

mit der Dämpfungskraft $F_D = -\gamma m \dot{x}$ und der entsprechenden **Verlustleistung** P_D . In (1.3.23) haben wir zur Umformung die Bewegungsgleichung (1.3.5) verwendet.

Die zeitliche Änderung der Gesamtenergie ist also gleich der Verlustleistung durch die Dämpfung.

Als Spezialfall untersuchen wir die *schwache* Dämpfung, bei der die Dämpfungsrate γ klein ist gegenüber dem Kehrwert der Schwingungsperiode T :

$$\gamma \ll \frac{1}{T}. \quad (1.3.25)$$

Während einer Periode nimmt damit die Amplitude nur wenig ab.

Dann gilt für die über eine Periode gemittelte kinetische Energie

$$\langle E_{\text{kin}} \rangle_T = \frac{1}{2} E_{\text{tot}} = \frac{1}{2} m \langle \dot{x}^2 \rangle_T \quad (1.3.26)$$

Die mittlere Verlustleistung während einer Periode T ist gleich

$$P_D = -\gamma m \langle \dot{x}^2 \rangle_T \quad (1.3.27)$$

$$\Rightarrow P_D = -\gamma E_{\text{tot}} \quad (1.3.28)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} E_{\text{tot}} = -\gamma E_{\text{tot}} \quad (1.3.29)$$

$$\Rightarrow E_{\text{tot}} = \underbrace{E_{\text{tot}}(0)}_{:=E_0} \cdot e^{-\gamma t}. \quad (1.3.30)$$

Die Energie nimmt also exponentiell ab mit der **Zerfallskonstante** $\tau = 1/\gamma$:

$$E_{\text{tot}}(t) = E_0 e^{-t/\tau}. \quad (1.3.31)$$

Man beachte, dass die Zerfallskonstante τ sich in diesem Skript auf die exponentielle Abnahme *der Energie* bezieht. Alternativ kann man auch die Zerfallskonstante der Amplitude A betrachten, was zum Beispiel bei der Analyse elektrischer Schaltungen üblich ist. Durch den Zusammenhang $E_{\text{tot}}(t) \propto A(t)^2$ muss $\tau_{\text{Amplitude}} = 2 \tau_{\text{Energie}} = 2 \tau$ gelten.

Die relative Abnahme der Energie während einer Periode wird oft durch den **Gütefaktor**, auch **Q-Faktor** genannt, beschrieben:

$$Q := 2\pi \frac{E_{\text{tot}}(t)}{E_{\text{tot}}(t) - E_{\text{tot}}(t+T)} \quad (1.3.32)$$

$$= 2\pi \frac{E_0 e^{-t/\tau}}{E_0 e^{-t/\tau} (1 - e^{-T/\tau})}. \quad (1.3.33)$$

Da $\tau \gg T$ ist, können wir den Term $(1 - e^{-T/\tau})$ in eine Reihe bis zu einem Term 1. Ordnung entwickeln:

$$(1 - e^{-T/\tau}) \approx 1 - \left(1 - \frac{T}{\tau}\right) = \frac{T}{\tau}. \quad (1.3.34)$$

Damit erhalten wir für den Gütefaktor in der Näherung $\gamma \ll 1/T$:

$$Q = 2\pi \frac{\tau}{T} = \frac{\omega}{\gamma}. \quad (1.3.35)$$

1.4 Erzwungene Schwingungen, Resonanz

1.4.1 Gleichgewichtslösung

Bisher haben wir nur frei schwingende Systeme behandelt, die also einmal angeregt und anschliessend sich selbst überlassen wurden. Wir weiten nun die Diskussion aus, indem wir eine periodisch von aussen einwirkende Kraft betrachten.

Diese antreibende Kraft sei

$$F_a(t) = F_0 \cos \Omega t, \quad F_0, \Omega \in \mathbb{R}, \quad (1.4.1)$$

mit der Kreisfrequenz Ω . Die Untersuchung einer einzelnen Kosinusschwingung ist eine geeignete Vereinfachung, da die Zeitabhängigkeit beliebiger Funktionen durch die Überlagerung von harmonischen Funktionen dargestellt werden kann. Das mathematische Instrument dazu ist die Fouriertransformation. Der Anhang B.1 enthält eine erste Einführung zu diesem Thema, mit welchem wir uns in dieser Vorlesung jedoch nicht näher auseinandersetzen werden.

Die Differentialgleichung für die erzwungene Schwingung lautet damit

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t. \quad (1.4.2)$$

Die allgemeine Lösung einer *inhomogenen Differentialgleichung* ist die Summe aus der allgemeinen Lösung $x_h(t)$ der homogenen Gleichung und *einer* beliebigen partikulären Lösung $x_p(t)$ der inhomogenen Gleichung:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t). \quad (1.4.3)$$

Wir nehmen als Lösung der homogenen Gleichung eine gedämpfte Schwingung

$$x_h(t) = A_0 e^{-\frac{1}{2}\gamma t} \cos(\omega t + \delta) \quad (1.4.4)$$

an. Für grosse Zeiten $t \gg 1/\gamma$ geht die Amplitude gegen Null, d.h.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_h(t) = 0. \quad (1.4.5)$$

Die homogene Lösung mit der Kreisfrequenz ω verschwindet also nach dem sogenannten **Einschwingvorgang**, der durch das Einsetzen der äusseren Kraft ausgelöst wird. Demnach gilt

$$\text{für } t \gg \frac{1}{\gamma} \Rightarrow x(t) \approx x_p(t). \quad (1.4.6)$$

Für die partikuläre Lösung verwenden wir den Ansatz

$$x_p(t) = x_0 e^{i\Omega t}, \quad x_0 \in \mathbb{C}, \quad (1.4.7)$$

welcher ein System beschreibt, das mit der Kreisfrequenz Ω der antreibenden Kraft schwingt. Wie zuvor bereits erwähnt, verläuft die Rechnung mit dem Ansatz einer komplexen e -Funktion einfacher als mit den trigonometrischen Funktionen. Nach erfolgter Rechnung ergibt dann der Realteil, $\operatorname{Re}(x_p)$, die gesuchte Lösung.

Wir halten fest, dass der Oszillator nach einer gewissen Einschwingzeit der partikulären Lösung (1.4.7) folgt und somit mit der Erregerfrequenz schwingt.

1.4.2 Resonanz

Indem wir die komplexe Darstellung $F_0 e^{i\Omega t}$ der antreibenden Kraft einführen, so dass

$$F_a(t) = \operatorname{Re} \{ F_0 e^{i\Omega t} \} = F_0 \cos \Omega t, \quad (1.4.8)$$

können wir den komplexen Ansatz für $x_p(t)$ in die Bewegungsgleichung einsetzen und erhalten

$$x_0 [-\Omega^2 + i\gamma\Omega + \omega_0^2] e^{i\Omega t} = \frac{F_0}{m} e^{i\Omega t}. \quad (1.4.9)$$

Damit ergibt sich die komplexe Amplitude der Schwingung zu

$$x_0 = \frac{F_0/m}{(\omega_0^2 - \Omega^2) + i\gamma\Omega} \quad (1.4.10)$$

$$= \frac{F_0}{m} \frac{(\omega_0^2 - \Omega^2) - i\gamma\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \gamma^2\Omega^2}, \quad (1.4.11)$$

wobei wir die Umformung

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z} \frac{z^*}{z^*} = \frac{z^*}{zz^*} = \frac{z^*}{|z|^2} \quad (1.4.12)$$

verwendet haben, die für eine beliebige komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ gilt. Es sei ferner

$$x_0 := |x_0| e^{i\delta_0} \quad \text{und} \quad a_0 = \frac{F_0}{m}. \quad (1.4.13)$$

Der Betrag der komplexen Amplitude $|x_0|$, welcher der physikalisch beobachtbaren Amplitude entspricht, und die Phase δ_0 der erzwungenen Schwingung sind damit

$$\begin{aligned} \frac{|x_0|}{a_0} &= \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \gamma^2\Omega^2}} =: V(\gamma, \Omega), \\ \delta_0 &= \arg \{ (\omega_0^2 - \Omega^2) - i\gamma\Omega \} = \begin{cases} \arctan \left(\frac{-\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \right) & \text{wenn } \Omega < \omega_0, \\ -\pi/2 & \text{wenn } \Omega = \omega_0, \\ \arctan \left(\frac{-\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \right) - \pi & \text{wenn } \Omega > \omega_0, \end{cases} \end{aligned} \quad (1.4.14)$$

wobei $\arg$ das Argument einer komplexen Zahl bezeichnet.

Man beachte:

1. Das Verhältnis $V(\gamma, \Omega) = |x_0|/a_0$ wird auch **Vergrößerungsfunktion** genannt.
2. Die **Phase** oder auch **Phasenverschiebung** δ_0 beschreibt, um welche Phase die Oszillation relativ zur einwirkenden Kraft schwingt.
Sowohl V als auch δ_0 hängen von der Dämpfungsrate γ und der Frequenz Ω der einwirkenden Kraft ab.
3. Durch Einführung der Variablen

$$\eta := \frac{\Omega}{\omega_0} \quad \text{und} \quad \xi := \frac{\gamma}{2\omega_0}, \quad (1.4.15)$$

welche die auf die Eigenfrequenz des Oszillators normierte Anregungsfrequenz und die ebenfalls auf die Eigenfrequenz normierte Dämpfung angeben, können die obigen Beziehungen dimensionslos dargestellt werden:

$$V(\eta, \xi) = \frac{1}{\omega_0^2} \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4\xi^2\eta^2}} \quad (1.4.16)$$

$$\delta_0 = \arg \{ (1 - \eta^2) - i2\xi\eta \} = \begin{cases} \arctan \left(\frac{-2\xi\eta}{1 - \eta^2} \right) & \text{wenn } \eta < 1, \\ -\pi/2 & \text{wenn } \eta = 1, \\ \arctan \left(\frac{-2\xi\eta}{1 - \eta^2} \right) - \pi & \text{wenn } \eta > 1. \end{cases} \quad (1.4.17)$$

Abb. 1.17 zeigt die Vergrößerungsfunktion und die Phasenverschiebung als Funktion von η .

Das Maximum der Resonanzkurve liegt bei der sogenannten Resonanzfrequenz Ω_r , welche sich wie folgt bestimmen lässt:

$$\left. \frac{\partial V}{\partial \eta} \right|_{\eta=\eta_{\text{res}}} = 0 \quad (1.4.18)$$

$$\Rightarrow \eta_{\text{res}} = \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad (1.4.19)$$

$$\Rightarrow \Omega_{\text{res}} = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}. \quad (1.4.20)$$

Am Maximum tritt **Amplitudenresonanz** ein. Die Resonanzfrequenz Ω_{res} ist dabei stets kleiner als die Eigenfrequenz des Oszillators.

Die Dämpfung führt dazu, dass die Amplitude nicht beliebig gross wird. In technischen Systemen kann eine zu niedrige Dämpfung bei anhaltend einwirkender Kraft mitunter dazu führen, dass die Oszillationsamplitude auf Werte anwächst, die das Objekt zerstören können. Siehe **Tacoma Bridge**.

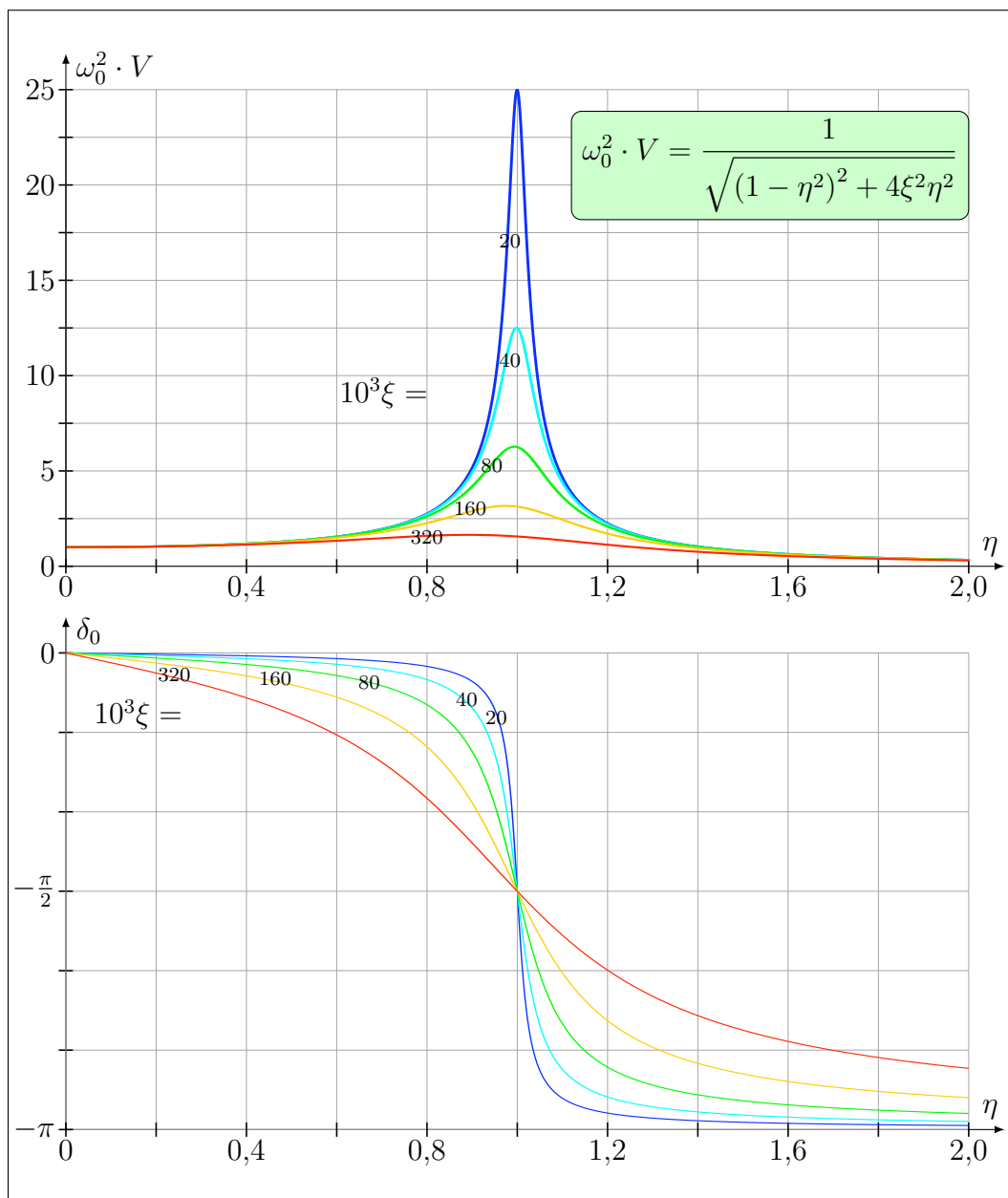


Abbildung 1.17: Resonanzkurven für Amplitude und Phase mit V und δ_0 aus (1.4.16) und (1.4.17).

Eine Grösse, die häufig verwendet wird um ein erzwungen schwingendes System zu charakterisieren, ist die **Resonanzbreite** $\Delta\omega$. Sie ist definiert als die Halbwertsbreite⁴ des Amplitudenquadrats, also die Differenz der beiden Kreisfrequenzen, an welchen das Quadrat der Amplitude gerade der Hälfte des Quadrats der Resonanzamplitude entspricht. Äquivalent können wir die Resonanzbreite auch über die Halbwertsbreite des Quadrats der Vergrösserungsfunktion definieren, d.h.

$$\Delta\omega := |\Omega_1 - \Omega_2| \quad \text{mit} \quad V(\gamma, \Omega_i) = \frac{1}{\sqrt{2}} V(\gamma, \Omega_{\text{res}}) \quad \text{für} \quad i = 1, 2. \quad (1.4.21)$$

Für den Fall einer schwachen Dämpfung lässt sich die Resonanzbreite in Näherung⁵ durch

$$\Delta\omega \approx \frac{\omega_0}{Q} = \gamma \quad (1.4.22)$$

ausdrücken. Somit besteht ein direkter Zusammenhang zwischen der Breite der Resonanzkurve und dem Q-Faktor sowie der Dämpfungsrate γ .

1.4.3 Bemerkungen zu Amplitude und Phase der Resonanz

Die Resonanzamplitude $|x_0|$

- ist proportional zur äusseren Kraft,
- ist um so grösser, je kleiner die Differenz $|\omega_0 - \Omega|$ zwischen antreibender Frequenz und Eigenfrequenz des Oszillators ist und je kleiner die Dämpfungsrate γ ist.

Wir untersuchen das Resonanzverhalten in den folgenden drei charakteristischen Grenzfällen:

1. **Resonanzferner Fall mit antreibender Frequenz Ω viel niedriger als die Resonanzfrequenz:** $\Omega \ll \omega_0$, d.h. $\eta \rightarrow 0$:

$$\Rightarrow \quad |x_0| = \frac{a_0}{\omega_0^2} \quad (1.4.23)$$

$$\delta_0 = 0 \quad (1.4.24)$$

- Die Dämpfung spielt in diesem Fall keine Rolle. Die (kleine) Amplitude wird nur durch die Amplitude der rücktreibenden Beschleunigung im Verhältnis zum Quadrat der Eigenfrequenz des Oszillators bestimmt. Bei zeitlich konstanter Kraft ($\Omega = 0$) ergibt sich eine konstante Auslenkung.
- Der Oszillator schwingt in Phase mit der antreibenden Kraft.

⁴Im Englischen wird der Begriff Full Width Half Maximum (FWHM) verwendet.

⁵Bei Interesse findet man Informationen hierzu in der Literatur unter dem Stichwort Lorentzkurve. Man beachte die Schreibweise, da es auch eine Lorenzkurve gibt, die hiermit jedoch nichts zu tun hat.

2. **Resonanznaher Fall:** $\Omega \approx \omega_0$, d.h. $\eta \rightarrow 1$:

$$\Rightarrow |x_0| = \frac{a_0}{\gamma\omega_0} \quad (1.4.25)$$

$$\delta_0 = -\frac{\pi}{2} \quad (1.4.26)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}(x) = |x_0| \sin \Omega t \quad (1.4.27)$$

Auf Grund der Phasenverschiebung δ_0 wird dem Oszillator in jeder Lage Energie zugeführt. Der Betrag der maximalen Amplitude ergibt sich aus dem Verhältnis der antreibenden Beschleunigung und dem Produkt aus Dämpfungsrate und Resonanzfrequenz.

3. **Resonanzferner Fall mit antreibender Frequenz Ω viel grösser als die Resonanzfrequenz:** $\Omega \gg \omega_0$, d.h. $\eta \gg 1$:

$$\Rightarrow |x_0| = \frac{a_0}{\Omega^2} \quad (1.4.28)$$

$$\delta_0 = -\pi \quad (1.4.29)$$

- Die (kleine) Amplitude wird nur durch die Trägheit der Masse m bestimmt und ergibt sich aus dem Verhältnis der durch die antreibende Kraft verursachten Beschleunigung und dem Quadrat der antreibenden Frequenz Ω . Die Amplitude geht asymptotisch gegen null für $\Omega \rightarrow \infty$.
- Der Oszillator schwingt mit einer Phase, die der antreibenden Kraft genau um 180 Grad entgegengesetzt ist.

1.4.4 Energiebilanz der erzwungenen Schwingung

Wir verwenden wieder das bereits bei der freien Schwingung angewandte Verfahren zur Berechnung der an der Schwingung beteiligten Energien:

$$m\ddot{x} + m\gamma\dot{x} + m\omega_0^2 x = F_a \big| \cdot \dot{x} \quad (1.4.30)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \underbrace{\left\{ \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 \right\}}_{=E_{\text{Osz}}} = -m\gamma\dot{x}^2 + F_a \dot{x}. \quad (1.4.31)$$

Im Gleichgewichtszustand (stationärer Fall) ändert sich die Gesamtenergie des Oszillators E_{Osz} nicht, d.h.

$$\frac{d}{dt} E_{\text{Osz}} = 0 \quad (1.4.32)$$

$$\Rightarrow F_a \dot{x} = m\gamma\dot{x}^2. \quad (1.4.33)$$

In diesem Grenzfall wird die durch die äussere Kraft zugeführte Leistung vollständig in Reibungsleistung umgewandelt.

Die während einer Periode T_Ω zugeführte mittlere Leistung ergibt sich zu

$$\langle P \rangle_{T_\Omega} = \frac{1}{T_\Omega} \int_0^{T_\Omega} F_a \dot{x} dt \quad (1.4.34)$$

$$x(t) = |x_0| \cos(\Omega t + \delta_0) \quad (1.4.35)$$

$$\dot{x}(t) = -|x_0| \Omega \sin(\Omega t + \delta_0) \quad (1.4.36)$$

$$\Rightarrow \langle P \rangle_{T_\Omega} = -\frac{1}{2} F_0 \Omega |x_0| \sin \delta_0. \quad (1.4.37)$$

Nach Gl. (1.4.13) ist aber

$$|x_0| \sin \delta_0 = \text{Im} \{x_0\}, \quad (1.4.38)$$

und somit folgt aus Gl. (1.4.10) die mittlere Leistung

$$\langle P \rangle_{T_\Omega} = -\frac{1}{2} F_0 \Omega \left\{ \frac{F_0}{m} \frac{-\gamma \Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \gamma^2 \Omega^2} \right\}. \quad (1.4.39)$$

Nach einigen algebraischen Umformungen erhalten wir schliesslich das wichtige Ergebnis

$$\langle P \rangle_{T_\Omega} = \frac{m a_0^2}{2\gamma} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{\gamma \Omega} \right)^2}. \quad (1.4.40)$$

Aus diesem Ausdruck sehen wir, dass im Gegensatz zur Amplitudenresonanz bei der **Leistungsresonanz** die maximale Leistung bei $\Omega_{\text{res,P}} = \omega_0$ übertragen wird.

Die **Leistungsresonanz** findet statt, wenn die Erregerfrequenz Ω gleich der Eigenfrequenz ω_0 ist.

Siehe dazu Abb. 1.18.

In den dimensionslosen Grössen η und ξ lautet diese Gleichung

$$\langle P \rangle_{T_\Omega}(\eta, \xi) = \frac{m a_0^2}{4\omega_0} \cdot \frac{1}{\xi} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{1 - \eta^2}{2\xi\eta} \right)^2}. \quad (1.4.41)$$

1.5 Überlagerung von Schwingungen

1.5.1 Einleitung

In der Natur treten reine Schwingungen bei einer einzigen Frequenz selten auf. Das folgt schon alleine aus der Tatsache, dass jede physikalisch realisierte Schwingung einen Anfang

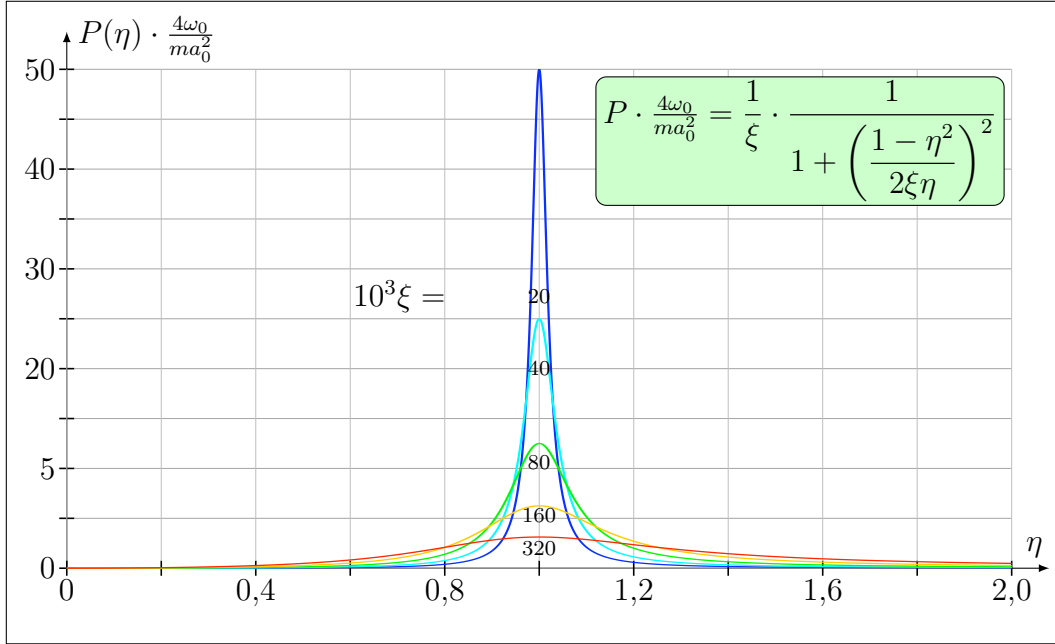


Abbildung 1.18: Leistungsresonanz.

nimmt und irgendwann zu Ende ist, während eine Schwingung bei einer einzigen Frequenz aus mathematischer Sicht stets von $t = -\infty$ bis $t = +\infty$ verläuft.

Wir werden uns zunächst auf die Überlagerung von zwei Schwingungen beschränken. Die daraus gewonnenen Erkenntnisse lassen sich durch iteratives Vorgehen jedoch ohne Weiteres auf die Überlagerung von n Schwingungen übertragen. Der Übergang zu unendlich vielen Schwingungen führt schließlich zur Fourierreihe in Abschnitt B.1.

Zunächst wollen wir das Problem der Überlagerung mathematisch in einer zu lösenden Differentialgleichung festhalten. Bisher haben wir uns auf *eine* periodisch antreibende Kraft F_a konzentriert. Nun stellt sich die Frage, wie sich der Oszillator verhält, wenn er von mehr als einer äusseren periodischen Kraft getrieben wird. Für zwei antreibende Kräfte ergänzt sich die Differentialgleichung nun zu⁶

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_1}{m} \cos \omega_1 t + \frac{F_2}{m} \cos \omega_2 t. \quad (1.5.1)$$

Diese Differentialgleichung ist linear in der Funktion x und wir können uns das Superpositionsprinzip zu Nutze machen. Für den stationären Fall nach dem Einschwingvorgang ist die Lösung demnach die Summe der stationären Lösungen von zwei Differentialglei-

⁶Um die Notation bereits jetzt kompatibel zur Fourier-Reihe in Abschnitt B.1 zu halten, kennzeichnen wir antreibende Kräfte hier nicht mehr durch Grossschreibung Ω , sondern durch Indizierung ω_i mit $i = 1, 2, \dots$ (nicht zu verwechseln mit der Eigenfrequenz ω_0).

chungen

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_1}{m} \cos \omega_1 t \quad (1.5.2)$$

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_2}{m} \cos \omega_2 t, \quad (1.5.3)$$

die jeweils nur eine der antreibenden Kräfte enthalten. Wir erhalten die Lösung

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2). \quad (1.5.4)$$

1.5.2 Zwei Schwingungen gleicher Frequenz

Der einfachste Fall einer Überlagerung liegt vor, wenn die Frequenzen der zu überlagern- den Schwingungen gleich sind.

1.5.2.1 Allgemeine Lösung

Die Summe

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) \quad (1.5.5)$$

der beiden Schwingungen

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \delta_1) \quad (1.5.6)$$

$$x_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \delta_2) \quad (1.5.7)$$

lässt sich auf folgende zwei Arten ermitteln: Man verwendet die Additionstheoreme der Winkelfunktionen, oder man führt komplexe Exponentialfunktionen wie folgt ein:

$$z_1(t) = A_1 e^{i\delta_1} e^{i\omega t}, \quad A_1 \in \mathbb{R} \quad (1.5.8)$$

$$z_2(t) = A_2 e^{i\delta_2} e^{i\omega t}, \quad A_2 \in \mathbb{R} \quad (1.5.9)$$

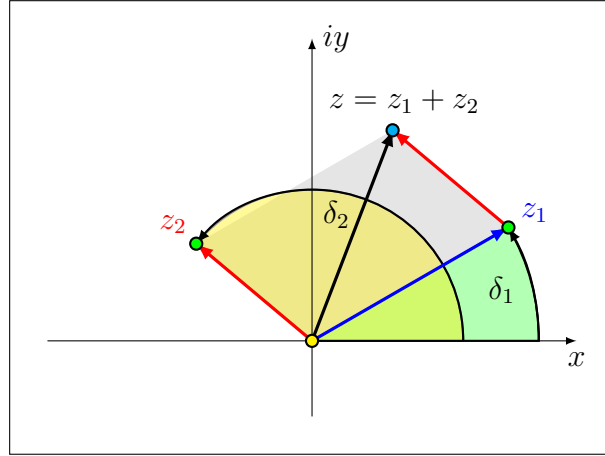
$$\text{mit } x_i(t) = \operatorname{Re}\{z_i(t)\}. \quad (1.5.10)$$

Damit ergibt sich die Summe

$$\begin{aligned} z(t) &= z_1(t) + z_2(t) \\ &= (A_1 e^{i\delta_1} + A_2 e^{i\delta_2}) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (1.5.11)$$

$$=: A e^{i\delta} e^{i\omega t}. \quad (1.5.12)$$

Das Ausklammern des zeitabhängigen Terms in Gleichung (1.5.11) ist möglich, weil beide Schwingungen die gleiche Kreisfrequenz ω haben. Wir erkennen, dass es sich bei der Summe wieder um eine Schwingung mit Kreisfrequenz ω handeln muss. Noch zu bestimmen sind die neue Amplitude A und die neue Phase δ .

Abbildung 1.19: Addition zweier komplexer Zahlen: $z = z_1 + z_2$.

Die Addition zweier komplexer Zahlen entspricht vollständig der Addition zweier 2-dimensionalen Ortsvektoren (siehe auch Abb. 1.19). Mit kartesischen Komponenten

$$z_k = \operatorname{Re}\{z_k\} + i \operatorname{Im}\{z_k\} \quad (1.5.13)$$

$$= A_k \cos(\omega t + \delta_k) + i A_k \sin(\omega t + \delta_k) \quad (1.5.14)$$

$$=: x_k + i y_k \quad (1.5.15)$$

folgt

$$z_1 + z_2 = (x_1 + i y_1) + (x_2 + i y_2) \quad (1.5.16)$$

$$= \underbrace{(x_1 + x_2)}_{=x} + i \underbrace{(y_1 + y_2)}_{=y} \quad (1.5.17)$$

$$\Rightarrow z = x + i y, \quad (1.5.18)$$

wobei wir die Zeitabhängigkeit der Übersichtlichkeit halber nicht explizit ausgeschrieben haben.

Aus dem Zusammenhang $z(0) = A e^{i\delta}$ folgt für die Phase δ , dass

$$\delta = \arg\{z(0)\} = \arg\{x(0) + i y(0)\} \quad (1.5.19)$$

$$= \begin{cases} \arctan\left(\frac{y(0)}{x(0)}\right) & \text{wenn } x(0) > 0, \\ \arctan\left(\frac{y(0)}{x(0)}\right) + \pi & \text{wenn } x(0) < 0 \text{ und } y(0) \geq 0, \\ \arctan\left(\frac{y(0)}{x(0)}\right) - \pi & \text{wenn } x(0) < 0 \text{ und } y(0) < 0, \\ +\pi/2 & \text{wenn } x(0) = 0 \text{ und } y(0) > 0, \\ -\pi/2 & \text{wenn } x(0) = 0 \text{ und } y(0) < 0. \end{cases} \quad (1.5.20)$$

Die Amplitude erhalten wir aus dem Zusammenhang

$$A^2 = |z|^2 = z \cdot z^* \quad (1.5.21)$$

$$= (A_1 e^{i\delta_1} + A_2 e^{i\delta_2}) e^{i\omega t} \cdot (A_1 e^{-i\delta_1} + A_2 e^{-i\delta_2}) e^{-i\omega t} \quad (1.5.22)$$

$$= A_1^2 + A_1 A_2 e^{i(\delta_1 - \delta_2)} + A_1 A_2 e^{-i(\delta_1 - \delta_2)} + A_2^2 \quad (1.5.23)$$

$$= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \operatorname{Re} \{ e^{i(\delta_1 - \delta_2)} \} \quad (1.5.24)$$

$$= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\delta_1 - \delta_2). \quad (1.5.25)$$

Die Summe $x(t)$ der beiden Schwingungen ergibt sich damit zu

$$\begin{aligned} x(t) &= \operatorname{Re} \{ z(t) \} = A \cos(\omega t + \delta) \\ A &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\delta_1 - \delta_2)} \\ \delta &= \arg \{ (A_1 \cos \delta_1 + A_2 \cos \delta_2) + i(A_1 \sin \delta_1 + A_2 \sin \delta_2) \}. \end{aligned} \quad (1.5.26)$$

1.5.2.2 Spezialfälle

1. Schwingungen gleicher Phase:

$$\delta_1 = \delta_2 \quad (1.5.27)$$

$$\Rightarrow A = A_1 + A_2 \quad (1.5.28)$$

$$\delta = \delta_1 = \delta_2 \quad (1.5.29)$$

Siehe Abb. 1.20. Die Phase δ lässt sich in diesem Fall schon aus Gleichung (1.5.11) bestimmen und die Fallunterscheidung der Argumentfunktion muss nicht durchgeführt werden.

2. Schwingungen mit Phasendifferenz π :

$$\delta_1 = \delta_2 + \pi \quad (1.5.30)$$

$$\Rightarrow A = A_1 - A_2 \quad (1.5.31)$$

$$\delta = \delta_1 \quad (1.5.32)$$

Siehe Abb. 1.21. Auch hier liefert schon Gleichung (1.5.11) die neue Phase.

3. Schwingungen mit Phasendifferenz $\pi/2$:

$$\delta_1 = \delta_2 + \frac{\pi}{2} \quad (1.5.33)$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \quad (1.5.34)$$

$$\delta = \arg \{ (A_1 \cos \delta_1 + A_2 \sin \delta_1) + i(A_1 \sin \delta_1 - A_2 \cos \delta_1) \} \quad (1.5.35)$$

Abb. 1.22 zeigt den Spezialfall $\delta_1 = 0$ und $\delta_2 = -\pi/2$ mit $A_1, A_2 > 0$. In diesem Fall vereinfacht sich die Phase zu $\delta = \arg \{ A_1 + iA_2 \} = \arctan(A_2/A_1)$.

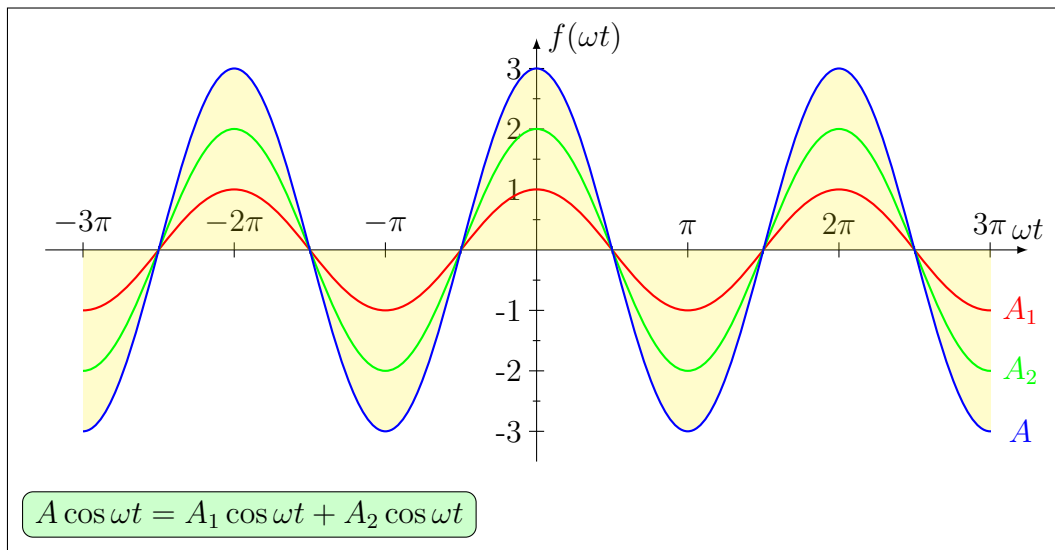


Abbildung 1.20: Überlagerung zweier Schwingungen gleicher Frequenz ω und gleicher Phase δ , aber unterschiedlicher Amplitude (gleichphasige Überlagerung).

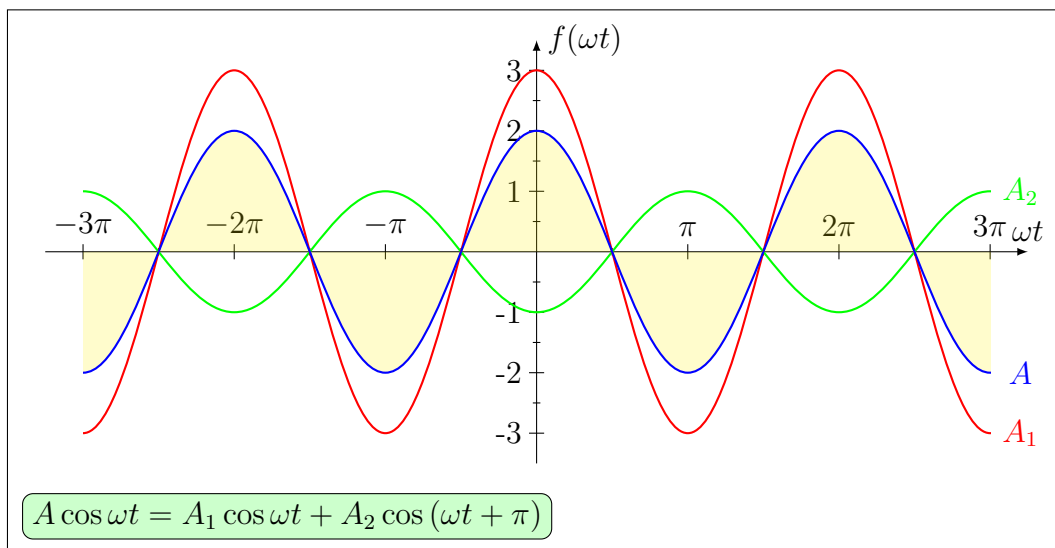


Abbildung 1.21: Überlagerung zweier Schwingungen gleicher Frequenz ω , aber unterschiedlicher Amplitude und einer Phasendifferenz von π (gegenphasige Überlagerung).

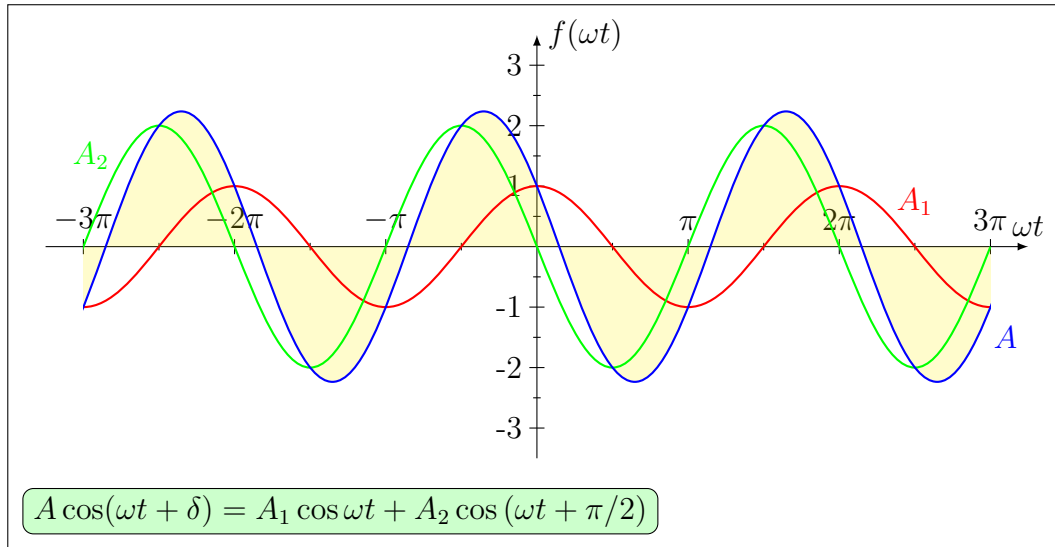


Abbildung 1.22: Überlagerung zweier Schwingungen gleicher Frequenz ω , aber unterschiedlicher Amplitude und einer Phasendifferenz von $\pi/2$.

1.5.3 Zwei Schwingungen unterschiedlicher Frequenz

1.5.3.1 Schwebung

Wir untersuchen die Superposition zweier Schwingungen gleicher Amplitude und gleicher Phase, aber unterschiedlicher Frequenz:

$$x_1(t) = A \cos \omega_1 t = \operatorname{Re} \{ A e^{i\omega_1 t} \} \quad (1.5.36)$$

$$x_2(t) = A \cos \omega_2 t = \operatorname{Re} \{ A e^{i\omega_2 t} \} \quad (1.5.37)$$

$$x(t) := x_1(t) + x_2(t) = A (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) \quad (1.5.38)$$

$$= 2A \cos \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right) \cos \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right). \quad (1.5.39)$$

Dieses Ergebnis kann leicht auf beliebige Phasen verallgemeinert werden.

Wir können Gl. (1.5.39) auch in der Form

$$x(t) = \tilde{A}(t) \cos \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right) \quad (1.5.40)$$

$$\text{mit } \tilde{A}(t) = 2A \cos \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right) \quad (1.5.41)$$

schreiben. Dies ist die Gleichung einer **Schwebung**, bei welcher eine rasche Oszillation mit der Frequenz $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$ auftritt, deren Amplitude sich langsam mit der halben Differenzfrequenz $|\omega_1 - \omega_2|/2$ ändert (siehe Abb. 1.23, zusammen mit den die Schwebung erzeugenden Schwingungen).

Jeder Vorzeichenwechsel der Einhüllenden $\tilde{A}(t)$ bewirkt einen Phasensprung von $x(t)$, aber das Vorzeichen ist nicht relevant für die Intensität der Schwingung. Wir betrachten deshalb das Amplitudenquadrat

$$\tilde{A}^2(t) = 4 A^2 \cos^2 \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right) \quad (1.5.42)$$

$$= 4 A^2 \frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(2 \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right) \right) \quad (1.5.43)$$

$$= 2 A^2 (1 + \cos \omega_S t) \quad (1.5.44)$$

welches mit der Kreisfrequenz $\omega_S = |\omega_1 - \omega_2|$ zwischen 0 und $4A^2$ oszilliert. Bei einer durch akustisch wahrnehmbare Töne erzeugten Schwebung würde dies als periodische Veränderung der Lautstärke wahrgenommen werden.

Dies führt zur Definition der **Schwebungsfrequenz**

$$\nu_S = \frac{\omega_S}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} |\omega_1 - \omega_2|. \quad (1.5.45)$$

Die korrespondierende Schwebungsperiode

$$T = \frac{2\pi}{\omega_S} = \frac{2\pi}{|\omega_1 - \omega_2|} \quad (1.5.46)$$

ist die Zeitdauer zwischen zwei Zeitpunkten, an denen die Amplitude der Schwingung verschwindet ($\tilde{A}(t) = 0$).

Ein Anwendungsfall ist das Stimmen eines Musikinstruments der Frequenz $\omega_1/(2\pi)$. Hierzu wählt man eine Referenzfrequenz $\omega_2/(2\pi)$ und lässt $\omega_1 \rightarrow \omega_2$ gehen, indem man die Schwebungsfrequenz misst und verkleinert.

Man kann selbstverständlich auch eine vorgegebene Schwebung wieder in eine Summe zweier Schwingungen verschiedener Frequenzen umwandeln: Gegeben sei eine Schwebung

$$x(t) = C \cos \tilde{\omega}_2 t \cos \tilde{\omega}_1 t \quad (1.5.47)$$

mit $\tilde{\omega}_2 \ll \tilde{\omega}_1$. Dies ergibt

$$x(t) = \frac{C}{2} \cos((\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2) t) + \frac{C}{2} \cos((\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2) t). \quad (1.5.48)$$

1.5.3.2 Amplitudenspektrum

Die Summe von Kosinusfunktionen in Gl. (1.5.48) wird charakterisiert durch zwei Frequenzen, zwei Amplituden und i.A. zwei Phasen. Wenn es auf die Phasen nicht ankommt, kann man die Schwebung statt mit Winkelfunktionen durch ein **Amplitudenspektrum** beschreiben, bei dem die Amplitude in Funktion der Frequenz aufgetragen ist. Das Amplitudenspektrum $A(\omega)$ zur oben behandelten Schwebung ist **diskret** (im Gegensatz zu einer kontinuierlichen Verteilung), da genau zwei Frequenzen auftreten (siehe Abb. 1.24).

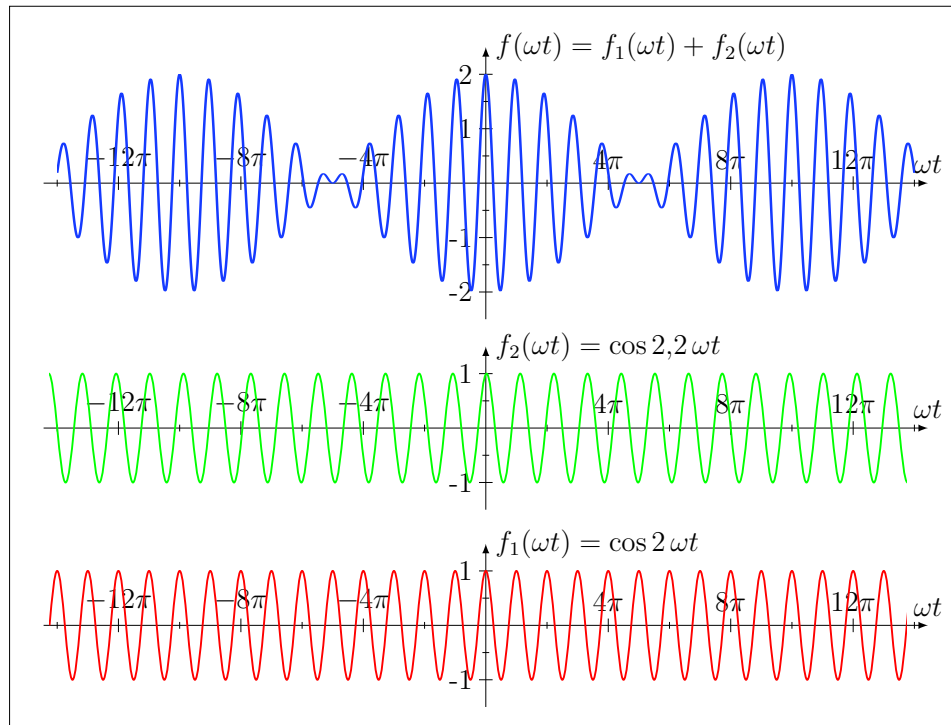


Abbildung 1.23: Schwebung.

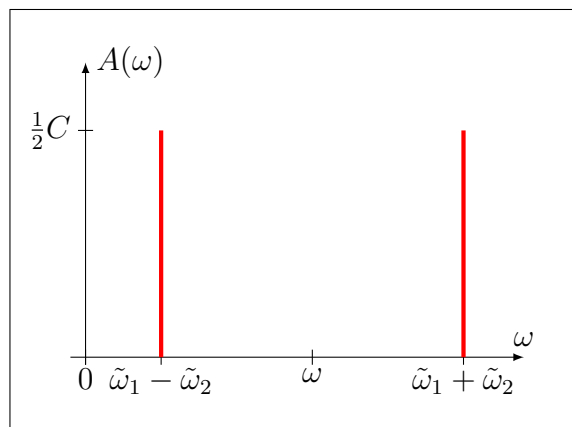


Abbildung 1.24: Amplitudenspektrum einer Schwebung.

1.5.3.3 Amplitudenmodulation

Bei der Signalübertragung über Mittelwelle wird die Amplitude einer hochfrequenten Trägerwelle ($\nu = 300 \text{ kHz} \dots 3 \text{ MHz}$) mit dem Signal eines Mikrofons moduliert, das Frequenzen zwischen 30 Hz und ca. 10 kHz wiedergibt (siehe Abb. 1.25). Dies ergibt die folgende Amplitude:

$$x(t) = \underbrace{(A_0 + a \cos \tilde{\omega}_2 t)}_{\text{Modulation}} \cdot \underbrace{\cos \tilde{\omega}_1 t}_{\text{Träger}} \quad (1.5.49)$$

$$= A_0 \cos \tilde{\omega}_1 t + \frac{a}{2} \cos \{(\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2) t\} + \frac{a}{2} \cos \{(\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2) t\} \quad (1.5.50)$$

$$\text{mit } a < A_0 \quad (1.5.51)$$

Dieses Signal enthält also drei Frequenzen: Die Frequenz der Trägerwelle $\tilde{\omega}_1$ und symmetrisch dazu zwei Satelliten links und rechts im Abstand der Modulationsfrequenz $\tilde{\omega}_2$ (siehe Abb. 1.26).

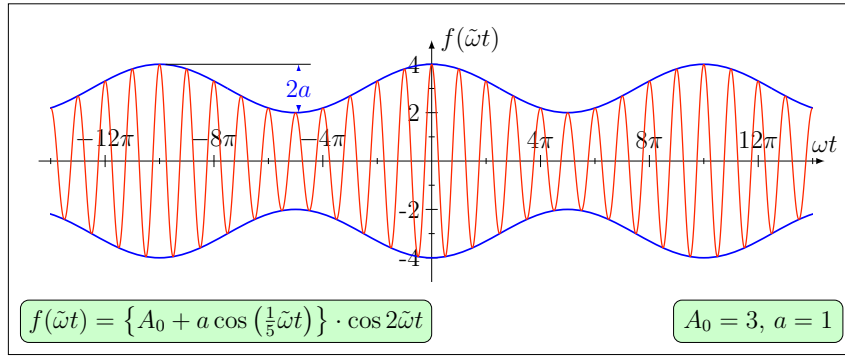


Abbildung 1.25: Amplitudenmodulation.

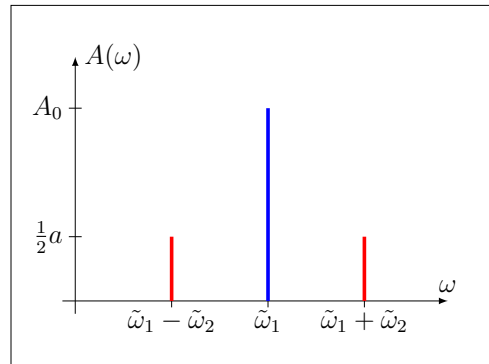


Abbildung 1.26: Amplitudenspektrum eines amplitudenmodulierten Mittelwellesignals.

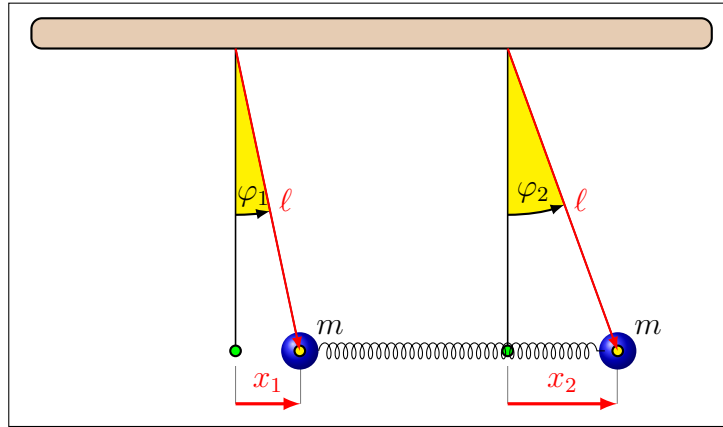


Abbildung 1.27: Zwei gekoppelte Pendel.

1.6 Gekoppelte Schwingungen

Als letztes Thema in diesem Kapitel betrachten wir gekoppelte Schwingungen. Diese sind von Interesse, da in der Natur häufig Wechselwirkungen zwischen oszillierenden Systemen auftreten, beispielsweise zwischen Atomen in Festkörpern. Zudem stellen gekoppelte Oszillatoren die Grundlage für das Phänomen einer Welle dar, welches wir im nächsten Kapitel behandeln werden.

1.6.1 Zwei Oszillatoren

Zwei identische Pendel der Masse m und der Eigenfrequenz $\omega_0 = \sqrt{g/\ell}$ seien durch eine Feder mit der Federkonstanten k miteinander verbunden (siehe Abb. B.5). Für kleine Auslenkungen x_i , $i = 1, 2$ kann die Schwingung als rein horizontal angenähert werden.

Dann lauten die Bewegungsgleichungen

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 + \frac{k}{m} (x_1 - x_2) = 0 \quad (1.6.1)$$

$$\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 - \frac{k}{m} (x_1 - x_2) = 0. \quad (1.6.2)$$

Dies sind zwei gekoppelte Differentialgleichungen 2. Ordnung. Zur Lösung machen wir einen Ansatz mit sogenannten **Normalkoordinaten**:

$$z_1 := x_1 - x_2 \quad (1.6.3)$$

$$z_2 := x_1 + x_2. \quad (1.6.4)$$

Durch Bildung der Summe bzw. der Differenz der Gleichungen (B.2.1) und (B.2.2) ergeben

sich die beiden neuen Differentialgleichungen

$$\ddot{z}_2 + \omega_0^2 z_2 = 0 \quad \text{und} \quad (1.6.5)$$

$$\ddot{z}_1 + \omega_0^2 z_1 + 2\frac{k}{m}z_1 = 0. \quad (1.6.6)$$

Diese Gleichungen sind nun entkoppelt (d.h. voneinander unabhängig) und stellen jeweils eine ungedämpfte Schwingung dar. Wir nennen die Lösungen von $z_1(t)$ und $z_2(t)$ auch Normalschwingungen. Die entsprechenden Kreisfrequenzen sind

$$\omega_2 = \omega_0 \quad \text{und} \quad (1.6.7)$$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 + 2\frac{k}{m}}. \quad (1.6.8)$$

Aus der Rücktransformation zu den Ortskoordinaten x_1 und x_2 folgt die allgemeine Lösung

$$x_1(t) = \frac{1}{2}(z_1 + z_2) \quad (1.6.9)$$

$$x_2(t) = \frac{1}{2}(z_2 - z_1). \quad (1.6.10)$$

Aufgrund der Überlagerung dieser beiden Frequenzen erhält man im allgemeinen Fall eine Schwebung. Durch eine geeignete Wahl der Anfangsbedingungen, lassen sich jedoch auch Schwingungen mit nur einer der beiden Frequenzen erzeugen. Dies führt uns zu folgender Fallunterscheidung.

1. Gleichläufige Schwingung

Falls für alle Zeiten t gilt, dass $x_1(t) = x_2(t)$, so folgt

$$z_1(t) = 0 \quad \text{und} \quad z_2(t) = 2x_1(t). \quad (1.6.11)$$

In diesem Fall ist nur die Normalschwingung $z_2(t)$ mit der Eigenfrequenz $\omega_2 = \omega_0$ angeregt (siehe Abb. [B.6](#)).

2. Gegenläufige Schwingung

Falls hingegen $x_1(t) = -x_2(t)$ für alle Zeiten t gilt, so folgt

$$z_1(t) = 2x_1(t) \quad \text{und} \quad z_2(t) = 0. \quad (1.6.12)$$

In diesem Fall ist nur die Normalschwingung $z_1(t)$ mit der Eigenfrequenz ω_1 angeregt (siehe Abb. [B.7](#)).

3. Allgemeiner Fall

Zum Schluss untersuchen wir noch den Fall, bei dem beide Normalschwingungen gleichzeitig auftreten. Als Beispiel wählen wir die folgenden Anfangsbedingungen. Das erste Pendel sei um A ausgelenkt, das zweite Pendel hingegen in Ruhelage, und beide werden bis zur Zeit $t = 0$ festgehalten und dann gleichzeitig losgelassen.

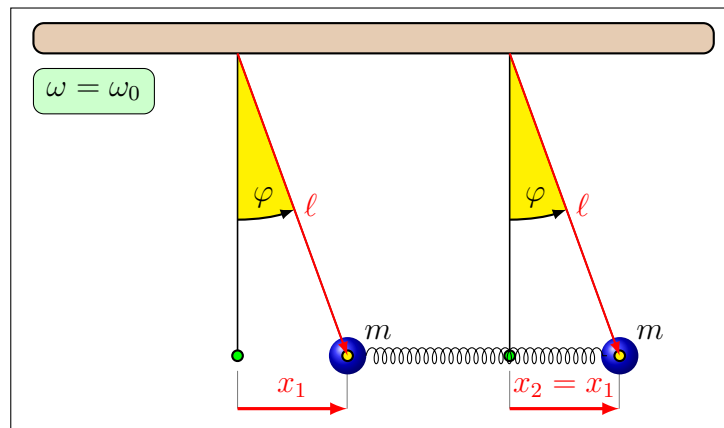


Abbildung 1.28: Zwei gekoppelte Pendel mit gleichläufiger Schwingung.

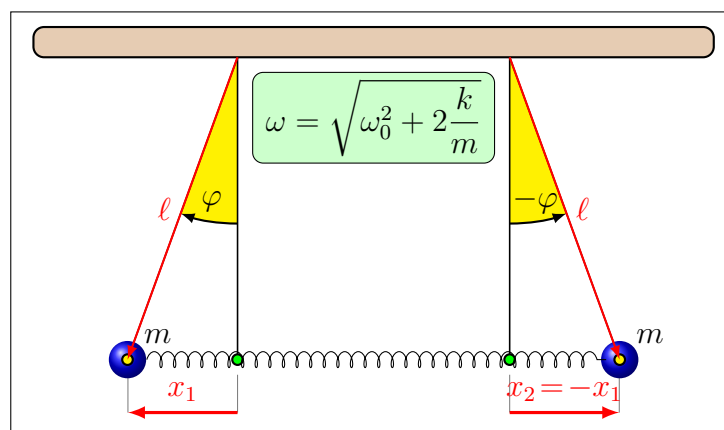


Abbildung 1.29: Zwei gekoppelte Pendel mit gegenläufiger Schwingung.

Die Anfangsbedingungen in den Koordinaten x_i lauten damit

$$x_1 = A \quad x_2 = 0 \quad (1.6.13)$$

$$\dot{x}_1 = 0 \quad \dot{x}_2 = 0. \quad (1.6.14)$$

Für die Normalkoordinaten bedeutet dies, dass

$$z_1 = A \quad z_2 = A \quad (1.6.15)$$

$$\dot{z}_1 = 0 \quad \dot{z}_2 = 0. \quad (1.6.16)$$

Die allgemeinen Lösungen der entkoppelten Differentialgleichungen lauten

$$z_1 = C_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) \quad z_2 = C_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2). \quad (1.6.17)$$

Mit den Anfangsbedingungen aus Gl. (B.2.13)–(B.2.14) folgt daraus

$$z_1 = A \cos \omega_1 t \quad z_2 = A \cos \omega_2 t. \quad (1.6.18)$$

Die beiden Normalschwingungen haben demnach die gleiche Amplitude und die gleiche Phase zur Zeit $t = 0$. In den Koordinaten x_i lautet die Lösung

$$x_1(t) = A \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \quad (1.6.19)$$

$$x_2(t) = A \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right). \quad (1.6.20)$$

Wir nehmen nun an, dass die Kopplung zwischen den Pendeln nur gering sei, dass also

$$\frac{k}{m} \ll \omega_0^2 \quad (1.6.21)$$

gilt. Dann ist $\omega_1 \gtrapprox \omega_2$ und

$$\omega_1 + \omega_2 \gg \omega_1 - \omega_2. \quad (1.6.22)$$

Es liegt also in diesem Fall eine Schwebung vor (siehe Abb. B.8).

Die Periode T der kleinen (modulierenden) Frequenz ist

$$T = \frac{4\pi}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{4\pi}{\sqrt{\omega_0^2 + 2k/m} - \omega_0} \quad (1.6.23)$$

$$= \frac{4\pi}{\omega_0} \frac{1}{\sqrt{1 + 2k/(m\omega_0^2)} - 1} \approx \frac{4\pi}{\omega_0} \cdot \frac{1}{\{1 + k/(m\omega_0^2)\} - 1} \quad (1.6.24)$$

$$\Rightarrow T \approx \frac{4\pi m \omega_0}{k}. \quad (1.6.25)$$

Man beachte auch den **Phasensprung** beim Nulldurchgang der Einhüllenden, der durch deren Vorzeichenänderung zustande kommt.

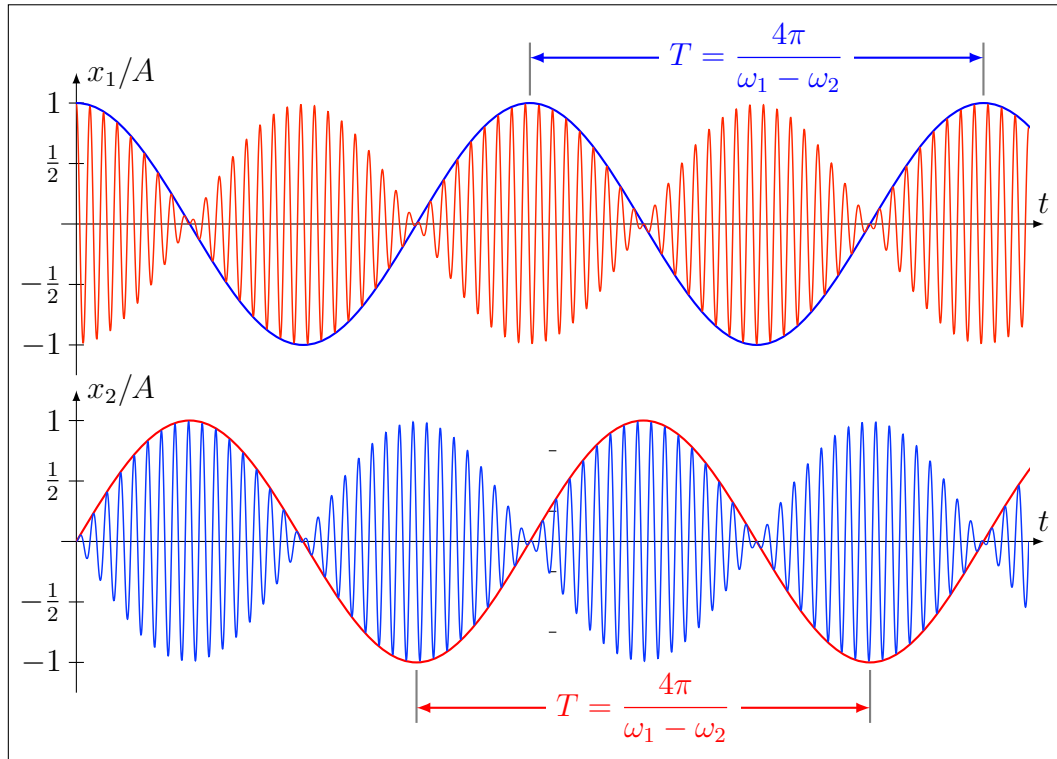


Abbildung 1.30: Schwebung bei 2 schwach gekoppelten identischen Pendeln.

Von ganz besonderem Interesse ist die Tatsache, dass zu bestimmten Zeiten eines der Pendel in Ruhe ist, während das andere die gesamte Energie übernommen hat. Diese Situation kehrt sich nach der Zeit $\Delta t = T/4$ derart um, dass dann das andere Pendel die Energie übernommen hat. Die Kopplung der beiden Pendel bietet also die Möglichkeit, Energie vollständig von einem Oszillator auf einen benachbarten Oszillator zu übertragen. Genau diese Tatsache ermöglicht es mittels Wellen Energie (und Informationen) zu übertragen, ohne Masse zu transportieren.

1.7 Zusammenfassung

In diesem Kapitel haben wir Schwingungen diskutiert. Als wesentliche Punkte kann man zusammenfassen:

- In der Natur sind Schwingungen von grosser Relevanz. Harmonische Schwingungen treten immer dann auf, wenn ein System eine Gleichgewichtslage besitzt und die Kraft im System **rücktreibend und linear** zur Auslenkung aus dieser Gleichgewichtslage ist.
- Sehr oft können beliebige Potentiale bei kleinen Abweichungen aus der Gleichgewichtslage mit quadratischen Potentialen angenähert werden, was dann zu einer linearen rücktreibenden Kraft und damit zu einer harmonischen Schwingung führt.
- Die harmonische Schwingung beschreibt die Auslenkung aus einer Ruhelage anhand einer Sinus- und/oder Kosinusfunktion. Die Dynamik des Systems (z.B. die Masse und die Federkonstante) legt die Kreisfrequenz und damit die Periode der Schwingung fest. Die beiden Anfangsbedingungen (z.B. Auslenkung und Geschwindigkeit zur Zeit $t = 0$) bestimmen die Amplitude und die Phase einer harmonischen Schwingung.
- Eine sehr effiziente Behandlung und Berechnung von Schwingungen erhält man über die Einführung von komplexen Variablen. Am Ende kann der physikalisch relevante Anteil aus dem Realteil der komplexen Lösung gefunden werden.
- Die Gesamtenergie des harmonischen Oszillators (ohne Dämpfung) ist zeitlich konstant und proportional zum Quadrat der Amplitude und zum Quadrat der Kreisfrequenz. Im zeitlichen Mittel sind die kinetische und potentielle Energie des Oszillators gleich gross und genau gleich der halben Gesamtenergie.
- Bei schwach gedämpften Schwingungen fällt die Amplitude exponentiell ab, und die Kreisfrequenz ist reduziert gegenüber der freien Schwingung. In diesem Fall entspricht die zeitliche Änderung der Gesamtenergie des Systems genau der Leistung, welche durch die Dämpfungskraft entzogen wird.
- Wirkt eine externe periodische Kraft auf das System ein, schwingt es nach dem Einschwingvorgang mit der Frequenz des Erregers. Die Resonanzkurve beschreibt dabei das Verhalten der Amplitude des Oszillators als Funktion der Frequenz des ungestörten Systems, der Erregerfrequenz, der Dämpfung/Reibung sowie der Beschleunigung aufgrund der externen Kraft. Amplitudenresonanz tritt ein, wenn das Maximum der Amplitude erreicht wird. Dies ist für eine Erregerfrequenz der Fall, welche kleiner ist als die freie Kreisfrequenz (Eigenfrequenz des Systems). Leistungsresonanz, d.h. maximale Leistungsübertragung, tritt ein, wenn die Erregerfrequenz genau mit der Eigenfrequenz übereinstimmt.

- Die Überlagerung von mehreren Schwingungen liefert wieder eine periodische Funktion. Die Überlagerung von 2 Schwingungen mit ähnlicher Frequenz führt zu einer Schwebung. Hier variiert die Amplitude periodisch mit kleiner Frequenz, während die Schwingung selbst mit hoher Frequenz erfolgt.
- Eine beliebige periodische Funktion kann dargestellt werden als Überlagerung von unendlich vielen harmonischen Funktionen. Das Amplitudenspektrum (die Fourier-Reihe) beschreibt dabei, welche Frequenzen (als Vielfache der Grundfrequenz) mit welchen Amplituden in der Überlagerung auftreten.
- Die Verallgemeinerung auf eine beliebige, nicht notwendigerweise periodische Funktion erhält man über das Fourier-Integral. Auch hier beschreibt das Amplitudenspektrum, welche Frequenzen mit welchen Amplituden auftreten. Allerdings ist nun das Frequenzspektrum kontinuierlich (Fourier-Transformierte) und nicht mehr diskret.
- Wechselwirkungen (Kopplungen) zwischen oszillierenden Systemen führen zu gekoppelten Schwingungen. Die dabei auftretenden Gleichungssysteme können durch Einführung der Normalkoordinaten entkoppelt und damit gelöst werden. Diese Normalkoordinaten (bzw. Normalschwingungen) entsprechen speziellen Schwingungszuständen des Systems, wo sämtliche Oszillatoren mit derselben Frequenz harmonisch schwingen und kein Energieaustausch zwischen ihnen stattfindet. Die allgemeine gekoppelte Schwingung ergibt sich aus der Linearkombination dieser Normalschwingungen.

Kapitel 2

Wellen

2.1 Einleitung

Wir haben im Fall der beiden gekoppelten Pendel gesehen, dass jedes Pendel seine Energie vollständig auf das andere Pendel übertragen kann. Was geschieht nun, wenn nicht nur zwei Pendel miteinander gekoppelt sind, sondern eine grosse Zahl von Pendeln, welche zudem regelmässig angeordnet sind?

Materie stellt in der Tat eine solche Anordnung dar, wobei die Atome selbst die Oszillatoren sind. Diese können auch für sich alleine schwingen, wenn man sie zu Schwingungen anregt. Bei Festkörpern und Flüssigkeiten sind diese Atome in eine Kristall- oder Molekularstruktur eingebunden und wechselwirken untereinander über elektromagnetische Kräfte. Diese Wechselwirkung stellt eine Kopplung der einzelnen Oszillatoren dar. Bei einem Gas geschieht diese Kopplung durch Stösse, sobald ein frei fliegendes Atom oder Molekül auf ein anderes trifft. Der Stoss selbst beruht auch dort auf elektromagnetischer Wechselwirkung.

Die Übertragung von Energie in einer derartigen Kette findet statt, ohne dass Masse übertragen wird. Die Energieübertragung durch Schwingungen nennt man eine **Welle**.

2.1.1 Beispiel: Seilwellen

Wir betrachten ein Seil, dessen beide Enden an den Wänden festgehalten werden. Das Seil verläuft horizontal und ist gespannt. Wir vernachlässigen die Gravitationskraft, die für das Durchhängen des Seils verantwortlich wäre.

Wenn wir das Seil mit einem kurzen seitlichen Kraftstoss auslenken, beobachten wir, dass die anfängliche Auslenkung als Wellenberg mit konstanter Geschwindigkeit am Seil entlang wandert (siehe Abbildung [2.1](#)).

Wir sagen, dass sich die transversale Auslenkung als eine Welle ausbreitet. Wir bemerken:

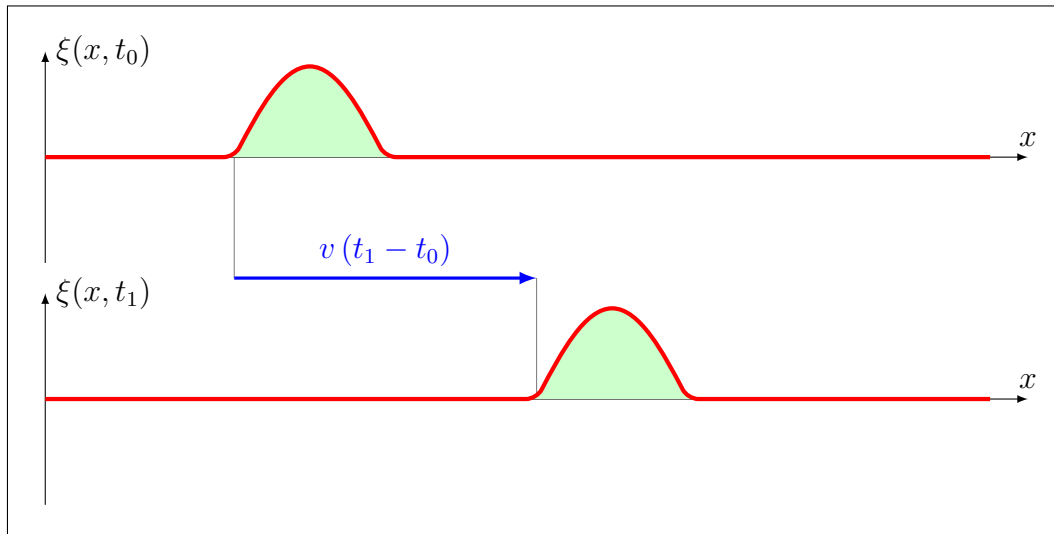


Abbildung 2.1: Ausbreitung einer Seilwelle.

1. Jeder Punkt des Seils schwingt senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle.
2. Ein Punkt des Seils bleibt so lange in Ruhe, bis der Wellenberg ihn erreicht.
3. Er wird dann aus seiner Ruhelage ausgelenkt.
4. Er kehrt schliesslich in den Ruhezustand zurück.

Es folgt, dass die einzelnen Massenelemente des Seils durch die Wellenbewegung *nicht* transportiert werden. Sie bewegen sich nur vorübergehend um ihre Gleichgewichtslage.

2.1.2 Beispiel: Wellenausbreitung im Masse-Feder-System

Wir können die in der Einleitung besprochene Wellenausbreitung in einem Festkörper anschaulich demonstrieren, indem wir die Atome durch Massepunkte und die Wechselwirkung zwischen den Atomen durch zwischen den Massepunkten gespannte Federn modellieren (siehe Abbildung 2.2).

Im Ruhezustand ist der Abstand zwischen den Massen so gewählt, dass in der Summe keine Kräfte zwischen Paaren von Massen wirken.

Wenn die 1. Masse kurz longitudinal (entlang der Richtung der Wellenausbreitung) oder transversal (senkrecht zur Ausbreitungsrichtung) ausgelenkt wird, erhöht sich der Abstand zwischen der 1. und der 2. Masse. Die Federkraft wirkt dann als eine Rückstellkraft, die versucht, die Massepunkte in ihre Ruhelage zurück zu bewegen. Als Folge davon bewegt sich die 1. Masse in Richtung ihrer Ruhelage, und die 2. Masse wird aus ihrer Ruhelage weggezogen. Die 2. Masse bewegt sich jetzt, und der gleiche Vorgang findet

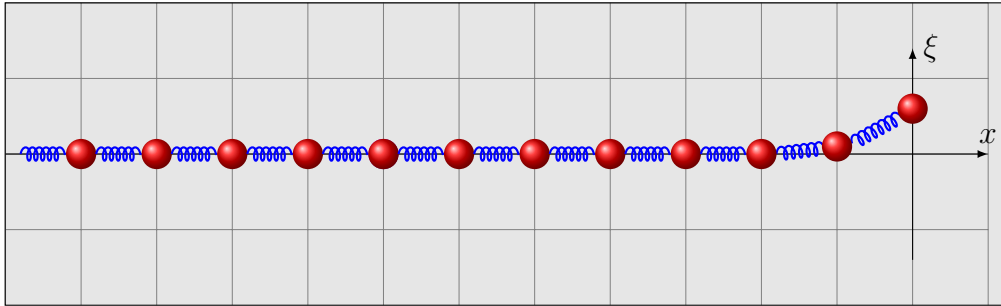


Abbildung 2.2: Ein Feder-Masse-System. Die erste Masse wurde transversal ausgelenkt.

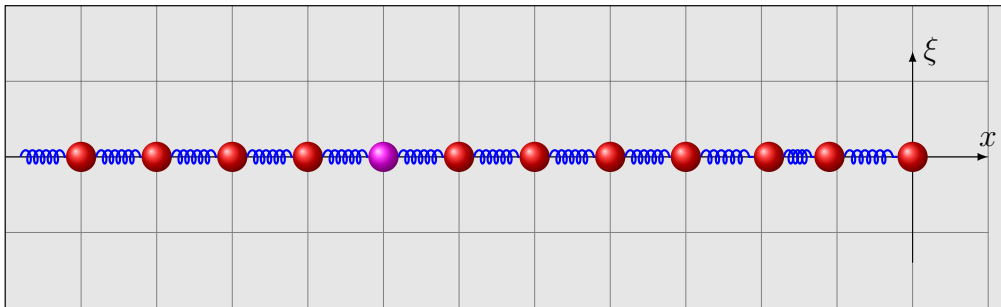


Abbildung 2.3: Longitudinale Wellen im Masse-Feder-System. Die zweite und dritte Masse von rechts sind aus ihrer Ruhelage ausgelenkt.

zwischen der zweiten und dritten Masse statt. Diese Bewegung ist in [Abbildung 2.3](#) für eine longitudinale Welle und in [Abbildung 2.4](#) für eine transversale Welle gezeigt.

Wir bemerken wie im Fall des Seils:

1. Jede Masse schwingt um ihre Ruhelage;
2. Jede Masse bleibt so lange in Ruhe, bis die Wellenfront sie erreicht;
3. Sie führt dann eine Bewegung um ihre Ruhelage aus;
4. Sie kehrt schliesslich in den Ruhezustand zurück.

Diese Anordnung wird nützlich sein, wenn wir die Ausbreitung von Wellen in einem Seil quantitativ betrachten. Wir werden das Seil als ein kontinuierliches Masse-Feder-System zusammengesetzt aus infinitesimalen Massenelementen beschreiben.

2.1.3 Beispiel: Wellenausbreitung in einem Gas

Wir betrachten elastische Wellen, die durch Druckveränderung in einem Gas entstehen. Der Schall ist das prominenteste Beispiel für diese Art von Wellen. Allgemeiner bezeichnet

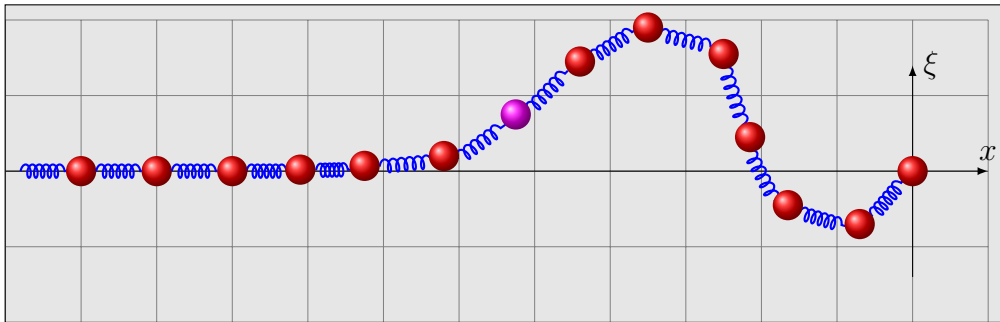
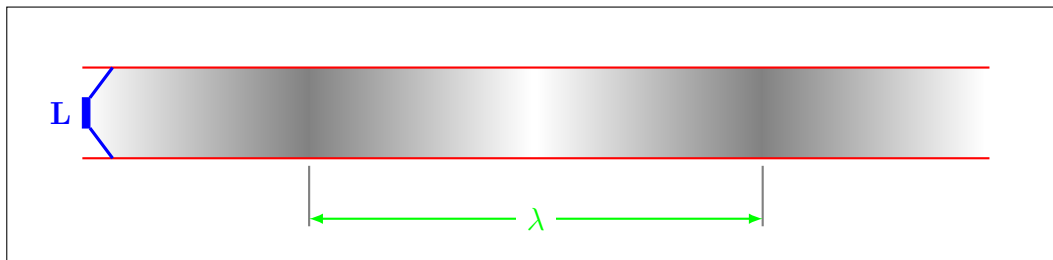


Abbildung 2.4: Transversale Wellen im Masse-Feder-System.

Abbildung 2.5: Mit einem Lautsprecher **L** erzeugte Schallwelle in einem Gas.

Schall mechanische Wellen in einem elastischen Medium, welches nicht zwingend ein Gas sein muss.

Man kann eine solche Welle z. B. erzeugen, indem man einen Lautsprecher vor ein Glasrohr stellt. Der Schall wird sich als eine Druckwelle der Luft mit einer bestimmten Schallgeschwindigkeit im Glasrohr ausbreiten (siehe Abbildung 2.5).

Weil ein Gas komprimierbar ist, werden sich der Druck und die Dichte des Gases ändern: In einem Gas unterliegt die Dichte des Gases der gleichen Art von Schwankungen wie der Druck.

2.2 Wellentypen, Wellenausbreitung

2.2.1 Beschreibung der eindimensionalen Wellenausbreitung

Wir wollen nun die Ausbreitung von eindimensionalen Wellen quantitativ beschreiben. Wir betrachten hier zunächst transversale Seilwellen.

Zur Zeit $t = 0$ kann die Form des Seils durch eine Funktion $f(x)$ beschrieben werden, wobei f die transversale Auslenkung des Seils ist. Die Koordinate x entspricht einem Punkt entlang des Seils. Nach einiger Zeit ist der Wellenberg weitergewandert, und die Form des Seils ist nun durch eine andere Funktion gegeben.

Die Auslenkung des Seils als Funktion der Zeit kann durch eine Funktion

$$\xi = \xi(x, t) \quad (2.2.1)$$

von zwei Variablen ausgedrückt werden, wobei x die Raumkoordinate und t die Zeit ist. Diese Funktion wird **Wellenfunktion** genannt. Sie beschreibt die Ausbreitung der Wellen als Funktion der Zeit. Im Allgemeinen wird die Funktion $\xi(x, t)$ die eindimensionale Wellenausbreitung beschreiben:

1. Seilwellen: $\xi(x, t)$ beschreibt die transversale Auslenkung des Seils.
2. Federwellen: $\xi(x, t)$ beschreibt die longitudinale oder transversale Verformung der Feder.
3. Gaswellen (Schall): $\xi(x, t)$ beschreibt den Druck (oder die Dichte) des Gases.

Die Funktion $\xi(x, t)$ kann im Prinzip eine komplizierte Zeitabhängigkeit besitzen. Wir machen die folgende Vereinfachung:

Vernachlässigung der Dispersion: Gewöhnlich wird sich die Form eines Wellenberges mit der Zeit verändern. Dieser Effekt heisst **Dispersion**. Dispersion wird verursacht durch eine Frequenzabhängigkeit der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle, wie wir später erkennen werden. Wir werden vorerst die Dispersion vernachlässigen und eine stabile Form des Wellenberges annehmen.

Obwohl $\xi(x, t)$ wie eine beliebige Funktion der zwei unabhängigen Variablen x und t (Raum und Zeit) aussieht, schränkt die Bedingung, eine Welle zu beschreiben, die möglichen Formen ein:

Wenn $\xi(x, t)$ die zeitliche und räumliche Ausbreitung einer Welle darstellt, dann sind die zwei Variablen x und t nicht unabhängig voneinander:

Die Raumabhängigkeit der Funktion $\xi(x, t)$ beschreibt die **Form** der Welle und die Zeitabhängigkeit der Funktion $\xi(x, t)$ beschreibt die **Ausbreitung** der Welle.

Wir nehmen die Form der Welle zur Zeit $t = 0$ an. Sie werde durch die Funktion $f(x)$ mit

$$\xi(x, t = 0) = f(x) \quad (2.2.2)$$

dargestellt. Wenn wir x durch $x - a$ ersetzen, erhalten wir die Funktion

$$\xi(x, t) = f(x - a). \quad (2.2.3)$$

Diese Substitution bewirkt eine Translation des Wellenbergs ohne Veränderung seiner Form. Die Welle hat sich ohne Verformung um den Betrag a in *positive* x -Richtung verschoben. Entsprechend beschreibt

$$\xi(x, t) = f(x + a) \quad (2.2.4)$$

eine Verschiebung der Welle um den Betrag a in *negative* x -Richtung (siehe Abbildung 2.6).

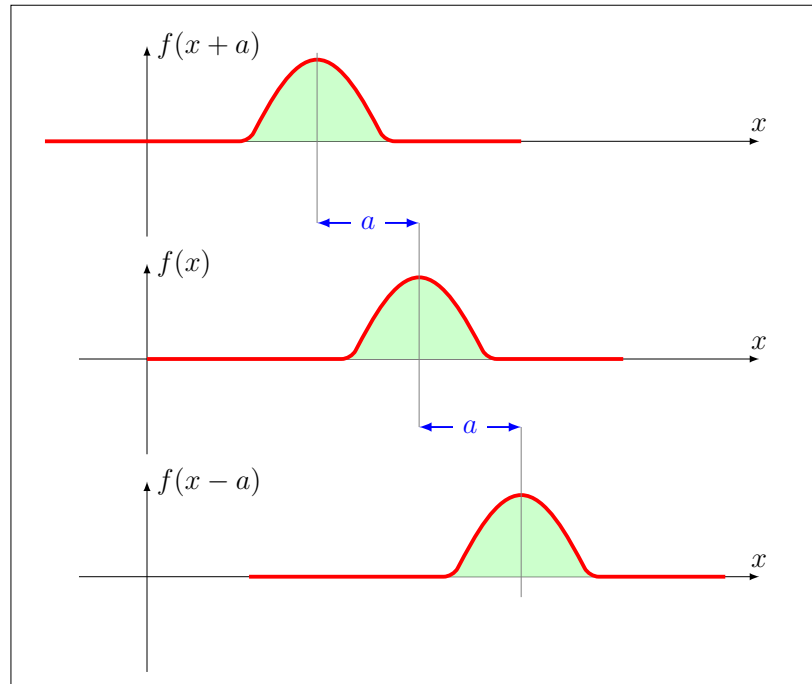


Abbildung 2.6: Translation eines Wellenbergs um a nach links (oberes Bild) bzw. um a nach rechts (unteres Bild).

Wenn wir nun

$$a = vt \quad \text{mit} \quad v > 0 \quad (2.2.5)$$

annehmen, wobei t die Zeit ist und $v > 0$ die Geschwindigkeit, erhalten wir eine sich ausbreitende Welle. Die Funktion

$$\xi(x, t) = f(x - vt) \quad (2.2.6)$$

stellt eine Welle dar, die sich mit einer Geschwindigkeit v in positive x -Richtung bewegt. In ähnlicher Weise entspricht die Funktion

$$\xi(x, t) = f(x + vt) \quad (2.2.7)$$

einer Welle, die sich in negative x -Richtung ausbreitet.

Im Allgemeinen betrachten wir die Ausbreitung einer Welle in positive oder negative x -Richtung. Die Ausbreitung der Welle kann deshalb wie folgt geschrieben werden:

$$\xi(x, t) = f(x \pm vt) \quad (2.2.8)$$

wobei v als **Phasengeschwindigkeit** der Welle bezeichnet wird.

Die **Phasengeschwindigkeit** v einer Welle gibt die Geschwindigkeit an, mit der sich eine vorgegebene Phase der Wellenfront bewegt.

Meist benutzen wir die Begriffe Phasengeschwindigkeit und Ausbreitungsgeschwindigkeit synonym. Wenn in einem Medium Dispersion vorliegt, unterscheiden sich Phasen- und Ausbreitungsgeschwindigkeit im Allgemeinen voneinander und können von der Frequenz der Welle abhängig sein. Gleichung (2.2.8) stellt eine Welle dar, die sich ohne Dispersion in die negative (+) oder positive (−) x -Richtung ausbreitet.

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit wird von mindestens zwei Parametern bestimmt. Im Allgemeinen wirken immer zwei Eigenschaften des Mediums gegeneinander:

1. Einerseits wirkt eine Rückstellkraft, die das Medium in seinen ursprünglichen Zustand zurückzubringen versucht. Je grösser diese Kraft ist, desto schneller breitet sich die Welle aus.
2. Andererseits verlangsamt die Masse, die als Trägheit wirkt, die Wellenausbreitung. Je grösser die Masse, desto langsamer breitet sich die Welle aus.

Einige charakteristische Ausbreitungsgeschwindigkeiten in verschiedenen Medien sind in Tabelle 2.1 zusammengefasst.

Die Ausbreitungsrichtung der Welle kann leicht überprüft werden, indem man eine bestimmte Phase δ_0 (z. B. das Maximum oder einen Nulldurchgang) fest vorgibt, und überprüft, in welche Richtung sich diese Phase bewegt:

$$x \pm vt = \delta_0 \quad (2.2.9)$$

$$\Rightarrow \quad \dot{x} \pm v = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \mp v. \quad (2.2.10)$$

2.2.2 Harmonische Wellen

Ein häufig diskutierter Fall ist derjenige, in welchem die Welle durch eine periodische sinus- oder kosinusförmige Funktion beschrieben wird. Eine solche Welle wird als **harmonische Welle** bezeichnet. Dieser Fall ist auch daher wichtig, weil sich beliebige Wellenformen mit Hilfe der Fourier-Zerlegung als Summe von harmonischen Wellen beschreiben lassen.

Wir können eine harmonische Welle erzeugen, wenn wir z. B. das Ende eines Seils in Form einer sinusförmigen Schwingung auf und ab bewegen. Eine sinusförmige Welle wird sich

Tabelle 2.1: Schallwellengeschwindigkeit v von verschiedenen Stoffen

	Stoff	Temperatur	$v/(\text{m s}^{-1})$
Gase:	Luft	0°C	331
	Luft	20°C	343
	Helium	20°C	965
	Wasserstoff	20°C	1284
Flüssigkeiten:	Wasser	0°C	1402
	Wasser	20°C	1482
	Meerwasser	20°C	1522
Festkörper:	Aluminium		6420
	Stahl		5941
	Granit		6000

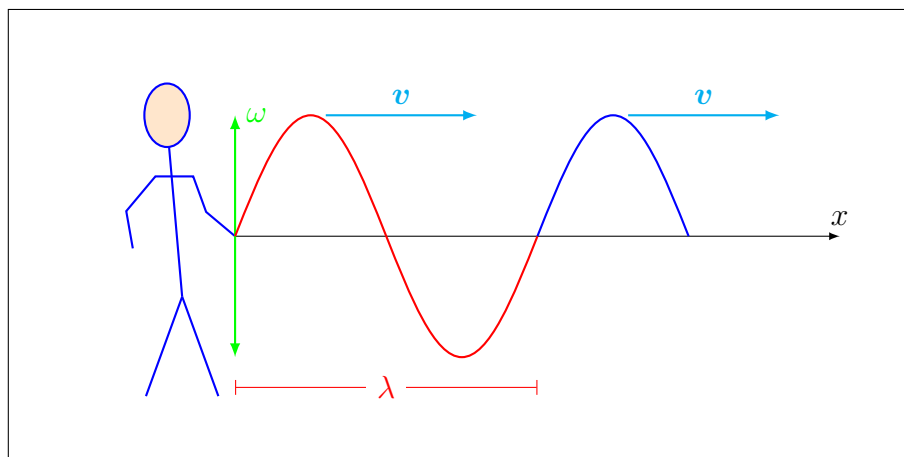


Abbildung 2.7: Harmonische Welle.

längs des Seils mit einer für das Seil und seine Spannung charakteristischen Geschwindigkeit v ausbreiten (siehe Abbildung 2.7).

Die laufende harmonische Welle kann mit Hilfe der Sinusfunktion geschrieben werden als

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin [k (x \pm vt)] , \quad (2.2.11)$$

wobei k die **Wellenzahl** (oder der **Wellenvektor**) und ξ_0 die **Amplitude** ist.

Der räumliche Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Wellenkämmen wird **Wellenlänge** λ genannt. Die Form der harmonischen Welle wiederholt sich im räumlichen Abstand einer Wellenlänge.

Die Wellenzahl hängt mit der Wellenlänge zusammen. Aus der Raumabhängigkeit des Arguments der Sinusfunktion folgt

$$k(x + \lambda) = kx + 2\pi \Rightarrow k\lambda = 2\pi \Rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda} . \quad (2.2.12)$$

Die Wellenfunktion kann als Funktion der Kreisfrequenz ω berechnet werden:

$$\begin{aligned} \xi(x, t) &= \xi_0 \sin [k (x \pm vt)] \\ &= \xi_0 \sin [kx \pm kv t] \\ &= \xi_0 \sin [kx \pm \omega t] , \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

wobei für die Kreisfrequenz gilt:

$$\omega = kv \quad \text{oder} \quad v = \frac{\omega}{k} . \quad (2.2.14)$$

Der zeitliche Abstand zwischen dem Durchlaufen zweier Wellenkämme an einem festen Ort ist die **Periode** $T = 2\pi/\omega$ der Welle.

Statt einer Kosinus- oder Sinusfunktion verwendet man für Berechnungen häufig auch die komplexe Exponentialfunktion. Das Schlussergebnis ergibt sich dann, wie schon bei den Schwingungen, aus dem Realteil der resultierenden Exponentialfunktion

$$\xi(x, t) = \xi_0 e^{i(kx \pm \omega t)} . \quad (2.2.15)$$

Wir wollen zwei Besonderheiten von harmonischen Wellen speziell hervorheben.

- Jeder Punkt des Mediums führt eine harmonische Schwingung aus:

$$\xi(x_0, t) = \xi_{x_0}(t) = A \sin(\underbrace{kx_0}_{\text{konst. Phase}} \pm \omega t) . \quad (2.2.16)$$

- Für eine beliebig gewählte Zeit t_0 ist die Welle im Raum periodisch:

$$\xi(x, t_0) = \xi_{t_0}(x) = A \sin(kx \pm \underbrace{\omega t_0}_{\text{konst. Phase}}) . \quad (2.2.17)$$

2.2.3 Die Wellengleichung in einer Dimension

Wir betrachten die zeitlichen und räumlichen Ableitungen einer harmonischen Welle

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin[kx - \omega t] = \xi_0 \sin[k(x - vt)] . \quad (2.2.18)$$

Wir wollen nun eine Bewegungsgleichung finden, welche durch die harmonische Welle gelöst wird. Da die Funktion ξ von zwei Variablen abhängt, müssen wir eine partielle Ableitung verwenden. Wir erhalten

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \xi_0 \sin[k(x - vt)] = \xi_0 (-kv) \cos[k(x - vt)] , \quad (2.2.19)$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\xi_0 (kv)^2 \sin[k(x - vt)] , \quad (2.2.20)$$

und

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \xi_0 k \cos[k(x - vt)] , \quad (2.2.21)$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -\xi_0 k^2 \sin[k(x - vt)] . \quad (2.2.22)$$

Wir vergleichen nun die zweite zeitliche Ableitung und die zweite räumliche Ableitung. Wir bemerken, dass

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\xi_0 (kv)^2 \sin[k(x - vt)] = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} . \quad (2.2.23)$$

Wir finden dasselbe Ergebnis, wenn wir die andere Ausbreitungsrichtung verwenden

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin[kx + \omega t] = \xi_0 \sin[k(x + vt)] . \quad (2.2.24)$$

Tatsächlich spielt das Vorzeichen vor dem vt -Term keine Rolle, wenn wir die zweite Ableitung berechnen. Zusammenfassend haben wir gefunden, dass für harmonische Wellen gilt:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0 . \quad (2.2.25)$$

Eine partielle Differentialgleichung der Form

$$\boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0} \quad (2.2.26)$$

bezeichnet man als **Wellengleichung**, wobei v die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist. Diese Gleichung beschreibt ganz allgemein die Bedingung, welche zu einer Welle führt. Die harmonischen Wellen sind hierbei nur ein Spezialfall der Lösungen.

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist von der Form

$$\xi(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt), \quad (2.2.27)$$

wobei f und g zwei beliebige (zweimal differenzierbare) Funktionen sind. Eine solche Lösung erfüllt immer die Differentialgleichung, unabhängig von den Funktionen f und g . Die Lösung entspricht der Überlagerung von Wellen, die sich in positive und negative x -Richtung ausbreiten.

2.2.3.1 Beweis: Lösung der Wellengleichung

Wir beweisen, dass die allgemeine Lösung die Differentialgleichung erfüllt. Wir beginnen mit der zeitlichen Ableitung

$$\frac{\partial \xi(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial f(x - vt)}{\partial t} + \frac{\partial g(x + vt)}{\partial t}. \quad (2.2.28)$$

Wir definieren

$$\alpha(x, t) = x - vt \quad \text{und} \quad \beta(x, t) = x + vt. \quad (2.2.29)$$

Damit gilt

$$\frac{\partial \xi(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial f[\alpha(x, t)]}{\partial t} + \frac{\partial g[\beta(x, t)]}{\partial t} = \frac{\partial f(\alpha)}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial g(\beta)}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial t} \quad (2.2.30)$$

$$= \frac{\partial f(\alpha)}{\partial \alpha} \cdot (-v) + \frac{\partial g(\beta)}{\partial \beta} \cdot (+v) \quad (2.2.31)$$

und

$$\frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f(\alpha)}{\partial \alpha^2} v^2 + \frac{\partial^2 g(\beta)}{\partial \beta^2} v^2 = v^2 \cdot \left[\frac{\partial^2 f(\alpha)}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 g(\beta)}{\partial \beta^2} \right]. \quad (2.2.32)$$

In ähnlicher Weise erhalten wir

$$\frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial f[\alpha(x, t)]}{\partial x} + \frac{\partial g[\beta(x, t)]}{\partial x} = \frac{\partial f(\alpha)}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial g(\beta)}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial x} \quad (2.2.33)$$

$$= \frac{\partial f(\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial g(\beta)}{\partial \beta} \quad (2.2.34)$$

$$\frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial x^2} = \left[\frac{\partial^2 f(\alpha)}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 g(\beta)}{\partial \beta^2} \right] \quad (2.2.35)$$

Daraus folgt schliesslich

$$\frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2} = v^2 \cdot \left[\frac{\partial^2 f(\alpha)}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 g(\beta)}{\partial \beta^2} \right] = v^2 \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial x^2}, \quad (2.2.36)$$

d. h. die allgemeine Lösung erfüllt die Wellengleichung.

2.2.4 Transversale Wellen

Bei den transversalen Wellen ist die Auslenkung ξ stets senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung. Beispiele sind transversale Seilwellen, transversale Schwingungen einer Kette von Massenpunkten, welche durch Federn miteinander verbunden sind (siehe Abbildung 2.4), oder elektromagnetischen Wellen.

Wir betrachten als Beispiel eine Auslenkung ξ um Δx in x -Richtung mit einer Ausbreitung in z -Richtung:

$$\xi = \Delta x \hat{x}. \quad (2.2.37)$$

Die Wellenausbreitung hat dann die Form

$$\xi(z, t) = [A f(z - vt)] \hat{x} \quad (2.2.38)$$

$$|\xi(z, t)| = |A f(z - vt)|. \quad (2.2.39)$$

Eine harmonische Welle als Spezialfall davon lautet damit

$$\xi(z, t) = A \cos(kz - \omega t) \hat{x}. \quad (2.2.40)$$

Üblicherweise gibt es zwei Arten, eine Welle darzustellen:

1. Man betrachtet die Amplitude am fest vorgegeben Ort als Funktion der Zeit. Abbildung 2.8 zeigt entsprechende Zeitverteilungen für vier Orte im abgestuften räumlichen Abstand von je $\lambda/4$.
2. Im Gegensatz dazu kann man auch die räumliche Verteilung der Welle zu einem fest vorgegeben Zeitpunkt betrachten. Abbildung 2.9 zeigt entsprechende Ortsverteilungen für vier Zeitpunkte im abgestuften zeitlichen Abstand von je $T/4$.

2.2.5 Beispiel: Transversale elastische Seilwellen

Der Zusammenhang zwischen der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen und den physikalischen Eigenschaften des Seils kann mit Hilfe der Newton'schen Gesetze hergeleitet werden.

Wir unterteilen das Seil in differentielle Massenelemente dm . In diesem Fall kann das Seil als ein Masse-Feder-System (siehe Abschnitt 2.1.2) betrachtet werden, wobei die diskrete Reihe von Massen durch eine kontinuierliche Verteilung von Massenelementen ersetzt wird. Wir nehmen an, dass die Massenelemente sich nur in der vertikalen Richtung um ihre Ruhelage bewegen können. Wir betrachten nun ein einzelnes Massenelement dm der Länge dx , dessen Anfangspunkt sich an der Koordinate x des Seils befindet und dessen Endpunkt sich an der Koordinate $x + dx$ befindet. Die Auslenkung ist durch die Funktion $y = \xi(x)$ bestimmt, siehe Abbildung 2.10.

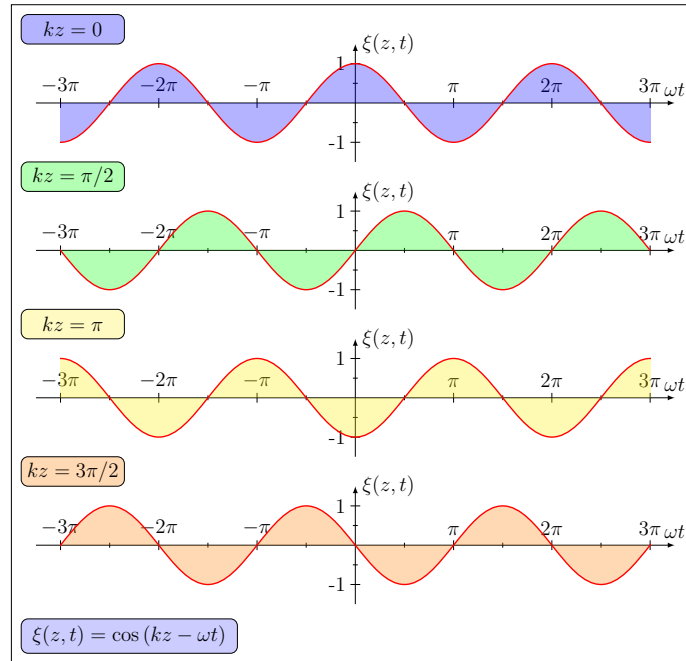


Abbildung 2.8: Zeitabhängigkeit der transversalen Welle für 4 verschiedene Orte im abgestuften räumlichen Abstand von jeweils $\Delta z = \lambda/4$.

Die auf das Seil mit Querschnittsfläche¹ $A_{\square}$ wirkende Kraft $\mathbf{F}$ erzeugt eine **Zugspannung** $\mathbf{S} = \mathbf{F}/A_{\square}$. Die auf das Massenelement wirkende resultierende vertikale Komponente der Zugspannung ist

$$\Delta S_y = S \sin \alpha' - S \sin \alpha, \quad (2.2.41)$$

wobei α und α' die Winkel zur Horizontalen an beiden Enden des Massenelements sind (die Auswirkung der Gravitationskraft wird als vernachlässigbar gegenüber der Zugspannung angenommen).

Für kleine Auslenkungen gilt die genäherte Gleichung

$$\tan \alpha \approx \sin \alpha,$$

also

$$\Delta S_y \approx S \tan \alpha' - S \tan \alpha. \quad (2.2.42)$$

Die Steigung des Seils im Punkt x ist gleich der Ableitung der Auslenkung ξ nach x . Da die Funktion ξ von zwei Variablen abhängt, müssen wir die partielle räumliche Ableitung verwenden

$$\tan \alpha = \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x} \quad \text{und} \quad \tan \alpha' = \frac{\partial \xi(x + dx, t)}{\partial x}. \quad (2.2.43)$$

¹Da A bereits für die Amplitude verwendet wird, kennzeichnen wir die Fläche $A_{\square}$ zur besseren Unterscheidung mit einem tiefgestellten Quadrat.

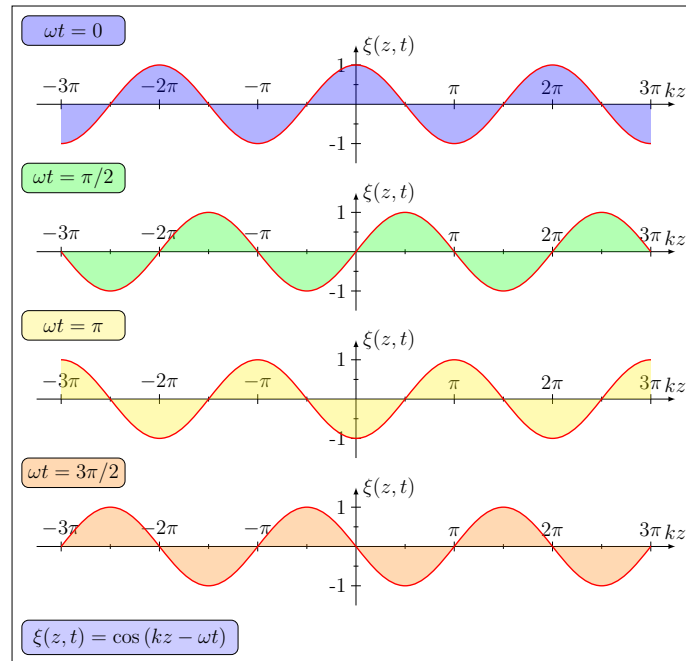


Abbildung 2.9: Ortsabhängigkeit der transversalen Welle für 4 verschiedene Zeitpunkte im abgestuften zeitlichen Abstand von jeweils $\Delta t = T/4$.

D. h., die resultierende vertikale Zugspannung kann als Funktion der Ableitung der Auslenkungsfunktion geschrieben werden

$$\begin{aligned} \Delta S_y &= S \tan \alpha' - S \tan \alpha \\ &= S \left[\frac{\partial \xi(x + dx, t)}{\partial x} - \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x} \right]. \end{aligned}$$

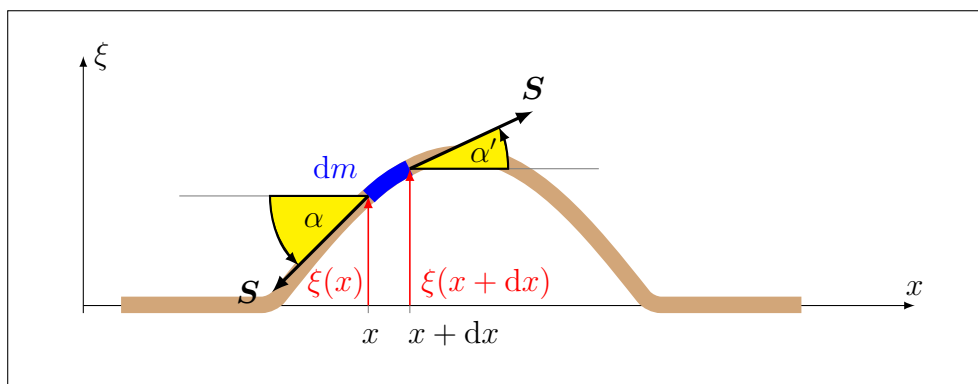


Abbildung 2.10: Auf das Massenelement dm eines Seiles wirkende Kräfte.

Für infinitesimales dx erhalten wir schliesslich

$$dS_y = S \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial x^2} dx. \quad (2.2.44)$$

Die Geschwindigkeit und die Beschleunigung der differentiellen Segmente können mit Hilfe der zeitlichen partiellen Ableitungen gewonnen werden:

$$v_y(x, t) = \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad \text{und} \quad a_y(x, t) = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (2.2.45)$$

Aus dem zweiten Newton'schen Gesetz folgt

$$dS_y \cdot A_{\square} = dm \cdot a_y \quad \Rightarrow \quad S \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \underbrace{dx A_{\square}}_{=dV} = dm \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (2.2.46)$$

Nach Division durch dV und Einführung der **Dichte** $\rho = \frac{dm}{dV}$ folgt daraus

$$S \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (2.2.47)$$

und nach weiterer Division durch S folgt

$$\boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{S} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}}. \quad (2.2.48)$$

Diese Gleichung ist die Differentialgleichung der Wellenausbreitung.

Durch Vergleich mit der allgemeinen Form der Wellengleichung

$$\boxed{\frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial x^2} = 0}, \quad (2.2.49)$$

können wir somit die **Ausbreitungsgeschwindigkeit der Seilwellen** ablesen als

$$\boxed{v^2 = \frac{S}{\rho} \quad \Rightarrow \quad v = \pm \sqrt{\frac{S}{\rho}}}. \quad (2.2.50)$$

Dabei ist S die Zugspannung des Seils oder der Saite und ρ seine Dichte. Wir bemerken, dass die Einheiten der Bestimmungsgleichung für die Ausbreitungsgeschwindigkeit v gegeben sind durch

$$\sqrt{\frac{(\text{N/m}^2)}{(\text{kg/m}^3)}} = \sqrt{\frac{\text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s}^2)}{(\text{kg/m}^3)}} = \sqrt{\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad (2.2.51)$$

d. h. die Einheit entspricht in der Tat einer Geschwindigkeit.

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit hängt nur von den Eigenschaften des Seils ab:

1. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit nimmt mit der Zugkraft zu. Je grösser die Zugkraft ist, desto schneller kehren die Massenelemente in ihre Gleichgewichtslage zurück.
2. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit nimmt mit der Dichte ab. Je grösser die Dichte ist, desto langsamer kehren die Massenelemente in ihre Gleichgewichtslage zurück.

2.2.6 Longitudinale Wellen

Bei longitudinalen Wellen ist die Auslenkung ξ parallel zur Ausbreitungsrichtung (siehe auch Abbildung 2.5). Bei Ausbreitung in z -Richtung ist demnach die Auslenkung gegeben durch

$$\xi(z, t) = A f(z - vt) \hat{\mathbf{z}}. \quad (2.2.52)$$

Ein typisches Beispiel dafür sind Schallwellen. Durch die Auslenkung der Atome oder Moleküle ergeben sich Dichteschwankungen.

2.2.7 Beispiel: Longitudinalwellen im Festkörper

Allgemein ändert ein Körper seine Form, wenn Kräfte ihn expandieren oder komprimieren. Falls der Körper seine ursprüngliche Form wieder annimmt, sobald die Kräfte nicht mehr wirken, dann wird die Deformation als *elastisch* bezeichnet.

Die meisten Körper sind nur bis zu einer bestimmten maximalen Kraft elastisch, die **Elastizitätsgrenze** genannt wird. Über dieser Grenze ist der Körper plastisch und seine Gestalt wird *irreversibel* verändert.

2.2.7.1 Verformungen: Elastizität und Plastizität

Wir betrachten die Schnittfläche eines quaderförmigen Festkörpers an einer beliebigen Stelle und greifen an der Schnittstelle das Flächenelement $d\mathbf{a}$ heraus.² Auf dieses Flächenelement wirkt dann bei Belastung eine Kraft $d\mathbf{F}$, die wir in eine Normalkomponente $d\mathbf{F}_\perp$ und eine Tangentialkomponente $d\mathbf{F}_\parallel$ zerlegen (siehe Abbildung 2.11).

²Wir stellen das Flächenelement durch seinen Normalenvektor $d\mathbf{a}$ dar. Dieser ist senkrecht zur Oberfläche, sein Betrag ist $|d\mathbf{a}| = da$. Beachten Sie, dass wir uns im Folgenden an die Notation da bzw. da für Flächenelemente halten und Gesamtflächen mit $A_\square$ bezeichnen werden.

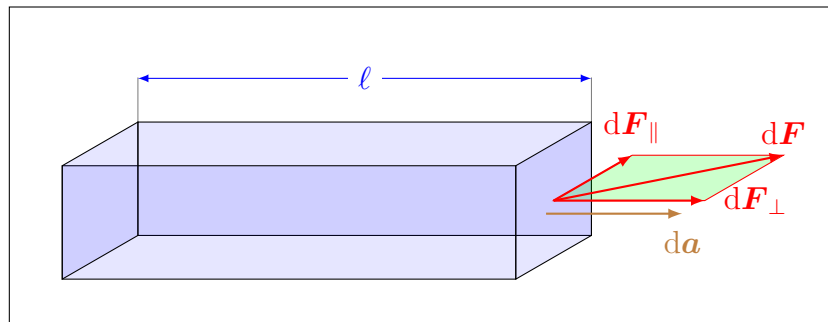


Abbildung 2.11: Zur Herleitung von Zug- und Schubspannung.

Wir definieren nun die **Normalspannung** σ und die **Schubspannung** τ als

$$\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dF_{\perp}}{da} \quad \tau \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dF_{\parallel}}{da} . \quad (2.2.53)$$

Die gemeinsame Einheit der Normal- und der Schubspannung ist

$$[\sigma] = [\tau] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa} , \quad (2.2.54)$$

also eine Druckeinheit.

Je nach Vorzeichen von σ bezeichnet man die Normalspannung auch als **Zug-** oder **Druckspannung**. Die Zugspannung bei der Betrachtung von Seilwellen, deren Betrag wir mit S bezeichnet haben, ist demnach eine spezielle Form der Normalspannung σ .

Unter der Wirkung dieser Spannungen treten Deformationen des festen Körpers auf, die wir im Folgenden untersuchen werden.

Wählen wir einen Stab der Länge ℓ und üben eine Zugspannung σ aus, so finden wir in der Regel eine Verlängerung von ℓ um die Strecke $\Delta\ell$ (siehe Abbildung 2.12). Für die relative Verlängerung

$$\varepsilon_{\ell} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Delta\ell}{\ell} \quad (2.2.55)$$

findet man im Experiment das folgende Verhalten (siehe Abbildung 2.13):

- Falls $\sigma > \sigma_B$, wobei σ_B die Bruchspannung ist, bricht oder reisst das Material.
- Bei zähen Materialien verformt sich das Werkstück (dauernd, plastisch), falls $\sigma > \sigma_F$, wobei σ_F die Fließspannung ist. Reduziert man nach der Verformung die Zugspannung, verhält sich das Material wieder elastisch, wobei die elastische Änderung auf einer zu grösseren Längen hin verschobenen Gerade verläuft.

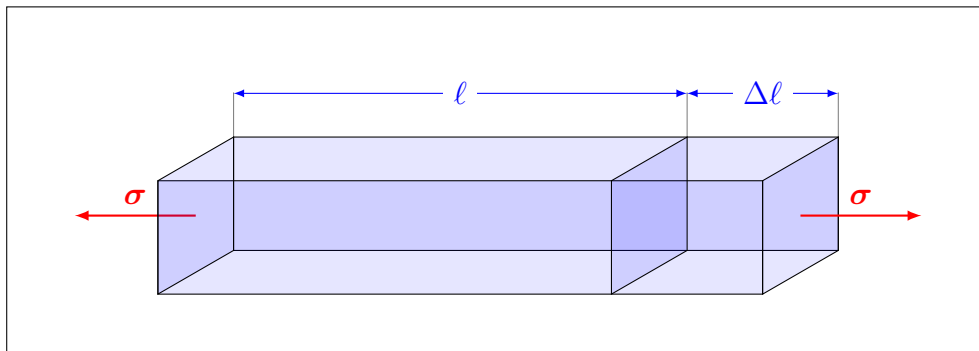


Abbildung 2.12: Lineare Verformung eines Stabes mit rechteckigem Querschnitt durch die Zugspannung σ .

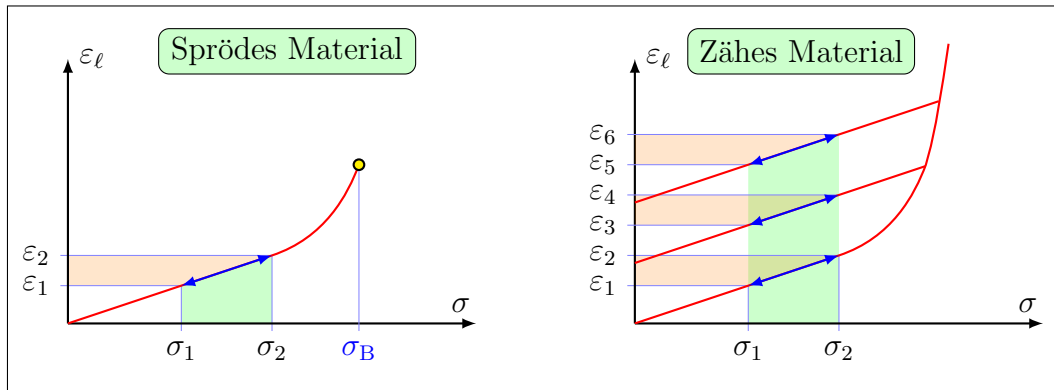


Abbildung 2.13: Plastische und elastische Verformung unter dem Einfluss einer Zugspannung σ . Sprödes Material bricht bei der Bruchspannung σ_b .

Im elastischen Bereich finden wir, bei nicht allzu grossen Verformungen, meist einen linearen Zusammenhang zwischen ε_ℓ und σ

$$\varepsilon_\ell = \frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{\sigma}{E}, \quad (2.2.56)$$

welcher als **Hooke'sches Gesetz** bezeichnet wird. Der Zusammenhang ist analog zum Kraftgesetz der Auslenkung einer Feder.

Die Proportionalitätskonstante E wird als **Elastizitätsmodul** bezeichnet. Im SI-System haben $\sigma, \tau, \sigma_B, \sigma_F, E$ alle die Dimension eines Druckes und damit die Einheit N/m^2 . Typische Werte für diese Grössen sind in der nachstehenden Tabelle angegeben:

Tabelle 2.2: Mechanische Eigenschaften verschiedener Stoffe (typische Werte): Dichte ρ , Bruchspannung σ_B , Fließspannung σ_F und Elastizitätsmodul E .

Material	ρ kg/m^3	σ_B, σ_F MN/m^2	E GN/m^2
Aluminium	2 700	90–450	70
Weicheisen	7 900	430–490	210
Stahl	7 800	700–1500	215
Messing (70/30)	8 500	150–270	101
Fichtenholz ³	450	40–80	13
Quarz	2 600	1000	73
Granit	2 800		200

³Der longitudinale Elastizitätsmodul beträgt etwa $E_L = 10 - 16 \text{ GN/m}^2$, der radiale $E_R = 0,4 - 0,9 \text{ GN/m}^2$ und der tangentielle $E_T = 0,4 - 0,6 \text{ GN/m}^2$.

Als Folge der Elastizitätseigenschaft von Festkörpern breiten sich Deformationswellen aus.

D. h., die Deformation des Festkörpers breitet sich aus. Falls die Deformation elastisch ist, findet der Festkörper seine Gestalt wieder.

Im Festkörper existieren verschiedene Arten von Wellen:

1. **Longitudinale Wellen** können sich in allen Medien ausbreiten, die Volumenelastizität besitzen, wie z. B. in Festkörpern, aber auch in flüssigen und gasförmigen Stoffen. Es wirkt eine der Volumenänderung entgegen gerichtete Rückstellkraft.
2. **Transversale Wellen** sind etwas komplizierter, da bei ihnen Schubkräfte τ an den Massenelementen des Körpers angreifen müssen, um sie wieder in ihre Ausgangslage zurückzutreiben. Derartige Wellen breiten sich nur in festen Körpern aus.

Bei Seilwellen hing die Ausbreitungsgeschwindigkeit von der Spannung und von der inversen Längendichte des Seils ab. Die Längendichte spielte die Rolle der trägen Masse, die bei höherer Dichte die Ausbreitung der Welle verlangsamt. Im Fall des Festkörpers spielt die Dichte (oder Volumendichte = Masse/Volumen) diese Rolle.

2.2.7.2 Longitudinale elastische Wellen im Festkörper

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der longitudinalen elastischen Wellen in einem Festkörper folgt aus dem Hooke'schen Gesetz (Gleichung (2.2.56)). Wir betrachten dazu einen Ausschnitt aus einem Stab am Ort z und am Ort $z + dz$ (siehe Abbildung 2.14). Die Verformung am Ort z sei ξ . Dann ist die Verformung am Ort $z + dz$ gleich

$$\xi + d\xi = \xi + \frac{\partial \xi}{\partial z} dz. \quad (2.2.57)$$

Durch die Schwingung ändert sich die Dicke dz des Volumenelementes $dV = A_{\square} dz$ um die Differenz der beiden Auslenkungen

$$\left(\xi + \frac{\partial \xi}{\partial z} dz \right) - \xi = \frac{\partial \xi}{\partial z} dz. \quad (2.2.58)$$

Diese Ausdehnung bewirkt die rücktreibende Kraft

$$F = \sigma A_{\square}, \quad (2.2.59)$$

wobei die auftretende Zugspannung σ (siehe Hooke'sches Gesetz) durch

$$\sigma = E \frac{\partial \xi}{\partial z} \quad (2.2.60)$$

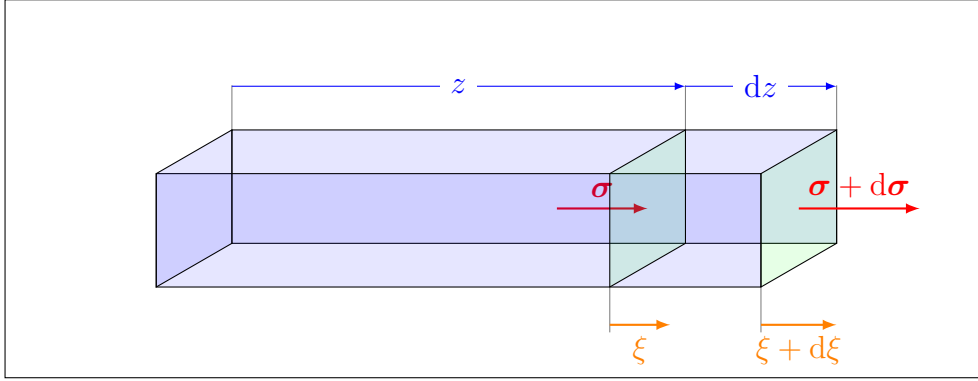


Abbildung 2.14: Zur Herleitung der Wellengleichung in einem Stab.

gegeben ist. Am rechten Ende des Volumenelementes bei $z + dz$ ist die Zugspannung gleich

$$\sigma + d\sigma = \sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial z} dz = \sigma + E \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} dz. \quad (2.2.61)$$

Damit wirkt die resultierende Kraft

$$dF = A_{\square} [(\sigma + d\sigma) - \sigma] = A_{\square} d\sigma \quad (2.2.62)$$

$$= A_{\square} \frac{\partial \sigma}{\partial z} dz = A_{\square} E \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} dz \quad (2.2.63)$$

auf das Volumenelement. Durch diese Kraft wird das Massenelement $dm = \rho dV = \rho A_{\square} dz$ beschleunigt, das 2. Newtonsche Gesetz ergibt

$$dF = dm \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \rho A_{\square} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} dz. \quad (2.2.64)$$

Der Vergleich von Gleichung (2.2.63) mit Gleichung (2.2.64) ergibt die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}. \quad (2.2.65)$$

Damit folgt für die **Schallgeschwindigkeit im Festkörper**

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (2.2.66)$$

Einige repräsentative Materialeigenschaften in verschiedenen Festkörpern sind in Tabelle 2.2.7.1 zusammengefasst, woraus die Schallgeschwindigkeit im Material abgeschätzt werden kann.

2.2.8 Räumliche Verteilung von Wellen

Wir betrachten nun die Ausbreitung von Wellen im dreidimensionalen Raum.

2.2.8.1 Ebene Wellen

Ein wichtiger Spezialfall der räumlich ausgedehnten Wellen ist die **ebene Welle**. Sie entsteht zum Beispiel durch einen Erreger, dessen Länge gross im Vergleich zur Wellenlänge ist, oder durch eine punktförmige Quelle, welche sich in grossem Abstand im Vergleich zur Wellenlänge befindet. Bei einer ebenen Welle ist die Phase an jedem Ort senkrecht zur Ausbreitungsrichtung identisch:

$$\xi(x, y, z, t) = A f(kz - \omega t) \quad (2.2.67)$$

Sie ist also durch lediglich eine räumliche Dimension charakterisiert, hier die z -Achse. Abbildung 2.15 zeigt einen Ausschnitt aus einer ebenen Schallwelle.

2.2.8.2 Polarisation

Die Amplitude transversaler Wellen hat 2 Freiheitsgrade senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. Wenn demnach die Welle in z -Richtung läuft, ist die Amplitude ein 2-komponentiger Vektor in der xy -Ebene

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\xi}(t) = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} e^{i(kz - \omega t)}. \quad (2.2.68)$$

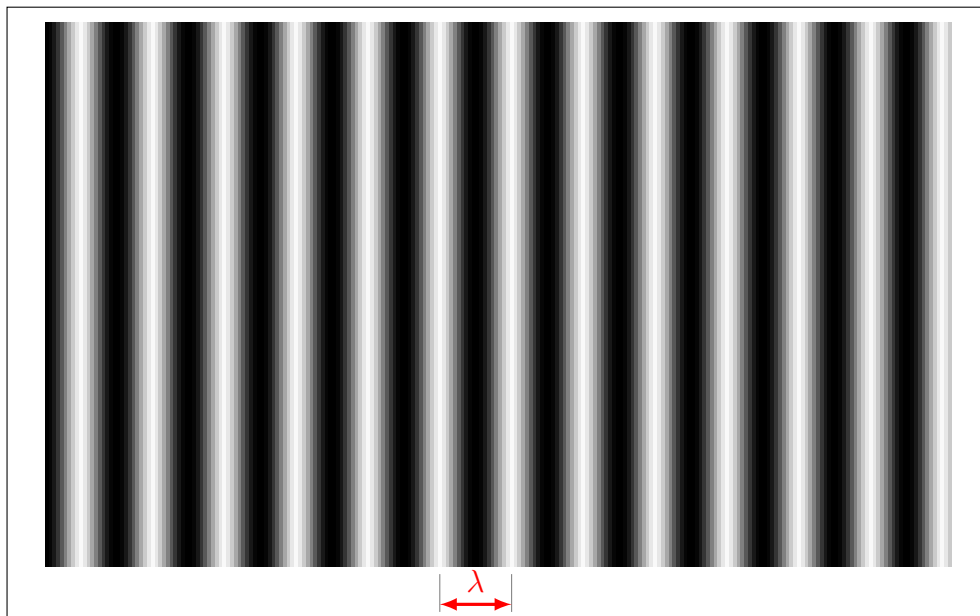


Abbildung 2.15: Longitudinale ebene Welle.

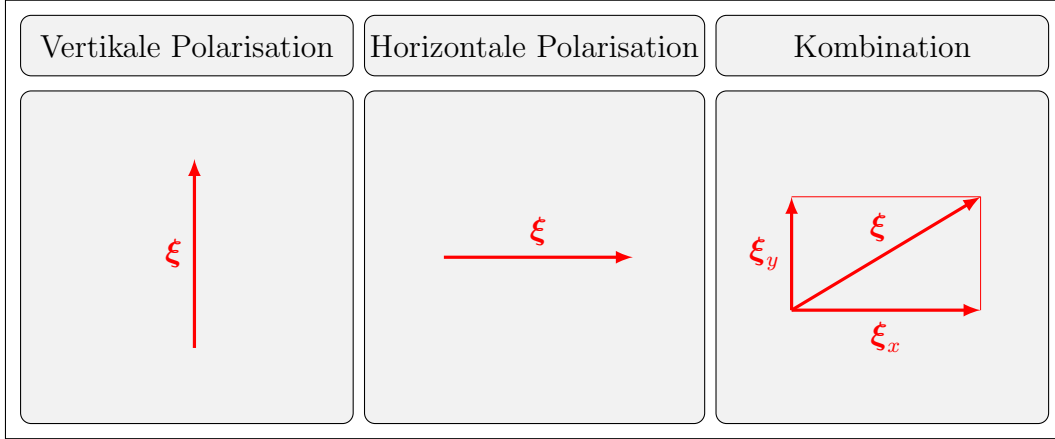


Abbildung 2.16: Lineare Polarisation.

Als Polarisation der Welle bezeichnen wir nun gerade diese Bewegung des Amplitudenvektors durch die zweidimensionale Ebene (hier xy -Ebene). Falls die Welle stets in einer Geraden auf dieser Ebene schwingt, nennt man sie **linear polarisiert** (siehe Abbildungen 2.16 und 2.17).

Durch Überlagerung zweier linear polarisierter Wellen mit Phasendifferenz $\Delta\delta$ erhält man **elliptisch polarisierte** Wellen (siehe Abbildung 2.18), bei denen sich die Auslenkung auf einer Ellipse bewegt. Für eine Phasendifferenz von $\pi/2$ erhält man als Sonderfall davon eine **zirkular polarisierte** Welle. Je nach Drehrichtung erhält man eine **linkszirkulare** oder eine **rechtszirkulare** Welle (relativ zur Ausbreitungsrichtung).

2.2.9 Energietransport

Wir betrachten als Beispiel die Energiebilanz für eine longitudinale Welle in einem Stab. Die Geschwindigkeit eines Massenstücks dm am Ort x ist

$$v = \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial t}. \quad (2.2.69)$$

Die kinetische Energie dE_{kin} des Massenstücks ist damit durch

$$dE_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 dm \quad (2.2.70)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 \rho dV \quad (2.2.71)$$

gegeben und die **kinetische Energiedichte** dE_{kin}/dV durch

$$\frac{dE_{\text{kin}}}{dV} = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2. \quad (2.2.72)$$

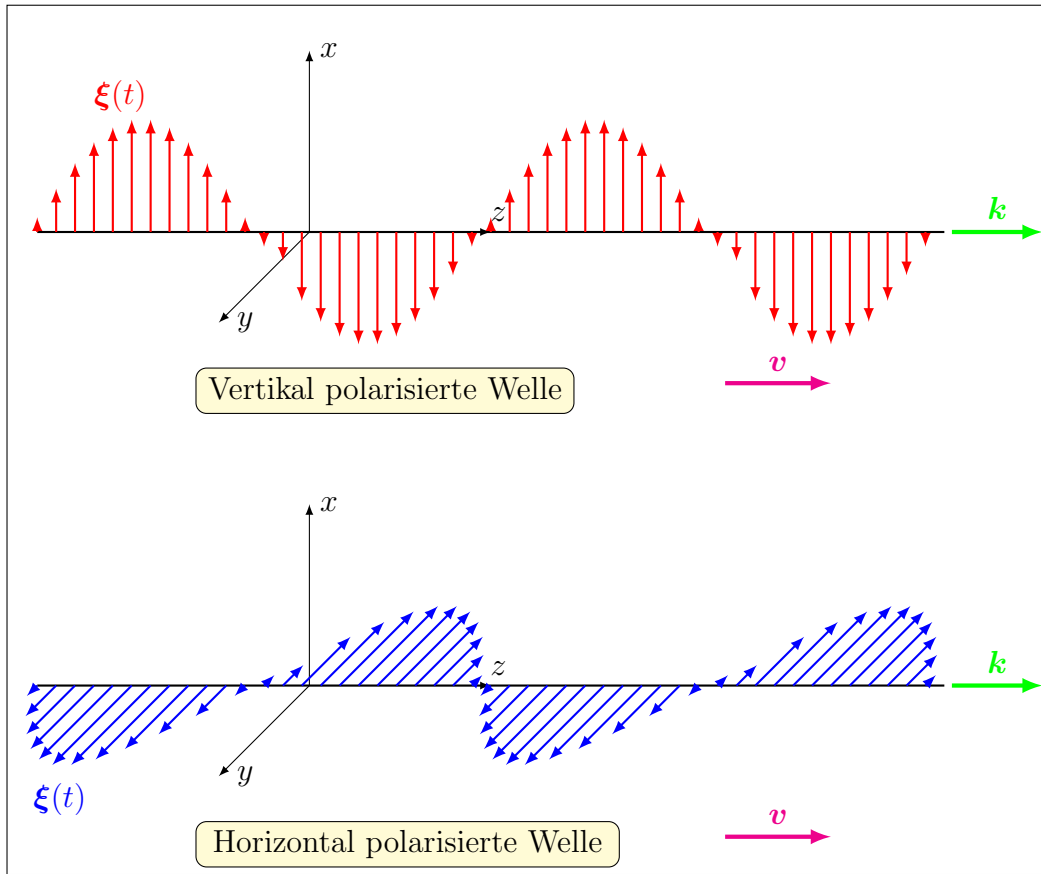


Abbildung 2.17: Horizontal bzw. vertikal polarisierte Welle.

Die potentielle Energie tritt hier in der Form der elastischen Energie auf. Diese ist gleich

$$E_{\text{el}} = \int_0^{\Delta\ell} F(\Delta\ell') \cdot d(\Delta\ell') = A_{\square} \int_0^{\Delta\ell} \sigma(\Delta\ell') \cdot d(\Delta\ell') \quad (2.2.73)$$

$$= A_{\square} \int_0^{\Delta\ell} \left(E \frac{\Delta\ell'}{\ell'} \right) \cdot d(\Delta\ell') = \frac{1}{2} A_{\square} E \frac{\Delta\ell^2}{\ell} \quad (2.2.74)$$

$$= \frac{1}{2} (A_{\square} \ell) E \left(\frac{\Delta\ell}{\ell} \right)^2. \quad (2.2.75)$$

Die Verformung am Ort x ist nach dem Hooke'schen Gesetz (siehe Gleichungen 2.2.56 und 2.2.60) gleich der relativen Längenänderung $\Delta\ell/\ell$:

$$\frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x} = \frac{\Delta\ell}{\ell} \quad (2.2.76)$$

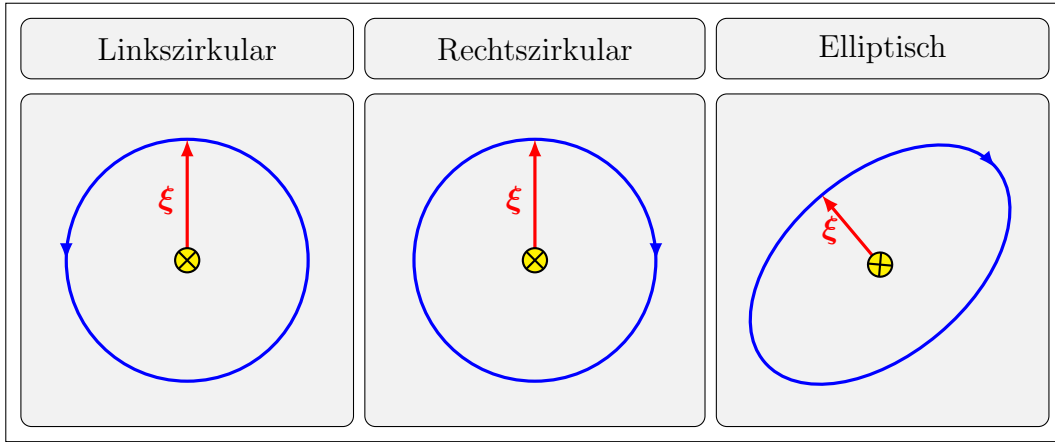


Abbildung 2.18: Zirkulare und elliptische Polarisation.

Die **elastische Energiedichte** ist damit

$$\frac{dE_{\text{el}}}{dV} = \frac{1}{2} E \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2. \quad (2.2.77)$$

Nun ist die allgemeine Lösung der Wellengleichung von der Form

$$\xi(x, t) = f(u) \quad \text{mit} \quad u = x - vt. \quad (2.2.78)$$

Es folgt

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial f(u)}{\partial t} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial u}}_{=f'} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = -vf' \quad (2.2.79)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial f(u)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = f' \quad (2.2.80)$$

$$\Rightarrow \frac{dE_{\text{kin}}}{dV} = \frac{1}{2} \rho v^2 f'^2 \quad (2.2.81)$$

$$\frac{dE_{\text{el}}}{dV} = \frac{1}{2} E f'^2. \quad (2.2.82)$$

Nach Gleichung (2.2.66) ist

$$v^2 = \frac{E}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \frac{dE_{\text{kin}}}{dV} = \frac{1}{2} E f'^2 = \frac{dE_{\text{el}}}{dV}. \quad (2.2.83)$$

Die Gesamtenergiedichte dE_{tot}/dV ist damit

$$\frac{dE_{\text{tot}}}{dV} = \frac{dE_{\text{kin}}}{dV} + \frac{dE_{\text{el}}}{dV} = \rho v^2 f'^2. \quad (2.2.84)$$

Man beachte: Diese Gleichung gilt für mechanische Wellen. Weiter ist zu beachten, dass man bei Überlagerung (Superposition) von Wellen die Energie nicht einfach aufsummieren darf, da Interferenz (siehe später in diesem Kapitel) die in der Welle enthaltene Energie beeinflusst.

Entsprechend erhält man für transversale Seilwellen mit der Zugspannung $S = F/A_{\square}$ und $v = \sqrt{S/\rho}$:

$$\frac{dE_{\text{kin}}}{dV} = \frac{1}{2}\rho v^2 f'^2 \quad (2.2.85)$$

$$\frac{dE_{\text{el}}}{dV} = \frac{1}{2}S f'^2. \quad (2.2.86)$$

2.2.10 Intensität

Wir betrachten die Ausbreitung einer harmonischen Welle im elastischen Medium

$$\xi(x, t) = A \cos(\underbrace{kx - \omega t}_{=k \cdot u}) \quad (2.2.87)$$

mit der **Phasengeschwindigkeit** $v = \omega/k$. Die Energiedichte beträgt

$$\frac{dE_{\text{tot}}}{dV} = \rho v^2 A^2 k^2 \sin^2(kx - \omega t) \quad (2.2.88)$$

$$= \rho \omega^2 A^2 \sin^2(kx - \omega t). \quad (2.2.89)$$

Man beachte:

- $\sin^2(kx - \omega t)$ ist eine Funktion vom Typ $f(x - vt)$ und damit ebenfalls eine Lösung der Wellengleichung.
- Es gilt $\sin^2(kx - \omega t) \geq 0 \quad \forall(x, t)$.
- Die Energie breitet sich demnach mit der Phasengeschwindigkeit $v = \omega/k$ aus.

Da wir meist Zeitspannen betrachten, die weitaus grösser sind als T , interessieren uns bei der Betrachtung der Energie vor allem die gemittelten Größen. Die **mittlere Energiedichte** während einer Periode T beträgt

$$\left\langle \frac{dE_{\text{tot}}}{dV} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dE_{\text{tot}}}{dV}(x, t) dt = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2. \quad (2.2.90)$$

Sie wächst also quadratisch mit der Frequenz und ebenfalls quadratisch mit der Amplitude, genau wie wir bereits bei Schwingungen gelernt haben.

Die **Energieflussdichte** $\mathbf{S}$ einer Welle (auch bekannt als der **Poynting-Vektor**) bezeichnet die Energie d^2E_{tot} , welche in der Zeit dt durch ein zum Energiefluss orthogonales Flächenelement $d\mathbf{a}$ hindurchtritt:⁴

$$\mathbf{S} = \frac{d^2E_{\text{tot}}}{da dt} \cdot \frac{d\mathbf{a}}{|d\mathbf{a}|}, \quad [\mathbf{S}] = \frac{\text{J}}{\text{m}^2 \text{s}} = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}. \quad (2.2.91)$$

Den Betrag der Energieflussdichte

$$I := |\mathbf{S}| \quad (2.2.92)$$

bezeichnet man als **Intensität** I der Welle. Die durch eine endlich grosse Fläche $A_{\square}$ in der Zeit dt hindurchtretende Energie ist eine spezielle Form der Leistung und wird als **Energiestrom** bezeichnet:

$$\frac{dE_{\text{tot}}}{dt} = \dot{E}_{\text{tot}} = \iint_{A_{\square}} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a}, \quad [\dot{E}_{\text{tot}}] = \text{J/s} = \text{W}. \quad (2.2.93)$$

Bei einer elastischen Welle im Stab können wir die in Frage kommende Fläche als stets senkrecht zur Ausbreitungsrichtung annehmen, sodass der Flächenvektor parallel zur Wellengeschwindigkeit verläuft. Damit ist die Intensität gegeben durch

$$I = \frac{d^2E_{\text{tot}}}{da dt} = \frac{d^2E_{\text{tot}}}{(da \cdot dx) dt} \cdot dx = \frac{dE_{\text{tot}}}{dV} \cdot \frac{dx}{dt} = v \frac{dE_{\text{tot}}}{dV}. \quad (2.2.94)$$

Die **mittlere Intensität** der harmonischen Welle ist also gleich

$$\langle I \rangle = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 v = \frac{1}{2} \rho \frac{\omega^3}{k} A^2. \quad (2.2.95)$$

2.3 Dopplereffekt

Wir überlegen uns im Folgenden, was passiert, wenn sich die Quelle oder der Beobachter einer Welle bewegen.⁵ In Abbildung 2.19 und 2.20 sind mehrere von der Quelle Q ausgesandte Wellenfronten eingezeichnet. In dem in Abb. 2.20 abgebildeten Fall bewegt sich die Quelle Q selbst, wohingegen sie in Abb. 2.19 ruht, während sich der Beobachter (Empfänger) B bewegt. In beiden Fällen lässt sich erkennen, dass der Beobachter eine verschobene Frequenz der Wellenfronten wahrnehmen muss. So nimmt beispielsweise der ruhende Beobachter im Falle einer sich zu ihm bewegenden Quelle (Abbildung 2.20) eine höhere Frequenz wahr, da sich an seinem Aufenthaltsort die Wellenmaxima stauen und diese höhere Dichte der Wellenmaxima die wahrnehmbare Frequenz lokal erhöht. Verschiedene Ausprägungen dieses Effekts werden im Folgenden detailliert behandelt.

⁴Die in der Literatur übliche Notation $\mathbf{S}$ für den Poynting-Vektor darf nicht mit dem zuvor verwendeten Symbol für die Zugspannung verwechselt werden.

⁵Wir behandeln hier den Fall, in dem sich die Quelle oder der Beobachter längs der Verbindungslinie zwischen ihnen bewegen. Beliebige Bewegungsrichtungen können behandelt werden, indem man ihre Geschwindigkeitskomponente in Richtung dieser Verbindungslinie betrachtet.

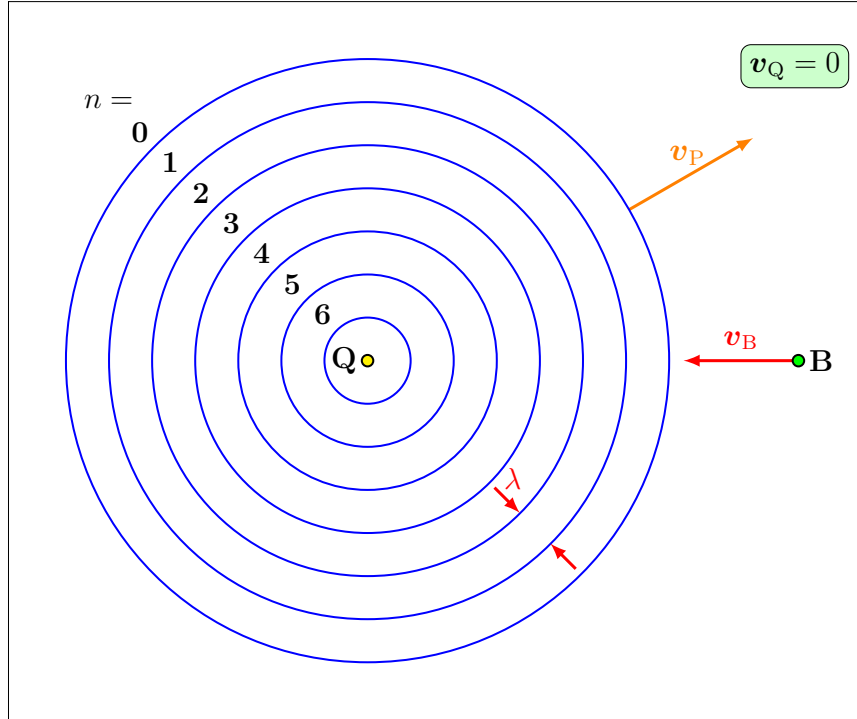


Abbildung 2.19: Dopplereffekt: Ruhende Quelle, bewegter Beobachter.

2.3.1 Beobachter bewegt, Quelle ruhend

Die ruhende⁶ Quelle emittiert Wellen mit der Frequenz ν_Q . In der Zeitspanne Δt würde ein *ruhender* Beobachter

$$n_\lambda = \nu_Q \Delta t \quad (2.3.1)$$

Wellenlängen der Wellenform an sich vorbeiziehen sehen. Ein auf die Quelle mit der Geschwindigkeit v_B hin *bewegter* Beobachter sieht *zusätzlich* die Anzahl Wellenbuckel, welche in die zurückgelegte Strecke $v_B \Delta t$ hineinpassen. Damit ist die gesamte Anzahl Wellenlängen, welche den Beobachter in der Zeit Δt passieren, gegeben durch

$$n_\lambda = \nu_Q \Delta t + \frac{v_B \Delta t}{\lambda}. \quad (2.3.2)$$

Die vom Beobachter wahrgenommene Frequenz ν_B ist damit

$$\nu_B \equiv \frac{n_\lambda}{\Delta t} = \nu_Q + \frac{v_B}{\lambda}. \quad (2.3.3)$$

⁶Ruhend in Bezug auf das Medium, in welchem sich die Wellen fortpflanzen.

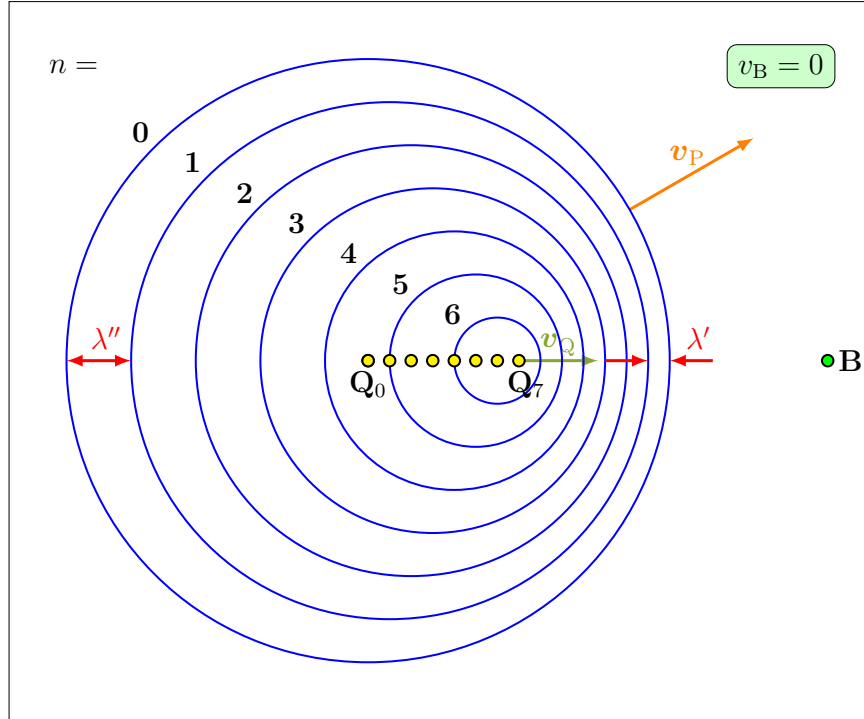


Abbildung 2.20: Dopplereffekt: Bewegte Quelle, ruhender Beobachter.

Die Phasengeschwindigkeit⁷ sei v_P . Mit Hilfe der Beziehung $v_P = \lambda \nu_Q$ erhalten wir das Ergebnis

$$\nu_B = \begin{cases} \nu_Q \left(1 + \frac{v_B}{v_P} \right) & \text{für Annäherung an die Quelle,} \\ \nu_Q \left(1 - \frac{v_B}{v_P} \right) & \text{für Entfernung von der Quelle.} \end{cases} \quad (2.3.4)$$

2.3.2 Beobachter ruhend, Quelle bewegt

Nun sei der Beobachter ruhend und die Quelle bewege sich mit der Geschwindigkeit v_Q auf den Beobachter zu. Hier erweist es sich als vorteilhaft, die vom Beobachter wahrgenommene Wellenlänge λ_B zu berechnen. Wir betrachten dazu die Entfernung der Quelle vom Beobachter bei der Emission zweier unmittelbar aufeinanderfolgender Wellenmaxima (in der Skizze sind die entsprechenden Positionen durch Q_n gekennzeichnet). Bei ruhender Quelle würden die beiden Wellenmaxima im Abstand λ am Beobachter vorbeiziehen. Da

⁷Wir vernachlässigen in diesem Abschnitt weiterhin Dispersionsphänome. Die Gruppengeschwindigkeit und die Phasengeschwindigkeit werden also als identisch angenommen und es kann demnach auch von der Ausbreitungsgeschwindigkeit gesprochen werden.

sich aber die Quelle auf den Beobachter hin bewegt, verkürzt sich die Wellenlänge um die Strecke

$$v_Q T = v_Q / \nu_Q, \quad (2.3.5)$$

wobei $T = 1/\nu_Q$ die Periodendauer ist. Daraus folgt

$$\lambda_B = \lambda - \frac{v_Q}{\nu_Q}. \quad (2.3.6)$$

Indem wir wieder die Beziehung $v_P = \nu \lambda$ verwenden, erhalten wir in diesem Fall

$$\nu'_B \equiv \frac{v_P}{\lambda_B} = \begin{cases} \frac{\nu_Q}{1 - \frac{v_Q}{v_P}} & \text{für Annäherung an den Beobachter,} \\ \frac{\nu_Q}{1 + \frac{v_Q}{v_P}} & \text{für Entfernung vom Beobachter.} \end{cases} \quad (2.3.7)$$

2.3.3 Schockwelle

Falls sich die Quelle mit einer Geschwindigkeit bewegt, die grösser ist als die Phasengeschwindigkeit, $v_Q > v_P$, so addieren sich die einzelnen Wellenzüge auf einer Kegeloberfläche konstruktiv,⁸ siehe Abbildung 2.21. Während sich die Quelle in der Zeit Δt um $v_Q \Delta t$ weiterbewegt hat (von $\mathbf{Q}_0$ bis $\mathbf{Q}_7$), hat sich die Wellenfront ($n = 0$) nur um $v_P \Delta t$ ausgebreitet. Der halbe Öffnungswinkel ϑ des **Mach'schen Kegels** beträgt somit

$$\vartheta = \arcsin \frac{v_P}{v_Q}. \quad (2.3.8)$$

Es bildet sich eine **Schockwelle** (Überschallknall). Das Verhältnis v_Q/v_P wird auch als **Mach'sche Zahl** bezeichnet.

2.3.4 Bemerkungen

All diese Phänomene sind wohl bekannt beim Schall.⁹ In diesem Fall bewegen sich die Quelle oder der Beobachter relativ zu einem vorgegebenen Medium, nämlich der als ruhend angenommenen Luft, und die Phasengeschwindigkeit entspricht der Schallgeschwindigkeit in Luft v_s . Bei *Lichtwellen* im Vakuum finden wir andere Verhältnisse. Es gibt kein Medium, in welchem sich das Licht fortpflanzt. Damit sollte man den gleichen Effekt

⁸Siehe auch folgenden Abschnitt zur Überlagerung von Wellen

⁹Übungsaufgabe: Ein hupendes Auto fährt an Ihnen vorbei. Dabei stellen Sie fest, dass sich die Tonhöhe um eine Oktave (d. h. um einen Faktor 2) ändert. Wie schnell fährt das Vehikel?

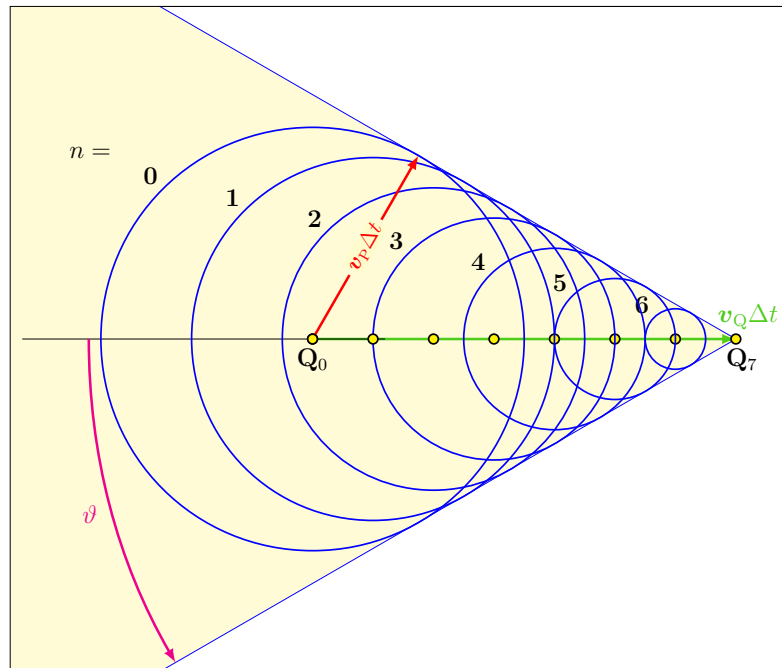


Abbildung 2.21: Schockwelle.

erhalten, wenn sich die Quelle *oder* der Beobachter bewegt. Nur *eine* Geschwindigkeit ist von Belang, die Relativgeschwindigkeit zwischen Quelle und Beobachter. Dieses Problem ist erst mit Hilfe der Relativitätstheorie gelöst worden, der relativistische Dopplereffekt soll jedoch nicht Teil dieser Vorlesung sein und wird vor allem bei elektromagnetischen Wellen relevant.

Der Dopplereffekt ist nicht zuletzt deshalb von Bedeutung, weil man durch eine Messung von ν'_B (bei bekannter Frequenz ν_Q) die Geschwindigkeit der Quelle einfach und häufig mit sehr hoher Präzision¹⁰ messen kann. So hat zum Beispiel vor etwa 100 Jahren der Astronom Edwin Hubble durch Messung der Rotverschiebung von weit entfernten Galaxien herausgefunden, dass diese sich (fast) alle von uns weg bewegen, und zwar umso schneller, je weiter sie von uns entfernt sind.¹¹

¹⁰Vor allem in der Optik, bei genau bekannten scharfen Spektrallinien.

¹¹Übungsaufgabe: Die Wellenlängen aller Spektrallinien, die von einer fernen Galaxie emittiert werden, sind um einen Faktor 3 grösser als die Spektrallinien der gleichen Atome im Labor (sog. Rotverschiebung). Wie rasch bewegt sich die Galaxie und in welcher Richtung?

2.4 Prinzip der Superposition

2.4.1 Einleitung

Abbildung 2.22 zeigt zwei Wellenberge, die sich in entgegengesetzten Richtungen bewegen. Experimentell wird beobachtet, dass in dem Moment, in dem sich die beiden Wellenberge treffen, die gesamte Auslenkung des Seils gleich der Summe der Auslenkungen der einzelnen Wellenberge ist. Nachher trennen sich die Wellenberge wieder und laufen weiter, ohne dass sich ihre Form geändert hat. Diese fundamentale Eigenschaft von Wellen wird als Prinzip der **Superposition** bezeichnet. Wenn die Wellen entgegengesetzte Amplituden haben, löschen sie einander aus. Dies kann folgendermassen formuliert werden.

Ist $\xi_1(x - vt)$ die Wellenfunktion der sich in positiver x -Richtung bewegenden Welle und $\xi_2(x + vt)$ jene der sich in negativer x -Richtung bewegenden Welle, so ist die Gesamtwell-

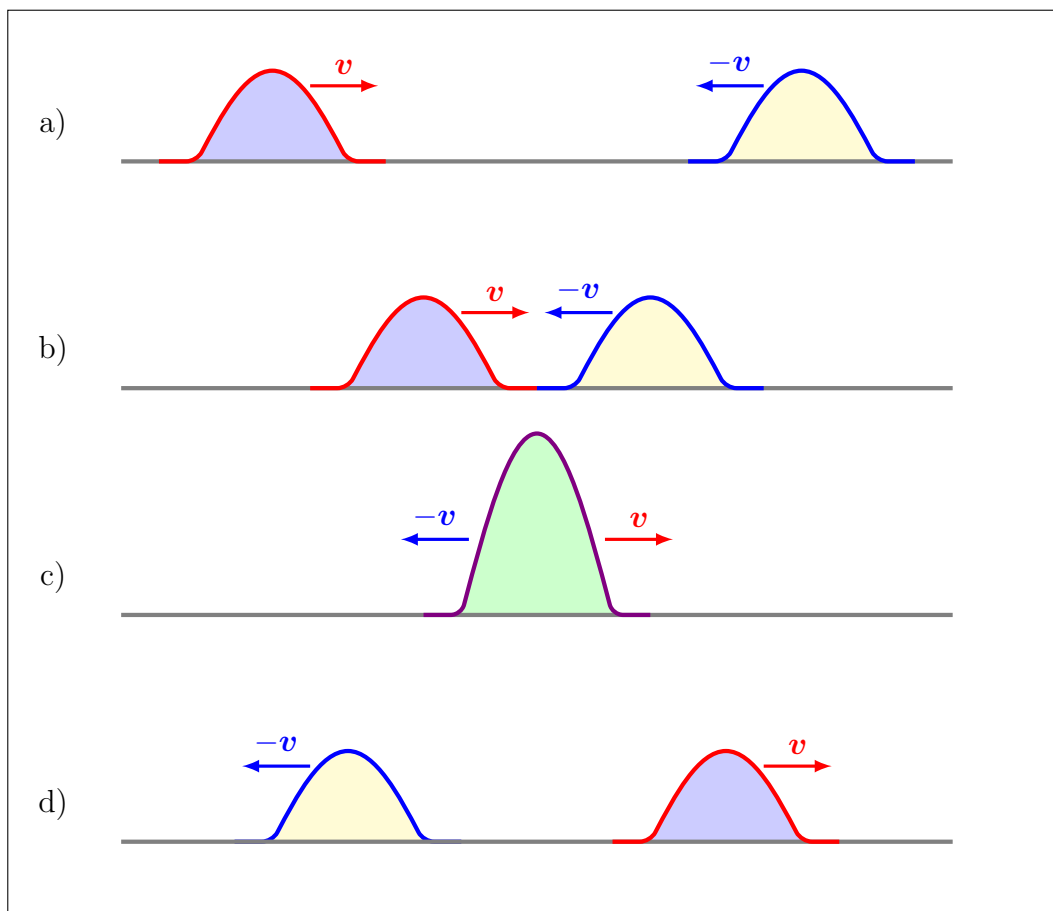


Abbildung 2.22: Zwei Wellen begegnen sich. In c) ist die resultierende Amplitude gleich der Summe der Amplituden der beiden einlaufenden Wellen.

lenfunktion die Summe der Einzelwellenfunktionen

$$\xi(x, t) = \xi_1(x - vt) + \xi_2(x + vt). \quad (2.4.1)$$

Dabei können sich die Wellen verstärken oder auch auslöschen (siehe Abbildung 2.23). Allgemein gilt:

Sind $\xi_1(x, t)$ und $\xi_2(x, t)$ Lösungen der Wellengleichung, dann ist auch

$$\xi(x, t) = \xi_1(x, t) + \xi_2(x, t) \quad (2.4.2)$$

eine Lösung. Dies folgt aus der Linearität der Wellengleichung.

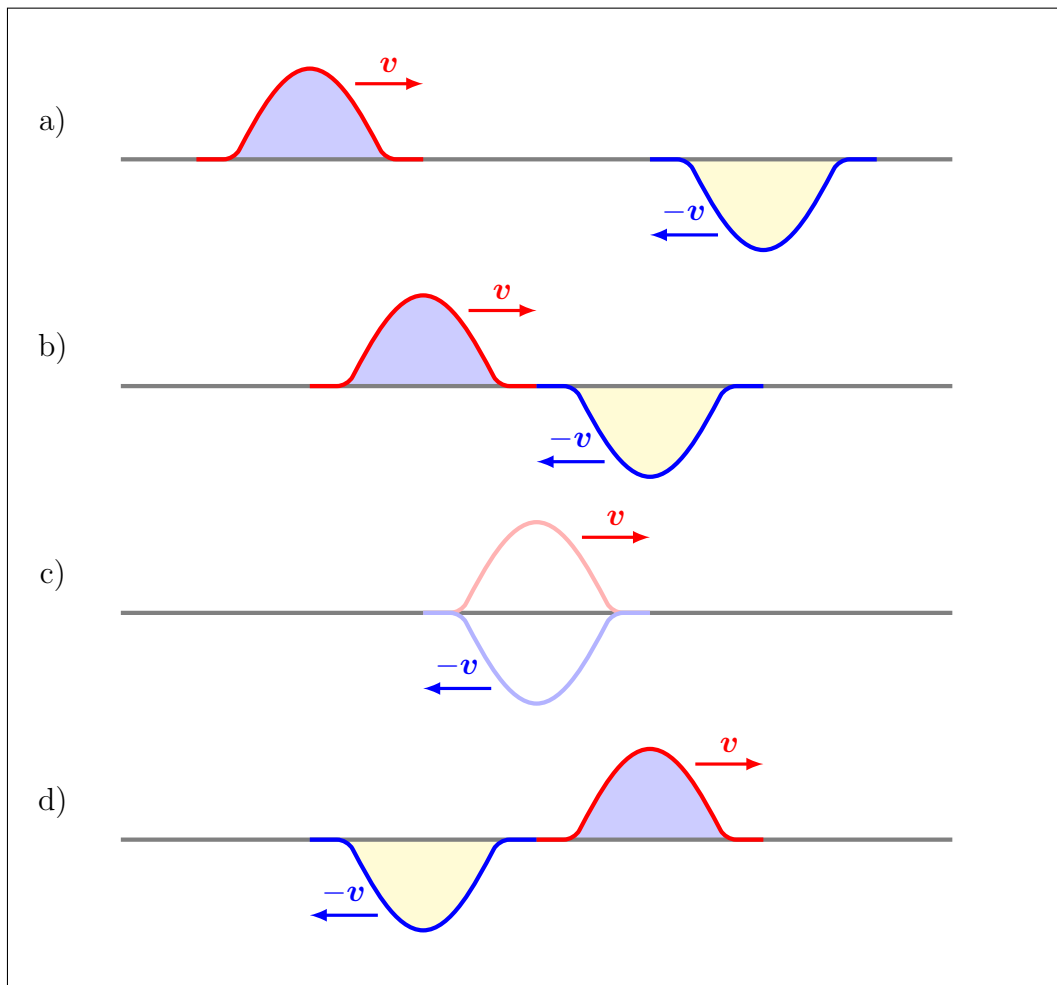


Abbildung 2.23: Prinzip der Superposition. Im Fall c) haben wir die gegenseitige Auslöschung der beiden Wellenberge.

2.4.2 Anwendung: Superposition harmonischer Wellen

Die durch Superposition harmonischer Wellen resultierende Welle hängt von den Phasen der ursprünglichen Wellen ab. Wir betrachten z.B. zwei harmonische Wellen, die von zwei Quellen $\mathbf{Q}_1$ und $\mathbf{Q}_2$ mit derselben Amplitude A , derselben Kreisfrequenz ω und einem vorgegebenen Phasenunterschied δ herrühren. Die zwei Wellen treffen sich in einem Punkt $\mathbf{P}$, der sich im Abstand x_1 von $\mathbf{Q}_1$ und x_2 von $\mathbf{Q}_2$ befindet (siehe Abbildung 2.24).

Wegen des Prinzips der Superposition ist die resultierende Welle im Punkt $\mathbf{P}$ gleich der Summe der zwei einlaufenden Wellen

$$\xi(x, t) = \xi_1(x, t) + \xi_2(x, t) \quad (2.4.3)$$

$$= A \sin(kx_1 - \omega t) + A \sin(kx_2 - \omega t + \delta) , \quad (2.4.4)$$

wobei δ der Phasenunterschied der Quellen ist. Weil die Wellen verschiedene Wege zurückgelegt haben, erreichen sie den Punkt $\mathbf{P}$ mit unterschiedlichen Phasen. Die Wegdifferenz wird als der **Gangunterschied** Δx bezeichnet und führt zur zusätzlichen Phasendifferenz $k\Delta x$ mit

$$\Delta x = x_2 - x_1 , \quad (2.4.5)$$

so dass

$$\xi = A \sin(kx_1 - \omega t) + A \sin[k(x_1 + \Delta x) - \omega t + \delta] . \quad (2.4.6)$$

Eine wichtige trigonometrische Identität, die wir noch häufiger verwenden werden, lautet

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left[\frac{1}{2} (\alpha + \beta) \right] \cos \left[\frac{1}{2} (\alpha - \beta) \right] . \quad (2.4.7)$$

Aus ihr folgt

$$\xi = 2A \sin \left[kx_1 - \omega t + \frac{1}{2} (\delta + k\Delta x) \right] \cos \left[\frac{1}{2} (\delta + k\Delta x) \right] . \quad (2.4.8)$$

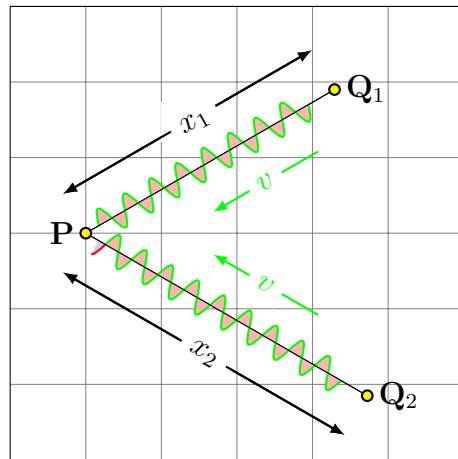


Abbildung 2.24: Gangunterschied.

Die resultierende Welle ist demnach eine harmonische Welle

$$\xi = \underbrace{2A \cos \left[\frac{1}{2} (\delta + k\Delta x) \right]}_{\text{Amplitude}} \underbrace{\sin \left[kx_1 - \omega t + \frac{1}{2} (\delta + k\Delta x) \right]}_{\text{harmonische Welle}} \quad (2.4.9)$$

mit derselben Frequenz und derselben Wellenzahl wie die einlaufenden Wellen. Die Phase unterscheidet sich von beiden ursprünglichen Wellen und wir bemerken, dass die Amplitude der resultierenden Welle

$$A' := 2A \cos \left[\frac{1}{2} (\delta + k\Delta x) \right] \quad (2.4.10)$$

nicht von der Zeit abhängt.

Man kann den Gangunterschied derart wählen, dass die resultierende Phasendifferenz ein ganzzahliges Vielfaches von π ist, d.h.

$$\frac{1}{2} (\delta + k\Delta x) = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.4.11)$$

In diesem Fall haben beide Wellen beim Aufeinandertreffen am Punkt **P** dieselbe Phase. Man sagt dazu, sie seien **in Phase** und spricht von **konstruktiver Interferenz**. Die resultierende Welle besitzt die doppelte Amplitude der Einzelwellen. Für

$$\frac{1}{2} (\delta + k\Delta x) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.4.12)$$

sind die beiden Wellen **in Gegenphase** und addieren sich zu null, weil sie gleich grosse, aber entgegengesetzte Amplituden besitzen. Man spricht von **destruktiver Interferenz** und die resultierende Welle verschwindet für alle Zeiten.

Für die über eine Periode gemittelte Intensität der resultierenden Welle gilt

$$\langle I \rangle \sim \frac{1}{2} (2A)^2 \cos^2 \left[\frac{1}{2} (\delta + k\Delta x) \right]. \quad (2.4.13)$$

2.4.3 Kohärenz

Wir haben im vorhergehenden Abschnitt gesehen, dass Wellen derselben Frequenz interferieren und sich dabei vollständig auslöschen oder auch verstärken können. Eine notwendige Bedingung dafür ist die Zeitunabhängigkeit der resultierenden Phase. Eine Interferenz findet statt, wenn

1. zwei Quellen mit konstantem Phasenunterschied vorliegen oder

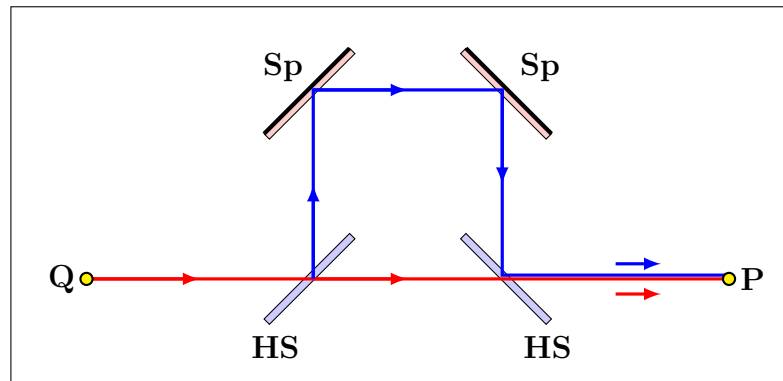


Abbildung 2.25: Aufteilung der von einer Quelle **Q** erzeugten Welle durch halbdurchlässige Spiegel **HS** und anschließende Interferenz im Punkt **P**. **Sp** sind nichtdurchlässige Spiegel.

2. sich zwei Wellen derselben Quelle mit unterschiedlich langen Laufwegen in einem Bereich des Raumes überlagern, siehe z. B. das Interferometer in Abbildung 2.25, bei dem mit Hilfe zweier halbdurchlässiger Spiegel das Licht einer Lichtquelle aufgeteilt und wieder vereint wird. Durch die unterschiedliche Laufweite der beiden Wellen tritt Interferenz auf.

Falls die Phase nicht zeitabhängig ist, sind die Wellen **kohärent**. Kohärenz ist eine notwendige Voraussetzung für das Auftreten von Interferenzphänomenen.

Bei zeitabhängiger Phase tritt keine Interferenz auf, da sich die konstruktiven und destruktiven Überlagerungen im zeitlichen Mittel ausgleichen. Klassische Lichtquellen wie z. B. Glühlampen oder Fluoreszenzröhren senden inkohärentes Licht aus, da verschiedene Atome rein zufällig und unkorreliert Licht aussenden.

Interferenz mit zwei Wellen derselben Quelle ist nur dann möglich, wenn die Differenz der Laufwege kleiner ist als die **Kohärenzlänge**, also als die Entfernung, welche eine Wellenfront in einer Zeit zurücklegt, in der die Eigenschaften der Quelle in guter Näherung als konstant angenommen werden können. In der Praxis kann eine Welle niemals für unendliche Zeit unverändert andauern, sondern muss einen Anfangszeitpunkt t_1 und einen Endzeitpunkt t_2 haben. Daraus ergibt sich, dass die Welle auch räumlich begrenzt ist und eine Kohärenzlänge von maximal $v \cdot (t_2 - t_1)$ hat. Berücksichtigt man zudem, dass es z. B. auf Grund von externen Einflüssen nicht möglich ist, über einen langen Zeitraum eine Welle mit exakt den gleichen Eigenschaften (insbesondere Phasenlage) zu erzeugen, verringert sich die Kohärenzlänge auf $v \cdot \Delta t$, wobei Δt die Zeitdauer ist, während der die Eigenschaften der Welle als näherungsweise konstant angenommen werden können.

2.4.4 Zwei entgegengesetzt laufende Wellen

Als nächstes untersuchen wir die Interferenz zweier entgegenlaufender kohärenter Wellen. Die entgegenlaufende Welle kann man beispielsweise durch Reflexion an einem Spiegel

erzeugen. Die Superposition $\xi := \xi_1 + \xi_2$ der beiden Wellen

$$\xi_1(t) = A \cos(kx - \omega t) \quad (2.4.14)$$

$$\xi_2(t) = A \cos(-kx - \omega t + \delta_R) \quad (2.4.15)$$

ergibt

$$\xi = 2A \cos\left(kx - \frac{\delta_R}{2}\right) \cos\left(\omega t - \frac{\delta_R}{2}\right). \quad (2.4.16)$$

Dies ist keine *laufende* Welle mehr, da sie nicht vom Typ $f(x - vt)$ ist. Man spricht von einer stehende Welle, wie wir später noch diskutieren werden. Man beachte, dass die Amplitude durch den Ort x im ersten Kosinus festgelegt wird und der zweite Kosinus für eine Schwingung in der Zeit sorgt. Die mittlere Intensität beträgt

$$\langle I \rangle \sim \frac{1}{2}(2A)^2 \cos^2\left(kx - \frac{\delta_R}{2}\right). \quad (2.4.17)$$

Für $\delta_R = 0$ gibt es Maxima der Intensität bei

$$kx = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.4.18)$$

und Minima bei

$$kx = (2n + 1)\frac{\pi}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.4.19)$$

2.4.5 Zwei in verschiedene Richtungen laufende Wellen

Es seien ξ_1 und ξ_2 zwei von den Quellen $\mathbf{Q}_1$ bzw. $\mathbf{Q}_2$ ausgehende harmonische Kreiswellen¹² mit zwei festen Phasen δ_1 und δ_2 . Für die folgende Rechnung werden wir der Einfachheit halber $\delta_1 = \delta_2 = 0$ annehmen (siehe Abbildung 2.26).

Bei einer Kreiswelle ist die Energie einer Wellenfront mit Radius r über den Kreisumfang $2\pi r$ verteilt. Auf Grund der Energieerhaltung muss die Energiedichte bei der Ausbreitung (Vergrößerung des Radius r) demnach mit $1/r$ abnehmen, damit die über den Kreisumfang integrierte Energie konstant bleibt. Dies bedeutet, dass die Amplitude einer Kreiswelle mit $1/\sqrt{r}$ abnimmt.¹³

Die Koordinaten der beiden Quellen seien

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} +a \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.4.20)$$

¹²Eine Kreiswelle breitet sich nur in einer Ebene aus, nicht im gesamten Raum. Ein Beispiel wäre die von einem ins Wasser fallenden Stein ausgelöste Welle.

¹³Bei einer Kugelwelle nimmt die Amplitude stattdessen mit $1/r$ ab, da sich die Energie auf einer Kugeloberfläche $4\pi r^2$ verteilt und die Energiedichte somit mit $1/r^2$ abnehmen muss.

Somit gilt für die beiden Wellen:

$$\xi_1(r, t) = \frac{A}{\sqrt{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}} \cos(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| - \omega t) \quad (2.4.21)$$

$$\xi_2(r, t) = \frac{A}{\sqrt{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|}} \cos(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2| - \omega t) \quad (2.4.22)$$

Interferenzmaxima ergeben sich, falls

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2| = n\lambda, \quad |n| = 0, 1, 2, \dots \quad \lambda = 2\pi/k \quad (2.4.23)$$

Exakt ist diese Beziehung nur dann richtig, falls die Amplituden konstant sind. Da sie aber mit der Entfernung abnehmen, können kleine Korrekturen auftreten, die wir hier nicht berücksichtigen werden.

Wir wollen nun die Kurven bestimmen, auf denen die Interferenzmaxima zu finden sind. Das Einsetzen der Ortsvektoren $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$ in Gleichung (2.4.23) ergibt

$$\sqrt{(x+a)^2 + y^2} = n\lambda + \sqrt{(x-a)^2 + y^2} \quad (2.4.24)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (x+a)^2 + y^2 &= n^2\lambda^2 + 2n\lambda\sqrt{(x-a)^2 + y^2} + (x-a)^2 + y^2 \\ \Rightarrow 2n\lambda\sqrt{(x-a)^2 + y^2} &= 4ax - n^2\lambda^2 \end{aligned} \quad (2.4.25)$$

Nach nochmaligem Quadrieren und Umformen erhält man schliesslich

$$y^2 = \frac{(4a^2 - n^2\lambda^2)}{n^2\lambda^2}x^2 - \frac{(4a^2 - n^2\lambda^2)}{4}. \quad (2.4.26)$$

Dies ist die Gleichung einer Hyperbelschar mit n als Parameter (siehe Abbildung 2.26).

2.5 Reflexion und Transmission

Bevor wir uns näher mit stehenden Wellen befassen werden, wollen wir noch untersuchen, was beim Auftreffen einer Welle auf eine Grenzfläche, die zwei verschiedene Medien voneinander trennt, geschieht.

Eine Welle laufe in einem Medium mit Kreisfrequenz ω und Wellenzahl k_1 in positive x -Richtung. An der Grenzfläche ($x = 0$) treffe sie auf ein zweites Medium mit anderen Materialkonstanten. Im Allgemeinen wird dann ein Teil der Welle im zweiten Medium weiterlaufen (**Transmission**) und ein anderer Teil wird reflektiert und in negative x -Richtung zurücklaufen (**Reflexion**) (siehe Abbildung 2.27).

Die Kreisfrequenz wird sich dabei nicht ändern.¹⁴ Sie ist also identisch für auftreffende, transmittierte und reflektierte Welle. Was sich aber im Allgemeinen ändern wird, sind die Wellengeschwindigkeit v und damit auch die Wellenzahl k bzw. die Wellenlänge λ .

¹⁴Um dies zu überprüfen, kann man die Gleichungen (2.5.1)–(2.5.3) mit drei unterschiedlichen Kreisfrequenzen ω_A , ω_R , und ω_T ansetzen. Man stellt dann fest, dass (2.5.4)–(2.5.5) nur für alle Zeiten t erfüllt sein können, wenn $\omega_A = \omega_R = \omega_T$ gilt.

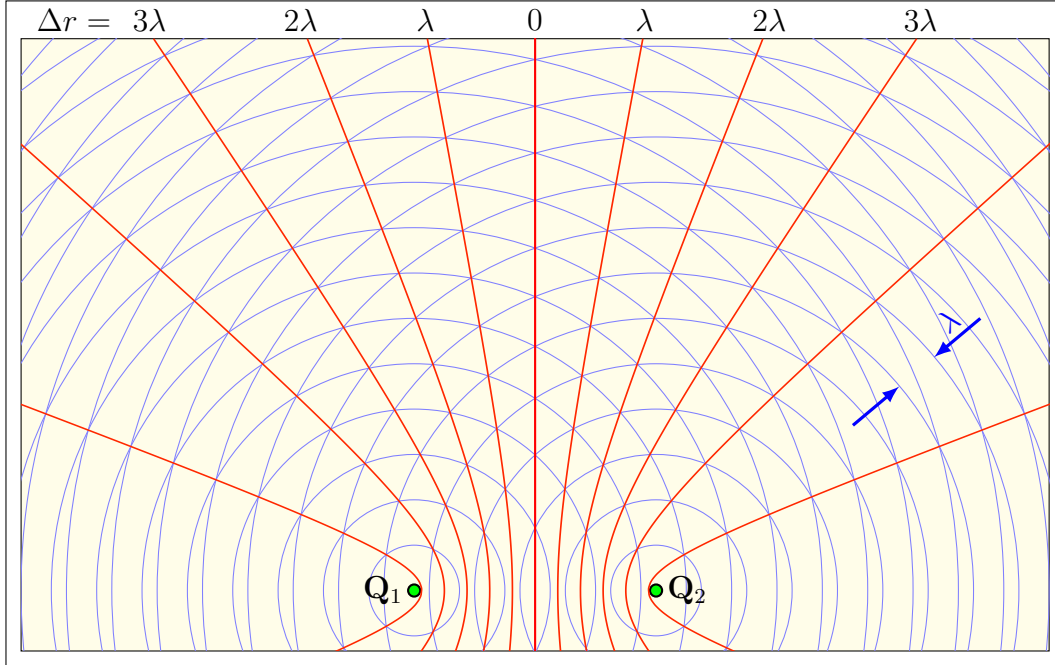


Abbildung 2.26: Interferenz zweier Kreiswellen mit fester Phasenbeziehung.

Bei der Seilwelle zum Beispiel ist $v = \sqrt{S/\rho}$, sodass sowohl eine andere Dichte als auch eine andere Seilspannung die Geschwindigkeit ändern. Bei der Schallwelle im Festkörper ist $v = \sqrt{E/\rho}$. In diesem Fall bewirken ein anderer Elastizitätsmodul oder eine andere Dichte eine veränderte Geschwindigkeit.

Demnach spielen drei verschiedene Wellenfunktionen

$$\xi_I = A_I e^{i(+k_1 x - \omega t)} \quad A_I > 0 \quad \text{auftreffend}^{15}, \quad (2.5.1)$$

$$\xi_R = A_R e^{i(-k_1 x - \omega t + \delta_R)} \quad A_R \geq 0 \quad \text{reflektiert}, \quad (2.5.2)$$

$$\xi_T = A_T e^{i(+k_2 x - \omega t + \delta_T)} \quad A_T \geq 0 \quad \text{transmittiert} \quad (2.5.3)$$

eine Rolle. Die physikalischen Lösungen entsprechen wieder den Realteilen der komplexen Wellenfunktionen. Die Phase der auftreffenden Welle haben wir der Einfachheit halber gleich null gesetzt. Es müssen die folgenden beiden Randbedingungen erfüllt sein.

1. Stetigkeit der Auslenkung an der Grenzfläche

$$\lim_{x \rightarrow 0_-} (\xi_I + \xi_R) = \lim_{x \rightarrow 0_+} \xi_T. \quad (2.5.4)$$

2. Bei der Seilwelle z. B. müssen die vertikalen Kräfte links und rechts der Grenzfläche identisch sein. Dies führt zu der Bedingung

$$F \frac{\partial \xi_I}{\partial x} \Big|_{x=0} + F \frac{\partial \xi_R}{\partial x} \Big|_{x=0} = F \frac{\partial \xi_T}{\partial x} \Big|_{x=0}, \quad (2.5.5)$$

¹⁴Der Index I kommt aus dem Englischen, wo eine einfallende Welle mit *incident wave* übersetzt wird.

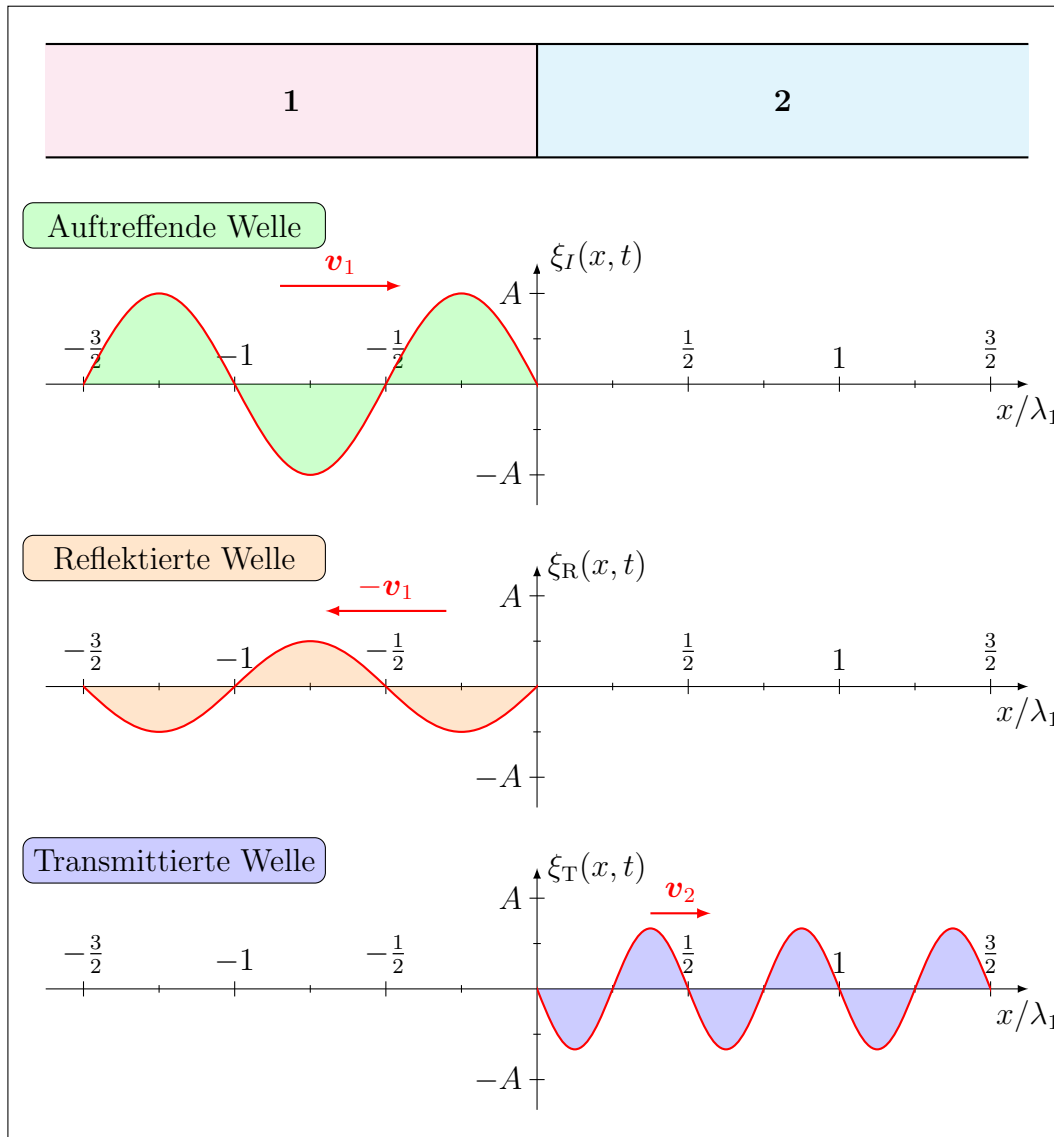


Abbildung 2.27: Transmission und Reflexion an der Grenzfläche zwischen zwei Medien 1 und 2 mit $\alpha = 2$.

wobei F die Spannkraft des Seils (Seilkraft) ist. Die Ableitung der Welle nach dem Ort ergibt den jeweiligen vertikalen Anteil des Kraftvektors $\mathbf{F}$.

Aus Gleichung (2.5.4) folgt:

$$A_I + A_R e^{i\delta_R} = A_T e^{i\delta_T} \quad (2.5.6)$$

Dieser Ausdruck ergibt zwei Gleichungen, eine für den Real- und eine für den Imaginärteil.

Die Gleichung für den Imaginärteil ergibt

$$A_T \sin \delta_T = A_R \sin \delta_R \quad (2.5.7)$$

da A_I reell ist. Aus den Gleichungen (2.5.5) und (2.5.7) folgt

$$A_I k_1 = A_T k_2 e^{i\delta_T} + A_R k_1 e^{i\delta_R} \quad (2.5.8)$$

$$\Rightarrow 0 = A_T k_2 \sin \delta_T + A_R k_1 \sin \delta_R \quad (2.5.9)$$

$$\Rightarrow 0 = A_T k_2 \sin \delta_T + A_T k_1 \sin \delta_T. \quad (2.5.10)$$

Für die Wellenvektoren gilt somit

$$k_1 = \frac{\omega}{v_1} = \omega \sqrt{\frac{\rho_1}{S_1}}, \quad (2.5.11)$$

$$k_2 = \frac{\omega}{v_2} = \omega \sqrt{\frac{\rho_2}{S_2}}. \quad (2.5.12)$$

Mit der Definition

$$\alpha := \frac{k_2}{k_1} = \sqrt{\frac{S_1 \rho_2}{S_2 \rho_1}} \quad (2.5.13)$$

liefert Gleichung (2.5.10) schliesslich die Bedingung

$$A_T \sin \delta_T (\alpha + 1) = 0. \quad (2.5.14)$$

Da $\alpha + 1 > 1$, kann diese Gleichung nur für

$$\sin \delta_T = 0 \quad (2.5.15)$$

erfüllt werden. Als mögliche Lösungen kommen zunächst $\delta_T = 0$ oder $\delta_T = \pi$ in Frage. Die zweite Lösung erfüllt aber nicht die Bedingung, dass im Grenzfall einer verschwindenden Grenzfläche

$$\lim_{v_1 \rightarrow v_2} \xi_I = \xi_T \quad (2.5.16)$$

gelten muss, sondern liefert vielmehr

$$\lim_{v_1 \rightarrow v_2} \xi_I = -\xi_T, \quad (2.5.17)$$

was keinen Sinn ergeben würde. Aus $\delta_T = 0$ folgt wiederum

$$\sin \delta_R = 0. \quad (2.5.18)$$

Für die reflektierte Welle gibt es keine weitere Bedingung, sodass sowohl $\delta_R = 0$ als auch $\delta_R = \pi$ mögliche Lösungen sind.

Wir setzen diese erhaltenen Phasen in die beiden Randbedingungen ein und erhalten aus Gleichung (2.5.6)

$$A_I = A_T \mp A_R \quad (2.5.19)$$

und aus Gleichung (2.5.8)

$$A_I = \alpha A_T \pm A_R. \quad (2.5.20)$$

Mit Hilfe dieser beiden Gleichungen können wir sowohl die Amplitude der Transmission

$$A_T = \frac{2A_I}{1 + \alpha} \quad (2.5.21)$$

als auch die der Reflexion

$$A_R = \pm \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} A_I \quad (2.5.22)$$

berechnen.

Häufig werden auch der **Reflexionskoeffizient** $r := \frac{A_R}{A_I}$ und der **Transmissionskoeffizient** $t := \frac{A_T}{A_I}$ eingeführt. Diese sind nach obigen Gleichungen gegeben durch

$$r = \pm \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} = \pm \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} \quad (2.5.23)$$

und

$$t = \frac{2}{1 + \alpha} = \frac{2v_2}{v_2 + v_1}. \quad (2.5.24)$$

Spezialfälle:

1. $\alpha = 1$

Da hierfür $S_1 \rho_2 = S_2 \rho_1$ erforderlich ist, kann man auch mit unterschiedlichen Materialien diese Bedingung erfüllen. Man erhält in diesem Fall

$$A_R = 0 \quad \text{und} \quad A_T = A_I. \quad (2.5.25)$$

2. $\alpha > 1$

Da $A_R \geq 0$, gilt in diesem Fall das negative Vorzeichen in (2.5.22) und demnach

$$\delta_R = \pi \quad \Rightarrow \quad A_R = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} A_I \quad \text{und} \quad A_T = \frac{2A_I}{\alpha + 1}. \quad (2.5.26)$$

Das **feste Ende** eines Seils entspricht dem Grenzfall

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} A_R(\alpha) = A_I \quad \Rightarrow \quad A_T \rightarrow 0. \quad (2.5.27)$$

Bei diesem Grenzübergang wird die Welle vollständig reflektiert und es findet ein **Phasensprung** um 180° statt (siehe Abbildung 2.28).

3. $\alpha < 1$

Da $A_R \geq 0$, gilt in diesem Fall das positive Vorzeichen in (2.5.22) und demnach

$$\delta_R = 0 \quad \Rightarrow \quad A_R = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} A_I \quad \text{und} \quad A_T = \frac{2A_I}{1 + \alpha}. \quad (2.5.28)$$

Das **lose Ende** eines Seils entspricht dem Grenzfall

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} A_R(\alpha) = A_I. \quad (2.5.29)$$

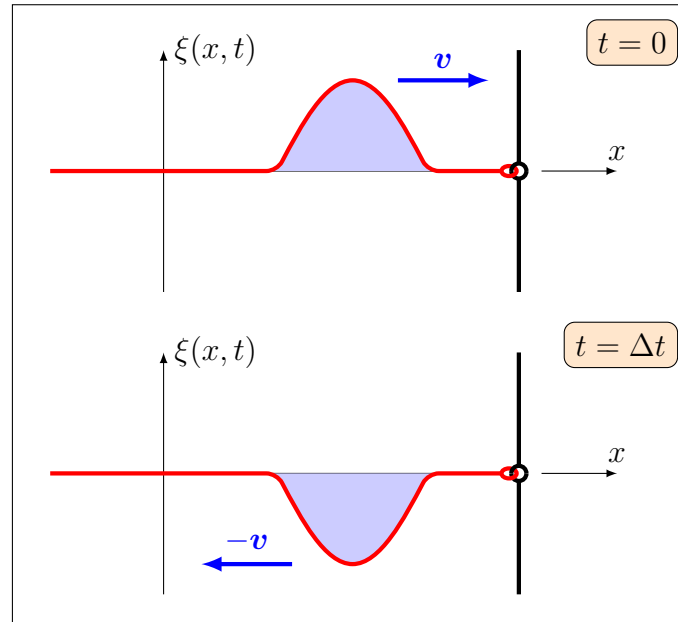


Abbildung 2.28: Reflexion eines Wellenberges am festen Ende.

Der Grenzfall $\alpha = 0$ lässt sich nur realisieren, indem man das Medium 1 an Vakuum angrenzen lässt. Dann ist es aber nicht mehr sinnvoll, von einer Transmission ($A_T = 2A_I$) zu reden, da keine mechanische Welle ins Vakuum übertreten kann. Beim Grenzübergang wird die Welle ebenfalls vollständig reflektiert, aber es findet **kein Phasensprung** statt (siehe Abbildung 2.29).

Die Amplituden für Transmission und Reflexion sind als Funktion des Parameters α in Abbildung 2.30 aufgetragen.

Natürlich können nicht nur Seilwellen bei einem Übergang in ein anderes Medium reflektiert werden. Auch andere physikalische Prozesse an Grenzflächen lassen sich durch die hier gezeigte theoretische Betrachtung beschreiben. So werden zum Beispiel Licht- und Mikrowellen reflektiert, wenn sich der Brechungsindex an der Grenzfläche zwischen zwei Medien ändert.

2.6 Stehende Wellen

2.6.1 Amplitude der stehenden Wellen

Mit der mathematischen Erfassung der Reflexion und Transmission im vorhergehenden Abschnitt sind wir jetzt in der Lage, die bereits im Abschnitt 2.4.4 gefundene Lösung für die Superposition zweier entgegengesetzt laufenden Wellen weiter zu behandeln. Der Einfachheit halber beziehen sich anschauliche Betrachtungen wieder auf das Beispiel von Seilwellen.

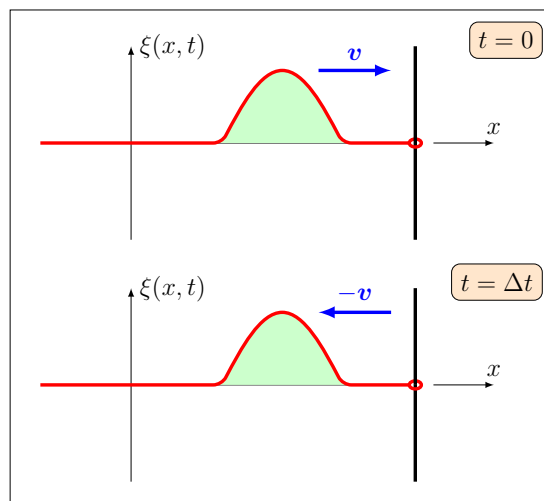


Abbildung 2.29: Reflexion eines Wellenberges am losen Ende.

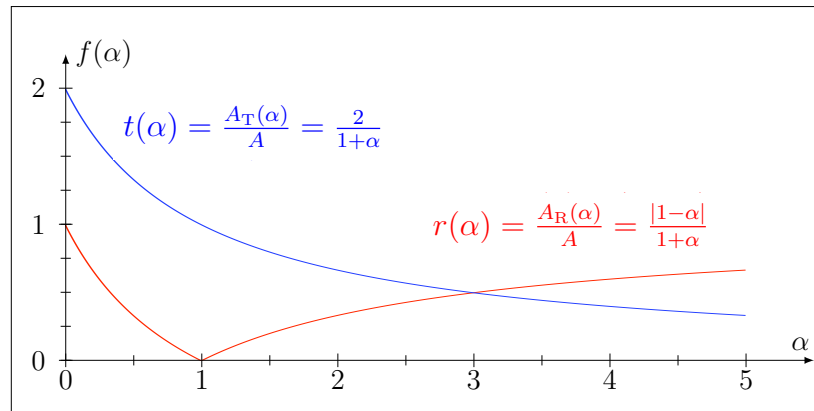


Abbildung 2.30: Transmissions- und Reflexionskoeffizienten als Funktion des Parameters α .

Wir hatten in (2.4.16) bereits das Ergebnis

$$\xi = 2A \cos\left(kx - \frac{\delta_R}{2}\right) \cos\left(\omega t - \frac{\delta_R}{2}\right) \quad (2.6.1)$$

erhalten, mit der bei der Reflexion entstehenden Phase δ_R . Diese Welle ist, wie bereits erwähnt, keine laufende Welle mehr. Man bezeichnet sie vielmehr als **stehende Welle**. Sie ist dadurch gekennzeichnet, dass **Knoten** und **Bäuche** auftreten. Knoten entsprechen den Nullstellen des ortsabhängigen Terms, an denen die Auslenkung der Welle stets null ist. Bäuche entsprechen dagegen den Extrema, also sowohl den Maxima als auch den Minima des ortsabhängigen Terms. Die stehende Welle schwingt dort ortsfest mit der maximal möglichen Auslenkung.

Wir unterscheiden nun nach der Art der Reflexion:

1. Reflexion am harten Medium (Grenzfall fixiertes Ende, $\alpha \gg 1$ und $\delta_R = \pi$)

Die Amplitude ist in diesem Fall

$$\xi = 2A \sin(kx) \sin(\omega t) \quad (2.6.2)$$

und garantiert einen Knoten an der Grenzfläche ($x = 0$) (siehe Abbildung 2.31).

2. Reflexion am weichen Medium (Grenzfall loses Ende, $\alpha = 0$ und $\delta_R = 0$)

Hier ist die Amplitude gleich

$$\xi = 2A \cos(kx) \cos(\omega t) \quad (2.6.3)$$

und ergibt einen Bauch für $x = 0$ (siehe Abbildung 2.32).

2.6.2 Energieverteilung bei stehenden Wellen

Da die Auslenkung in einem Knoten stets verschwindet, wird keine Energie hindurch transportiert. Die Energie wird also nur während des Aufbaus der stehenden Welle transportiert, anschliessend verschwindet der Energiestrom und die Energie oszilliert nur noch lokal zwischen kinetischer Energiedichte und potentieller (in diesem Fall elastischer) Energiedichte

$$\frac{dE_{\text{kin}}}{dV} = \frac{1}{2}\rho \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 = 2\rho A^2 \omega^2 \sin^2(kx) \cos^2(\omega t), \quad (2.6.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{dE_{\text{pot}}}{dV} &= \frac{1}{2}S \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 = 2SA^2 k^2 \cos^2(kx) \sin^2(\omega t) \\ &= 2\rho A^2 \omega^2 \cos^2(kx) \sin^2(\omega t), \end{aligned} \quad (2.6.5) \quad (2.6.6)$$

da $k^2 = \omega^2/v^2$ und $v^2 = S/\rho$. Wir haben hier als Beispiel die Reflexion am harten Medium (am fixierten Ende) gewählt.

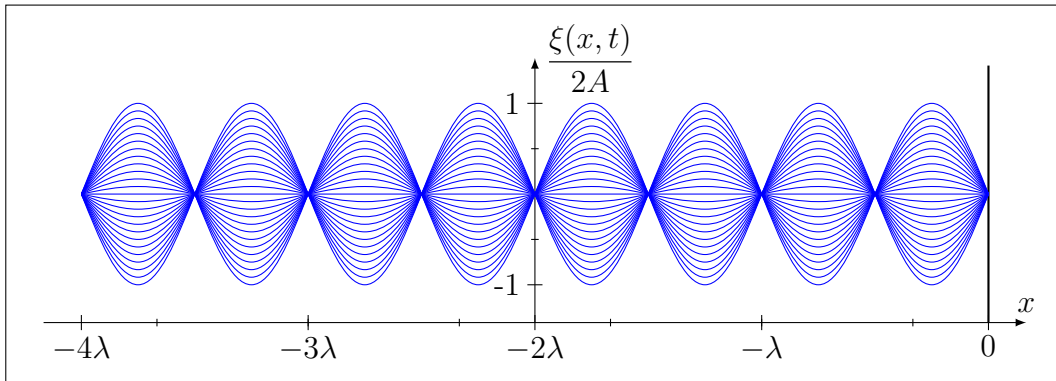


Abbildung 2.31: Stehende Welle bei Reflexion am harten Medium ($\alpha \gg 1$).

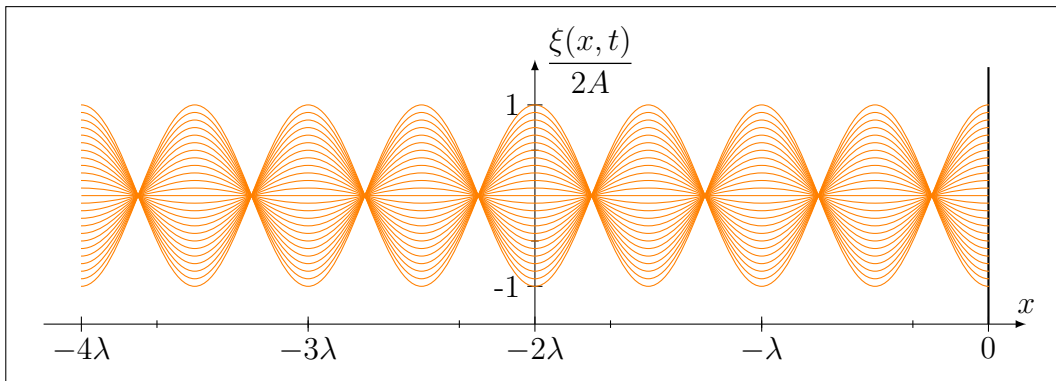


Abbildung 2.32: Stehende Welle bei Reflexion am weichen Medium ($\alpha = 0$).

Für

$$\omega t = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.6.7)$$

ist die potentielle Energie null und die gesamte Energie ist kinetisch. Umgekehrt ist für

$$\omega t = (2n + 1)\frac{\pi}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.6.8)$$

die kinetische Energie null und die gesamte Energie ist potentieller Natur. Dies erinnert an das Verhalten des Pendels, bei dem ebenfalls die Energie vollständig zwischen kinetischer und potentieller Form oszilliert. Die kinetische Energie ist um die Wellenbäuche konzentriert, da dort die Schwingungsamplitude am grössten ist, und die potentielle Energie um die Knoten, da dort die Zugspannung maximal ist (siehe Abbildung 2.33).

2.6.3 Eigenschwingungen einer Saite

Bisher haben wir stehende Wellen für den Fall untersucht, bei dem ein Seil (oder ein Draht) an einem Ende fixiert ist. Die Saite eines Musikinstruments ist an beiden Enden eingespannt und wir wollen nun unser Wissen über stehende Wellen anwenden, um die möglichen Schwingungen einer Saite zu berechnen.

Die allgemeine transversale Auslenkung einer Saite muss die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad \text{mit} \quad v^2 = \frac{S}{\rho} \quad (2.6.9)$$

erfüllen. Auch eine Normalschwingung muss diese Bedingung erfüllen. Bei einer **Normalschwingung** (Eigenmode¹⁶) schwingen alle Teilstücke der Saite mit derselben Frequenz ω . Deshalb verwenden wir den Ansatz

$$\xi(x, t) = \tilde{A}(x) \cdot \cos(\omega t + \delta). \quad (2.6.10)$$

Durch Einsetzen in die Wellengleichung erhält man die Differentialgleichung für die Ortsverteilung

$$\frac{d^2 \tilde{A}}{dx^2} + \frac{\omega^2}{v^2} \tilde{A} = 0. \quad (2.6.11)$$

Mit $k^2 = \omega^2/v^2$ ergibt sich hieraus schliesslich

$$\boxed{\frac{d^2 \tilde{A}}{dx^2} + k^2 \tilde{A} = 0.} \quad (2.6.12)$$

¹⁶Man kann die eingespannte Saite mit einer unendlichen Anzahl von gekoppelten Pendeln vergleichen.

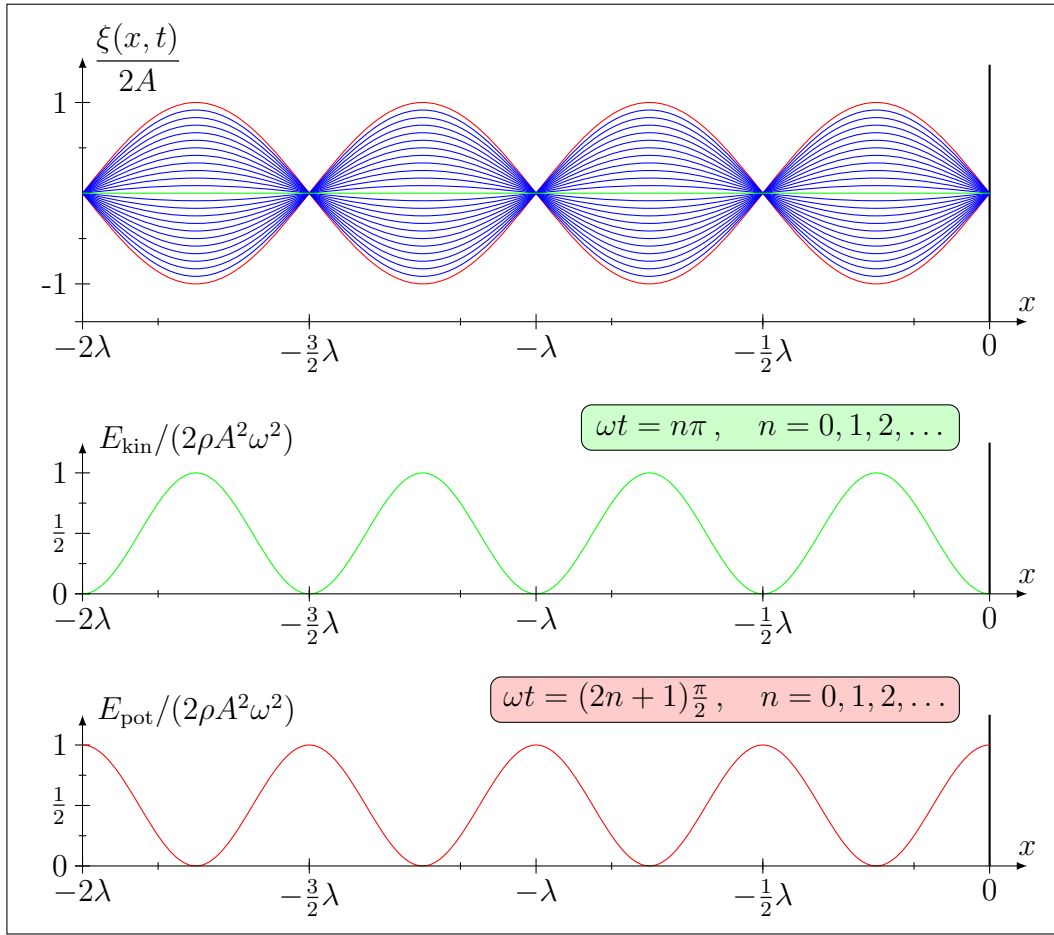


Abbildung 2.33: Verteilung der kinetische Energie E_{kin} und der potentiellen Energie E_{pot} bei einer stehende Welle für die Reflexion am harten Medium ($\alpha \gg 1$).

Diese Differentialgleichung kennen wir bereits für die Zeitabhängigkeit von Schwingungen, hier beschreibt sie aber die Ortsabhängigkeit der Schwingungen einer Saite. Damit kennen wir bereits die allgemeine Lösung

$$\tilde{A}(x) = A_0 \cos(kx + \varphi) \quad \text{oder} \quad \tilde{A}(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx). \quad (2.6.13)$$

Die Konstanten (A_0, φ) bzw. (A, B) werden durch die **Randbedingungen** festgelegt, also ob die Saite beidseitig oder nur einseitig fest eingespannt ist (siehe dazu Abbildungen 2.34 und 2.36).

2.6.3.1 Fest eingespannte Saite

Die Randbedingungen

$$\tilde{A}(x=0) = 0 \quad \text{und} \quad \tilde{A}(x=\ell) = 0. \quad (2.6.14)$$

gelten für eine beidseitig eingespannte Saite der Länge ℓ . Daraus folgt

$$A = 0 \quad \text{und} \quad k\ell = n\pi \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.6.15)$$

Es sind also nur **diskrete** Werte

$$k_n = \frac{n\pi}{\ell} \quad (2.6.16)$$

möglich, aber davon unendlich viele. Diese Werte nennt man **Eigenwerte**. Die zugehörigen Wellenlängen

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2\ell}{n} \quad (2.6.17)$$

folgen aus dem Kehrwert von k_n . Die **Eigenfunktionen** der Normalschwingungen sind

$$\tilde{A}_n(x) = B_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \quad (2.6.18)$$

und die **Eigenfrequenzen** sind

$$\omega_n = k_n v = \frac{n\pi}{\ell} \sqrt{\frac{S}{\rho}}. \quad (2.6.19)$$

Die Kreisfrequenz und die Frequenz der **fundamentalen Schwingung** ($n = 1$) sind gegeben durch

$$\omega_1 = \frac{\pi}{\ell} \sqrt{\frac{S}{\rho}} \quad (2.6.20)$$

und

$$\nu_1 = \frac{1}{2\ell} \sqrt{\frac{S}{\rho}}. \quad (2.6.21)$$

Die Grundfrequenz hängt also von den drei Saiteneigenschaften der Zugspannung S , der Länge ℓ und der Dichte ρ ab.

Die Kreisfrequenzen der **harmonischen Oberwellen** sind ganzzahlige Vielfache

$$\omega_n = n\omega_1 \quad (2.6.22)$$

der Grundfrequenz. Die n -te Normalschwingung lautet somit

$$\xi_n(x, t) = B_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \cos(n\omega_1 t + \delta_n) \quad (2.6.23)$$

oder

$$\xi_n(x, t) = a_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \sin(n\omega_1 t). \quad (2.6.24)$$

Die Konstanten (B_n, δ_n) bzw. (a_n, b_n) ergeben sich aus den Anfangsbedingungen, z. B. festgelegt durch Zupfen oder Streichen der Saite.

Abbildung 2.34 zeigt die Grundschiwingung und die 2. bis 6. Harmonische für die beidseitig eingespannte Saite. Stehende Wellen können auch für Schall oder für elektrische Grössen in analoger Art und Weise betrachtet werden. Ein analoges Bild ergibt sich insbesondere für die Schallauslenkung im Fall einer schwingenden Luftsäule in einem beidseitig geschlossenen Rohr. In diesem Kontext ist jedoch zu beachten, dass sich eine Schallwelle als Auslenkungswelle oder als Druckwelle beschreiben lässt, und wir deshalb zwischen Auslenkungs-knoten (Druckbäuchen) und Druckknoten (Auslenkungsbäuchen) unterscheiden müssen, siehe Abbildung 2.35.

2.6.3.2 Einseitig eingespannte Saite

Die Randbedingungen im Fall einer einseitig eingespannten Saite (oder für die Schallauslenkung in einem einseitig geschlossenen Rohr) lauten

$$\tilde{A}(x=0) = 0 \quad \text{und} \quad \tilde{A}(x=\ell) = B = A_0, \quad (2.6.25)$$

woraus folgt, dass

$$\Rightarrow \quad A = 0 \quad \text{und} \quad k\ell = \frac{2n+1}{2}\pi \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.6.26)$$

Es sind wiederum nur **diskrete** Werte möglich, in diesem Fall

$$k_n = \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{\ell}. \quad (2.6.27)$$

Die **Eigenfunktionen** der Normalschwingungen sind

$$\tilde{A}_n(x) = B_n \sin\left(\frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{\ell} x\right) \quad (2.6.28)$$

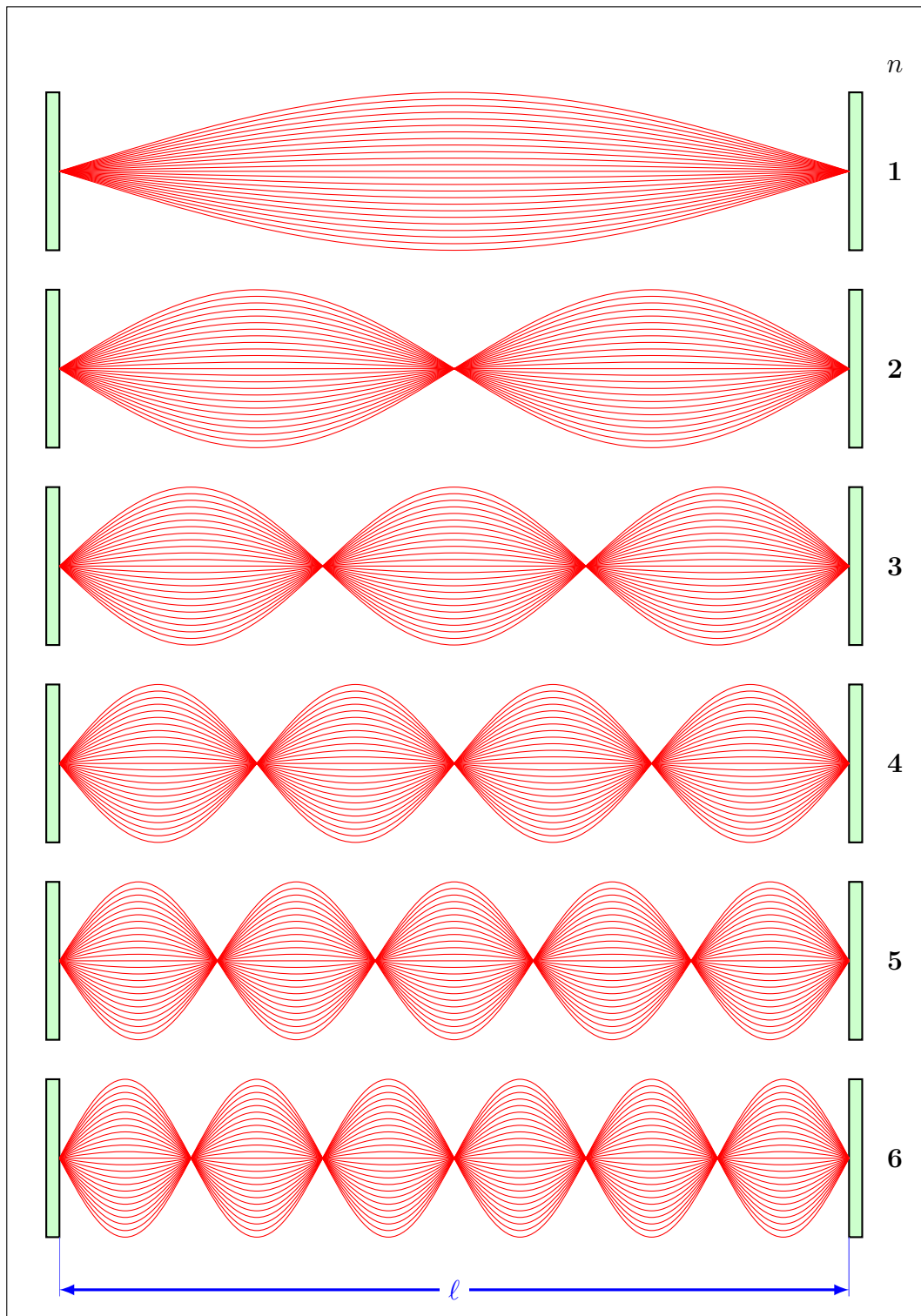


Abbildung 2.34: Stehende Welle bei beidseitig fest eingespannter Saite. Grundschwingung und 2. bis 6. Harmonische.

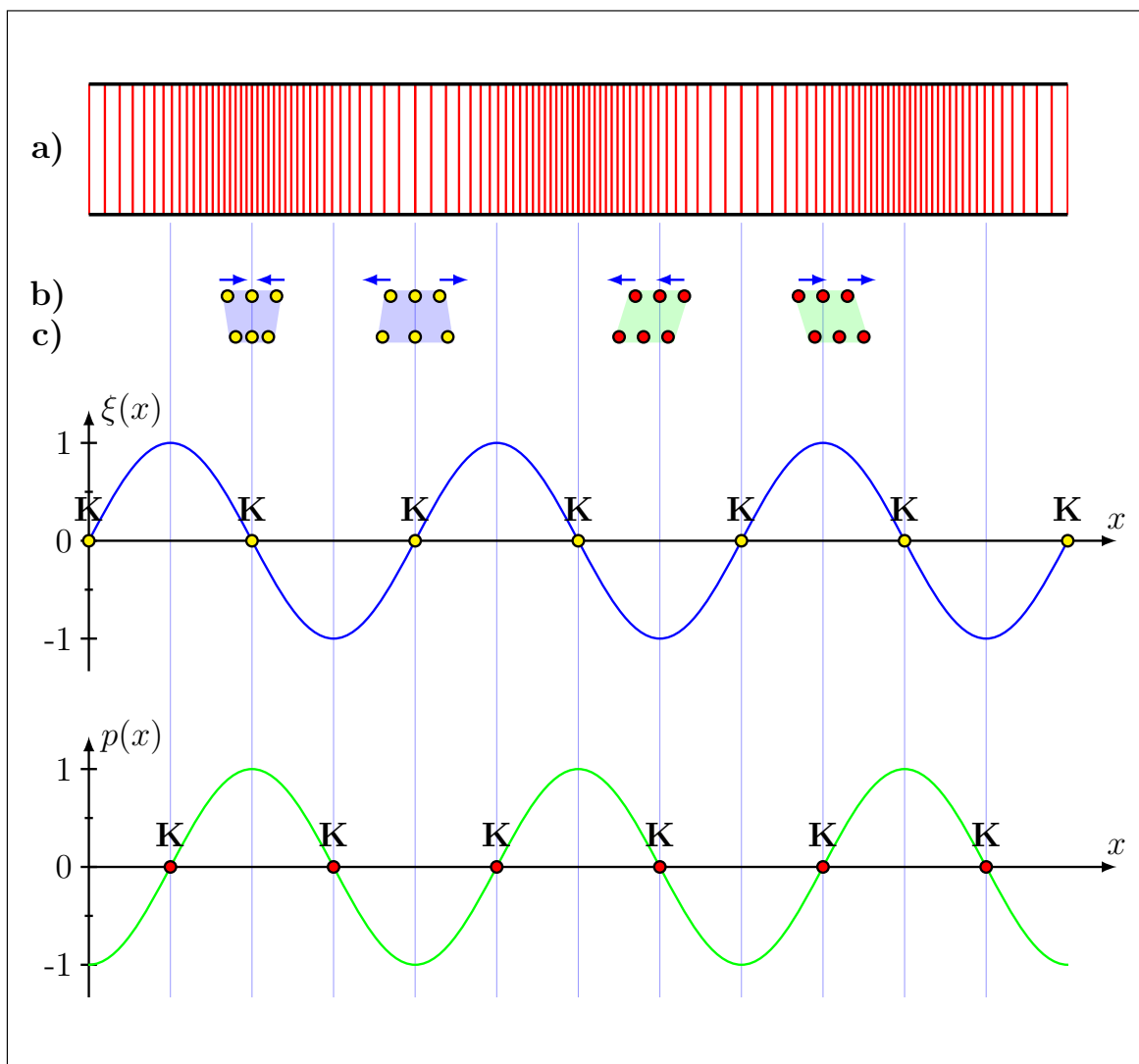


Abbildung 2.35: Druck- und Amplitudenverteilung einer stehenden Schallwelle in einem Gas zu einem festgelegten Zeitpunkt: a) Dichteverteilung des Gases, b) Ruhelagen einiger ausgewählter Moleküle (dargestellt durch die Kugeln in der oberen Reihe) mit Richtung ihrer Auslenkung gemäss $\xi(x)$ (dargestellt durch die Pfeile und die neuen Positionen der Kugeln in der unteren Reihe). Jedes der vier Beispiele entspricht einem Ort gemäss der x -Achsen in c). Insbesondere treten die blau hinterlegten Szenarien an den Orten auf, bei denen $\xi(x)$ einen Nulldurchgang hat (Extrema des Drucks), während die grün hinterlegten an den Orten der Nulldurchgänge von $p(x)$ (Extrema der Dichte) auftreten. c) Verlauf der Auslenkung $\xi(x)$ und des Drucks $p(x)$ über dem Ort.

und die **Eigenkreisfrequenzen** sind

$$\omega_n = k_n v = \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{\ell} \sqrt{\frac{S}{\rho}}. \quad (2.6.29)$$

Die **Grund(kreis)frequenz** ist

$$\omega_0 = \frac{\pi}{2\ell} \sqrt{\frac{S}{\rho}}, \quad (2.6.30)$$

$$\nu_0 = \frac{1}{4\ell} \sqrt{\frac{S}{\rho}}. \quad (2.6.31)$$

Abbildung 2.36 zeigt die Grundschiwingung und die 3., 5., 7., 9. und 11. Harmonische für die einseitig eingespannte Saite, gehörend zu den Indizes $n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$

2.6.4 Allgemeine Schwingungen einer Saite

Im Allgemeinen wird eine Saite gestrichen, gezupft oder angeschlagen, sodass die Anfangsauslenkung an der Stelle x *keine* harmonische Funktion ist. Wie in Abschnitt 1.4.1 bereits erwähnt und im Zusatzkapitel B.1 behandelt wurde, lässt sich jede periodische Funktion als Fourierreihe darstellen. Um dies anzuwenden, müssen wir sogenannte **periodische Randbedingungen**¹⁷ einführen.

Wenn man für die Lösung der Wellengleichung

$$\omega_n = k_n v = \frac{n\pi}{\ell} \sqrt{\frac{S}{\rho}} \quad (2.6.32)$$

verwendet, dann beschreibt dies eine Sinuskurve, die von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ verläuft. Die für uns wichtige Lösung ist also mathematisch nur ein Ausschnitt aus einer sich periodisch wiederholenden Anordnung (siehe Abbildung 2.37).

Die allgemeine Lösung ist eine Überlagerung aller Eigenschwingungen

$$\xi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) \cdot [a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t)]. \quad (2.6.33)$$

Beispiel: Gezupfte Saite mit Anfangsauslenkung A . Zur Zeit $t = 0$ ist

$$\xi(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) \cdot a_n \quad (2.6.34)$$

¹⁷siehe Känzig, Mechanik, S. 242

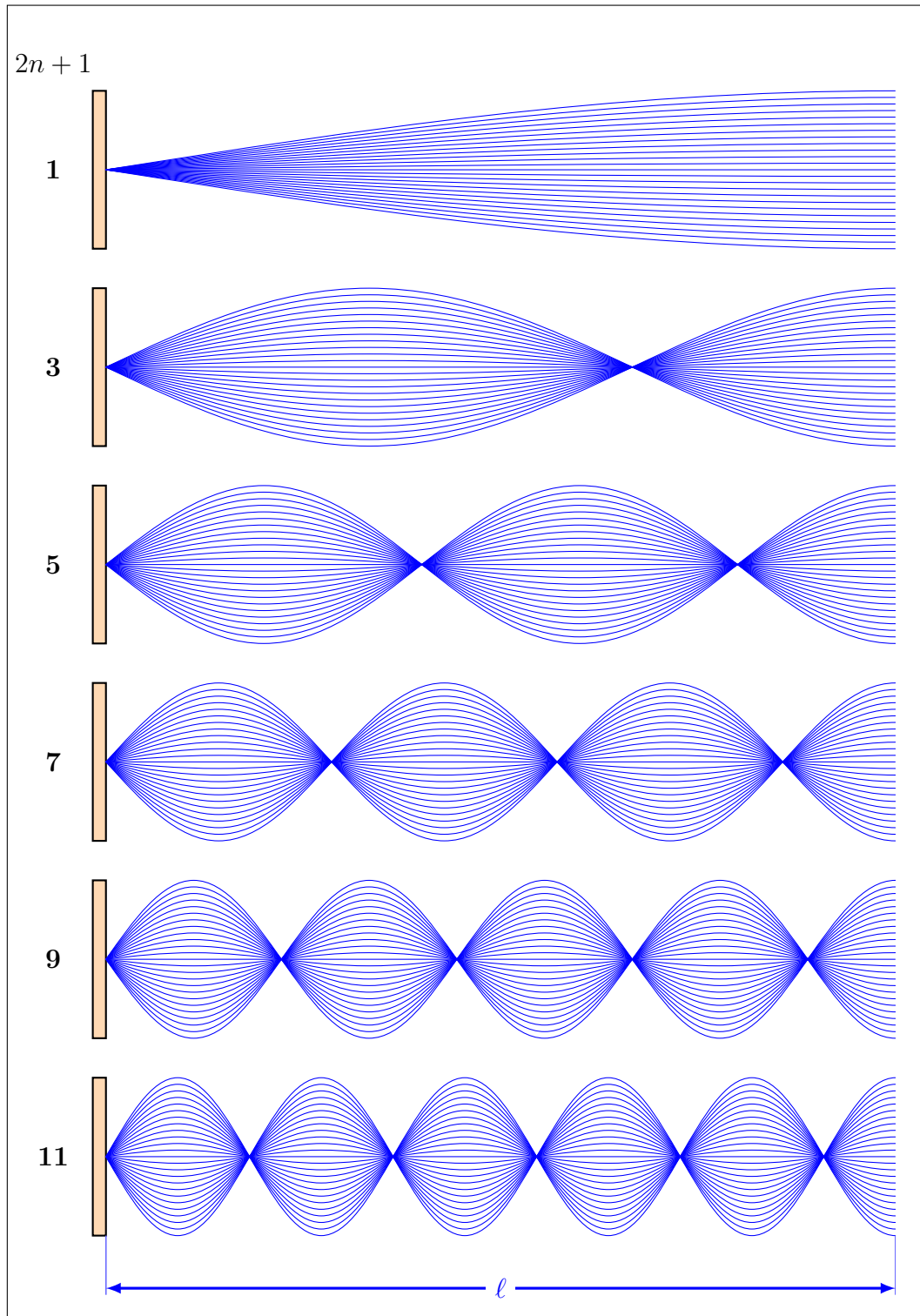


Abbildung 2.36: Stehende Welle bei einseitig fest eingespannter Saite. Grundschwingung, 3., 5., 7., 9. und 11. Harmonische.

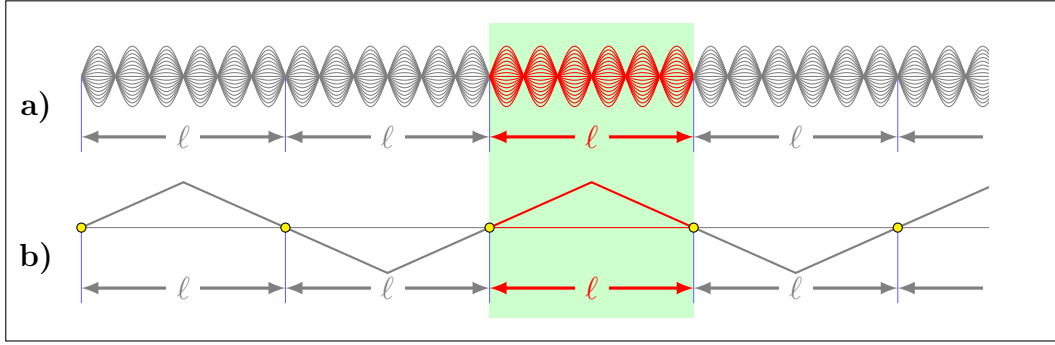


Abbildung 2.37: Durch das beidseitige Einspannen einer Saite bedingte periodische Randbedingungen: a) 6. Harmonische, b) gezupfte Saite

Dies ist eine *räumliche* Fourierreihe mit Periode 2ℓ . Die Koeffizienten a_n und b_n werden folgendermassen ermittelt. Mittels einer Fourieranalyse erkennt man, dass sich die Dreiecksfunktion als

$$\xi(x, 0) = \frac{8A}{\pi^2} \left[\sin\left(\frac{\pi}{\ell}x\right) - \frac{1}{3^2} \sin\left(\frac{3\pi}{\ell}x\right) + \frac{1}{5^2} \sin\left(\frac{5\pi}{\ell}x\right) - \dots \right] \quad (2.6.35)$$

mit

$$|a_n| = \frac{8A}{\pi^2} \frac{1}{n^2}, \quad n \text{ ungerade} \quad (2.6.36)$$

schreiben lässt. Für die Berechnung der Koeffizienten b_n benötigen wir in diesem Fall noch eine 2. Anfangsbedingung, nämlich dass die Saite zur Zeit $t = 0$ in Ruhe ist

$$\frac{\partial \xi}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad (2.6.37)$$

$$\left. \frac{\partial \xi}{\partial t}(x, t) \right|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \cdot n\omega_1 \stackrel{!}{=} 0 \quad \forall x. \quad (2.6.38)$$

Daraus folgt

$$b_n = 0. \quad (2.6.39)$$

Die Wellenfunktion der mittig gezupften Saite ist damit

$$\xi(x, t) = \frac{8A}{\pi^2} \left[\sin\left(\frac{\pi}{\ell}x\right) \cos(\omega_1 t) - \frac{1}{3^2} \sin\left(\frac{3\pi}{\ell}x\right) \cos(3\omega_1 t) + \dots \right] \quad (2.6.40)$$

mit ω_1 als 1. Harmonische und $3\omega_1, 5\omega_1, \dots$ als Oberwellen (höhere Harmonische). Wird die Saite dagegen angeschlagen, wie z. B. beim Klavier, dann gilt

$$\xi(x, t = 0) = 0 \quad \text{und} \quad \left. \frac{\partial \xi}{\partial t} \right|_{t=0} \neq 0, \quad (2.6.41)$$

was zu einer anderen Verteilung der Harmonischen führt. Das Streichen der Saite liefert kompliziertere Anfangsbedingungen.

2.7 Brechung und Beugung

2.7.1 Das Prinzip von Huygens

Das Prinzip von Huygens ist ein nützliches Hilfsmittel zum anschaulichen Verständnis verschiedener Phänomene der Wellenausbreitung, insbesondere der Beugung und Brechung, die wir im Anschluss betrachten werden.

Jeder Punkt einer bestehenden **Wellenfläche** (bzw. Wellenfront) wird als Zentrum einer neuen kugelförmigen **Elementarwelle** aufgefasst. Die Umhüllende dieser Elementarwellen ergibt dann die Wellenfront zu einem späteren Zeitpunkt.

Eine Wellenfläche wird folgendermassen definiert. Alle Punkte der Wellenfläche genügen der Beziehung

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t = \phi, \quad (2.7.1)$$

wobei ϕ eine beliebige, aber fest vorgegebene Phase ist. Abbildungen 2.38 und 2.39 zeigen diese Elementarwellen für eine ebene Welle bzw. für eine Kreiswelle.

Falls sich beim Übertritt einer Welle in ein anderes Medium die Phasengeschwindigkeit $v = \omega/k$ ändert, ändert sich entsprechend auch der Radius $\Delta r = v\Delta t$ der sich in der Zeit Δt neu ausbreitenden Kreiswellen (bzw. Kugelwellen im dreidimensionalen Fall).

Das Huygens'sche Prinzip ist über 300 Jahre alt. Heute wissen wir, dass die Atome der Materie die Quellen darstellen, welche Licht absorbieren und in Form einer Kugelwelle

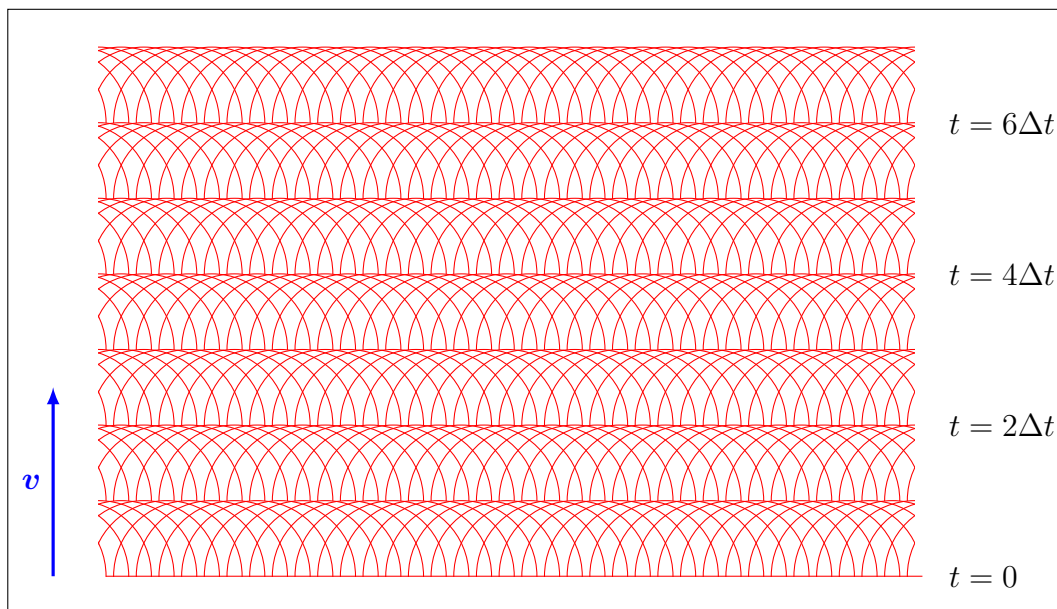


Abbildung 2.38: Huygens'sches Prinzip bei einer ebenen Wellenfront.

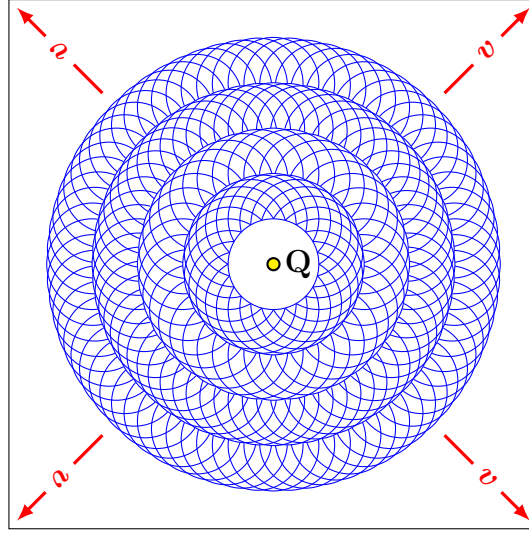


Abbildung 2.39: Huygens'sches Prinzip bei einer Kreiswelle (Quelle $\mathbf{Q}$).

wieder abstrahlen. Die Phasenbeziehung der einzelnen Punktquellen bewirkt, dass sich die Welle weiterhin in der ursprünglichen Richtung bewegt.

Ähnliche Argumente können auch zum Verständnis der Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen verwendet werden. Seien $\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_N$ in einer Reihe angeordnete Quellen kohärenter Kugelwellen gleicher Amplitude a im Abstand δ voneinander (siehe Abbildung 2.40). Dann ist die Phasendifferenz $\Delta\varphi$ zweier benachbarter Quellen in Richtung α gleich

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta s = k\delta \sin \alpha \quad \text{für } \delta \ll r. \quad (2.7.2)$$

Wir betrachten nun einen Punkt $\mathbf{P}$, an dem die Interferenz aller von den N Quellen ausgehenden Kugelwellen berechnet werden soll (siehe Abbildung 2.41). Wir nehmen an, dass

$$d \equiv (N-1)\delta \ll r, \quad (2.7.3)$$

wobei r der Abstand des Punktes $\mathbf{P}$ vom Mittelpunkt der Anordnung ist.

Die Überlagerung der Wellen im Punkt $\mathbf{P}$ ergibt die Amplitude

$$\xi(\alpha) = \sum_{n=1}^N \frac{a}{r} e^{i(kr_n - \omega t)}. \quad (2.7.4)$$

Der Einfachheit halber wählen wir hier N ungerade, $N = 2M + 1$, $M \geq 0$. Damit gilt

$$r_n = r + (M + 1 - n) \cdot \Delta s \quad (2.7.5)$$

$$\Rightarrow kr_n = kr + (M + 1)\Delta\varphi - n\Delta\varphi \quad (2.7.6)$$

$$\Rightarrow \xi(\alpha) = \frac{a}{r} e^{i(M+1)\Delta\varphi} \left[\sum_{n=1}^{2M+1} e^{-in\Delta\varphi} \right] e^{i(kr - \omega t)}. \quad (2.7.7)$$

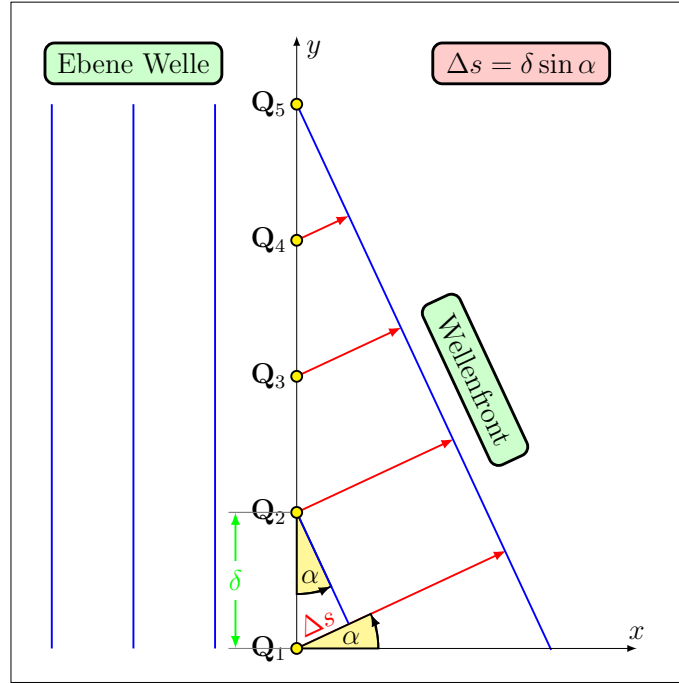


Abbildung 2.40: Überlagerung der von N Quellen auslaufenden Kugelwellen in Richtung des Winkels α .

Die Summe der Exponentialfunktionen können wir umformen, da sie eine endliche geometrische Reihe in $x = e^{-i\Delta\varphi}$ darstellt. Aus der Identität

$$x + x^2 + \dots + x^k = \frac{x^{k+1} - x}{x - 1} \quad (2.7.8)$$

folgt

$$\sum_{n=1}^{2M+1} e^{-in\Delta\varphi} = \frac{e^{-i\Delta\varphi(2M+2)} - e^{-i\Delta\varphi}}{e^{-i\Delta\varphi} - 1} \quad (2.7.9)$$

$$= e^{i\Delta\varphi/2} \cdot e^{-i\Delta\varphi(M+1)} \cdot \frac{e^{-i\Delta\varphi(M+1)} - e^{i\Delta\varphi M}}{e^{-i\Delta\varphi/2} - e^{i\Delta\varphi/2}} \quad (2.7.10)$$

$$= e^{-i\Delta\varphi(M+1)} \cdot \frac{e^{-iN\Delta\varphi/2} - e^{iN\Delta\varphi/2}}{e^{-i\Delta\varphi/2} - e^{i\Delta\varphi/2}} \quad (2.7.11)$$

$$= e^{-i\Delta\varphi(M+1)} \cdot \frac{\sin(N\Delta\varphi/2)}{\sin(\Delta\varphi/2)}. \quad (2.7.12)$$

Damit ergibt sich für die Amplitude

$$\xi(\alpha) = \frac{a}{r} \cdot \frac{\sin(N\Delta\varphi/2)}{\sin(\Delta\varphi/2)} e^{i(kr - \omega t)} \quad (2.7.13)$$

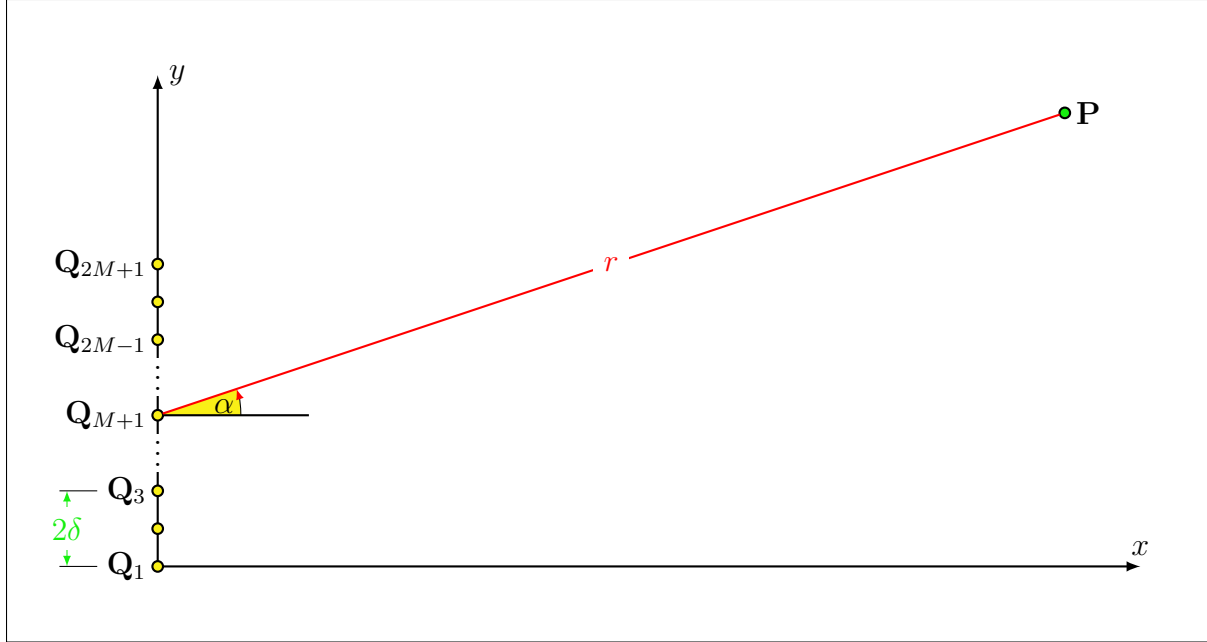


Abbildung 2.41: Zur Berechnung der Interferenz im Punkt **P** (Darstellung nicht massstabsgetreu, da wir $r \gg 2M\delta$ annehmen).

und für die Intensität

$$\langle I \rangle \sim \frac{a^2}{r^2} \cdot \frac{\sin^2(N\Delta\varphi/2)}{\sin^2(\Delta\varphi/2)} \quad (2.7.14)$$

mit $\Delta\varphi = k\delta \sin \alpha$ aus (2.7.2).

Abbildung 2.42 zeigt verschiedene Intensitätsverteilungen. Bei Abbildung 2.42 a) und b) ist die gesamte Breite d gleich gross, aber die Zahl der Quellen unterscheidet sich um einen Faktor 10. Man beachte den unterschiedlichen Winkelmassstab. Bei Abbildung 2.42 b) und c) ist dagegen die Zahl N der Quellen gleich gross, dafür ist der Abstand δ und damit die gesamte Breite d bei c) verdoppelt.

Wir halten fest:

1. Bei $\alpha = 0$ liegt ein ausgeprägtes Maximum der Intensität, die für zunehmende Winkel $|\alpha|$ stark abfällt. Für festen Abstand δ der Quellen ist die Breite des Maximums proportional zu $1/N$, wie sich in (2.7.13) mit der Kleinwinkelnäherung $\Delta\varphi \approx k\delta\alpha$ erkennen lässt.
2. Für $\delta > \lambda$ gibt es mehrere ausgeprägte Maxima, und zwar für die Winkel

$$\sin \alpha_n = n \frac{\lambda}{\delta}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad n < \frac{\delta}{\lambda}. \quad (2.7.15)$$

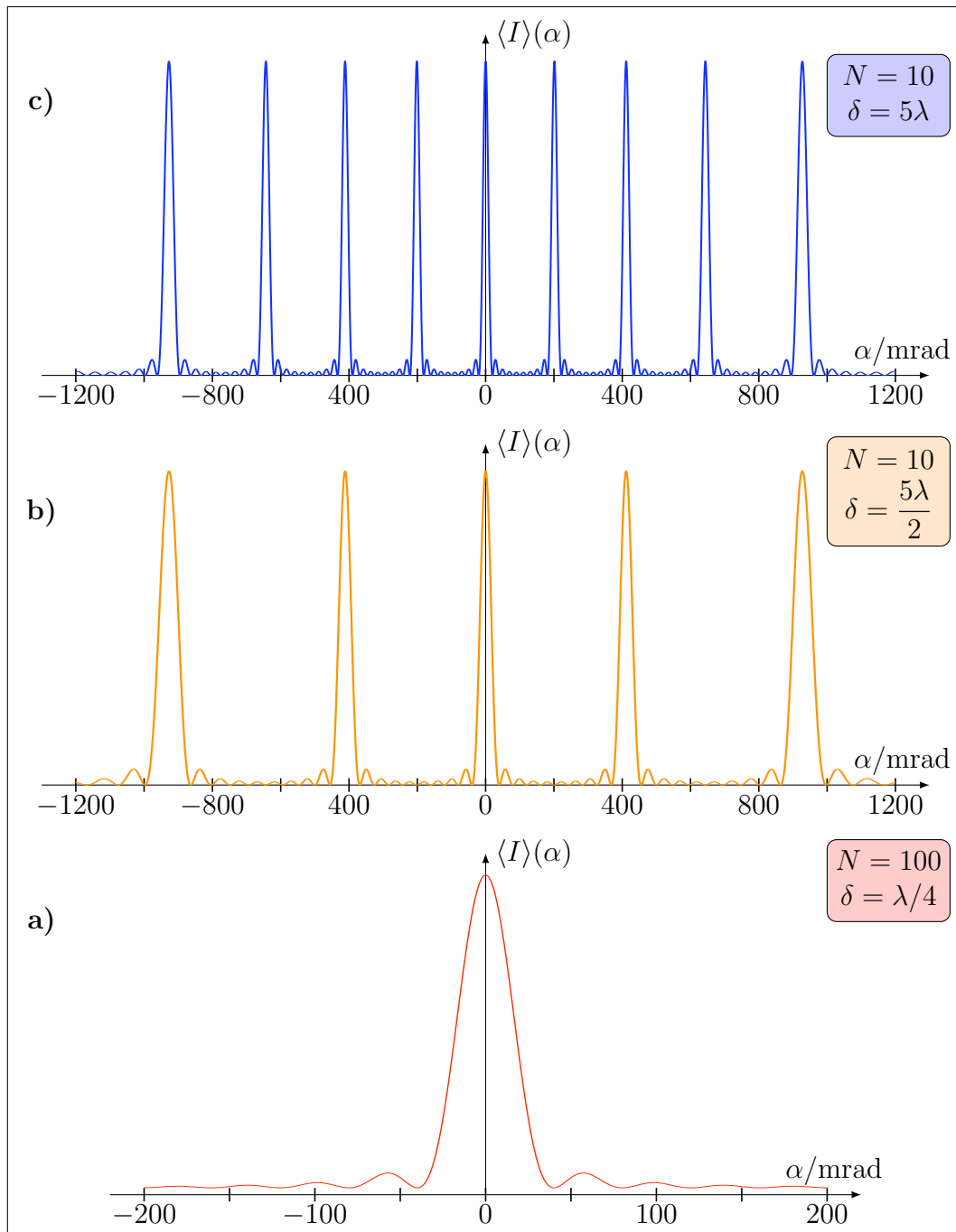


Abbildung 2.42: Intensität im Punkte $\mathbf{P}$ als Funktion des Winkels α . Eine ebene Welle fällt ein und N kohärente Quellen im gleichmässigen Abstand δ voneinander emittieren Kugelwellen, welche in grossem Abstand r interferieren.

Entscheidend ist also das Verhältnis δ/λ . Im Szenario aus Abbildung 2.42 a) hängen liegen ausserhalb des dargestellten Winkelbereichs keine weiteren ausgeprägten Maxima.

2.7.2 Beugung

Was geschieht nun, wenn man die Zahl der Quellen gegen unendlich gehen lässt, aber gleichzeitig den Abstand δ zwischen ihnen derart verkleinert, dass die Breite d konstant bleibt? Es sei also

$$N \rightarrow \infty \quad \text{und} \quad \delta \rightarrow 0 \quad \text{mit} \quad N \cdot \delta = d = \text{konst.} \quad (2.7.16)$$

$$\text{und} \quad (Na)^2 := A^2 = \text{konst.} \quad \Rightarrow \quad a^2 \rightarrow 0 \quad (2.7.17)$$

Das entspricht z. B. einer Öffnung mit Spaltbreite d in einer Wand, auf die eine ebene Welle auftrifft. Die Punkte der Wellenfront in der Spaltöffnung sind dann nach dem Huygens'schen Prinzip die unendlich vielen Quellen, von denen neue Wellen hinter der Öffnung auslaufen und interferieren. Wir untersuchen dazu Gleichung (2.7.14) und vernachlässigen dabei den Faktor $1/r^2$. Wir erhalten

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \delta \rightarrow 0}} \langle I \rangle \sim \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \delta \rightarrow 0}} a^2 \cdot \frac{\sin^2(\frac{1}{2}k \overbrace{N\delta}^{=d} \sin \alpha)}{\sin^2(\frac{1}{2}k \frac{d}{N} \sin \alpha)} \quad (2.7.18)$$

$$\approx \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \delta \rightarrow 0}} a^2 \cdot \frac{\sin^2(\frac{1}{2}kd \sin \alpha)}{\frac{1}{4N^2} k^2 d^2 \sin^2 \alpha} \quad (2.7.19)$$

$$= (Na)^2 \frac{\sin^2(\frac{1}{2}\Delta\tilde{\varphi})}{(\frac{1}{2}\Delta\tilde{\varphi})^2} = A^2 \frac{\sin^2(\frac{1}{2}\Delta\tilde{\varphi})}{(\frac{1}{2}\Delta\tilde{\varphi})^2} \quad (2.7.20)$$

wobei wir dieses Mal

$$\Delta\tilde{\varphi} := kd \sin \alpha = 2\pi \frac{d}{\lambda} \sin \alpha \quad (2.7.21)$$

nicht mehr auf den Abstand δ , der ja gegen null geht, sondern auf die Spaltbreite d beziehen.

Wir halten das wichtige Ergebnis für die **Beugung am Einzelspalt** gesondert fest als

$$\langle I \rangle \sim A^2 \frac{\sin^2 \frac{1}{2}\Delta\tilde{\varphi}}{(\frac{1}{2}\Delta\tilde{\varphi})^2} \quad (2.7.22)$$

mit $\Delta\tilde{\varphi} = kd \sin \alpha$ aus (2.7.21).

Wiederum sehen wir, dass die Beugungsfunktion vom Verhältnis d/λ abhängt. Das Zeichen $\sim$ in diesen Herleitungen stammt daher, dass die mittlere Intensität proportional

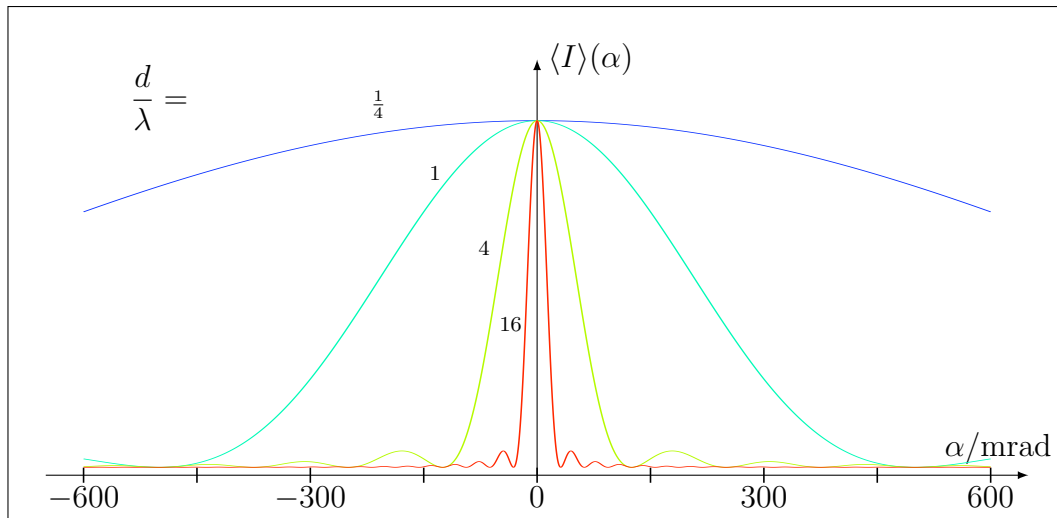


Abbildung 2.43: Beugung am Spalt.

zur zeitlich gemittelten Wellenfunktion im Quadrat ist, mit weiteren Vorfaktoren wie in Abschnitt 2.2.10 gezeigt.

Wir können die folgenden drei Fälle unterscheiden (siehe Abbildung 2.43).

1. $d < \lambda$:

Diese Bedingung ergibt ein breites Beugungsmaximum um den Winkel $\alpha = 0$ herum. Im Extremfall $d \ll \lambda$ entartet die Spaltöffnung zu einer Punktquelle für eine Kugelwelle, deren Wellenfront gleichmässig in alle Richtungen läuft.

2. $d \lesssim \lambda$:

Man erhält ein starkes Maximum bei $\alpha = 0$, aber auch weitere Maxima bei grösseren Winkeln. Die Welle wird an der Blende gebeugt. Das ist auch der Grund, weshalb man um die Ecke hören, aber nicht sehen kann. Schallwellen haben eine typische Wellenlänge in der Grössenordnung von $\lambda = 1$ m (denken Sie an die Grösse von Musikinstrumenten), welche der typischen Grösse von Öffnungen von Türen und Fenstern entspricht. Die Wellenlänge von Licht ist dagegen $\lambda \approx 500$ nm, was zum 3. Fall führt.

3. $d \gg \lambda$:

Diese Bedingung ergibt ein scharfes Maximum bei $\alpha = 0$, was einem geometrischen Schattenwurf entspricht. Die in andere Richtungen laufenden Wellen löschen sich gegenseitig vollständig aus, da es praktisch für jeden Winkel $\alpha \neq 0$ ein Wellenpaar gibt, welches gerade einen Phasenunterschied für destruktive Interferenz hat.

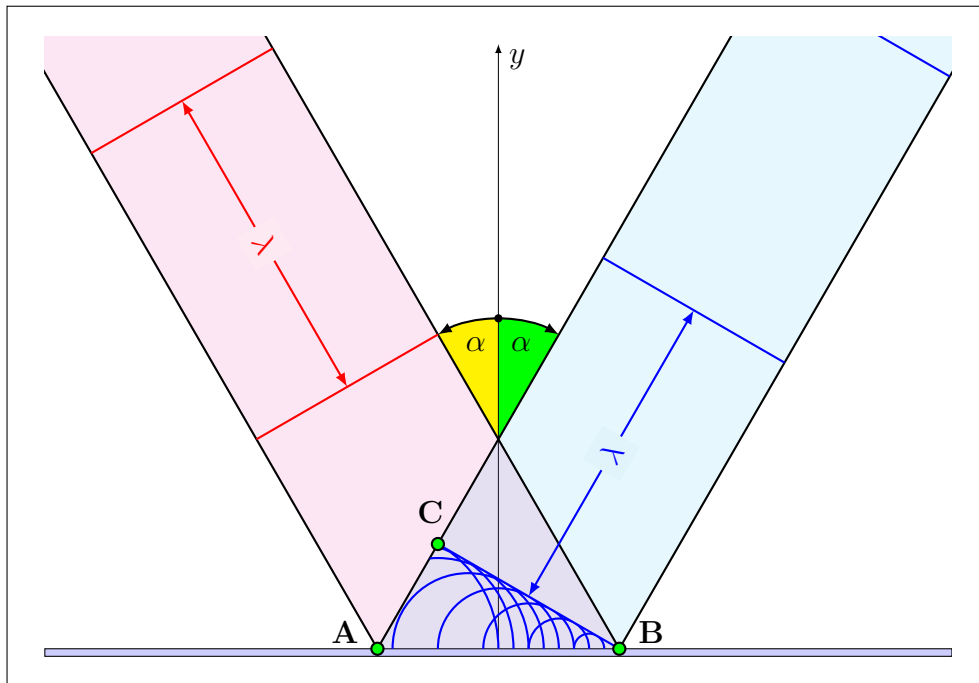


Abbildung 2.44: Huygens'sches Prinzip und Reflexionsgesetz.

2.7.3 Reflexion und Brechung

Sowohl Reflexion als auch Brechung von Wellen können mit dem Huygens'schen Prinzip erklärt werden.

2.7.3.1 Reflexion

Das Prinzip der Reflexion ist in Abbildung 2.44 dargestellt. Wenn eine Wellenfront (in der Abbildung von links kommend) den Punkt **A** erreicht, geht von dort eine Kugelwelle aus. Wenn dieselbe Wellenfront den Punkt **B** erreicht, hat sich die 1. Elementarwelle bereits bis zum Punkt **C** ausgebreitet. Da sich dabei weder die Wellenlänge noch ihre Geschwindigkeit ändert, folgt aus Symmetriegründen das **Reflexionsgesetz**:

Bei der Reflexion einer ebenen Welle an einer ebenen Grenzfläche ist der Einfallswinkel gleich dem Ausfallswinkel.

2.7.3.2 Brechung

In entsprechender Weise kann man die Brechung von Wellen erklären (siehe Abbildung 2.45). Im Unterschied zur Reflexion ändert sich im Allgemeinen die Wellengeschwindigkeit $v = \lambda\nu$ beim Eindringen der Welle in ein anderes Medium. Da die Frequenz sich

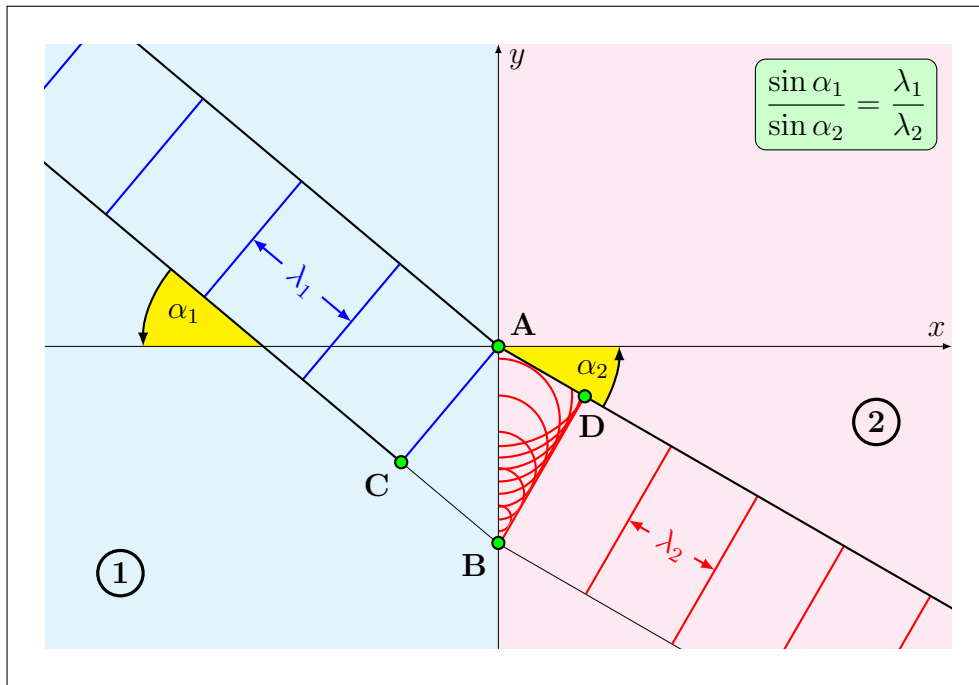


Abbildung 2.45: Huygenssches Prinzip und Brechungsgesetz.

nicht ändert, ändert sich die Wellenlänge entsprechend. Bei einer Verlangsamung der Welle im neuen Medium dreht sich der Wellenzahlvektor zur Flächennormalen hin. Das **Snellius'sche Brechungsgesetz** lautet damit

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_1}{v_2} \quad (2.7.23)$$

bzw.

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} . \quad (2.7.24)$$

2.7.3.3 Fermat'sches Prinzip

Sowohl Reflexion als auch Brechung kann man auf ein allgemeines Prinzip zurückführen, das sogenannte **Fermat'sche Prinzip**. Demnach läuft eine Welle bei Reflexion und Brechung stets jenen Weg, für den die Laufzeit einer Phasenfläche Φ zwischen zwei Punkten minimal wird (siehe Abbildung 2.46). Die Zeit, welche eine Phasenfläche Φ_1 mit Mittelpunkt $\mathbf{r}_1$ benötigt, um über den Punkt $\mathbf{r} = (0, y)$ auf der Trennfläche zum Mittelpunkt $\mathbf{r}_2$ einer Phasenfläche Φ_2 zu gelangen, muss minimal sein. Für unser Beispiel bedeutet dies, dass

$$\Delta t = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2} = \frac{1}{v_1} \sqrt{x_1^2 + (y - y_1)^2} + \frac{1}{v_2} \sqrt{x_2^2 + (y - y_2)^2} . \quad (2.7.25)$$

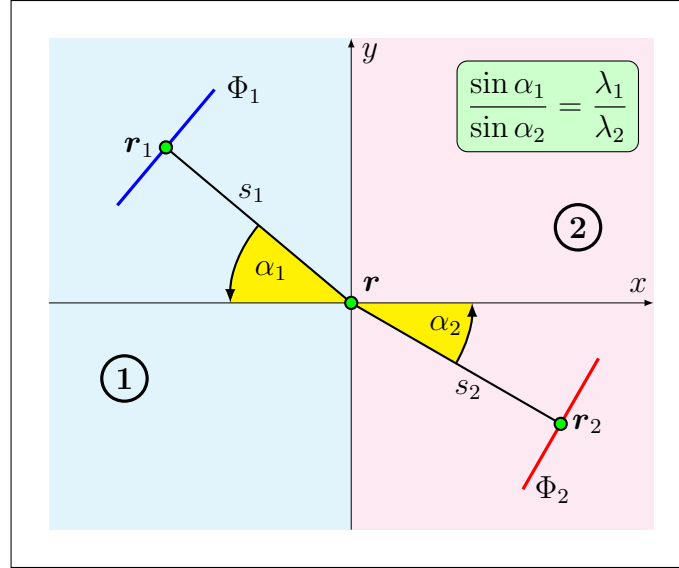


Abbildung 2.46: Fermat'sches Prinzip und Brechungsgesetz.

Die Minimalbedingung lautet

$$\frac{d\Delta t}{dy} = \frac{1}{v_1} \frac{y - y_1}{\sqrt{x_1^2 + (y - y_1)^2}} + \frac{1}{v_2} \frac{y - y_2}{\sqrt{x_2^2 + (y - y_2)^2}} \stackrel{!}{=} 0. \quad (2.7.26)$$

Mit

$$\sin \alpha_1 = \frac{y_1 - y}{s_1} \quad \text{und} \quad \sin \alpha_2 = \frac{y - y_2}{s_2} \quad (2.7.27)$$

folgt wieder das Brechungsgesetz

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_1}{v_2}. \quad (2.7.28)$$

2.7.3.4 Brechungsindex

Bei der Brechung von Licht wird der **Brechungsindex**

$$n_i := \frac{c}{c_i} > 1 \quad (2.7.29)$$

definiert. Dabei ist c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum und $c_i := v_i$ ist diejenige im Material i . Die Verwendung von c_i anstelle von v_i entspricht der Konvention in der Optik.

Beim Vergleich zweier verschiedener Materialien bezeichnet man jenes mit der höheren Lichtgeschwindigkeit, also dem kleineren Brechungsindex, als **optisch dünner** und umgekehrt jenes mit der niedrigeren Lichtgeschwindigkeit und dem höheren Brechungsindex

als **optisch dichter**, jeweils in Relation zum anderen Material. Aus Abbildung 2.47 wird klar, warum die Begriffe *dünn* und *dicht* hier eine Bedeutung haben. Während die eingezeichneten Lichtstrahlen im optisch dichten Medium ($i = 1$) eng beieinander liegen, sind diese im optisch dünnen Medium ($i = 2$) durch die Brechung an der Grenzfläche weiter voneinander entfernt.

Ausgedrückt mittels der Brechungsindizes lautet das Brechungsgesetz

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}, \quad (2.7.30)$$

oder umgeformt

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2. \quad (2.7.31)$$

2.7.3.5 Totalreflexion

Beim Übergang zwischen zwei Medien mit $v_2 > v_1$, siehe beispielsweise Abbildung 2.47, erhält man ab einem bestimmten Einfallswinkel α_1 keine reelle Lösung mehr für das Brechungsgesetz. Wenn $\sin \alpha_1 > v_1/v_2$ ist, so erfüllt kein Winkel α_2 die Gleichung

$$\sin \alpha_2 = \frac{v_2}{v_1} \sin \alpha_1 > 1. \quad (2.7.32)$$

In diesem Fall wird das Licht vollständig reflektiert. Dieses Phänomen wird **Totalreflexion** genannt.

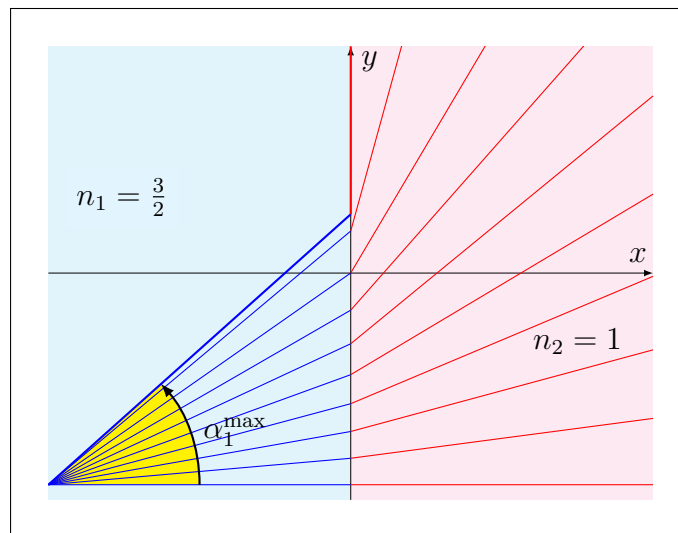


Abbildung 2.47: Brechung und Totalreflexion beim Übergang vom optisch dichteren zum optisch dünneren Medium.

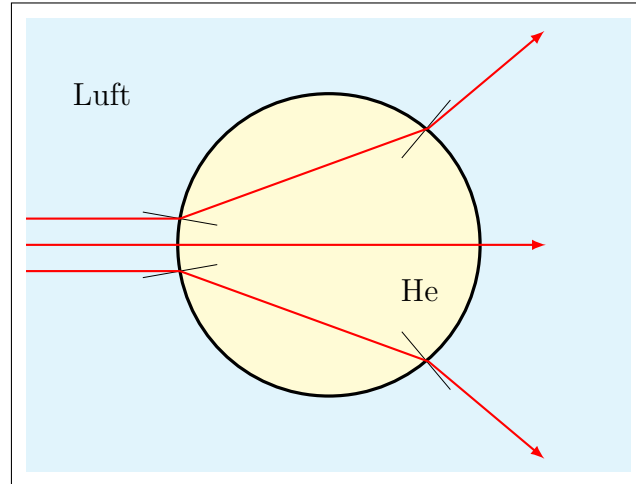


Abbildung 2.48: Defokussierende akustische Linse.

2.7.3.6 Akustische Linsen

Die Schallgeschwindigkeit in einem Gas ist gegeben durch

$$v = \sqrt{\kappa \frac{RT}{M}}, \quad (2.7.33)$$

wobei κ der Adiabatenkoeffizient ist, R die allgemeine Gaskonstante und M die molare Masse des Gases. Diese Größen werden später im Kapitel Wärmelehre eingeführt. Demnach gilt

$$v_{\text{CO}_2} < v_{\text{Luft}} < v_{\text{He}}. \quad (2.7.34)$$

Ein mit Helium gefüllter Gasballon wirkt somit defokussierend, ein mit CO_2 gefüllter dagegen fokussierend (siehe Abbildungen 2.48 und 2.49).

2.8 Dispersion und Gruppengeschwindigkeit

2.8.1 Einleitung

Bei der Behandlung von harmonischen Wellen sind wir bisher davon ausgegangen, dass die Welle durch *genau eine* Frequenz ω bzw. einen Wellenvektor $\mathbf{k}$ charakterisiert ist. Das ist aber eine Idealisierung. Tatsächlich gibt es derartige Wellen in der Natur nicht, da jede Welle sowohl im Raum als auch in der Zeit einen Anfang und ein Ende hat. Gemäss den Eigenschaften der Fourier-Transformation besteht eine solche Welle aus Komponenten unterschiedlicher Frequenz und es muss berücksichtigt werden, dass es Medien mit

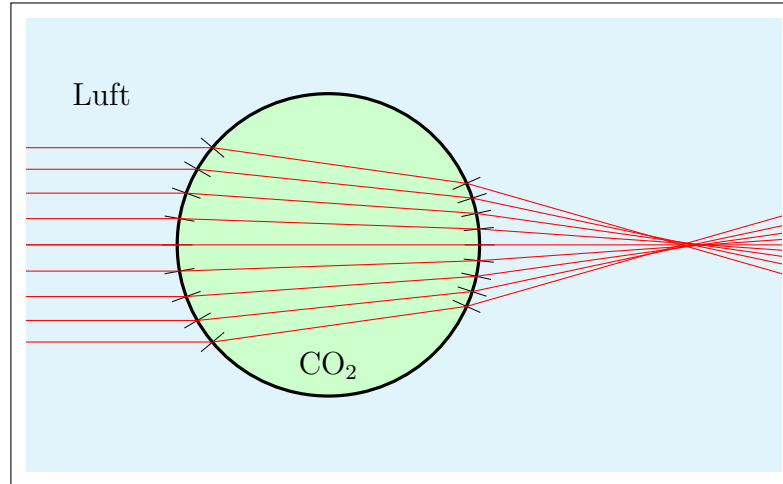


Abbildung 2.49: Fokussierende akustische Linse.

frequenzabhängiger Ausbreitungsgeschwindigkeit gibt, in denen sich die einzelnen Komponenten unterschiedlich schnell fortpflanzen.

Bei der Fourieranalyse eines Knalls in Abschnitt B.1.2.2 und B.1.2.3 haben wir gesehen, dass mit abnehmender Zeitdauer τ des Knalls zunehmend mehr Frequenzen mit nennenswerter Amplitude am Knall beteiligt sind. Dort hatten wir die Zeitverteilung des Knalls an einem fest vorgegebenen Ort untersucht. Nun wollen wir auch die Fortpflanzung des Knalls oder einer anderen beliebigen, aber zeitlich und räumlich begrenzten Welle, eines sogenannten **Wellenpakets**, untersuchen.

Insbesondere stellt sich die Frage, ob bei der Fortpflanzung der Welle auch ihre Form erhalten bleibt oder sich diese ändert. Um dies zu untersuchen, zerlegen wir die Welle mittels Fouriertransformation in harmonische und unendlich ausgedehnte Wellen, da diese ihre Form nicht ändern

$$\xi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk. \quad (2.8.1)$$

Wie man am Argument der Exponentialfunktion erkennt, ist die zu x fourierkonjugierte Variable die Wellenzahl k , so wie die zur Zeit t fourierkonjugierte Variable die Kreisfrequenz ω ist. Wir haben hier zum ersten Mal eine frequenzabhängige Phasengeschwindigkeit v_p zugelassen, was sich in der Abhängigkeit $\omega = \omega(k)$ zeigt, diese Abhängigkeit wird als **Dispersion** bezeichnet.¹⁸

¹⁸Die Frequenzen der Welle sind stets fest vorgegeben, während die Wellenzahl bzw. die Wellenlänge vom jeweiligen Medium und den Frequenzen abhängen. Demnach wäre die Betrachtung von k als Funktion von ω intuitiv naheliegend. In den folgenden Herleitungen erweist es sich jedoch als nützlich mit Umkehrfunktion $\omega(k)$ zu arbeiten.

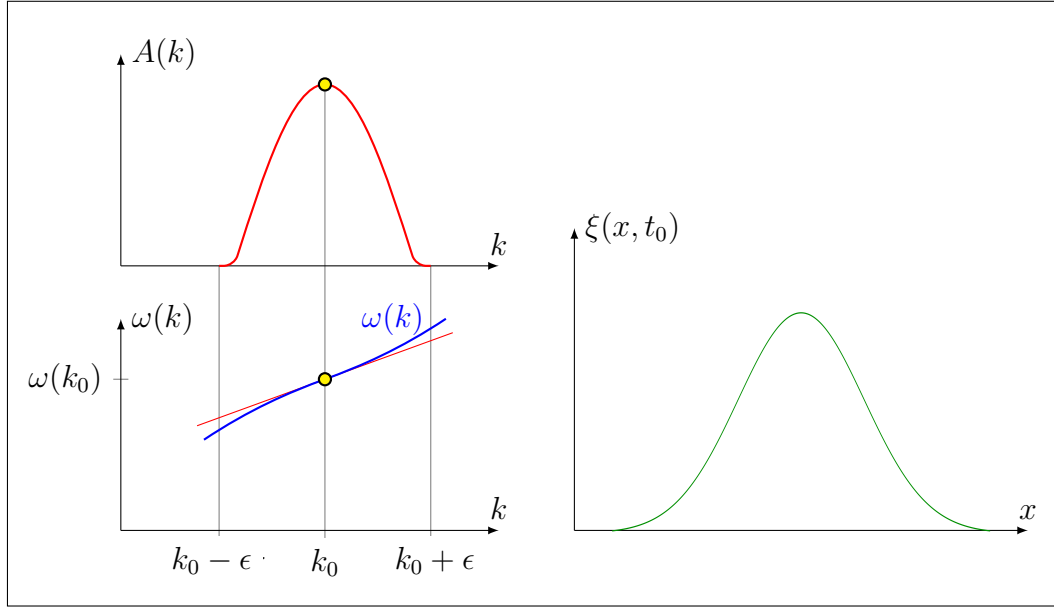


Abbildung 2.50: Lineare Näherung einer Dispersionskurve $\omega(k)$ und Wellenpaket $\xi(x, t_0)$ mit dem zugehörigen Amplitudenspektrum $A(k)$.

2.8.2 Lineare Näherung der Dispersionskurve

Wir beschränken uns bei der weiteren Diskussion der Dispersion auf ein näherungsweise monochromatisches Wellenpaket $\xi(x, t)$, dessen Amplitudenspektrum $A(k)$ also in einen engen Wellenzahlbereich um einen Peak bei einer bestimmten Wellenzahl k_0 fällt. Zudem ändere sich die Wellenzahl als Funktion der Frequenz nur wenig in diesem Bereich (siehe Abbildung 2.50).

Es sei nun

$$k \neq 0 \quad \text{für} \quad (k_0 - \epsilon) \leq k \leq (k_0 + \epsilon). \quad (2.8.2)$$

Dann ist

$$\xi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{k_0 - \epsilon}^{k_0 + \epsilon} A(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk \quad (2.8.3)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} A(k_0 + \epsilon') e^{i[(k_0 + \epsilon')x - \omega(k_0 + \epsilon')t]} d\epsilon'. \quad (2.8.4)$$

Wir entwickeln $\omega = \omega(k)$ in eine Reihe um $k = k_0$ bis zur 1. Ordnung

$$\omega(k) \approx \omega(k_0) + \underbrace{\epsilon' \frac{d\omega}{dk}}_{:=v_g} \bigg|_{k=k_0} . \quad (2.8.5)$$

Dabei ist die **Gruppengeschwindigkeit**, deren Bedeutung später ersichtlich wird, definiert durch

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \bigg|_{k=k_0} . \quad (2.8.6)$$

Damit ergibt sich die Amplitude zu

$$\xi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(k_0 x - \omega(k_0)t)} \cdot \underbrace{\int_{-\epsilon}^{\epsilon} A(k_0 + \epsilon') e^{i\epsilon'(x - v_g t)} d\epsilon'}_{:=G(x - v_g t)} . \quad (2.8.7)$$

Die Welle besteht demnach aus einer harmonischen Welle mit Phasengeschwindigkeit $v_p = \omega(k_0)/k_0$, welche durch die Funktion $G(x - v_g t)$ moduliert ist:

$$\xi(x, t) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(k_0 x - \omega(k_0)t)} \cdot G(x - v_g t) \quad (2.8.8)$$

Die Gruppengeschwindigkeit gibt somit die Geschwindigkeit an, mit welcher sich die Einhüllende $G(x - v_g t)$ fortbewegt.

Eine Welle ist **dispersionsfrei**, wenn ω und k über eine lineare Beziehung zusammenhängen mit der Proportionalitätskonstanten v ,

$$\omega = v \cdot k \quad \Rightarrow \quad \frac{d\omega}{dk} = v \quad \Rightarrow \quad v_g = v_p . \quad (2.8.9)$$

In einem allgemeinen Medium kann v von k abhängen. In diesem Fall ist $\omega(k)$ keine lineare Funktion von k und

$$v_g \neq v_p . \quad (2.8.10)$$

Beachte: In der *linearen* Näherung bleibt die Form des Wellenbuckels erhalten. Falls dagegen der Wellenbereich grösser ist, ändert sich die Wellenform im Laufe der Zeit, da sich die Bestandteile der Welle (d. h. die verschiedenen Frequenzanteile) mit unterschiedlicher Geschwindigkeit ausbreiten, sodass der Puls auseinanderläuft.

Die Komponenten bewegen sich mit der Phasengeschwindigkeit $v_p = v$, die Gruppe als Ganzes mit der Gruppengeschwindigkeit v_g (siehe Abbildung 2.51).

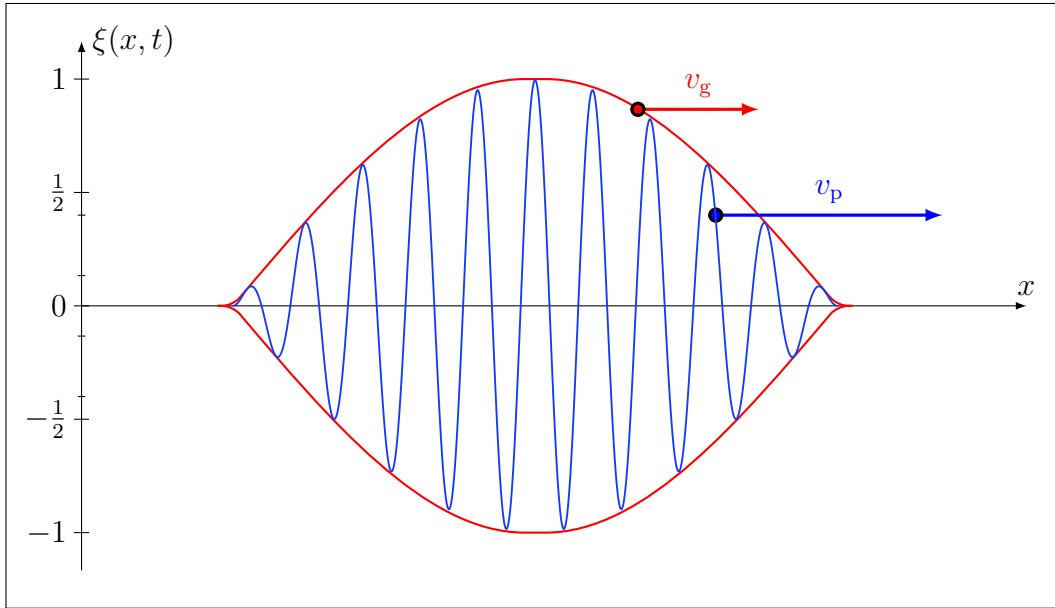


Abbildung 2.51: Wellenpaket.

Für die Ausbreitung von Energie und Information ist die Gruppengeschwindigkeit massgeblich und nicht die Phasengeschwindigkeit.

Diese ist immer kleiner oder höchstens gleich gross wie die Lichtgeschwindigkeit c :

$$v_g \leq c \quad (2.8.11)$$

Die Phasengeschwindigkeit v_p kann hingegen auch grösser als c sein.

Gewisse Wellen (z. B. Licht im Vakuum, Schallwellen) zeigen *keine* Dispersion. In diesem Fall hängt die Phasengeschwindigkeit *nicht* von der Wellenzahl k ab:

$$\frac{dv_p(\lambda)}{dk} = 0 \quad (2.8.12)$$

Gruppen- und Phasengeschwindigkeit sind in diesem Fall gleich gross

$$v_g = v_p = \frac{\omega}{k} . \quad (2.8.13)$$

Bei vielen anderen Wellen (z. B. Licht im Medium, Wasserwellen) findet man hingegen Dispersion. In diesen Fällen hängt v_p von k (oder λ) ab.

Man spricht von normaler Dispersion, falls

$$\frac{dv_p(k)}{dk} < 0 \quad \text{oder} \quad \frac{dv_p}{d\lambda} > 0 \quad (2.8.14)$$

und von anomaler Dispersion, falls

$$\frac{dv_p(k)}{dk} > 0 \quad \text{oder} \quad \frac{dv_p(\lambda)}{d\lambda} < 0 \quad (2.8.15)$$

gilt.

In beiden Fällen ist die Phasengeschwindigkeit nicht mehr gleich gross wie die Gruppengeschwindigkeit. Es gilt stattdessen

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(v_p k)}{dk} = v_p + k \frac{dv_p}{dk} = v_p - \lambda \frac{dv_p}{d\lambda} . \quad (2.8.16)$$

In der Optik hängt der Brechungsindex n häufig von der Wellenlänge λ im Medium, $n = n(\lambda)$, bzw. von der Frequenz, $n = n(\nu)$, ab. In diesem Fall erhalten wir für die Phasengeschwindigkeit

$$v_p = \frac{c}{n(\lambda)} = \frac{c}{n(\nu)} \quad (2.8.17)$$

und für die Gruppengeschwindigkeit

$$v_g = \frac{c}{n(\lambda)} \left[1 + \frac{\lambda}{n(\lambda)} \frac{dn(\lambda)}{d\lambda} \right] . \quad (2.8.18)$$

Damit erhalten wir die Möglichkeit, mit einem Prisma ursprünglich weisses Licht in die verschiedenen Farbkomponenten zu zerlegen. Durch sorgfältige Auswahl verschiedener Glassorten können umgekehrt chromatische Farbfehler weitgehend korrigiert werden.

2.9 Zusammenfassung

In diesem Kapitel haben wir vornehmlich mechanische Wellenphänomene diskutiert. Als wesentliche Punkte kann man zusammenfassen:

- Im Allgemeinen kann man Wellen als eine Störung (eine Auslenkung einer gewissen physikalischen Grösse aus ihrer Ruhelage wie z. B. der Ort eines Seilelementes, der Druck in Luft, das elektrische und/oder magnetische Feld etc.) verstehen, welche sich im Raum ausbreitet und durch eine Funktion des Typs $f(x - vt)$ beschrieben werden kann.
- Eine solche Funktion genügt der Wellengleichung $\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2}$, mit $\xi(x,t) = f(x - vt)$. Die Wellengeschwindigkeit hängt von den Eigenschaften des Mediums ab, z. B. von der Seilspannung und der Massenbelegung des Seiles bei einer Seilwelle.

- Bei einer Welle wird Energie, aber keine Materie transportiert.
- Im Falle von harmonischen Wellen kann $f(x - vt)$ durch Sinus- und/oder Kosinusfunktionen beschrieben werden, z. B. $\xi(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$, mit $v = \omega/k$. Hier nennt man $k = 2\pi/\lambda$ die Wellenzahl, wobei λ die Wellenlänge ist, d. h. der Abstand von zwei Wellenmaxima (oder Minima) zu einem bestimmten Zeitpunkt.
- Man unterscheidet grundsätzlich zwei Typen von Wellen, je nachdem in welcher Richtung die Auslenkung erfolgt. Steht die Auslenkung senkrecht zur Ausbreitungsrichtung spricht man von Transversalwellen, ist sie parallel von Longitudinalwellen. Des Weiteren unterscheidet man bei Transversalwellen zwischen linearer und elliptischer Polarisation.
- Die Punkte einer Welle im Raum, welche dieselbe Phase besitzen, bilden eine Wellenfront. Je nach Form der von der Wellenfront geformten Fläche spricht man z. B. von ebenen Wellen, Kreiswellen oder Kugelwellen.
- Die Energie einer Welle, die pro Zeit durch eine Einheitsfläche hindurchtritt, wird als Energieflussdichte bezeichnet. Deren Betrag bezeichnet man als Intensität der Welle.
- Falls sich Quelle und/oder Beobachter einer Welle relativ zueinander und/oder relativ zum Medium bewegen, in welchem sich die Welle ausbreitet, tritt eine Frequenzverschiebung auf, die man durch den Dopplereffekt beschreibt.
- Das Superpositionsprinzip besagt, dass die Summe von Lösungen der Wellengleichung (also die Überlagerung von Wellen) wieder eine Lösung der Wellengleichung, also wieder eine Welle, ergibt. Dies folgt aus der Linearität der Wellengleichung.
- Falls die Quellen verschiedener Wellen eine fixe Phasenkopplung haben (also eine zeitlich konstante relative Phase), spricht man von kohärenten Wellen. In diesem Fall ergeben sich Phänomene wie konstruktive und destruktive Interferenz.
- Bei Reflexion einer Welle an einer Grenzschicht können sich die einlaufende und reflektierte Welle zu einer stehenden Welle überlagern.
- Die allgemeinste Schwingung einer eingespannten Saite (d. h. einer stehenden Welle in dieser Saite) ergibt sich aus Überlagerung der Grundschiwingung und von Oberschwingungen. Die Anfangsbedingungen (z. B. Zupfen oder Streichen der Saite) bestimmen, welche Frequenzen in den Oberschwingungen vorkommen.
- Jeder Punkt einer Wellenfront kann als Quelle einer neuen Kugelwelle verstanden werden. Dieses Konzept bezeichnet man als das Prinzip von Huygens. Mit diesem Prinzip und Interferenzeffekten können Phänomene wie Reflexion, Brechung und Beugung anschaulich beschrieben werden.

- Bei Beugung am Spalt ist das Verhältnis von Wellenlänge zu Spaltbreite von Relevanz.
- Im Allgemeinen hat eine Welle einen Anfang und ein Ende, d. h. es breitet sich ein Wellenpaket aus. Dieses kann anhand der Fourieranalyse beschrieben werden als Überlagerung von vielen Wellen mit verschiedenen Wellenlängen. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Einhüllenden des Wellenpakets nennt man Gruppengeschwindigkeit. Ein harmonischer Wellenanteil einer bestimmten Frequenz breitet sich mit der Phasengeschwindigkeit aus.
- Die Dispersionsrelation beschreibt den Zusammenhang zwischen Frequenz und Wellenzahl. Bei Dispersionsfreiheit ist die Frequenz eine lineare Funktion der Wellenzahl, $\omega = vk$, d. h. die Wellengeschwindigkeit v ist unabhängig von der Frequenz oder Wellenlänge.

Kapitel 3

Wärmelehre und Thermodynamik

Im folgenden Kapitel werden wir uns im wesentlichen mit Eigenschaften von Viel-Teilchen-Systemen beschäftigen, bei denen die Anzahl der Teilchen sehr gross ist, typischerweise in der Grössenordnung von 10^{23} oder mehr. Beispiele solcher Systeme werden Gase (bestehend aus Atomen und/oder Molekülen), Festkörper oder Flüssigkeiten sein. Speziell werden wir die makroskopischen Eigenschaften der Systeme und deren Gesetzmässigkeiten diskutieren. Zudem werden wir sehen, wie einige dieser makroskopischen Phänomene mit den mikroskopischen Eigenschaften der Systembestandteile zusammenhängen.

Als erstes Beispiel für eine solche makroskopische Eigenschaft, welche auf eine physikalische Grösse der mikroskopischen Bausteine des Systems zurückgeführt werden kann, besprechen wir nun das Konzept der Temperatur eines Systems.

3.1 Temperatur und der Nullte Hauptsatz der Thermodynamik

3.1.1 Die Temperatur und das Gasthermometer

Die **Temperatur** ist uns vertraut als ein Mass dafür, wie warm oder wie kalt ein Körper ist. Eine genaue Definition der Temperatur ist keineswegs einfach. Im Falle eines Festkörpers oder einer Flüssigkeit ist die Temperatur mit der thermischen Bewegung (z.B. Schwingungen) der Atome korreliert. Im Falle eines Gases ist die Temperatur ein Mass für die mittlere kinetische Energie der Gasmoleküle.

Ein **Thermometer** kann definiert werden, wenn sich eine physikalische Eigenschaft eines Körpers mit der Temperatur verändert. Eine quantitative Messung dieser Eigenschaft liefert dann nach entsprechender Kalibrierung die Temperatur. Eine derartige Eigenschaft, die zur Temperaturmessung führt, wird eine **thermometrische Eigenschaft** genannt.

Man kann z.B. die folgenden thermometrischen Eigenschaften benutzen:

1. die thermische Ausdehnung eines Körpers oder einer Substanz (z.B. Quecksilber);

2. den elektrischen Widerstand von Metallen, der mit der Temperatur zunimmt;
3. das Volumen eines Gases bei konstantem Druck;
4. den Druck eines Gases bei konstantem Volumen.

Jede dieser thermometrischen Eigenschaften kann im Prinzip zur Messung der Temperatur eines Körpers benutzt werden.

3.1.1.1 Das Gasthermometer und die Definition des Drucks

Wir betrachten das Gasthermometer. Bei einer speziellen Version wird das Volumen des Gases als thermometrische Eigenschaft benutzt, siehe Abb. 3.1. Das Quecksilber übt eine nach unten gerichtete Kraft mit Betrag

$$F = mg = \rho A \ell g \quad (3.1.1)$$

aus, wobei ρ die Dichte des Quecksilbers und A die Querschnittsfläche ist.

Der **Druck** p wird definiert als die senkrecht auf eine Fläche ausgeübte Kraft pro Fläche, d.h.

$$p = \frac{F}{A}, \quad (3.1.2)$$

wobei F der Betrag der Normalkomponente der Kraft und A die Fläche ist.

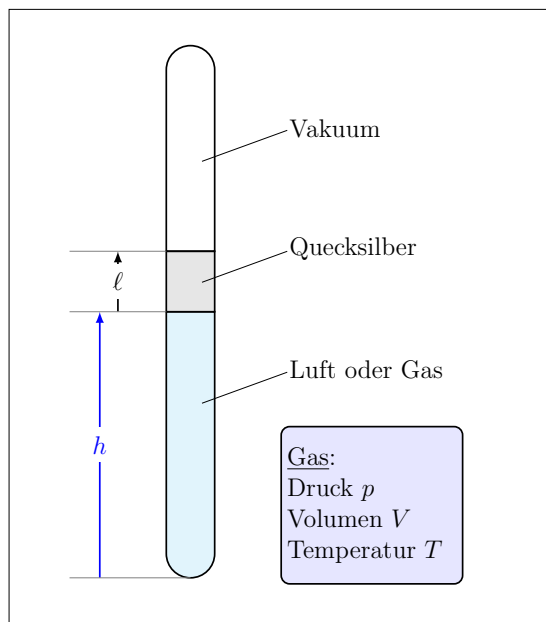


Abbildung 3.1: Eine Version des Gasthermometers mit konstantem Druck.

Einheit: Die SI-Einheit des Druckes ist Newton pro Quadratmeter (N/m^2) und wird als *Pascal* bezeichnet:

$$[p] = 1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2. \quad (3.1.3)$$

Früher benutzte man auch die *Atmosphäre* (atm) mit $1 \text{ atm} = 1,01325 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, was ungefähr dem Luftdruck auf Meereshöhe entspricht. Eine andere gebräuchliche Einheit ist das *bar* mit

$$1 \text{ bar} = 1000 \text{ mbar} = 100 \text{ kPa} = 10^5 \text{ Pa}. \quad (3.1.4)$$

3.1.1.2 Gesetz von Gay-Lussac

In der Version des Gasthermometers, die wir betrachtet haben, wurde der Druck p des Gases konstant gehalten. Experimentell beobachtet man, dass das Volumen des Gases bei konstantem Druck proportional zur Temperatur ist:

$$V = C_1 T \quad \text{bei konstantem Druck.} \quad (3.1.5)$$

Dieses Ergebnis ist als **Gesetz von Gay-Lussac**¹ bekannt. Das Gesetz gilt für alle Gase bei *niedrigen* Dichten, unabhängig von ihrer chemischen Zusammensetzung.

Demonstrationsexperiment: *Mit Luft gefüllter Ballon*, siehe Abb. 3.2.

In einer anderen Version des Gasthermometers kann das Volumen konstant gehalten und der Druck als thermometrische Eigenschaft benutzt werden. Experimentell beobachtet man, dass der Druck des Gases bei konstantem Volumen proportional zur Temperatur ist:

$$p = C_2 T \quad \text{bei konstantem Volumen.} \quad (3.1.6)$$

¹J.L. Gay-Lussac (1778-1850)

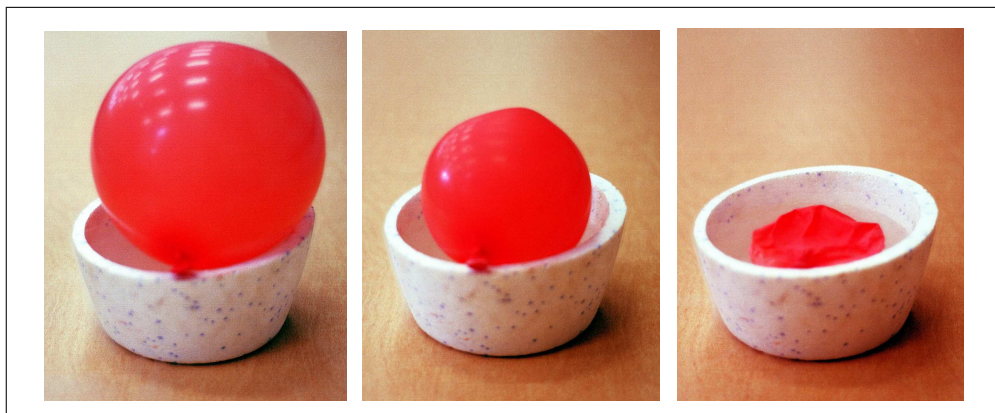


Abbildung 3.2: Ein Ballon wird auf flüssigen Stickstoff gestellt.

3.1.2 Die absolute Temperatur und die Kelvin-Skala

Wir betrachten noch einmal das Gasthermometer mit konstantem Druck. Wir können die Höhe h des Quecksilbers bei verschiedenen Temperaturen messen. Das Gesetz von Gay-Lussac sagt voraus, dass

$$V = Ah = C_1 T \quad \text{bei konstantem Druck.} \quad (3.1.7)$$

Es folgt, dass die Temperatur proportional zur Höhe h des Quecksilbers ist,

$$T = \frac{A}{C_1} h \quad \text{bei konstantem Druck.} \quad (3.1.8)$$

Um das Thermometer zu benutzen, müssen wir noch die Konstante A/C_1 bestimmen. Wir tauchen das Thermometer in ein Eis-Wasser-Gemisch ein und messen h_0 . Dann messen wir die Höhe h_{100} beim Siedepunkt des Wassers. Eine beliebige Temperatur, definiert über die **Celsius-Skala**, wird dann gemessen als

$$T(h) = \frac{h - h_0}{h_{100} - h_0} \cdot 100^\circ\text{C} \quad \text{bei konstantem Druck.} \quad (3.1.9)$$

Demonstrationsexperiment: Bestimmung des absoluten Nullpunktes

Man misst den Druck des Gases bei konstantem Volumen als Funktion der Temperatur. Bei einer Temperaturabnahme wird sich das Volumen (bei konstantem Druck) oder der Druck (bei konstantem Volumen) des Gases reduzieren.

Im Demonstrationsexperiment wird der Druck eines Gases, das in einem Behälter eingeschlossen wird, bei verschiedenen Temperaturen gemessen. Der Behälter wird zuerst in ein Eis-Wasser-Gemisch eingetaucht, dann in kochendes Wasser und schliesslich in flüssigen Stickstoff ($T = 77\text{ K} \approx -196,2^\circ\text{C}$ bei einem Druck von 1 bar). Die gemessenen Werte werden als Funktion der Temperatur aufgetragen (siehe Abb. 3.3). Da es in der Natur keinen negativen Druck geben kann, folgt aus der Beobachtung des Verhaltens des Gasthermometers, dass es eine minimale Temperatur gibt bei welcher der Druck gerade Null ist. Man spricht vom **absoluten Nullpunkt**.

3.1.2.1 Definition der Kelvin-Skala

Um ein Thermometer zu eichen und damit eine Temperaturskala zu definieren, muss man einen Fixpunkt festlegen, bei dem alle Thermometer denselben Wert für diese Temperatur angeben. Ein solcher Fixpunkt kann der **Tripelpunkt des Wassers** sein.

Beim Tripelpunkt des Wassers stehen Wasserdampf, flüssiges Wasser und Eis miteinander im Gleichgewicht. Dieser Zustand kann nur bei einem bestimmten Druck bestehen, und er ist daher eindeutig.

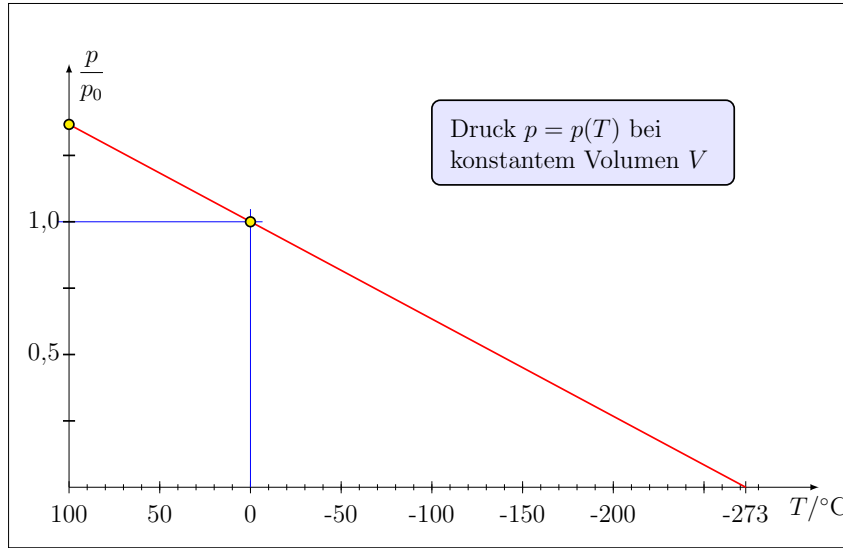


Abbildung 3.3: Der gemessene Druck als Funktion der Temperatur.

Um den Tripelpunkt des Wassers zu erhalten, kann die folgende Anordnung verwendet werden. Ein Glasbehälter wird mit reinem Wasser und Eis gefüllt, evakuiert und dann zugeschmolzen. Der Tripelpunkt wird erreicht, wenn Eis, Wasser und Wasserdampf im Gleichgewicht vorliegen.

Wie bereits erwähnt, sind die Temperatur und der Druck dieser Anordnung eindeutig definiert: Der Dampfdruck² beim Tripelpunkt beträgt 610,7 Pa.

Die **Kelvin-Skala**³ wurde früher so definiert werden, dass die Temperatur des Tripelpunktes

$$T_3 = 273,16 \text{ K} = 0,01^\circ\text{C} \quad (3.1.10)$$

beträgt.

Im Rahmen der Neudefinition der SI-Einheiten im Jahr 2019 wurden alle Einheiten in Abhängigkeit von Naturkonstanten neu definiert.⁴ So auch die Kelvin-Skala, welche seitdem über die **Boltzmann-Konstante**

$$k = 1,380649 \times 10^{-23} \text{ J/K} \quad (3.1.11)$$

definiert ist.⁵ Diese ist dabei ausgedrückt in der Einheit $\text{J/K} = \text{kg m}^2 \text{s}^{-2} \text{K}^{-1}$ und somit abhängig von der Definition von kg, m und s, welche selbst wieder über Naturkonstanten definiert werden. Formen wir die Definition der Boltzmann-Konstante um, erhalten wir

$$1\text{K} = \frac{1,380649 \times 10^{-23} \text{ kg m}^2}{k \text{ s}^2}. \quad (3.1.12)$$

²Der Dampfdruck wird später im Abschnitt zu den realen Gasen diskutiert werden.

³Lord Kelvin (William Thomson) (1824-1907).

⁴<https://www.bipm.org/en/si-base-units/kelvin>

⁵In der Literatur oft auch mit k_B bezeichnet.

Mit Hilfe der Boltzmann-Konstante kann eine Temperatur T in eine Grösse mit der Einheit Energie umgewandelt werden (siehe auch Abb. 3.4), z.B.

$$T = 300 \text{ K} \Rightarrow kT = 4,1 \cdot 10^{-21} \text{ J} \quad \text{mit} \quad [kT] = \frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot \text{K} = \text{J} \quad (3.1.13)$$

Die Einheit der absoluten Temperatur ist das Kelvin. Der absolute Nullpunkt ist der Nullpunkt der Kelvin-Skala. Ein Wert $T < 0 \text{ K}$ ist nicht möglich.

3.1.3 Der Nullte Hauptsatz der Thermodynamik

Das zentrale Konzept der Thermodynamik ist die Existenz der Temperatur.

Wir betrachten z.B. zwei Systeme (Körper) A und B. Das System A erscheint uns heiss, und das System B erscheint uns kalt. Wir bringen A in Kontakt mit B. Nach einer gewissen Zeit erscheinen uns beide Systeme gleich warm.⁶ Wir sagen, dass beide Körper sich in **thermischem Gleichgewicht** miteinander befinden. Eine wichtige Eigenschaft des thermischen Gleichgewichtes ist die Transitivität, die im **Nullten Hauptsatz der Thermodynamik** festgehalten wird.

⁶Wir nehmen hier an, dass die Körper jeweils über ihre gesamte Ausdehnung hinweg die gleiche Temperatur besitzen, sich also innerhalb der Körper ebenfalls ein Gleichgewichtszustand eingestellt hat. In der Praxis erreicht ein System diesen Zustand wenn man lange genug wartet.

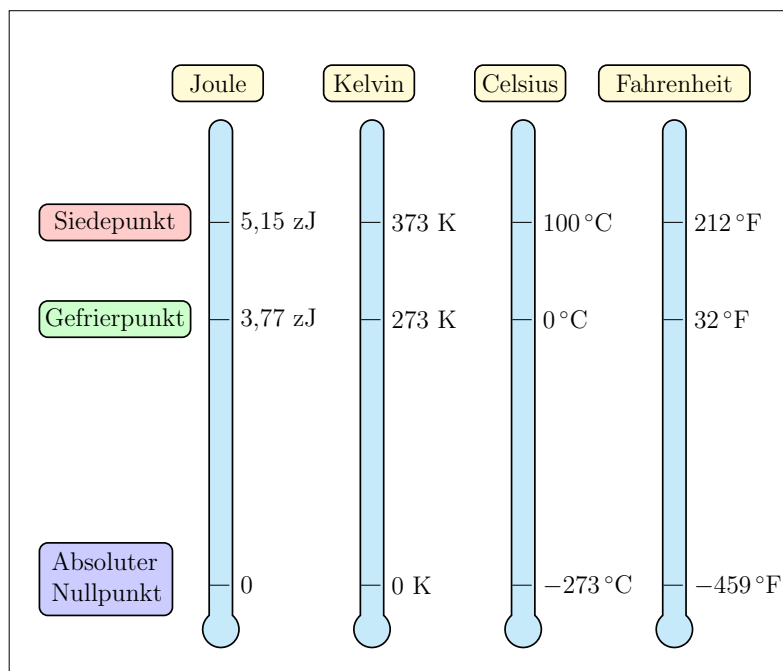


Abbildung 3.4: Vergleich von verschiedenen Temperaturskalen. Der Siedepunkt und der Gefrierpunkt von Wasser bei 1 bar sind angegeben. Das erste Thermometer zeigt die der Temperatur entsprechende Energie kT ($1 \text{ zJ} = 1 \text{ Zeptojoule} = 10^{-21} \text{ J}$).

Befinden sich zwei Systeme jeweils in thermischem Gleichgewicht mit einem dritten System, so stehen die beiden Systeme auch untereinander in thermischem Gleichgewicht.

Diese Eigenschaft ist unter anderem deshalb so bedeutsam, weil sie es uns erlaubt mittels eines Thermometers eine Aussage darüber zu treffen, ob zwei Systeme im thermischen Gleichgewicht stehen oder nicht. Wir betrachten das Thermometer als drittes System C, und die angezeigte Temperatur T gibt dessen Zustand an. Messen wir bei zwei Systemen A und B nun die gleiche Temperatur, so befinden sich beide jeweils in thermischem Gleichgewicht mit dem (sich beide Male im gleichen Zustand befindenden) Thermometer C. Der Nullte Hauptsatz erlaubt nun die Folgerung, dass auch A und B sich miteinander in thermischem Gleichgewicht befinden müssen.

Vom makroskopischen Standpunkt aus stellt die Temperatur eine Grösse dar, die in verschiedenen Systemen schliesslich denselben Wert annimmt, wenn diese Systeme miteinander in Kontakt gebracht werden.

3.1.4 Ideale Gase

Im Folgenden betrachten wir ein idealisiertes Viel-Teilchen-System, das sogenannte *ideale Gas*, welches als Werkzeug für viele Diskussionen in der Thermodynamik und Wärmelehre verwendet werden kann. Falls die Eigenschaften eines realen Gases jenen dieses idealisierten Systems sehr gut entsprechen, werden die Vorhersagen aufgrund des Modells des idealen Gases auch gut mit den experimentellen Beobachtungen übereinstimmen. Falls diese Voraussetzung nicht mehr erfüllt ist, werden wir Abweichungen beobachten und ein Modell des *realen Gases* einführen müssen, wie in einem späteren Abschnitt diskutiert.

Als **Ideales Gas** bezeichnen wir eine Ansammlung von sehr vielen identischen Teilchen, deren Ausdehnung vernachlässigt werden kann und welche nur über elastische Stösse miteinander wechselwirken. Die Teilchen üben demnach keine Kräfte aufeinander aus.

Es ist klar, dass dieses Modell nur in Näherung verwendet werden kann. Aus den definierenden Eigenschaften folgt, dass ein ideales Gas nicht verflüssigt werden kann.⁷

3.1.4.1 Die Zustandsgleichung für ideale Gase

Wir haben im Abschnitt 3.1.1.2 die Gesetze von Gay-Lussac betrachtet:

$$\begin{aligned} V &= C_1 T && \text{bei konstantem Druck,} \\ p &= C_2 T && \text{bei konstantem Volumen.} \end{aligned}$$

⁷Eine Flüssigkeit lässt sich nicht komprimieren, da die abstossende Wechselwirkung der einzelnen Teilchen dies verhindert, diese Wechselwirkung ist beim idealen Gas nicht vorhanden. Ein ideales Gas lässt sich beliebig komprimieren.

Experimentell beobachtet man zudem, dass der Druck steigt, wenn ein Gas bei *konstanter Temperatur* komprimiert wird. Wenn das Gas expandiert, so sinkt der Druck während der Volumenzunahme.

In guter Näherung ist das Produkt aus dem Druck und dem Volumen bei *konstanter Temperatur* konstant. Diese Beziehung gilt für alle Gase bei geringer Dichte und ist als Gesetz von **Boyle⁸** und **Mariotte⁹** bekannt.

Demonstrationsexperiment: $pV = \text{konst.}$ [Online Sammlung](#)

Der Druck eines Gases in einem Volumen wird gemessen. Im Experiment wird das Volumen geändert und die Änderung des Druckes als Funktion des Volumens gemessen. Die Temperatur wird mit fließendem Wasser konstant gehalten. Wenn wir das Volumen halbieren, wird der Druck verdoppelt. Wir bemerken, dass das Produkt konstant bleibt, solange das Volumen nicht zu klein ist. Bei kleinem Volumen nimmt das Produkt pV zu (d.h., der Druck ist höher als bei einem idealen Gas erwartet).

Wenn wir zwei identische Behälter betrachten, die mit gleichen Mengen desselben Gases bei der gleichen Temperatur gefüllt sind, ist es uns vertraut, dass man das doppelte Gasvolumen bei gleichem Druck p und gleicher Temperatur T erhält, wenn beide Behälter zusammengefügt werden. Es folgt, dass das Produkt pV proportional zur Gasmenge sein muss.

Diese Ergebnisse werden in der **Zustandsgleichung des idealen Gases**

$$pV = n k T \quad (3.1.14)$$

zusammengefasst, wobei k die Boltzmann-Konstante, n die **Anzahl der Gasmoleküle** und T die absolute Temperatur ist. Im Prinzip könnten wir dies auch als Definition des idealen Gases verwenden, d.h. ein Gas, welches diese Gleichung erfüllt, entspricht dem Modell des idealen Gases. Dass hier gerade die Boltzmann-Konstante die Proportionalitäts-Konstante ist, ist kein Zufall. Vor ihrer Festlegung auf einen bestimmten Wert wurde experimentell sichergestellt, dass diese für alle Gase den gleichen Wert annimmt.

Aus Abschnitt 3.1.2.1 wissen wir bereits, dass das Produkt kT einer Energie entspricht. Offensichtlich muss demnach auch das Produkt pV einer Energie entsprechen, was sich leicht anhand der Einheiten von p und V überprüfen lässt.

Wenn wir die **Stoffmenge¹⁰** $\tilde{n}$ ($[\tilde{n}] = \text{mol}$) eines Gases betrachten, dann enthält es

$$n = \tilde{n} N_A \quad (3.1.15)$$

⁸R. Boyle (1627-1691)

⁹E. Mariotte (1620-1684)

¹⁰Die Einheit mol wurde früher als die Stoffmenge eines Systems definiert, das aus ebensoviel Teilchen besteht, wie Atome in 12 g des Kohlenstoffnuklids ^{12}C enthalten sind. Im Rahmen der Neudefinition der SI-Einheiten im Jahr 2019 wurde 1 mol festgelegt auf exakt $N_A = 6,02214076 \cdot 10^{23}$ Teilchen. Zum Beispiel hat 1mol Helium eine Masse von ungefähr 4 g, und 1mol Kupfer ungefähr 64 g.

Moleküle, mit der **Avogadro Zahl**

$$N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}. \quad (3.1.16)$$

Die Zustandsgleichung des Gases lautet damit

$$pV = n k T = \tilde{n} N_A k T = \tilde{n} R T, \quad (3.1.17)$$

wobei wir die **Gaskonstante** R eingeführt haben, welche für alle Gase den Wert

$$R = N_A k = 8,314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \quad (3.1.18)$$

hat.

Beispiel: Die Temperatur $T = 273,15 \text{ K} = 0^\circ\text{C}$ und der Druck $p = 1 \text{ bar}$ werden als sogenannte **Standardbedingungen** definiert. Das **molare Volumen** V_M ist bei diesen gleich $V_M = \frac{RT}{p} = 22,4 \text{ m}^3/\text{kmol}$.

Die **Dichte** eines Gases bei Standardbedingungen ist

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m/\tilde{n}}{V/\tilde{n}} = \frac{M}{V_M} = \frac{Mp}{RT}, \quad (3.1.19)$$

wobei M die **molare Masse** des Stoffes ist.

3.1.5 Kinetische Gastheorie

In diesem Abschnitt versuchen wir, einen Zusammenhang zwischen den *makroskopischen* Grössen (Druck, Temperatur, usw.) und den *mikroskopischen* Vorgängen (Bewegung und Stösse der Atome und Moleküle) zu finden. Wegen der grossen Anzahl der Moleküle in einer makroskopischen Substanzmenge ist es unmöglich, Ort und Geschwindigkeit jedes einzelnen Moleküls zu berechnen;¹¹ wohl aber können statistische Mittelwerte verschiedener Grössen (z.B. $\langle v \rangle$, $\langle v^2 \rangle$) untersucht werden. Wir beschränken uns dabei auf die Herleitung eines einzigen Gesetzes: Wir wollen verstehen, wie die Zustandsgleichung des idealen Gases mit der Bewegung der Moleküle zusammenhängt.

Speziell wird hier der interessante Zusammenhang zwischen Temperatur und mittlerer kinetischer Energie der Teilchen in einem idealen Gas hergeleitet.

Wir nehmen an, dass die Stoffmenge $\tilde{n}$ eines idealen Gases (mit „punktförmigen“ Molekülen) in einem Würfel mit der Kantenlänge ℓ eingeschlossen ist (siehe Abb. 3.5). Die Geschwindigkeit eines Moleküls sei $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$. Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass im zeitlichen Mittel die Hälfte aller Moleküle sich mit der konstanten Geschwindigkeitskomponente $v_x = +v_0$, die andere Hälfte mit der Geschwindigkeitskomponente

¹¹Wir müssten dafür ein System aus ungefähr 10^{23} Differentialgleichungen lösen.

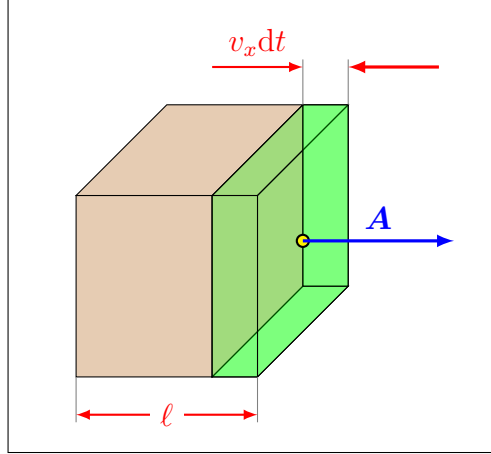


Abbildung 3.5: Zur Bewegung der in einem Würfel eingeschlossenen Moleküle.

$v_x = -v_0$ bewegt. Entsprechendes gelte für die y - und die z - Richtung. Damit ist auch der Betrag des Geschwindigkeitsvektors

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = v_0 \sqrt{3} \quad (3.1.20)$$

konstant.

In der Zeit Δt treffen in positiver x -Richtung

$$n_I = \frac{1}{2} \cdot (\tilde{n} N_A) \cdot \frac{A \Delta t v_0}{\ell^3} = \frac{\tilde{n} N_A A \Delta t v_0}{2 V} \quad (3.1.21)$$

Moleküle auf die entsprechende Würfelseite auf¹² (und natürlich ebensoviel auf jede andere Seite des Würfels), wobei wir die Bezeichnung $V = \ell^3$ eingeführt haben. Der Faktor $1/2$ rührt daher, dass sich nur die Hälfte der Moleküle in Richtung der Fläche bewegt. Der zweite Faktor ist die Gesamtzahl der Moleküle im Würfel. Der dritte Faktor schliesslich gibt den Bruchteil der Moleküle an, der in der Zeit Δt auf die Fläche A aufprallt.

Wird ein Molekül an der Wand in x -Richtung elastisch¹³ reflektiert, so überträgt es einen Impuls

$$\Delta \tilde{p}_x = 2 m v_0 \quad (3.1.22)$$

auf die Wand.¹⁴ Die gesamte auf die Wand ausgeübte Kraft beträgt nach Newton

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{n_I \Delta \tilde{p}_x}{\Delta t} = \frac{\tilde{n} N_A A \Delta t v_0}{2 V} \frac{2 m v_0}{\Delta t} \\ &= \tilde{n} N_A \frac{m v_0^2 A}{V} \end{aligned} \quad (3.1.23)$$

¹²Wir verwenden den Subskript i für engl. *impinging* (auftreffend).

¹³Die Stösse müssen im thermischen Gleichgewicht (im Mittel) elastisch sein, sonst würde sich das Gas erwärmen oder abkühlen.

¹⁴Um eine Verwechslung mit dem Gasdruck p zu vermeiden, bezeichnen wir in diesem Abschnitt die Impulsänderung eines einzelnen Teilchens mit $\Delta \tilde{p}_x$.

Gemäss (3.1.20) ist $v_0^2 = \frac{1}{3}v^2$. Wir erhalten somit den Gasdruck

$$p = \frac{F_x}{A} = \tilde{n} N_A \frac{m v^2}{3} \frac{1}{V} = \frac{1}{3} \rho v^2. \quad (3.1.24)$$

Wenn wir das idealisierte konstante v^2 durch den Mittelwert $\langle v^2 \rangle$ der Geschwindigkeitsverteilung der Moleküle ersetzen, erhalten wir

$$p V = \frac{2}{3} \tilde{n} N_A m \frac{\langle v^2 \rangle}{2}. \quad (3.1.25)$$

Vergleichen wir diesen Zusammenhang mit der Zustandsgleichung des idealen Gases in (3.1.14), können wir die Beziehung

$$\langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} kT \quad (3.1.26)$$

ablesen. Damit haben wir einen Zusammenhang der makroskopischen Grösse *Temperatur* mit der mikroskopischen Grösse *mittlere kinetische Energie* eines Atoms bzw. Moleküls hergestellt.

Vom mikroskopischen Standpunkt aus ist die Temperatur ein Mass für die thermische Bewegung der Atome oder der Moleküle.

3.2 Wärme und der Erste Hauptsatz der Thermodynamik

3.2.1 Definition der Wärme

Wenn zwei Körper mit verschiedenen Temperaturen miteinander in Berührung gebracht werden, gleichen sich die Temperaturen nach einer gewissen Zeit an. Bis Anfang des 19. Jahrhunderts wurde diese Beobachtung durch die (später widerlegte) Existenz eines Wärmestoffs, des *caloricums*, erklärt. Es wurde angenommen, dass der Wärmestoff vom Körper mit höherer Temperatur an den Körper mit niedriger Temperatur abgegeben werde.

Eine Einheit für die Wärmemenge wurde eingeführt, als die Natur der Wärme noch unbekannt war.

Die Kalorie (cal) wird definiert als die Wärmemenge Q , durch die 1 g Wasser unter Normdruck ($p = 1 \text{ bar}$) von 287,65 K auf 288,65 K erwärmt wird.

Aus dem Studium der mikroskopischen Vorgänge und deren Zusammenhang mit der Temperatur folgt, dass man einem Körper *Energie* zuführen muss, um seine Temperatur zu erhöhen.

Benjamin Thompson¹⁵ schlug erst gegen Ende des 18. Jahrhunderts vor, dass die „Wärme“ eine Form von Energie ist. Man muss deshalb für die Wärmeenergie dieselbe Einheit der Energie benutzen, die für die mechanische Energie benutzt wird. Der Arzt Julius Robert von Mayer¹⁶ hat dann das mechanische Wärmeäquivalent gemessen, indem er Wasser durch Schütteln erwärmte. Er stellte damit als erster das Gesetz der Erhaltung der Energie auf, das in den folgenden Jahren stetig erweitert und ergänzt wurde.

Heute wird die SI-Einheit Joule für die Wärmemenge verwendet.

Die **Wärme** Q ist die Energie, welche alleine aufgrund des Temperaturunterschiedes zwischen zwei Körpern ausgetauscht wird.

Für den Zusammenhang von Kalorien und der Energieeinheit Joule gilt

$$1 \text{ Kalorie (cal)} = 4,1868 \text{ Joule (J)}. \quad (3.2.1)$$

3.2.2 Definition der Wärmekapazität

Verschiedene Körper unterscheiden sich durch die Menge von Energie, die benötigt wird, um ihre Temperatur um einen bestimmten Betrag zu erhöhen. Wenn wir einem Körper eine Wärmeenergie ΔQ zuführen, wird seine Temperatur um ΔT erhöht.

Die **Wärmekapazität** C eines Körpers wird definiert als

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta Q = C \Delta T, \quad (3.2.2)$$

wobei ΔQ die für die Erhöhung der Temperatur des Körpers um ΔT benötigte Energie ist.

Die Wärmekapazität einer Substanz pro Masse wird als **spezifische Wärmekapazität** bezeichnet (manchmal auch verkürzt als *spezifische Wärme*). Die spezifische Wärmekapazität ist

$$c_m = \frac{1}{m} \frac{\Delta Q}{\Delta T} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta Q = c_m m \Delta T, \quad (3.2.3)$$

wobei m die **Masse der Substanz** ist. Die Einheit ist J/(kg K).

¹⁵Benjamin Thompson (1753-1814)

¹⁶Julius Robert von Mayer (1814 - 1878)

Die Wärmekapazität einer Substanz pro Stoffmenge wird als **molare Wärmekapazität** bezeichnet. Die molare Wärmekapazität einer Substanz ist

$$c_M = \frac{1}{\tilde{n}} \frac{\Delta Q}{\Delta T} \Leftrightarrow \Delta Q = c_M \tilde{n} \Delta T, \quad (3.2.4)$$

wobei $\tilde{n}$ die Stoffmenge ist. Die Einheit ist J/(mol K).

Man spricht z.B. von der Wärmekapazität C eines Gegenstands, aber von der spezifischen Wärmekapazität c von Kupfer. Häufig werden die spezifischen Wärmekapazitäten pro Masse und pro Stoffmenge nur mit Hilfe ihrer Einheiten unterschieden. In diesem Skript folgen wir der Notation

$$\begin{aligned} c_m &\triangleq \text{Wärmekapazität pro Masse} \\ c_M &\triangleq \text{Wärmekapazität pro Stoffmenge.} \end{aligned}$$

Die Wärmemenge, die man einem Körper zuführen muss, um ihn von der Temperatur T_a auf die Temperatur T_e zu erwärmen, ist

$$Q^{\swarrow} = \int \delta Q^{\swarrow} = \int_{T_a}^{T_e} C(T) dT. \quad (3.2.5)$$

Hierbei wurde für eine allgemeinere Betrachtung berücksichtigt, dass die Wärmekapazität auch von der Temperatur abhängen kann. Wenn die Temperaturänderung nicht zu gross ist, kann die Wärmekapazität $C(T)$ jedoch wie zuvor als eine Konstante betrachtet werden und es gilt

$$Q^{\swarrow} = C (T_e - T_a) = C \Delta T. \quad (3.2.6)$$

Notation: Mit dem Symbol $\swarrow$ (bzw. $\nearrow$) bezeichnen wir die dem System zugeführte (bzw. entzogene) Wärme (allgemeiner: Energie). Als System bezeichnen wir dabei den Körper oder das Gas, den/das wir betrachten. Wird keines der beiden Symbole verwendet und auch sonst keine weitere Aussage über die betrachtete Energie getroffen, gehen wir im Allgemeinen von der Perspektive des Systems (also $\swarrow$) aus. Eine positive Energie entspricht dann einer dem System zugeführten Energie, eine negative hingegen wird dem System entzogen. Einige Beispiele:

- $Q^{\swarrow} > 0 \triangleq$ Dem System wird insgesamt Wärme von der Umgebung (von aussen) zugeführt.
- $Q^{\nearrow} > 0 \triangleq$ Vom System wird insgesamt Wärme an die Umgebung abgegeben.
- $Q > 0 \triangleq Q^{\swarrow} > 0 \triangleq Q^{\nearrow} < 0$ (weil $Q = Q^{\swarrow} = -Q^{\nearrow}$)

3.2.3 Wärmekapazität eines Festkörpers

Die spezifischen Wärmekapazitäten (pro Masse) von Festkörpern haben sehr unterschiedliche Werte, siehe Tabelle 3.1. Empirisch erkennt man jedoch:

Wenn wir die molaren Wärmekapazitäten (pro Stoffmenge) betrachten, dann unterscheiden sich die Werte für verschiedene Festkörper nicht deutlich voneinander.

Es gibt wenige Ausnahmen, wie z.B. Beryllium, Bor und Diamant. Solche Fälle werden als „anomal“ bezeichnet. Man sieht auch, dass Wasser im Vergleich zu den meisten Festkörpern eine hohe Wärmekapazität besitzt.

Dass die molaren Wärmekapazitäten der meisten Festkörpern sehr ähnliche Werte aufweisen, wird in der **Dulong-Petit'schen Regel**

$$c_M \approx 25 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \quad (3.2.7)$$

festgehalten.

Dieses Verhalten wird auf natürliche Weise mit der Atomtheorie des Materieaufbaus erklärt. Wir beobachten, dass der Wärmebetrag, der benötigt wird, um die Temperatur pro Atom um 1 K zu erhöhen, vom Stoff weitestgehend unabhängig ist.

In Festkörpern schwingen die Atome oder Moleküle um ihre Gleichgewichtslage. Wenn das Volumen des Körpers konstant gehalten wird, so dass die mittleren Abstände der Atome unverändert bleiben, tritt die zugeführte Wärmeenergie nur als Schwingungsenergie auf.

Tabelle 3.1: Spezifische Wärmekapazitäten verschiedener Stoffe bei Zimmertemperatur und einem Druck von 1 bar.

Stoff Einheit	Spezifische Wärme c_m $\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$	Molare Masse M kg kmol^{-1}	Molare spez. Wärme c_M $\text{kJ kmol}^{-1} \text{K}^{-1}$
Aluminium	900	27	24,4
Kupfer	386	63,5	24,5
Blei	128	207	26,5
Silber	236	108	25,5
Beryllium			11
Bor			13
Kohlenstoff (Diamant)			6
Wasser	4 182	18	75,4
Eis (-10°C)	2 220	18	39,6

Wenn man die molare Wärmekapazität betrachtet, hat man es beim Vergleich verschiedener Stoffe immer mit derselben Anzahl von *Atomen* zu tun. Es folgt, dass die molaren Wärmekapazitäten von Festkörpern sehr ähnliche Werte aufweisen müssen.

Demonstrationsexperiment: *Spezifische Wärme von Al und Pb.*

Wir bestimmen die Wärmekapazität von jeweils 14 mol Aluminium (Al) und Blei (Pb). Wegen der sehr unterschiedlichen molaren Massen von Blei und Aluminium sind die Massen der zwei Körper sehr verschieden: die Masse des Bleikörpers ist 2,9 kg und die des Aluminiumkörpers ist 380 g. Im Experiment wird gezeigt, dass die molaren Wärmekapazitäten von Blei und Aluminium dennoch ähnlich sind. Dies wird wie folgt demonstriert. Die zwei Körper werden zunächst in kochendes Wasser eingetaucht, bis ihre Temperatur ungefähr 100 °C ist. Anschliessend werden die Körper jeweils in einen Behälter eingetaucht, der mit 500 g Wasser bei Raumtemperatur gefüllt ist. Wir messen die Endtemperaturen des Wassers in den beiden Behältern und beobachten, dass die Endtemperaturen gleich sind.

Berechnung:

$$\begin{array}{llll}
 \text{Molare Masse:} & M_{\text{Pb}} & = 207 \text{ g/mol} & M_{\text{Al}} & = 27 \text{ g/mol} \\
 \text{Masse:} & m_{\text{Pb}} & = 14 \text{ mol} \cdot 207 \frac{\text{g}}{\text{mol}} & m_{\text{Al}} & = 14 \text{ mol} \cdot 27 \frac{\text{g}}{\text{mol}} \\
 & & \approx 2900 \text{ g} & & \approx 380 \text{ g} \\
 & \tilde{n} c_M^{\text{Pb}} & \approx 14 \text{ mol} \cdot 25 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \approx 350 \text{ J/K} & \tilde{n} c_M^{\text{Al}} & \approx 350 \text{ J/K} \\
 \text{Wasser:} & c_m^{\text{W}} & = 4,182 \text{ J/(g K)} & & \\
 & \Rightarrow C^{\text{W}} & = m_{\text{W}} c_m^{\text{W}} = 2090 \text{ J/K} & &
 \end{array}$$

Die Wärme wird auf das Wasser übertragen:

$$C^{\text{W}} (T_e - T_a^{\text{W}}) = \tilde{n} c_M (T_a - T_e), \quad (3.2.8)$$

wobei T_a und T_e die Anfangs- und Endtemperatur der Metalle sind und $c_M \approx c_M^{\text{Pb}} \approx c_M^{\text{Al}}$. Mit $T_a \approx 373 \text{ K}$ und $T_a^{\text{W}} \approx 293 \text{ K}$ finden wir

$$\begin{aligned}
 T_e &= \frac{(\tilde{n} c_M T_a + C^{\text{W}} T_a^{\text{W}})}{C^{\text{W}} + \tilde{n} c_M} \\
 &\approx \frac{\{(350 \text{ J/K}) (373 \text{ K}) + (2090 \text{ J/K}) (293 \text{ K})\}}{(2090 \text{ J/K} + 350 \text{ J/K})} \approx 304 \text{ K} \\
 &\approx 31 \text{ °C}
 \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

3.2.4 Latente Wärme

Wird einem Körper Wärme zugeführt, steigt im Allgemeinen seine Temperatur. Bei bestimmten Temperaturen und bestimmten Drücken verursacht eine Wärmezufuhr jedoch

keine Temperaturerhöhung, nämlich dann, wenn ein **Phasenübergang** stattfindet. Bei einem solchen Phasenübergang ändert sich lediglich die potentielle Energie und nicht die kinetische. Somit ändert sich auch die Temperatur nicht.¹⁷

Die Wärme Q , die benötigt wird, um einen Phasenübergang (ohne Temperaturänderung) der gesamten Stoffmenge zu bewirken, ist proportional zur **spezifischen latenten Wärme**¹⁸

$$\lambda_m = Q/m, \quad (3.2.10)$$

wobei m die Masse des Körpers ist. Für die selbe Substanz ergeben sich verschiedene latente Wärmen für den Phasenübergang von fest zu flüssig (Schmelzen) und für jenen von flüssig zu gasförmig (Verdampfung). Wir unterscheiden daher zwischen

$$\lambda_S \triangleq \text{spezifische Schmelzwärme} \quad \text{und} \quad (3.2.11)$$

$$\lambda_D \triangleq \text{spezifische Verdampfungswärme}. \quad (3.2.12)$$

Einige Schmelz- und Siedepunkte und die spezifischen latenten Wärmen sind in Tabelle 3.2 aufgeführt.

Tabelle 3.2: Schmelzpunkte, Siedepunkte und spezifische latente Wärmen (bei $p = 100 \text{ kPa}$)

Substanz	Schmelzpunkt	λ_S	Siedepunkt	λ_D
	K	kJ/kg	K	kJ/kg
Wasser	273,15	333	373,15	2260
Blei	600	25	2020	860
Helium	—	—	4,2	20
Sauerstoff	54,4	14	90,2	210
Stickstoff	63	26	77,35	200
Kupfer	1356	205	2839	4730

3.2.5 Definition der Inneren Energie

Wärme und Temperatur stehen in Zusammenhang mit der Energie der (ungeordneten) Bewegung der Moleküle eines Körpers oder Gases, d.h. eines Viel-Teilchen-Systems.

Die **Innere Energie** U hängt nur vom Zustand des Körpers ab. Dieser wird u.a. durch den Druck, das Volumen und die Temperatur des Körpers charakterisiert, d.h.

$$U = U(p, V, T, \dots). \quad (3.2.13)$$

¹⁷Ein ideales Gas hat keine potentielle Energie, daher können wir dort auch keine Phasenübergänge beobachten.

¹⁸latent $\triangleq$ verborgen, da keine Temperaturänderung beobachtet werden kann.

Eine Grösse, die nur vom Zustand des Systems abhängt, wird **Zustandsfunktion** genannt. Die Thermodynamik beschreibt **thermische Vorgänge**, in denen ein Körper aufgrund seiner Wechselwirkung mit der Umgebung von einem thermischen Gleichgewichtszustand (Anfangszustand) in einen anderen (Endzustand) gelangt.

Während des Vorganges kann sich die innere Energie U des Körpers ändern:

$$U_A = U(p_A, V_A, T_A, \dots) \rightarrow U_E = U(p_E, V_E, T_E, \dots) \quad (3.2.14)$$

Wir bemerken, dass die Änderung der inneren Energie nur vom Anfangs- und Endzustand abhängt, und nicht von den Zwischenzuständen.

U verhält sich demnach wie ein Potential. Weil U durch den Zustand eindeutig definiert ist, darf

$$\Delta U = U_E - U_A \quad (3.2.15)$$

nicht von dem gegangenen Weg zwischen Anfangs- und Endzustand abhängen.

3.2.6 Der Erste Hauptsatz der Thermodynamik

Der **1. Hauptsatz der Thermodynamik** besagt, dass einem Körper Energie in Form von Wärme oder von mechanischer Energie zugeführt werden kann. Dabei erinnern wir uns daran, dass die Wärme Q eine Form der Energie ist, die allein aufgrund eines Temperaturunterschiedes zwischen zwei Körpern ausgetauscht wird.

1. Wenn wir einem Körper die Wärme Q zuführen, ändert sich seine innere Energie.
2. In gleicher Weise kann man dem Körper Energie durch mechanische Arbeit W zuführen.

Die **Innere Energie** U eines Systems kann also sowohl durch **Arbeitszufuhr** $\delta W^\sphericalangle$ als auch durch **Wärmezufuhr** $\delta Q^\sphericalangle$ verändert werden:

$$dU = \delta W^\sphericalangle + \delta Q^\sphericalangle. \quad (3.2.16)$$

Dies ist die **mathematische Formulierung des 1. Hauptsatzes** der Thermodynamik. Wie bereits erwähnt, ist die innere Energie U eine Grösse, die den Zustand des Systems

beschreibt. Aufgrund von (3.2.16) ist es *nicht* möglich einem System eine bestimmte Arbeits- oder Wärmemenge zuzuordnen.¹⁹

Ist U konstant ($dU = 0$), so spricht man von einem **abgeschlossenen System**.

Demonstrationsexperiment: *Blei hämmern* [Online Sammlung](#)

Am Beispiel eines Bleistabes wird demonstriert, wie sich durch mechanische Schläge die Temperatur eines Körpers erhöht. Wir messen die Temperatur des Stabes und beobachten, dass sie sich drastisch erhöht, wenn wir ihn hämmern (siehe Abb. 3.6).

Demonstrationsexperiment: *Fallende Kugel erzeugt Wärme* [Online Sammlung](#)

Eine Kugel wird losgelassen und fällt auf einen Körper (siehe Abb. 3.7). Wir beobachten, dass die Temperatur des Körpers sich drastisch erhöht. Mechanische Energiezufuhr hat eine Erhöhung der inneren Energie des Körpers zur Folge, was schliesslich zu einer Wärmezufuhr des Körpers zum Thermometer führt, um diese beiden zu einem Temperatursausgleich zu bringen.

¹⁹Das heisst, wir können nicht sagen, Körper X habe Wärme Y bzw. Arbeit Z. Wir können ihm nur eine Energie zuordnen, die ihm insgesamt durch Arbeit und Wärme zugeführt wurde. Es ist z.B. nicht möglich, bei einem Glas Wasser festzustellen, ob es durch Wärmezufuhr oder durch Arbeitszufuhr (Umrühren) erwärmt wurde. Wir verwenden deshalb das Symbol δ bei δW und δQ , die nur einen Teil der Energiezufuhr beschreiben, während wir bei dU das Symbol d verwenden.

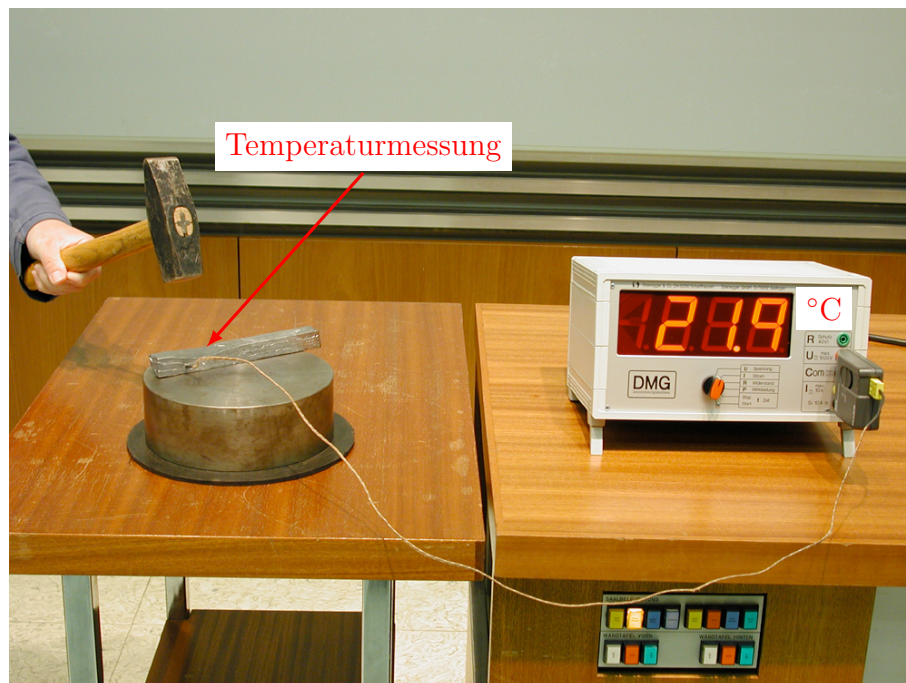


Abbildung 3.6: Das Hämmern von Blei führt zu einer Temperaturerhöhung.

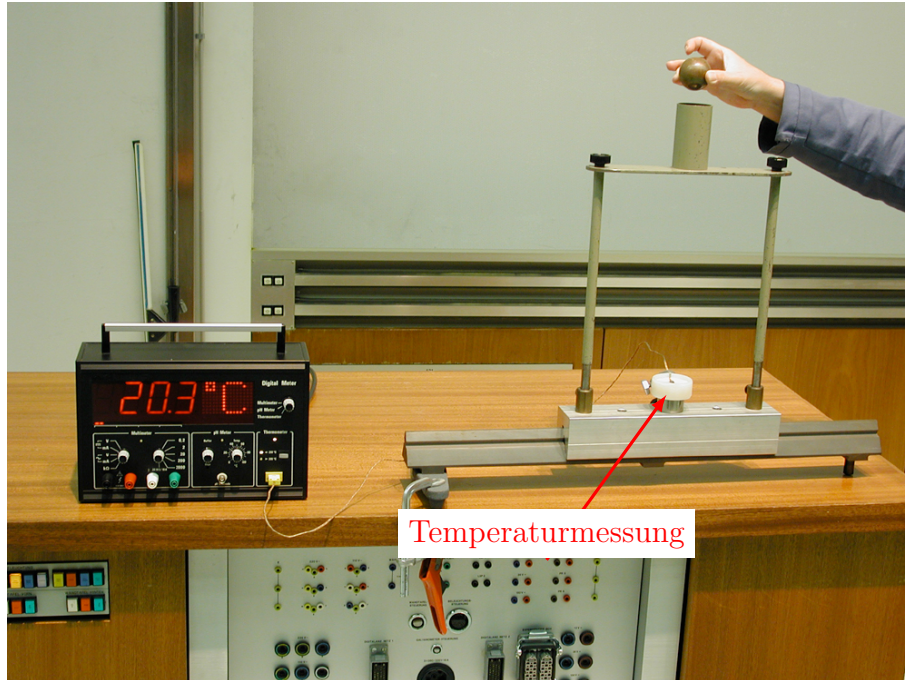


Abbildung 3.7: Eine fallende Kugel führt zu einer Temperaturerhöhung.

3.3 Spezifische Wärme und Zustandsänderungen des Idealen Gases

In diesem Abschnitt behandeln wir weitere Aspekte aus dem Kontext Wärme(kapazität), Arbeit und innere Energie für den Spezialfall eines idealen Gases. Im Zuge dessen lernen wir auch das wichtige Konzept des pV -Diagramms kennen.

3.3.1 Volumenarbeit und das pV -Diagramm

In der in Abb. 3.8 dargestellten Anordnung übt das Gas über den Druck p eine Kraft $F = p \cdot A$ auf die Fläche A aus. Ändert sich nun das Volumen V um dV , so wird die Kraft F entlang einer Strecke dx ausgeübt und somit eine Arbeit verrichtet. Diese wird als **Volumenarbeit** bezeichnet. Die vom Gas an der Umgebung verrichtete Arbeit ist

$$dW^{\nearrow} = F \cdot dx = p \cdot A \cdot \frac{dV}{A} = p dV. \quad (3.3.1)$$

Die gesamte von aussen an einem expandierenden Gas geleistete Volumenarbeit beträgt:

$$W^{\swarrow} = \int_{V_a}^{V_e} \delta W^{\swarrow} = - \int_{V_a}^{V_e} p dV, \quad (3.3.2)$$

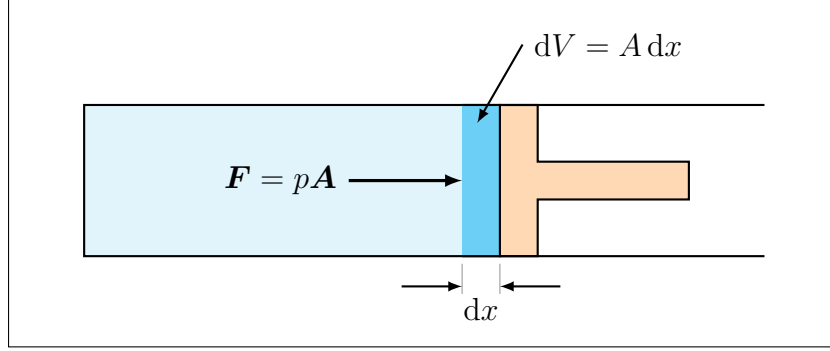


Abbildung 3.8: Die von einem Gas geleistete Arbeit während der Expansion um dV . Der Druck des Gases ist mit p bezeichnet.

wobei V_a und V_e die Anfangs- und Endvolumina des Gases sind und das negative Vorzeichen aussagt, dass Arbeit von aussen (von der Umgebung) am System (dem Gas) verrichtet wird ($W^\swarrow$).

Betrachten wir beispielhaft eine Zustandsänderung bei konstanter Temperatur T , eine sogenannte **isotherme** Zustandsänderung, so ist mit der allgemeinen Gasgleichung der Druck gegeben durch

$$p = \frac{\tilde{n} R T}{V} \propto \frac{1}{V}. \quad (3.3.3)$$

Der Verlauf des Druckes bei einer Expansion, also einer Vergrößerung des Volumens von V_1 auf V_2 , ist in Abb. 3.9 eingezeichnet. Ein solcher Graph in der (V, p) -Ebene wird als **pV -Diagramm** bezeichnet²⁰ und wird häufig verwendet, um Zustandsänderungen eines Gases darzustellen. Die Volumenarbeit ist gerade die Fläche unter dem Graphen im pV -Diagramm. Sie ist in Abb. 3.9 farbig hinterlegt. Für das Beispiel der isothermen Expansion ergibt sich eine Volumenarbeit von

$$W^\swarrow = - \int_{V_1}^{V_2} p dV \quad (3.3.4)$$

$$= -\tilde{n} R T \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V} dV \quad (3.3.5)$$

$$= \tilde{n} R T \log \left(\frac{V_1}{V_2} \right). \quad (3.3.6)$$

Bei der Besprechung verschiedener Zustandsänderungen werden wir noch weitere typische Beispiele von pV -Diagrammen kennenlernen.

²⁰Die Bezeichnung pV -Diagramm hat sich etabliert, obwohl die Darstellung tatsächlich in der (V, p) -Ebene erfolgt, d.h. das Volumen wird auf der x -Achse aufgetragen und der Druck auf der y -Achse. Jeder Punkt (Abszisse = V , Ordinate = p) der Ebene entspricht einem bestimmten Zustand des Gases.

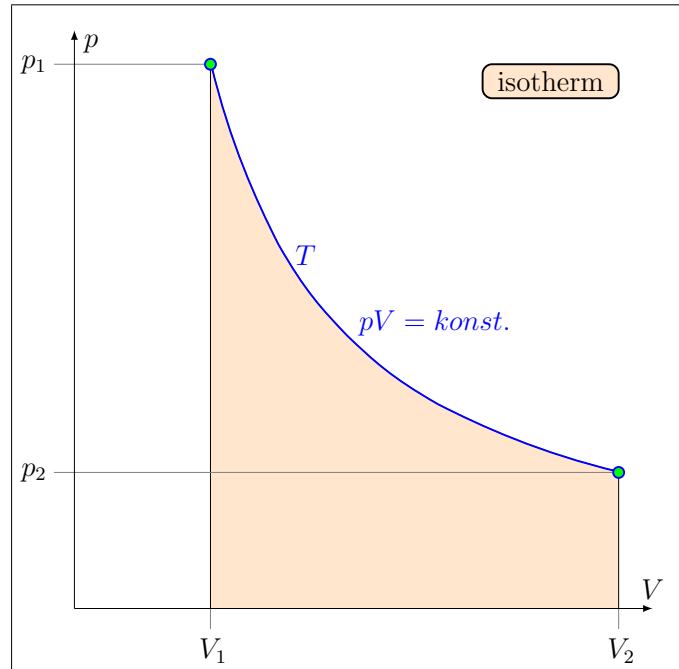


Abbildung 3.9: pV -Diagramm der isothermen Expansion. Der Betrag der geleisteten Arbeit ist gleich der getönten Fläche.

3.3.2 Spezifische Wärme idealer Gase

Da Gase im Gegensatz zu Festkörpern ihr Volumen verändern können, müssen wir bei ihnen zwischen zwei Typen von molarer Wärmekapazität unterscheiden.

3.3.2.1 Spezifische Wärme bei konstantem Volumen

Bei konstantem Volumen benötigen wir die Wärmemenge

$$\Delta Q_1 = \tilde{n} C_V \Delta T \quad (3.3.7)$$

um die Temperatur eines idealen Gases um ΔT zu erhöhen. C_V ist die molare Wärmekapazität bei konstantem Volumen. Dabei nimmt der Gasdruck zu (siehe Abb. 3.10).

3.3.2.2 Spezifische Wärme bei konstantem Druck

Bei konstantem Druck benötigen wir die Wärmemenge

$$\Delta Q_2 = \tilde{n} C_p \Delta T \quad (3.3.8)$$

um die Temperatur eines idealen Gases um ΔT zu erhöhen. C_p ist die molare Wärmekapazität bei konstantem Druck. In diesem Fall vergrößert sich das Volumen (siehe Abb. 3.11).

Bei konstantem Druck benötigen wir eine grössere Wärmemenge als bei konstantem Volumen. Das Gewicht in Abb. 3.11 wird angehoben, d.h. es wird Arbeit vom System am Gewicht verrichtet und die dafür notwendige Energie muss durch einen Teil der zugeführten Wärme aufgebracht werden. Es gilt

$$C_p = C_V + R. \quad (3.3.9)$$

Diese Beziehung können wir über den 1. Hauptsatz herleiten: Aus der Definition der molaren Wärmekapazität bei konstantem Volumen ergibt sich zunächst

$$C_V = \frac{1}{\tilde{n}} \left(\frac{\delta Q_{\swarrow}}{\delta T} \right)_V = \frac{1}{\tilde{n}} \left\{ \frac{dU}{dT} - \frac{\delta W_{\swarrow}}{\delta T} \right\}_V = \frac{1}{\tilde{n}} \frac{dU}{dT}, \quad (3.3.10)$$

wobei wir für das zweite Gleichheitszeichen den 1. Hauptsatz in der Form $\delta Q_{\swarrow} = dU - \delta W_{\swarrow}$ verwendet haben. Der 2. Term in der geschweiften Klammer ist Null, weil keine

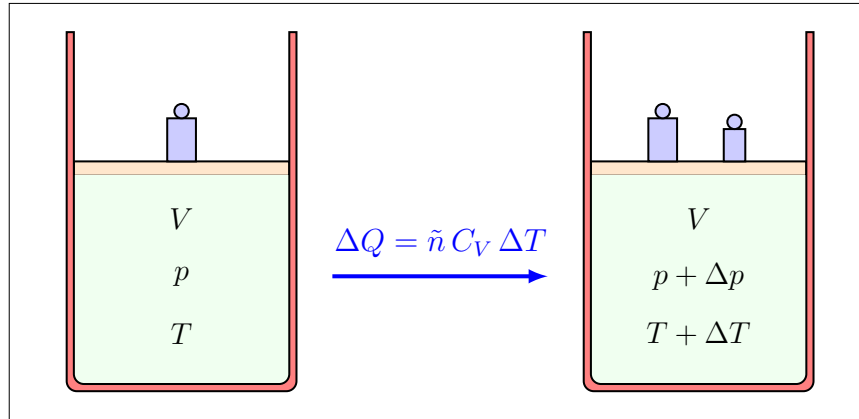


Abbildung 3.10: Spezifische Wärme bei konstantem Volumen.

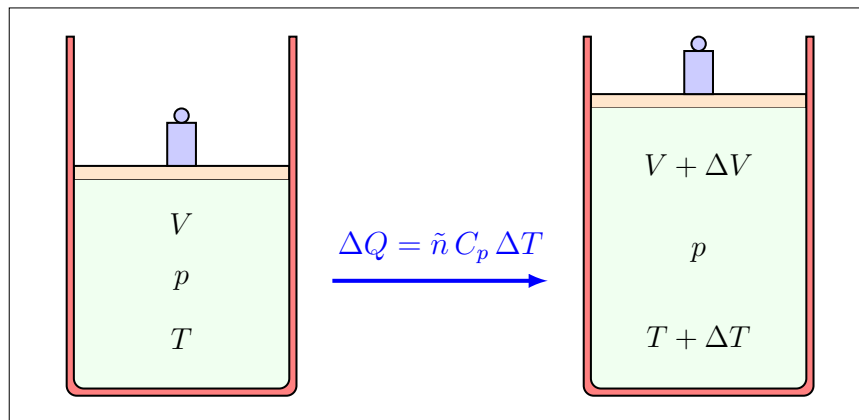


Abbildung 3.11: Spezifische Wärme bei konstantem Druck.

Arbeit geleistet wird, da das Gewicht nicht angehoben wird. Da die Temperatur T selbst auch als Zustandsfunktion verstanden werden kann, müssen wir nicht zwischen dT und δT unterscheiden, d.h., $dT = \delta T$.

Bei konstantem Druck wird der Kolben hingegen gehoben. Die zugehörige Arbeitsleistung beträgt (siehe Abb. 3.8)

$$\delta W^\nearrow = F dx = p A dx = p dV. \quad (3.3.11)$$

Für ein ideales Gas bei konstantem Druck gilt:

$$pV = \tilde{n}RT \quad \Rightarrow \quad dV = \frac{\tilde{n}R}{p} dT \quad (3.3.12)$$

$$\delta W^\nearrow = p dV = \tilde{n}R dT \quad (3.3.13)$$

und somit

$$C_p = \frac{1}{\tilde{n}} \left(\frac{\delta Q}{\delta T} \right)_p = \frac{1}{\tilde{n}} \left\{ \frac{dU}{dT} + \frac{\delta W^\nearrow}{\delta T} \right\}_p = C_V + R. \quad (3.3.14)$$

3.3.3 Gleichverteilungssatz (Äquipartitionsgesetz)

Im Abschnitt 3.1.5 zur kinetischen Gastheorie haben wir die kinetische Energie eines idealen Gases mit drei Freiheitsgraden untersucht. Dabei haben wir angenommen, dass sich, sobald sich nach einer gewissen Zeit ein thermisches Gleichgewicht innerhalb des Gases eingestellt hat, die kinetische Energie im Mittel auf alle drei Bewegungsrichtungen gleich verteilt. Diese Annahme stellt einen Spezialfall des **Gleichverteilungssatzes** dar, welcher aus der klassischen statistischen Mechanik folgt:

Für ein System im thermodynamischen Gleichgewicht der Temperatur T entfällt auf jeden Freiheitsgrad im Mittel eine Energie von $\frac{1}{2} kT$ pro Teilchen.

Für ein ideales Gas der Stoffmenge $\tilde{n}$ erhalten wir für die innere Energie den Ausdruck

$$U = \tilde{n} N_A \frac{f}{2} kT = \tilde{n} \frac{f}{2} RT, \quad (3.3.15)$$

wobei f die Anzahl Freiheitsgrade pro Teilchen angibt.²¹ In der kinetischen Gastheorie haben wir den Fall von $f = 3$ Freiheitsgraden untersucht und haben dort den Ausdruck (3.1.26) erhalten, welcher zu (3.3.15) mit $f = 3$ äquivalent ist. Da bei einem idealen Gas keine potentielle Energie auftritt, entspricht die innere Energie der totalen kinetischen Energie der Teilchenbewegungen.

²¹In der Literatur wird der Begriff des idealen Gases teils im engeren Sinne für den Fall mit $f = 3$ Freiheitsgraden verwendet. Wir verwenden diesen Begriff im weiteren Sinne für ein Gas ohne intermolekulare Wechselwirkungen, d.h. auch für Werte $f \neq 3$, solange alle Freiheitsgrade einer *kinetischen* Energie entsprechen.

Mit dem Ausdruck für U aus (3.3.15) können wir nun die molare Wärmekapazität eines idealen Gases anhand der Definitionen in (3.3.7) und (3.3.8) als Funktion der Anzahl der Freiheitsgrade f herleiten, nämlich

$$C_V = \frac{f}{2}R \quad \text{und} \quad C_p = \frac{f+2}{2}R. \quad (3.3.16)$$

Tabelle 3.3 führt Näherungswerte für die molaren Wärmekapazitäten einiger Gase auf. Das Verhältnis

$$\kappa = \frac{C_p}{C_V} = \frac{f+2}{f} \quad (3.3.17)$$

wird **Adiabatenkoeffizient** genannt.²²

Bei tiefen Temperaturen können einzelne Freiheitsgrade „eingefroren“ sein, d.h., diese Freiheitsgrade können nicht mehr angeregt werden und damit tragen sie nichts zur inneren Energie bei (siehe Abb. 3.12). Die Tatsache, dass eine Mindestenergie zur Anregung von Freiheitsgraden, z.B. Schwingungen, nötig ist, kann erst durch die Quantisierung der Energieniveaus in der Quantenmechanik verstanden werden.

Die Bewegung der Moleküle zeigt sich bei der **Brown'schen Bewegung**: In Gasen oder Flüssigkeiten suspendierte Teilchen führen im Mikroskop sichtbare, unregelmässige Bewegungen (Translationen + Rotationen) aus, die von den Stößen der Gas- bzw. Flüssigkeits-Moleküle mit den suspendierten Teilchen herrühren.

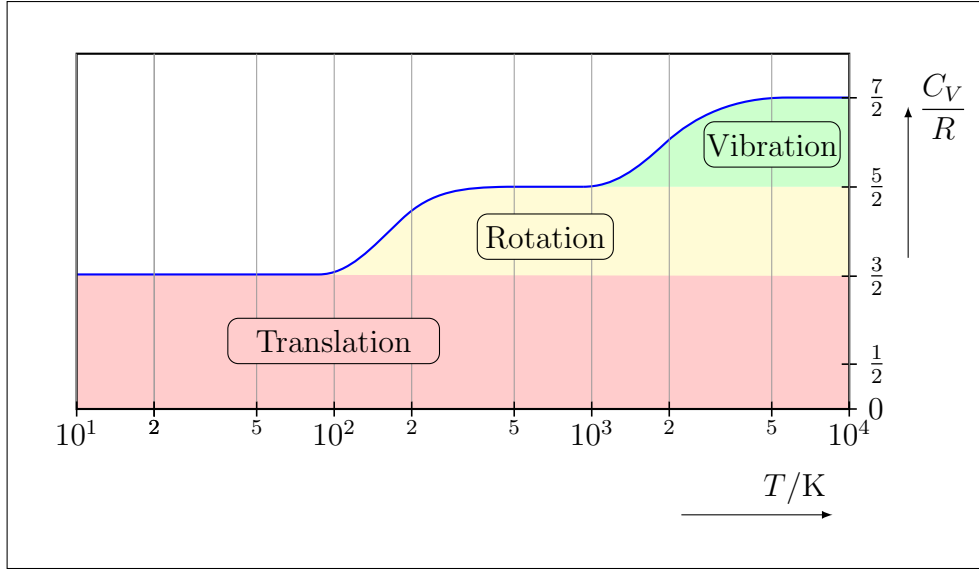
3.3.4 Zustandsänderungen bei idealen Gasen

Wir haben bereits gesehen, dass sich die innere Energie eines Systems ändert, wenn es zu einer Zustandsänderung kommt, z.B. durch Wärmeaustausch mit der Umgebung oder durch mechanische Arbeit, die am oder vom System verrichtet wird. Nun betrachten wir konkrete Beispiele solcher Zustandsänderungen.

²²Häufig wird anstatt κ auch das Symbol γ für den Adiabatenkoeffizienten verwendet.

Tabelle 3.3: Molare Wärmekapazitäten und Adiabatenkoeffizient $\kappa = C_p/C_V$ einiger Gase

System	Freiheitsgrade			C_V	C_p	κ
	Transl.	Rot.	Total			
1-atomiges Gas	3	0	3	$\frac{3}{2}R$	$\frac{5}{2}R$	$\frac{5}{3}$
2-atomiges Gas	3	2	5	$\frac{5}{2}R$	$\frac{7}{2}R$	$\frac{7}{5}$
3-atomiges Gas	3	3	6	$3R$	$4R$	$\frac{4}{3}$
feste Körper	3 kin.+ 3 pot.		6	$c_M \approx 3R$		

Abbildung 3.12: Spezifische Wärme von H_2 (schematisch).

3.3.4.1 Isobare Zustandsänderung

Eine **isobare Zustandsänderung** ist dadurch definiert, dass bei ihr der Druck p die ganze Zeit über konstant gehalten wird. Zur Bestimmung der dem System zugeführten Arbeit können wir daher den Druck aus dem Integral der Volumenarbeit herausziehen und erhalten

$$W_{\sphericalangle} = -p \int_{V_a}^{V_e} dV = -p(V_e - V_a) \quad \text{bei konstantem Druck.} \quad (3.3.18)$$

Dieser Ausdruck ist im Falle einer Expansion $V_e > V_a$ negativ, d.h. das Gas verrichtet Arbeit an der Umgebung, wohingegen ein positiver Wert im Falle einer Kompression bedeutet, dass die Umgebung effektiv Arbeit am Gas verrichtet.

Die umgesetzte Wärme erhalten wir mit Hilfe von $p \Delta V = \tilde{n} R \Delta T$ und Abschnitt 3.3.2.2 als

$$Q_{\sphericalangle} = C_p \tilde{n} \Delta T = \frac{p C_p}{R} (V_e - V_a) \quad \text{bei konstantem Druck.} \quad (3.3.19)$$

Die Summe aus $W_{\sphericalangle}$ und $Q_{\sphericalangle}$ entspricht laut 1. Hauptsatz der Änderung der inneren Energie des Gases, welche sich aus der Temperaturänderung ergibt, die mit der Volumenänderung einher geht.

3.3.4.2 Isotherme Ausdehnung und Umwandlung von Wärme in mechanische Arbeit

Wir haben in Kap. 3.2.6 ein Beispiel gesehen, in dem die Temperatur T eines Körpers durch eine Zufuhr von mechanischer Energie W erhöht wurde. Nun betrachten wir ein Beispiel, in dem eine Wärme Q mit einem (idealisierten) Wirkungsgrad von 100 % in mechanische Arbeit W umgewandelt wird.

Bei der Einführung der Volumenarbeit und des pV -Diagramms in 3.3.1 haben wir den Fall einer isothermen Expansion bereits angesprochen. Wir wollen dieses Beispiel nun eingehender behandeln und auch die Rolle der Wärme besprechen. Bei $T = \text{konst.}$ gilt für das ideale Gas $pV = \text{konst.}$, so dass sich der Druck p und das Volumen V während des gesamten Expansionsvorgangs gleichzeitig ändern. Im der Anordnung in Abb. 3.13 wird die Geschwindigkeit der Expansion mit Hilfe der Kraft F kontrolliert, die auf den Kolben wirkt.

Wenn das Gas expandiert, leistet es am Kolben die mechanische Arbeit W . Für eine kleine Expansion dV ist die vom idealen Gas *am Kolben* geleistete Arbeit gleich

$$\delta W_{\nearrow} = +p dV = +\frac{\tilde{n}RT}{V}dV \quad (3.3.20)$$

Würden wir dem Gas keine Wärme zuführen, käme die nötige Energie für diese Arbeit von der inneren Energie des Gases. Die Abnahme der inneren Energie würde als Temperaturabnahme des Gases beobachtet werden. Es folgt daraus:

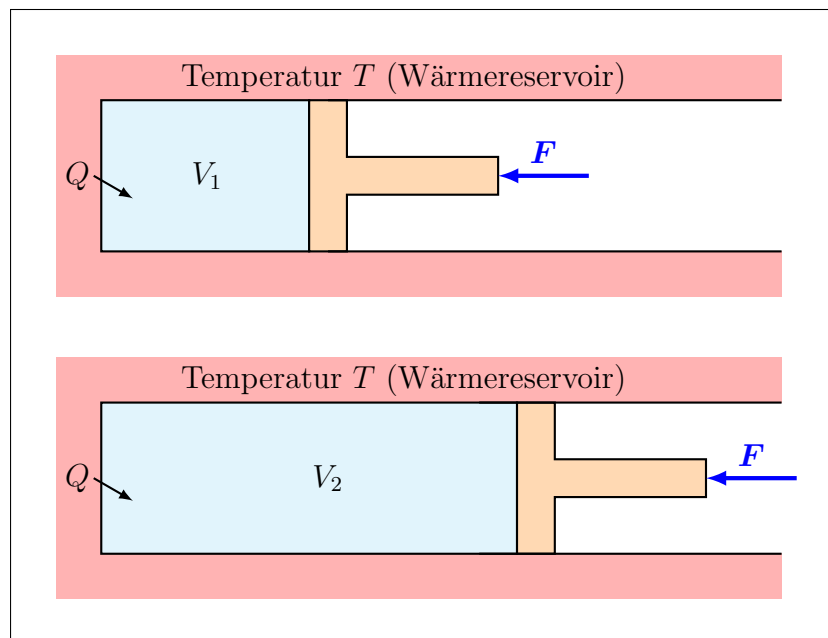


Abbildung 3.13: Isotherme Expansion eines Gases. Um die Temperatur des Gases während der Expansion konstant zu halten, muss Wärme zugeführt werden.

Um die Temperatur des Gases während der Expansion konstant zu halten, müssen wir gleichzeitig Wärme zuführen.

Da die innere Energie des idealen Gases nur von der Temperatur abhängt, siehe (3.3.15), folgt

$$T = \text{konst.} \Rightarrow U \equiv U(T) = \text{konst.} \Rightarrow dU = 0, \quad (3.3.21)$$

und mit dem 1. Hauptsatz der Thermodynamik gilt

$$dU = \delta Q^\leftarrow + \delta W^\leftarrow = 0 \Rightarrow \delta Q^\leftarrow = -\delta W^\leftarrow. \quad (3.3.22)$$

Weil die Temperatur des Gases konstant ist, wird die gesamte zugeführte Wärme in mechanische Arbeit umgewandelt.

Für die komplette **isotherme Expansion** ist die gesamte zugeführte Wärme $Q^\leftarrow$ gleich

$$\begin{aligned} Q^\leftarrow &= \int \delta Q^\leftarrow = - \int \delta W^\leftarrow = -W^\leftarrow = W^\rightarrow \\ &= \int_{V_1}^{V_2} p dV = \tilde{n}RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \tilde{n}RT \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right). \end{aligned} \quad (3.3.23)$$

Dies ist in Einklang mit der insgesamt geleisteten Arbeit, die wir bereits in (3.3.4) berechnet haben.

Im Fall des idealen Gases entspricht eine Kurve im pV -Diagramm mit $pV = \text{konst.}$ einer bestimmten Temperatur bzw. inneren Energie. Das pV -Diagramm für die hier besprochene isotherme Expansion ist in Abb. 3.9 abgebildet.

3.3.4.3 Adiabatische Zustandsänderungen bei idealen Gasen

Im Folgenden beschäftigen wir uns mit Prozessen, bei denen sich zwar die Temperatur verändern kann, aber *keine* Wärmeabgabe an die Umgebung (oder Wärmeaufnahme aus der Umgebung) stattfinden kann. Es gilt also die ganze Zeit über $\delta Q = 0$. Man spricht in diesen Fällen von **adiabatischen** Prozessen (siehe Abb. 3.14). Dies ist z.B. dann der Fall, wenn das System wärmeisoliert ist oder falls der Prozess so rasch abläuft, dass die Wärmeabgabe an die Umgebung genügend klein ist.

Wir benutzen im Folgenden den 1. Hauptsatz, um uns zu überlegen, wie sich Volumen, Druck und Temperatur bei einem idealen Gas ändern, wenn wir es adiabatisch expandieren oder komprimieren.

- Nach dem Gleichverteilungssatz 3.3.3 gilt für das ideale Gas der Zusammenhang

$$dU = \tilde{n} N_A \frac{f}{2} k dT = \tilde{n} \frac{f}{2} R dT = \tilde{n} C_V dT. \quad (3.3.24)$$

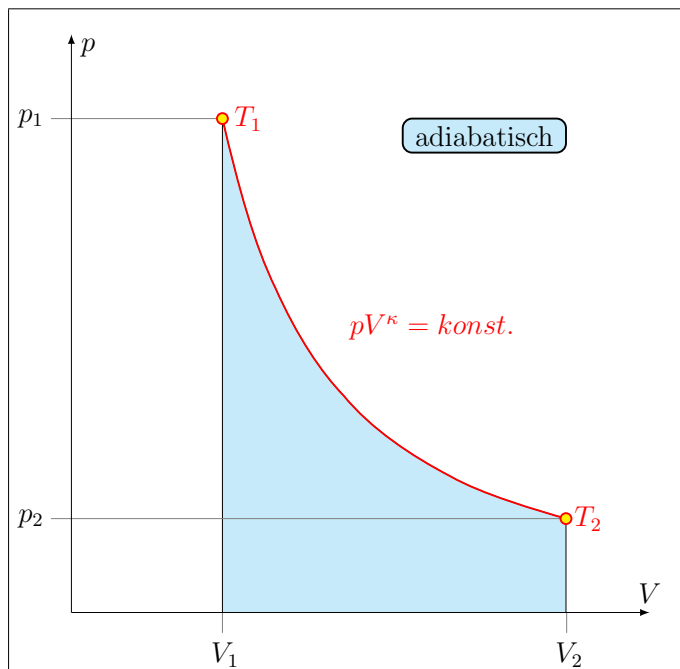


Abbildung 3.14: pV -Diagramm der adiabatischen Expansion des idealen Gases. Der Betrag der geleisteten Arbeit ist gleich der getönten Fläche.

- Bei einer adiabatischen Expansion ($\delta Q^\sphericalangle = 0$) gilt

$$dU = \delta Q^\sphericalangle + \delta W^\sphericalangle = \delta W^\sphericalangle = -p dV = -\frac{\tilde{n}RT}{V} dV. \quad (3.3.25)$$

- Indem wir diese beiden Ausdrücke gleichsetzen, erhalten wir die Differentialgleichung

$$\frac{dT}{T} = -\frac{R}{C_V} \frac{dV}{V}. \quad (3.3.26)$$

- Einsetzen des Adiabatenkoeffizienten $\kappa = \frac{C_p}{C_V}$ ergibt

$$\frac{R}{C_V} = \frac{C_p - C_V}{C_V} = \kappa - 1.$$

- Falls κ konstant ist, können wir sofort integrieren und erhalten

$$\ln T = -(\kappa - 1) \ln V + konst. \quad (3.3.27)$$

und daraus die sogenannten **Adiabatengleichungen**²³

$$\begin{aligned} TV^{\kappa-1} &= \text{konst.} \\ pV^{\kappa} &= \text{konst.} \\ T^{\kappa} p^{1-\kappa} &= \text{konst.} \end{aligned} \quad (3.3.28)$$

Abb. 3.15 zeigt die adiabatische und die isotherme Zustandänderung im Vergleich.

Beispiel: Komprimieren von Luft

Wir komprimieren Luft ($\kappa \approx 1,4$) adiabatisch auf 1/10 des Anfangsvolumens V_a . Wie ändern sich dabei Druck ($p_a = 1$ bar) und Temperatur ($T_a = 27^\circ\text{C} = 300$ K)?

$$\begin{aligned} p_e V_e^{\kappa} &= p_a V_a^{\kappa} & ; & \quad p_e = p_a \left(\frac{V_a}{V_e} \right)^{\kappa} = 25,1 \text{ bar} \\ T_e V_e^{\kappa-1} &= T_a V_a^{\kappa-1} & ; & \quad T_e = T_a \left(\frac{V_a}{V_e} \right)^{\kappa-1} = 753 \text{ K} = 480^\circ\text{C} \end{aligned} \quad (3.3.29)$$

Man beachte, dass die allgemeine Gasgleichung $pV = \tilde{n}RT$ *immer* gilt, auch bei adiabatischen Prozessen. Wir können deshalb das zweite Resultat auch aus der allgemeinen

²³Häufig auch als Poisson'sche Gleichungen bezeichnet, nicht zu verwechseln mit der Poisson-Gleichung in der Elektrostatik.

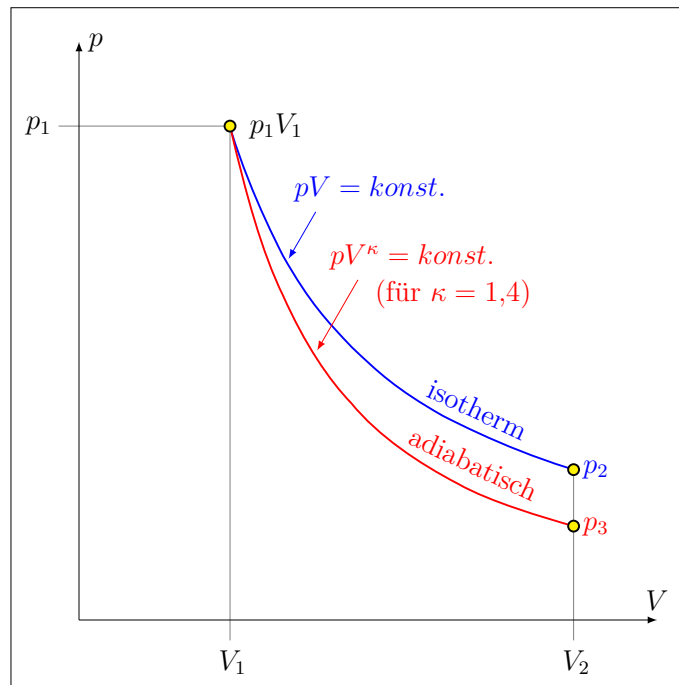


Abbildung 3.15: Vergleich der isothermen und adiabatischen Expansion des idealen Gases.

Gasgleichung herleiten:

$$\frac{\tilde{n} R T_e}{\tilde{n} R T_a} = \frac{p_e V_e}{p_a V_a} = \left(\frac{V_a}{V_e} \right)^{\kappa-1} = \frac{T_e}{T_a}. \quad (3.3.30)$$

3.3.4.4 C_p/C_V -Messung nach Ruchardt

Mit einer periodischen adiabatischen Kompression und Expansion kann man den Adiabatenkoeffizient κ experimentell bestimmen. Hierfür verschliesst man ein gasgefülltes Gefäß des Volumens V mit einem beweglichen Kolben. Dieser wird nun fallengelassen und komprimiert zunächst das Gas, was zu einer Temperaturerhöhung führt. Im weiteren Verlauf führt der Kolben eine harmonische Schwingung aus.

Nach Gl. 3.3.26 gilt

$$C_V dT = -RT \frac{dV}{V} \quad (3.3.31)$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{T} = -\frac{R}{C_V} \frac{dV}{V} = -\frac{R}{Rf/2} \frac{dV}{V} \quad (3.3.32)$$

Die relative Temperaturänderung ist demnach von der Anzahl Freiheitsgrade f abhängig und beträgt

$$\boxed{\frac{dT}{T} = -\frac{2}{f} \frac{dV}{V} = -(\kappa - 1) \frac{dV}{V}}. \quad (3.3.33)$$

Diese Temperaturänderung kann mit einem feinen Kupferdraht gemessen werden, dessen elektrischer Widerstand temperaturabhängig ist und der so dünn gewählt werden kann, dass seine Wärmekapazität vernachlässigbar ist. Aus den Messwerten kann dann mit obiger Formel κ bestimmt werden.

3.4 Kreisprozesse und der Zweite Hauptsatz der Thermodynamik

Wir haben mit dem 1. Hauptsatz gesehen, dass Wärme nichts anderes ist als eine besondere Form der Energie. In einem abgeschlossenen System ist die gesamte Energie konstant, aber es ist möglich verschiedene Energieformen ineinander umzuwandeln. Der 2. Hauptsatz der Thermodynamik setzt solchen Umwandlungen jedoch Grenzen. Wir formulieren ihn zuerst in Worten (Kap. 3.4.1: Phänomenologie) und besprechen seine Konsequenzen bei der Betrachtung thermodynamischer Kreisprozesse (Kap. 3.4.2), verknüpfen ihn dann mit den mikroskopischen Effekten (Kap. 3.4.3: Entropie, Wahrscheinlichkeit, Ordnung) und gehen schliesslich zu seiner mathematischen Formulierung über (Kap. 3.4.4).

3.4.1 Phänomenologie

Der 2. Hauptsatz basiert auf experimentellen Erkenntnissen von Thomson²⁴ und Clausius²⁵ und ist nicht beweisbar. Er gehört daher zu den phänomenologischen Gesetzen. Die beiden folgenden Formulierungen der Erkenntnisse von Thomson und Clausius stellen jeweils eine **phänomenologische Formulierung des 2. Hauptsatzes** dar.

1. Thomson:

Es gibt keine *periodisch wirkende* Vorrichtung (Maschine **M**), die es gestattet, einem Körper (Wärmereservoir) Wärme (δQ) zu entziehen und in Arbeit zu verwandeln, ohne dass Veränderungen im System oder in der Umgebung zurückbleiben.

Der umgekehrte Prozess, die vollständige Verwandlung von Arbeit in Wärme ist hingegen ohne weiteres möglich (siehe Abb. 3.16).

2. Clausius:

Es gibt keine *periodisch wirkende* Vorrichtung (Maschine **M**), welche gestattet, Wärme von einem Reservoir tieferer Temperatur (T_K) zu einem mit höherer Temperatur ($T_W > T_K$) zu transportieren, ohne dass dazu Arbeit geleistet oder sonst von aussen Energie zugeführt wird.

Das Umgekehrte ist hingegen ohne weiteres möglich: Wärme fließt „von selbst“ von wärmeren Körpern ($T_W > T_K$) zu kälteren (siehe Abb. 3.17).

Die beiden Formulierungen implizieren einander und sind daher äquivalent.

²⁴William Thomson, Lord Kelvin (1824 - 1907)

²⁵Rudolf Clausius (1822 - 1888)

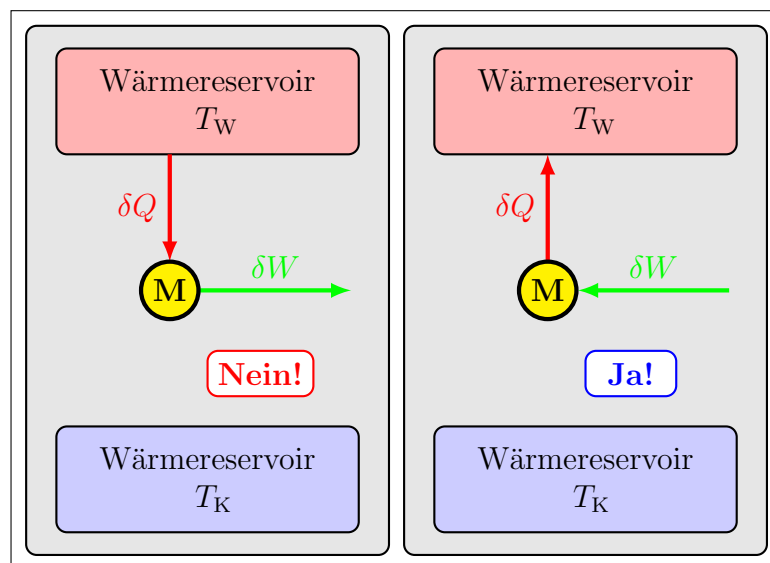


Abbildung 3.16: Prinzip von Thomson.

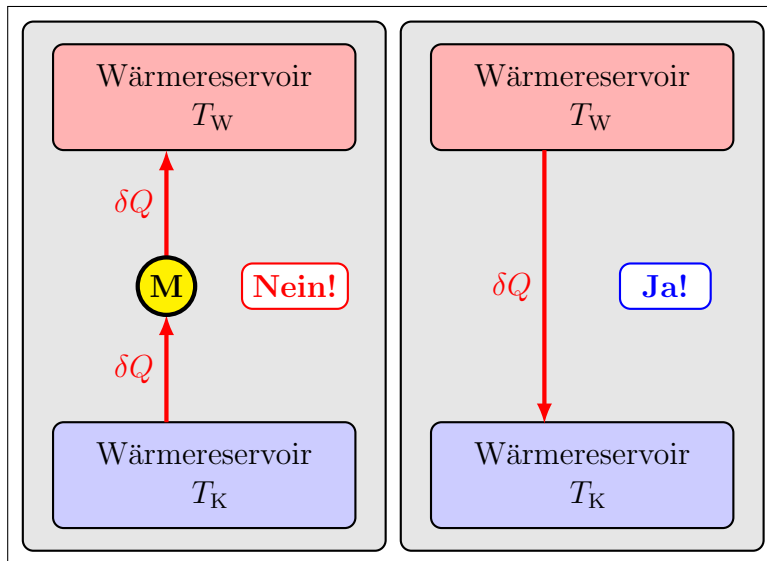


Abbildung 3.17: Prinzip von Clausius.

3.4.2 Thermodynamische Kreisprozesse

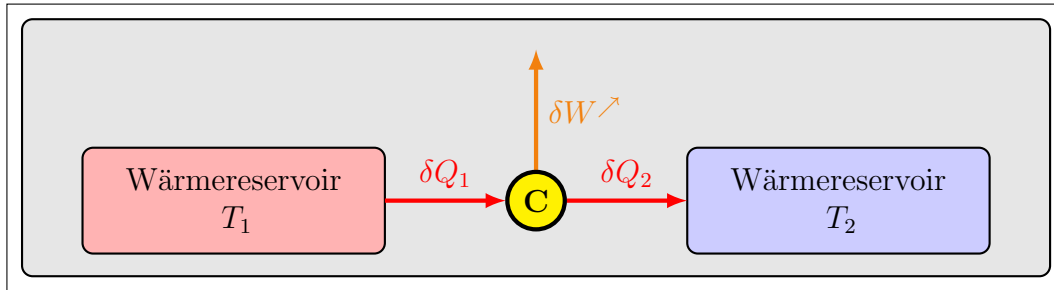
Ein Kreisprozess (zyklischer Prozess) ist ein Vorgang, dessen Endzustand seinem eigenen Anfangszustand entspricht. Solche Kreisprozesse eignen sich beispielsweise um eine Maschine zu beschreiben und in einem pV -Diagramm darzustellen. Bei der Betrachtung von Kreisprozessen werden wir auf einige der weitreichenden Auswirkungen des 2. Hauptsatzes stoßen.

Wir unterscheiden zwei Kategorien von Maschinen. Als **Wärmekraftmaschine** bezeichnen wir Maschinen, die Wärme in Arbeit umwandeln. Den umgekehrten Prozess, das Aufwenden von Arbeit um einen Wärmefluss von einem kalten zu einem warmen Reservoir zu erzeugen, bezeichnen wir als **Wärmepumpe** oder **Kältemaschine**. Wärmepumpen und Kältemaschinen unterscheiden sich lediglich in ihrem Zweck: Wärmepumpen dienen der Erwärmung des warmen Reservoirs, Kältemaschinen der Kühlung des kalten Reservoirs.

Wir betrachten zuerst die Carnot-Maschine als idealisiertes Konzept, dann den Stirlingmotor als realen Versuchsaufbau und abschliessend zwei Verbrennungsmotoren als technische Anwendungen (Ottomotor und Dieselmotor).

3.4.2.1 Carnot-Maschine

Die Carnot-Maschine ist ein idealisiertes Modell einer Maschine, die einem Wärmereservoir bei einer Temperatur T_1 Wärme entnimmt und diese teilweise in Arbeit umwandelt. Die verbleibende Wärme wird an ein zweites Wärmereservoir der Temperatur $T_2 < T_1$ abgegeben (siehe Abb. 3.18). Die Carnot-Maschine ist demnach eine Wärmekraftmaschine. Nach einem Kreislauf befindet sich das Arbeitsgas wieder im Anfangszustand. Das pV -Diagramm ist in Abb. 3.19 dargestellt und enthält die folgenden Zustandsübergänge.

Abbildung 3.18: Prinzip einer Wärmekraftmaschine C .

1. **A:** ($1 \rightarrow 2$): isotherme Expansion
2. **B:** ($2 \rightarrow 3$): adiabatische Expansion
3. **C:** ($3 \rightarrow 4$): isotherme Kompression
4. **D:** ($4 \rightarrow 1$): adiabatische Kompression

Allgemein definieren wir den **Wirkungsgrad einer Wärmekraftmaschine** als Quotient aus der während eines Zyklus aus der Maschine gewonnenen Arbeit ($\delta W^\nearrow$ in Abb. 3.18) und der während diesem Zyklus der Maschine vom wärmeren Reservoir aus zugeführten Wärme (δQ_1 in Abb. 3.18):

$$\eta = \frac{\text{gewonnene Arbeit}}{\text{vom warmen Reservoir zugeführte Wärme}}. \quad (3.4.1)$$

Wir wollen nun den Wirkungsgrad der Carnot-Maschine berechnen. Diese verwendet als Arbeitsmedium ein ideales Gas. Wir rechnen dabei mit der *konstanten* Gasmenge $\tilde{n}$ und vernachlässigen alle Verluste.

Wie wir bereits gelernt haben, entspricht die Fläche unter einer Kurve im pV -Diagramm der Arbeit, die vom System an der Umgebung verrichtet wird. Ein Kreisprozess besteht aus der Aneinanderreihung mehrerer solcher Kurven. Die gesamte während eines Zyklus an der Umgebung verrichtete Arbeit ist nun die Summe der Integrale der einzelnen Kurven. Dies entspricht gerade der vom Kreisprozess eingeschlossenen Fläche. Für die Carnot-Maschine sind die positiven und negativen Beiträge zur verrichteten Arbeit in Abb. 3.20 als Schraffuren markiert. Anhand dieser Überlegungen sieht man auch, dass ein im Uhrzeigersinn laufender Kreisprozess insgesamt eine positive Arbeit an der Umgebung leistet und somit einer Wärmekraftmaschine entspricht. Umgekehrt ist die gesamte an der Umgebung verrichtete Arbeit in einem gegen den Uhrzeigersinn laufenden Kreisprozess negativ. Das System nimmt Energie in Form von Arbeit auf und entspricht einer Wärmepumpe oder Kältemaschine.

Um die insgesamt verrichtete Arbeit der Carnot-Maschine zu bestimmen, müssen wir die Arbeit in jedem Schritt berechnen und die Ergebnisse aufsummieren.

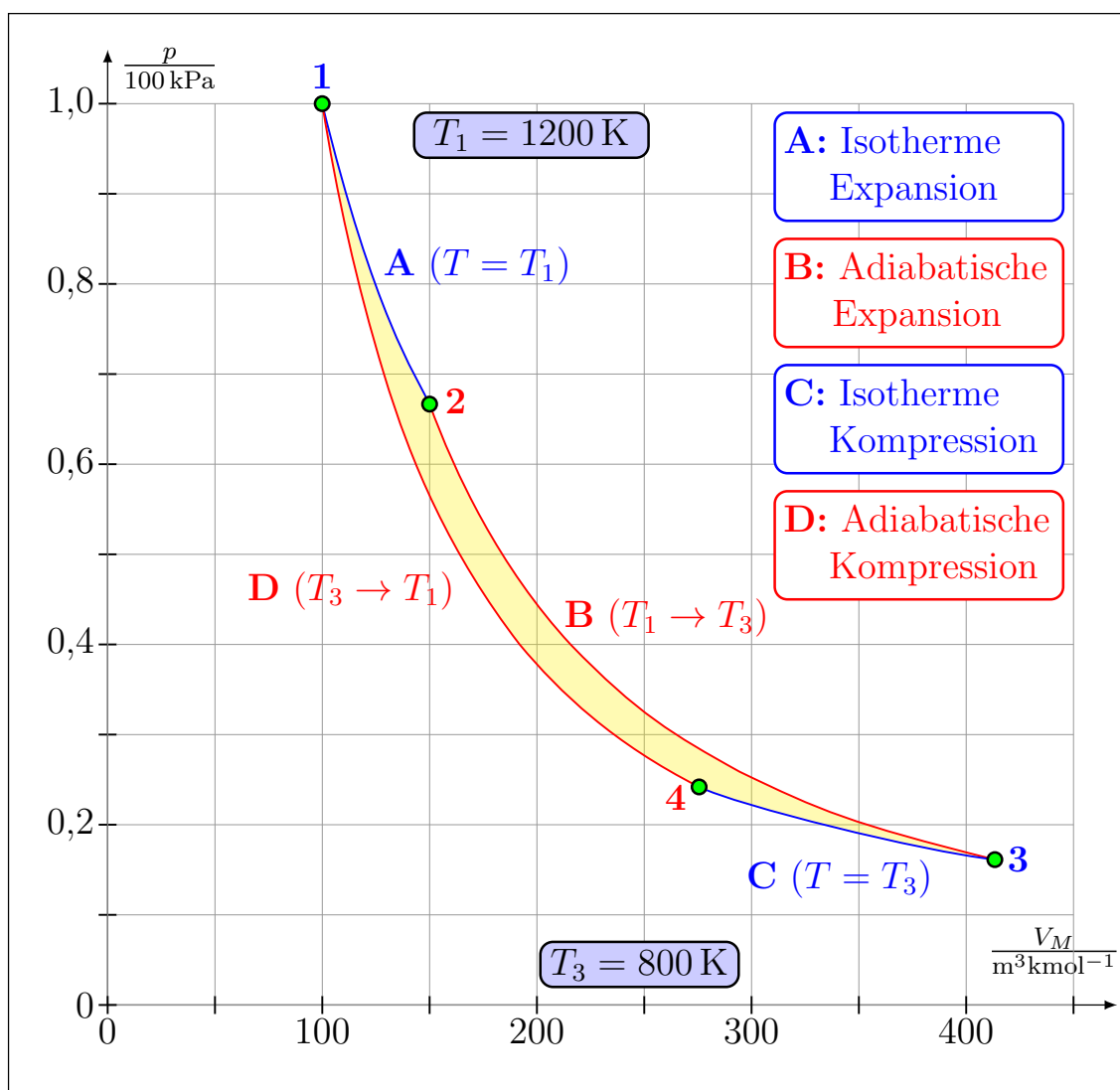


Abbildung 3.19: Das pV -Diagramm des Carnot'schen Kreisprozesses (maßstäbliche Darstellung). Der Betrag der verrichteten Arbeit ist gleich der getönten Fläche.

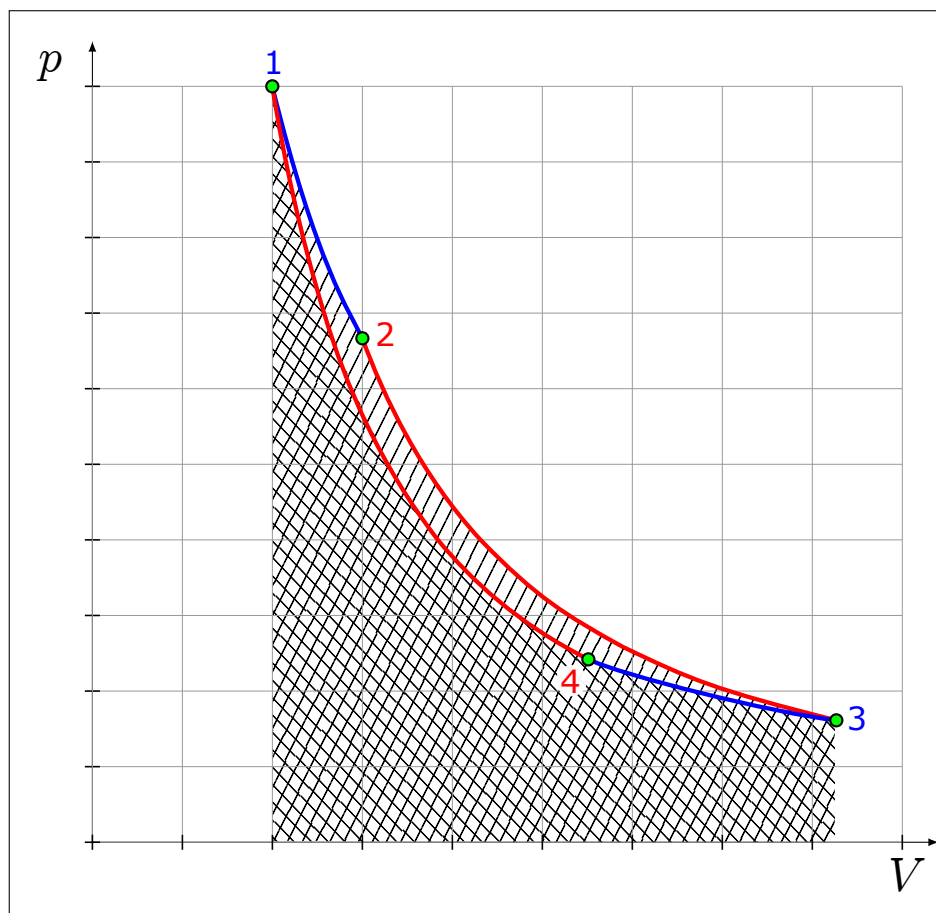


Abbildung 3.20: Betrachtung der Arbeit in einer qualitativen Darstellung des pV -Diagramms aus Abb. 3.19. Positive Beiträge zur verrichteten Arbeit ($1 \rightarrow 2$ und $2 \rightarrow 3$) sind aufsteigend schraffiert ($//$), negative Beiträge ($3 \rightarrow 4$ und $4 \rightarrow 1$) absteigend ($\backslash\backslash$). Dabei entscheidet die Integrationsrichtung, ob der Beitrag positiv oder negativ ist. Im gekreuzt schraffierten Bereich heben sich die positiven und negativen Beiträge gerade auf. Die während eines Zyklus verrichtete Arbeit entspricht der ausschliesslich aufsteigend schraffierten Fläche. Dies ist genau diejenige Fläche, die vom Kreisprozess eingeschlossen wird.

Im ersten Schritt wird das Gas *isotherm* vom Volumen V_1 auf das Volumen V_2 expandiert. Das Gas ist in Kontakt mit einem Wärmereservoir, so dass die Temperatur bei der Expansion konstant bleibt ($T \equiv T_1$).

Bei der Expansion verrichtet das Gas über den Kolben die Arbeit

$$\begin{aligned}\delta W_1^{\nearrow} &= \int F ds = \int_{V_1}^{V_2} p dV \\ &= \tilde{n} R T_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \tilde{n} R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}.\end{aligned}\quad (3.4.2)$$

Da sich die innere Energie U des Gases bei diesem Prozess nicht ändert, muss gemäss 1. Hauptsatz eine gleich grosse Wärmemenge $\delta Q_1^{\swarrow} = \delta W_1^{\nearrow}$ aus dem Wärmereservoir in das Gas gelangen.

Im zweiten Schritt wird das Gas dann *adiabatisch* vom Volumen V_2 auf das Volumen V_3 expandiert. Dabei verringert sich die Temperatur von T_1 auf T_3 (vgl. Kap. 3.3.4.3), ohne dass von aussen Wärme zu- oder abgeführt wird. Die Differenz der inneren Energien wird als Arbeit nach aussen abgegeben:

$$\delta W_2^{\nearrow} = \tilde{n} C_V (T_1 - T_3), \quad (3.4.3)$$

wobei $U_i = \tilde{n} \frac{f}{2} R T_i = \tilde{n} C_V T_i$ für das ideale Gas verwendet wurde (vgl. Abschnitt 3.3.3). Die beiden anderen Schritte lassen sich analog analysieren. Das Resultat ist in Tabelle 3.4 zusammengefasst. Es empfiehlt sich, die Ergebnisse für die einzelnen Schritte als Übung jeweils mit den Methoden aus Abschnitt 3.3.4 nachzurechnen.

Es sei angemerkt, dass die Drücke und Volumina der vier Zustände eines Carnot-Kreislaufs nicht beliebig gewählt werden können.

Tabelle 3.4: Schritte der Carnot-Maschine. Wärmeres Wärmereservoir: $T_w \equiv T_1$, kälteres Wärmereservoir: $T_k \equiv T_3$

Schritt	A: (1 → 2)	B: (2 → 3)	C: (3 → 4)	D: (4 → 1)
Prozess	isotherme Expansion	adiabatische Expansion	isotherme Kompression	adiabatische Kompression
Volumen	$V_1 \rightarrow V_2$	$V_2 \rightarrow V_3$	$V_3 \rightarrow V_4$	$V_4 \rightarrow V_1$
Temperatur	T_w	$T_w \rightarrow T_k$	T_k	$T_k \rightarrow T_w$
Arbeitsabgabe	$\delta W_1^{\nearrow} = \tilde{n} R T_w \ln \frac{V_2}{V_1}$	$\delta W_2^{\nearrow} = \tilde{n} C_V (T_w - T_k)$	$\delta W_3^{\swarrow} = \tilde{n} R T_k \ln \frac{V_3}{V_4}$	$\delta W_4^{\swarrow} = \tilde{n} C_V (T_w - T_k)$
Wärmezufuhr	$\delta Q_1^{\swarrow} = \tilde{n} R T_w \ln \frac{V_2}{V_1}$	0	$\delta Q_2^{\nearrow} = \tilde{n} R T_k \ln \frac{V_3}{V_4}$	0

Für die beiden adiabatischen Schritte 2 und 4 gilt nach Gl. 3.3.28:

$$T_1 V_2^{\kappa-1} = T_3 V_3^{\kappa-1} \quad (3.4.4)$$

$$T_1 V_1^{\kappa-1} = T_3 V_4^{\kappa-1}. \quad (3.4.5)$$

Diese beiden Gleichungen sind zeitunabhängig, da alle vorkommenden Größen Konstanten sind. Wir können sie also dividieren und erhalten

$$\frac{T_1 V_2^{\kappa-1}}{T_1 V_1^{\kappa-1}} = \frac{T_3 V_3^{\kappa-1}}{T_3 V_4^{\kappa-1}}. \quad (3.4.6)$$

Nach dem Ziehen der Wurzel, erhalten wir schliesslich die Bedingung

$$V_1 \cdot V_3 = V_2 \cdot V_4, \quad (3.4.7)$$

die eine Folge davon ist, dass der Zyklus geschlossen ist. Die Bedingungen dafür, dass der Kreislauf geschlossen ist, sind in Tabelle 3.5 angegeben.

Als Wirkungsgrad der Carnot-Wärmekraftmaschine erhalten wir den **Carnot-Wirkungsgrad**

$$\eta_C = \frac{\text{gewonnene Arbeit}}{\text{zugeführte Wärme}} = \frac{\delta W_1^{\nearrow} + \delta W_2^{\nearrow} - \delta W_3^{\swarrow} - \delta W_4^{\swarrow}}{\delta Q_1^{\swarrow}} = \frac{T_1 - T_3}{T_1} < 1. \quad (3.4.8)$$

Die Energiedifferenz zwischen der gewonnenen Arbeit und der zugeführten Wärme $\delta Q_1^{\swarrow}$ wird in Form von Wärme $\delta Q_2^{\nearrow}$ an das kältere Reservoir abgegeben.

Der Wirkungsgrad dieser idealisierten Wärmekraftmaschine ist von grosser Bedeutung, weil sich zeigt, dass jede **reale Wärmekraftmaschine** einen *kleineren Wirkungsgrad* hat:

$$\eta_{\text{real}} < \eta_C = \frac{T_w - T_k}{T_w}, \quad (3.4.9)$$

wobei wir zur besseren Unterscheidung von warm und kalt T_1 durch T_w und T_3 durch T_k ersetzt haben.

Tabelle 3.5: Notwendige Bedingungen für die Geschlossenheit des Carnot-Kreislaufs ($\kappa = C_p/C_V$, $\alpha := T_1/T_3 > 1$ und $\beta := V_1/V_2 < 1$).

i	p_i/p_1	V_i/V_1
1	1	1
2	β	$1/\beta$
3	$\beta \alpha^{\frac{\kappa}{1-\kappa}}$	$\alpha^{\frac{1}{\kappa-1}}/\beta$
4	$\alpha^{\frac{\kappa}{1-\kappa}}$	$\alpha^{\frac{1}{\kappa-1}}$

Um diesen wichtigen Satz beweisen zu können, untersuchen wir zunächst die Auswirkungen einer *rückwärts*, also gegen den Uhrzeigersinn, laufenden Carnot-Maschine. In diesem Fall pumpen wir Wärme ($\delta Q_1^{\nearrow}$) in das wärmere Reservoir hinein (siehe Abb. 3.21) und wenden dafür Arbeit auf. Eine gegen den Uhrzeigersinn laufende Carnot-Maschine ist also wie erwartet eine Wärmepumpe bzw. Kältemaschine.

Da die Wärmepumpe zum Ziel hat, dem wärmeren Reservoir Wärme zufließen zu lassen, definieren wir den **Wirkungsgrad einer Wärmepumpe** als

$$\eta_W = \frac{\text{zum warmen Reservoir abgeführte Wärme}}{\text{zugeführte Arbeit}} = \frac{1}{\eta}. \quad (3.4.10)$$

Für die Carnot-Wärmepumpe ergibt sich ein Wirkungsgrad von²⁶

$$\eta_W = \frac{\delta Q_1^{\nearrow}}{\delta W_{\nearrow}} = \frac{T_w}{T_w - T_k} = \frac{1}{\eta_C} > 1. \quad (3.4.11)$$

Ein Wirkungsgrad > 1 steht dabei nicht im Widerspruch zur Energieerhaltung, da wir bei der Definition des Wirkungsgrades einer Wärmepumpe die aus dem kalten Reservoir als Wärme an das Arbeitsgas zugeführte Energie nicht berücksichtigen.

Eine Kältemaschine dient dem Entziehen von Wärme aus dem kühleren Reservoir. Der **Wirkungsgrad einer Kältemaschine** ist daher definiert als

$$\eta_K = \frac{\text{vom kalten Reservoir zugeführte Wärme}}{\text{zugeführte Arbeit}}. \quad (3.4.12)$$

Eine rückwärts laufende Carnot-Maschine hat als Kältemaschine einen Wirkungsgrad von

$$\eta_K = \frac{\delta Q_2^{\searrow}}{\delta W_{\searrow}} = \frac{T_k}{T_w - T_k}. \quad (3.4.13)$$

Dies hat zur Folge, dass $\eta_K \rightarrow 0$ für $T_k \rightarrow 0$, was bedeutet, dass es umso schwieriger wird, die Temperatur eines kalten Reservoirs (z.B. das Innere eines Kühlschranks) weiter zu senken, je tiefer seine Temperatur bereits ist.

²⁶Eine reale Wärmepumpe erreicht stets kleinere Werte.

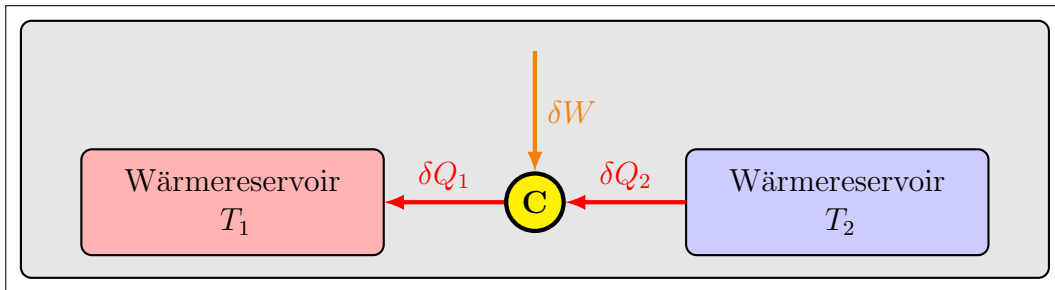


Abbildung 3.21: Carnot-Maschine als Wärmepumpe.

Um die zuvor aufgestellte Behauptung zu beweisen, dass keine Wärmekraftmaschine einen höheren Wirkungsgrad als η_C haben kann, wollen wir einen Widerspruchsbeweis konstruieren. Wir nehmen an, es gäbe eine Super-Wärmekraftmaschine mit $\eta_S > \eta_C$. Wir verwenden diese zum Antrieb einer Carnot-Wärmepumpe (siehe Abb. 3.22). Die dem Wärmereservoir $T_w = T_1$ entnommene Wärmemenge δQ_1 liefert die Arbeit

$$\delta W = \eta_S \delta Q_1 \quad (3.4.14)$$

mit der die Carnot-Wärmepumpe angetrieben wird. Diese pumpt die Wärmemenge $\delta Q'_1$ zurück ins Wärmereservoir T_w und es gilt

$$\begin{aligned} \delta Q'_1 &= \eta_W \delta W = \eta_W \eta_S \delta Q_1 \\ &= \frac{\eta_S}{\eta_C} \delta Q_1 > \delta Q_1. \end{aligned} \quad (3.4.15)$$

Damit könnten wir das warme Reservoir immer weiter erwärmen und das kalte immer weiter abkühlen, ohne dass wir von aussen Arbeit oder eine sonstige Form von Energie zuführen müssten. Dies widerspricht dem Prinzip von Clausius. Alternativ könnten wir auch einen Teil der Arbeit auskoppeln, indem wir nur das eine Reservoir abkühlen, was wiederum nach Thomsons Formulierung des 2. Hauptsatzes verboten ist. Unsere Annahme einer Super-Wärmekraftmaschine steht also im Widerspruch zu beiden phänomenologischen Formulierungen des 2. Hauptsatzes.

Wir haben gezeigt, dass es keine Wärmekraftmaschine mit einem Wirkungsgrad grösser η_C geben kann und haben bereits die Aussage gemacht, dass keine reale Wärmekraftmaschine diesen Wirkungsgrad erreichen kann. Nun wollen wir genauer darauf eingehen, welche Bedingungen eine, wenn auch fiktive, Wärmekraftmaschine erfüllen muss, um einen Wirkungsgrad von η_C zu erreichen. Es lässt sich zeigen, dass die Reversibilität des betrachteten Kreisprozesses eine hinreichende und notwendige Bedingung dafür darstellt.

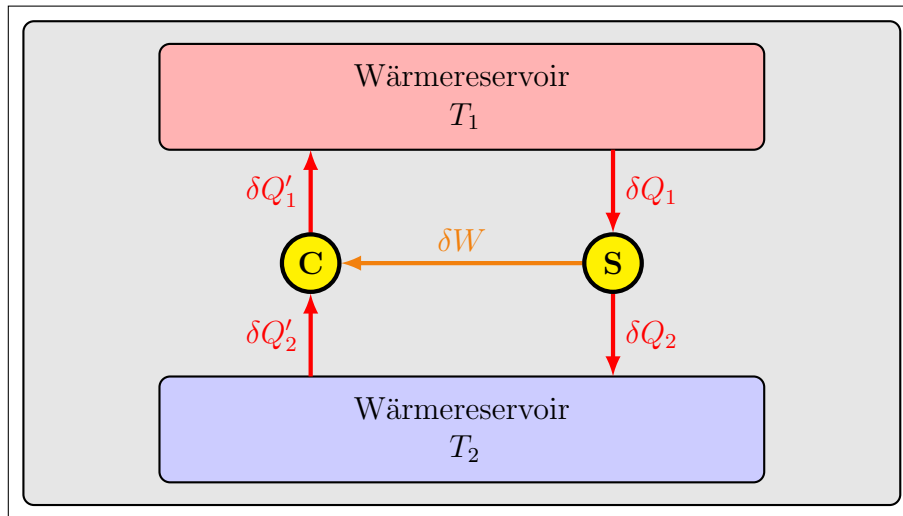


Abbildung 3.22: Anordnung für den Widerspruchsbeweis gegen die Existenz einer Super-Wärmekraftmaschine **S**.

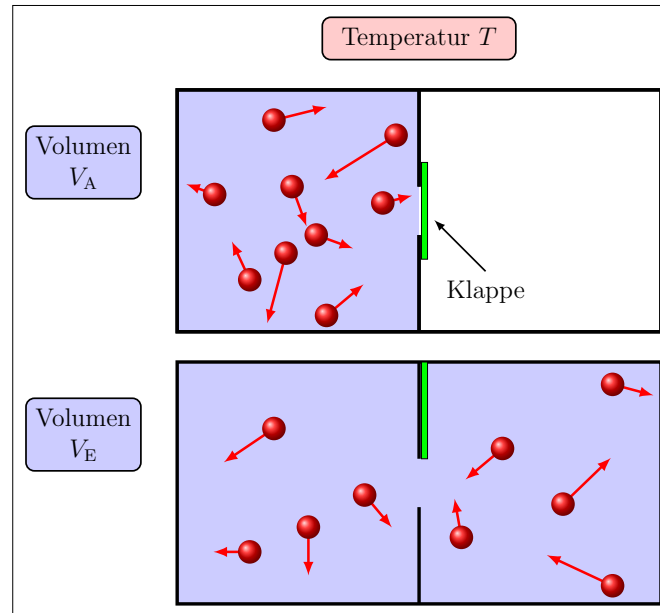


Abbildung 3.23: Die (irreversible) freie Expansion eines Gases im Vakuum. Die Klappe wird zu einer bestimmten Zeit geöffnet und das Gas expandiert. Die Temperatur des Gases ändert sich nicht während der Expansion.

Ein Vorgang heisst **reversibel**, wenn seine Umkehrung derart möglich ist, dass keine Änderungen jedweder Art im System oder in der Umgebung (bspw. den Reservoirs) zurückbleiben.

Um dieser Definition zu entsprechen, muss ein Vorgang die folgenden Bedingungen erfüllen.

- Es darf keine mechanische Energie durch dissipative Effekte (z.B. Reibung) in Wärme umgesetzt werden.
- Wärme darf nur zwischen Objekten (Gase, Reservoirs, Festkörper, etc.) mit infinitesimal geringer Temperaturdifferenz übertragen werden.
- Der Vorgang muss quasi-statisch ablaufen, d.h. das System muss sich durchgehend im thermodynamischen Gleichgewicht befinden. Dies kann dadurch erreicht werden, dass der Vorgang genügend langsam abläuft, sodass die Dauer des Vorgangs ein Vielfaches über der zum Erreichen des thermodynamischen Gleichgewichts benötigten Zeit liegt.

Irreversible Vorgänge sind zum Beispiel: Verwandlung von kinetischer Energie in Wärme durch Reibung, Wärmeleitung zwischen Systemen verschiedener Temperatur, Durchmischen von Gasen, rasches Ausströmen eines Gases in Vakuum (siehe Abb. 3.23).

Es wird klar, dass reversible Vorgänge ein theoretisches Konstrukt sind und in der Realität höchstens näherungsweise durchgeführt werden können. Dennoch ist ihre Betrachtung für Rückschlüsse auf reale Maschinen äusserst relevant, wie wir am Beispiel der Carnot-Maschine gesehen haben.

3.4.2.2 Stirlingmotor

Als erstes Beispiel einer realen Wärmekraftmaschine betrachten wir den Stirlingmotor,²⁷ einen Heissluftmotor, der ohne Ventile auskommt. Das Arbeitsgas der Maschine ist Luft und die Maschine arbeitet zwischen zwei Temperaturen. Zwei Kolben (der Verdrängerkolben **V** und der Arbeitskolben **A**) werden vom Schwungrad **S** bewegt (siehe Abb. 3.24). Der Kolben **V** ist um eine Phasendifferenz von 90° gegenüber dem Kolben **A** verschoben.

Dadurch wird die Luft periodisch zwischen dem „heissen“ (T_W) und dem „kalten“ (T_K) Teil der Maschine verschoben. In der Praxis kann das kalte Reservoir Kühlwasser und das warme Reservoir die Flamme eines Bunsenbrenners sein.

Der Kreislauf besteht aus zwei Isothermen und zwei Isochoren (siehe Abb. 3.25).

1. **A: (1 → 2):** Isotherme Expansion bei $T = T_1$ mit Arbeitabgabe.
2. **B: (2 → 3):** Isochore Abkühlung: Verdrängerkolben drängt Arbeitsgas in den Kalt-raum. Dabei kühlt das Gas auf $T = T_3$ ab.
3. **C: (3 → 4):** Isotherme Kompression bei $T = T_3$ durch Kolben (Arbeitsaufnahme).
4. **D: (4 → 1):** Isochore Erwärmung: Verdrängerkolben drängt Arbeitsgas in den Heissraum. Dabei erwärmt sich das Gas auf $T = T_1$.

Im Experiment messen wir die Temperatur im unteren Teil des Gasbehälters. Sie beträgt ca. 400°C . Das Kühlwasser hat eine Temperatur von ca. 20°C . Wir beobachten:

1. Bewegen wir das Schwungrad **S** im Gegenuhrzeigersinn, dann *läuft die Maschine nicht*.
2. Bewegen wir das Schwungrad **S** im Uhrzeigersinn, dann beginnt die Maschine frei zu laufen. Die Laufgeschwindigkeit wird schliesslich durch Reibungsverluste begrenzt.
3. Die Stirling-Maschine kann auch „umgekehrt“ laufen: Wir ersetzen die Flamme durch flüssigen Stickstoff mit einer Temperatur von ca. -200°C .
4. Schliesslich kann die Maschine als eine Wärmepumpe verwendet werden: Wir halten dazu die Maschine an und bewegen das Schwungrad mittels eines Griffes. Wir leisten Arbeit von aussen, und die Maschine wird als Wärmepumpe betrieben: Sie entnimmt Wärme aus dem kälteren Reservoir, um sie an das wärmere abzugeben.

²⁷Robert Stirling (1790 - 1878)

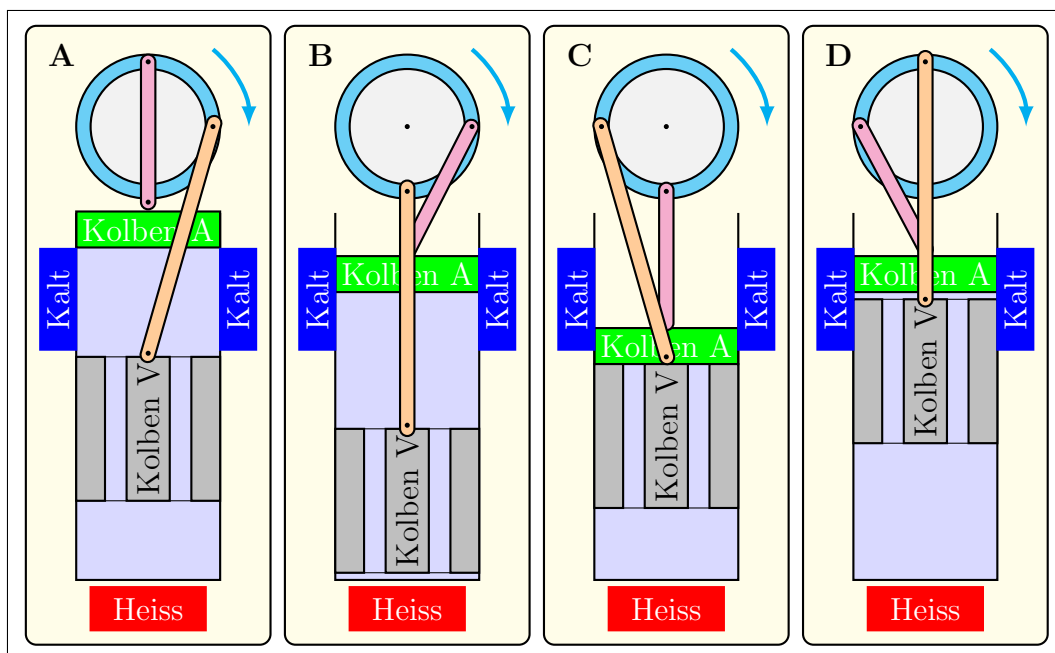


Abbildung 3.24: Illustration des Kreislaufs der Wärmekraftmaschine von Stirling.

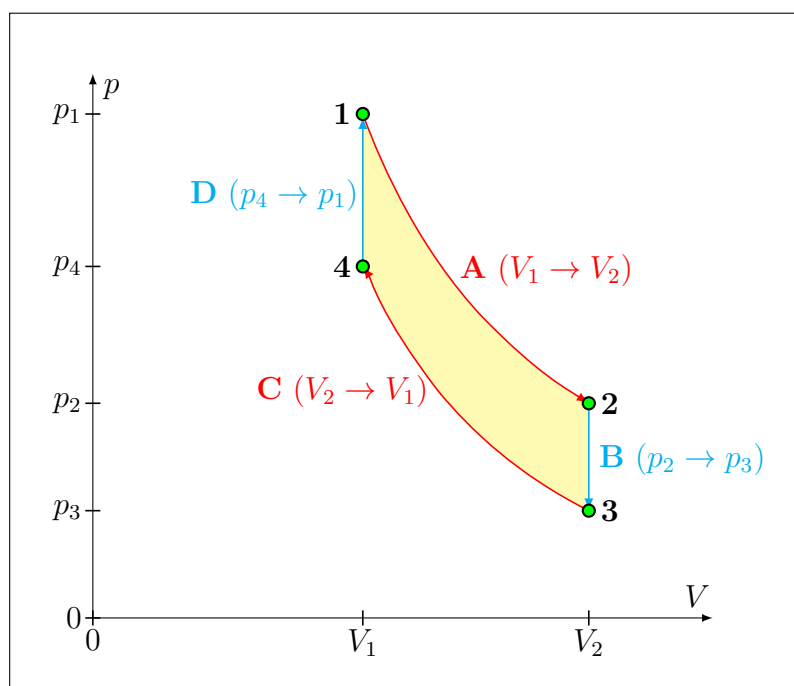


Abbildung 3.25: Schematisches pV -Diagramm des Stirlingmotors. Der Betrag der verrichteten Arbeit ist gleich der getönten Fläche.

3.4.2.3 Verbrennungsmotoren

Abschliessend betrachten wir zwei Beispiele technischer Realisierungen von Verbrennungsmotoren, die ebenfalls als Wärmekraftmaschinen beschrieben werden können.

Ottomotor (Benzinmotor), siehe Abb. 3.26:

1. **A: (0 → 1)**: Ansaugen des Benzin-Luftgemischs bei konstantem Druck,
2. **B: (1 → 2)**: adiabatische Kompression,
3. **C: (2 → 3)**: Wärmezufuhr durch Verbrennen des Benzins (Explosion),
4. **D: (3 → 4)**: Arbeitshub,
5. **E: (4 → 1)**: Ausströmen der heissen Gase,
6. **F: (1 → 0)**: Kolben wird geleert.

Dieselmotor, siehe Abb. 3.27:

Grundsätzlich ähnlich wie beim Ottomotor. Der Brennstoff wird aber erst bei (**C: 2 → 3**) eingespritzt, und zwar so, dass der Druck annähernd konstant bleibt. Damit ist eine höhere Kompression und ein besserer Wirkungsgrad möglich.

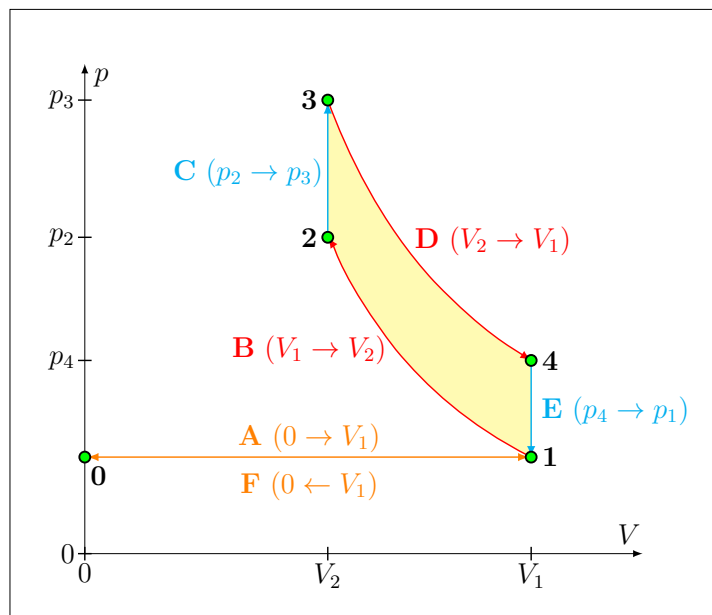


Abbildung 3.26: Schematisches pV -Diagramm des Ottomotors. Der Betrag der verrichteten Arbeit ist gleich der getönten Fläche

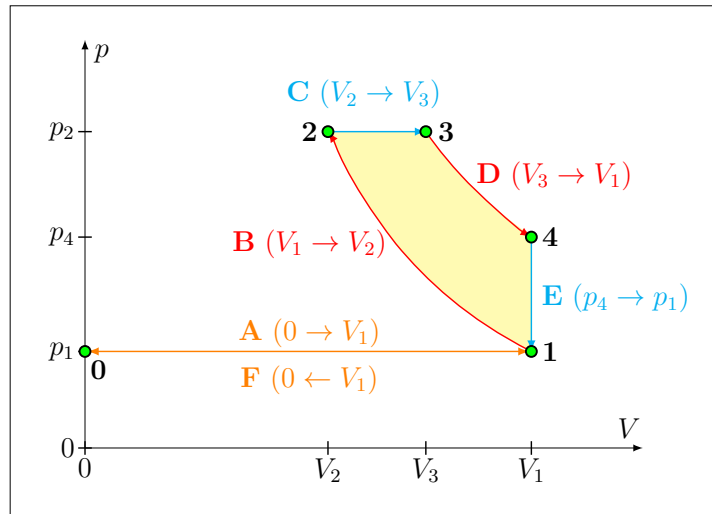


Abbildung 3.27: Schematisches pV -Diagramm des Dieselmotors. Der Betrag der verrichteten Arbeit ist gleich der getönten Fläche.

3.4.3 Entropie, Wahrscheinlichkeit, Ordnung

Die bisher besprochenen Formulierungen des 2. Hauptsatzes liefern für viele irreversible Prozesse in der Natur keine direkte Erklärung, warum diese irreversibel sind. Ein Beispiel hierfür ist die freie Expansion eines Gases im Vakuum (siehe Abb. 3.23). Ein bemerkenswerte Eigenschaft in diesem Beispiel ist, dass die Unordnung des Systems zunimmt. Wie sich zeigen wird, ist dies auch für alle anderen irreversiblen Prozesse der Fall. Es erscheint sinnvoll, ein Mass für diese Unordnung zu definieren und sie genauer zu untersuchen. Dabei werden wir zunächst eine statistische (mikroskopische) Definition kennenlernen und im Anschluss unsere Definition auf thermodynamische Systeme erweitern.

Die **Entropie** S wird als weitere Zustandsgrösse eines Systems über die Formel

$$S = k \log \mathcal{W} \quad (3.4.16)$$

definiert, die auf Grund ihrer grossen Bedeutung sogar auf dem Grabstein von Ludwig Boltzmann verewigt ist.²⁸ Dabei können wir $\mathcal{W}$ als die Wahrscheinlichkeit interpretieren, dass der vorliegende Zustand realisiert ist.²⁹ Die Entropie kann als Mass der Unordnung

²⁸Zu besichtigen auf dem Wiener Zentralfriedhof, den zu besuchen auch sonst sehr interessant ist.

²⁹Diese Interpretation ist für die folgende anschauliche Diskussion nützlich, führt jedoch zu einer anderen Normierung als die thermodynamische Definition der Entropie, die wie später verwenden werden. Bei der Bildung der Differenz zweier Entropien spielt diese Normierung (multiplikativer Faktor innerhalb des Logarithmus) keine Rolle, da sie einer additiven Konstante ausserhalb des Logarithmus entspricht. Wer in der Literatur recherchieren möchte, wie die statistische und die thermodynamische Sichtweise ohne Normierungsunterschied zusammenpassen, recherchiert nach dem Begriff Phasenraumvolumen und interpretiert $\mathcal{W}$ als geeignet normiertes Phasenraumvolumen.

interpretiert werden. Wie schon die innere Energie U (oder auch p , V und T) hängt sie nur vom Zustand des Systems ab, nicht aber vom Weg zu diesem Zustand.

Beispiel:

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit $\mathcal{W}$, dass sich zufällig alle Moleküle der Stoffmenge $\tilde{n}$ eines idealen Gases in der linken Hälfte eines Behälters (Volumen V_1) aufhalten (siehe Abb. 3.28)? Das Gesamtvolumen, das zur Verfügung steht, beträgt V_0 . Für jedes einzelne Molekül beträgt die Wahrscheinlichkeit

$$w = \frac{V_1}{V_0}. \quad (3.4.17)$$

Für alle (als unabhängig angenommenen) Moleküle erhalten wir

$$\mathcal{W} = w^{N_A \tilde{n}} = \left(\frac{V_1}{V_0}\right)^{N_A \tilde{n}}. \quad (3.4.18)$$

Die Entropieänderung ΔS beim Übergang von einer beliebigen Verteilung³⁰ der Moleküle im Volumen V_0 zu einem Zustand, in dem alle im Volumen V_1 sind, beträgt

$$\Delta S = k \ln \mathcal{W} - k \ln 1 = -k N_A \tilde{n} \ln \frac{V_0}{V_1} = -R \tilde{n} \ln \frac{V_0}{V_1}. \quad (3.4.19)$$

Je kleiner das Volumen V_1 relativ zu V_0 ist, desto unwahrscheinlicher ist es alle Moleküle gleichzeitig dort vorzufinden, und desto stärker ist die Abnahme der Entropie. Damit wird die folgende Aussage motiviert (aufgrund der Erfahrung, dass solche extrem unwahrscheinlichen Zustände nicht beobachtet werden).

Jedes *abgeschlossene* System strebt seinem wahrscheinlichsten (ungeordnetsten) Zustand zu. Seine Entropie kann nie abnehmen:

$\Delta S \geq 0$

(3.4.20)

Diese Aussage ist für abgeschlossene Systeme gültig. Es kann also durchaus sein, dass die Entropie eines (nicht abgeschlossenen) Systems während einer Zustandsänderung abnimmt, indem gleichzeitig die Entropie der Umgebung um mindestens den gleichen Betrag zunimmt.

Neben der Definition über die Wahrscheinlichkeit, lässt sich die Entropie auch thermodynamisch definieren und berechnen. Wird bei der absoluten Temperatur T die Wärmemenge $\delta Q_{\text{rev}}^{\checkmark}$ reversibel zugeführt, so resultiert daraus die folgende Entropiezunahme:

$dS = \frac{\delta Q_{\text{rev}}^{\checkmark}}{T}$

(3.4.21)

³⁰Da *beliebig* keine besondere Anforderung an den realisierten Zustand stellt, ist die Wahrscheinlichkeit hierfür offensichtlich 1. Anders betrachtet lautet die Forderung in diesem Fall nur, dass sich jedes Teilchen innerhalb eines Volumens V_0 befindet, wenn insgesamt das Volumen V_0 zur Verfügung steht, also $w = V_0/V_0 = 1$.

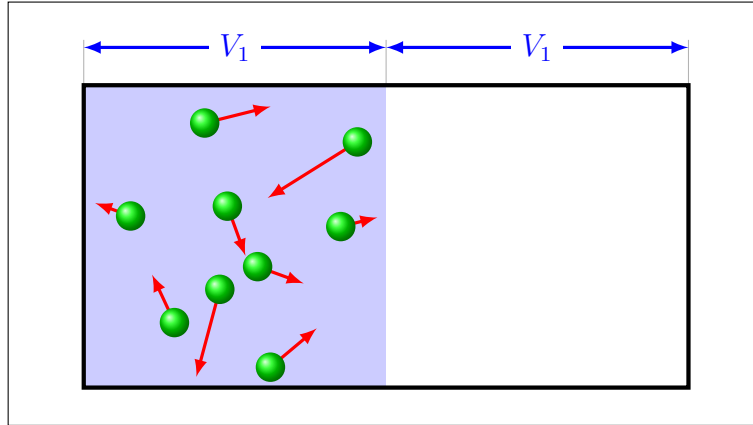


Abbildung 3.28: Zur Definition der Entropie: Besonders unwahrscheinliche Verteilung von Molekülen.

Die Entropie aller reinen Stoffe wird am absoluten Nullpunkt ($T = 0$) zu Null normiert.³¹

Mit der Definition in (3.4.21) berechnen wir noch einmal die Entropieänderung der Stoffmenge $\tilde{n}$ eines idealen Gases, wenn es vom Volumen V_0 *reversibel* auf das Volumen V_1 verdichtet wird. Wir bringen das Gas in Wärmekontakt mit einem Reservoir der Temperatur T und komprimieren isotherm (siehe Abb. 3.29).

Nach dem 1. Hauptsatz gilt

$$\delta Q_{\text{rev}}^{\leftarrow} + \delta W^{\leftarrow} = 0,$$

da sich die innere Energie des Gases bei konstanter Temperatur nicht ändert. Wir erhalten

$$\Delta S = \int dS = \int \frac{\delta Q_{\text{rev}}^{\leftarrow}}{T} = - \int \frac{\delta W^{\leftarrow}}{T} = \int_{V_0}^{V_1} \frac{p dV}{T} = R \tilde{n} \int_{V_0}^{V_1} \frac{1}{V} dV = -R \tilde{n} \ln \frac{V_0}{V_1}. \quad (3.4.22)$$

Wir erhalten somit aus dieser makroskopischen, thermodynamischen Rechnung das gleiche Resultat wie früher mit der mikroskopischen, statistischen Rechnung. Tatsächlich ist das immer der Fall. Der Beweis dafür würde hier zu weit führen.

Wollen wir die Entropieänderung eines irreversiblen Prozesses bestimmen, können wir einen reversiblen Prozess mit gleichem Anfangs- und Endzustand betrachten und dessen Entropieänderung mit obiger Definition berechnen. Da die Entropie eine Zustandsgrösse ist, entspricht die so bestimmte Entropieänderung im System der Änderung im Fall des irreversiblen Prozesses. Die beiden Fälle unterscheiden sich jedoch in Bezug auf die Entropieänderung in der Umgebung.

Um den Verlauf der Entropie während einer Zustandsänderung darzustellen, verwendet man ein **ST -Diagramm**. Für den Carnot-Prozess ist dieses in Abb. 3.30 abgebildet. Dabei

³¹Genauer: die Entropie von Reinkristallen, da nichtkristalline Stoffe auch bei $T \rightarrow 0$ eine Restentropie haben können. Ein solcher Referenzpunkt ist notwendig, da die Normierung der Entropie durch Betrachtung von Entropieänderungen in physikalischen System nicht eindeutig festgelegt wird, vgl. Fussnote 29.

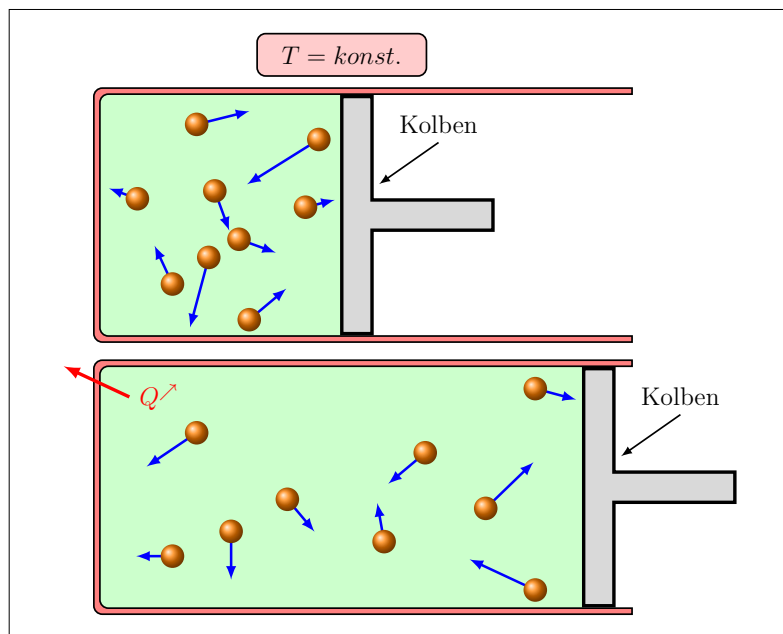


Abbildung 3.29: Die reversible (d.h., langsame) isotherme Kompression des idealen Gases. Um die Temperatur konstant zu halten, muss während der Verdichtung Wärme an ein Wärmebad abgeführt werden.

haben wir die Entropie auf der y -Achse und die Temperatur auf der x -Achse aufgetragen. In der Literatur ist teils auch die umgekehrte Konvention zu finden. Bei der Verwendung von ST -Diagrammen ist daher stets auf die Beschriftung der Achsen zu achten.

3.4.4 Mathematische Formulierung des 2. Hauptsatzes

Mit der Einführung der Entropie ergibt sich die folgende Formulierung des 2. Hauptsatzes. Für alle Zustandsänderungen in einem *abgeschlossenen* System (Volumen V und innere Energie U konstant³²) gilt

$$\Delta S \geq 0. \quad (3.4.23)$$

Für einen beliebigen *reversiblen Kreisprozess* gilt

$$\oint dS = \oint \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T} = 0. \quad (3.4.24)$$

Bei allen realen (irreversiblen) Vorgängen nimmt die Entropie zu. Bei idealisierten reversiblen Kreisprozessen bleibt sie konstant. Sie kann nie von selbst abnehmen. Damit wird eine Zeitrichtung (Vergangenheit $\rightarrow$ Zukunft) ausgezeichnet.

³²Die Forderung nach konstantem Volumen ergibt sich daraus, dass eine Volumenänderung dV zu einer Energieübertragung in Form von Arbeit $\delta W = -pdV$ führen würde.

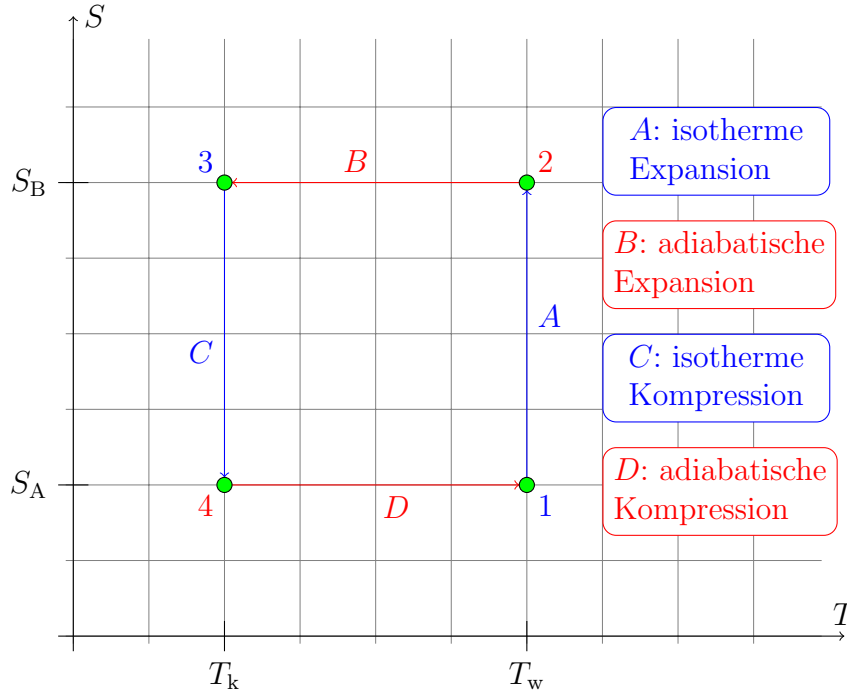


Abbildung 3.30: Das ST -Diagramm für den Carnot-Prozess. Bei adiabatischen Zustandsänderungen wird keine Wärme ausgetauscht und somit laufen diese Zustandsänderungen isentrop (mit konstanter Entropie) ab.

Beispiel Wärmekraftmaschine:

Wir betrachten erneut die Carnot-Maschine (vgl. Kap. 3.4.2). Diese entnimmt (im idealisierten Modell reversibel) die Wärmemenge $\delta Q_1^\leftarrow > 0$ aus dem Reservoir 1 bei der Temperatur T_w und führt dem Reservoir 2 (wiederum reversibel) die Wärmemenge $\delta Q_2^\rightarrow > 0$ bei T_k zu. Da die Entropie eine Zustandsgrösse ist, hat das Gas nach einem vollständigen Umlauf des Kreisprozesses wieder die gleiche Entropie wie zu Beginn. Die Entropieänderung des gesamten Systems während eines Umlaufs entspricht demnach der Entropieänderung der Reservoirs, die durch

$$\Delta S = \frac{\delta Q_2^\rightarrow}{T_k} + \frac{\delta Q_1^\leftarrow}{T_w} = \frac{\delta Q_2^\rightarrow}{T_k} - \frac{\delta Q_1^\leftarrow}{T_w} \geq 0. \quad (3.4.25)$$

gegeben ist. Die Ungleichung gilt, da nach dem zweiten Hauptsatz $\Delta S \geq 0$ ist (mit Gleichheit bei reversiblen Prozessen). Daraus folgt

$$\frac{\delta Q_2^\rightarrow}{\delta Q_1^\leftarrow} \geq \frac{T_k}{T_w}. \quad (3.4.26)$$

Da die innere Energie des Gases nach dem Durchlaufen des Kreisprozesses wieder ihrem Anfangswert entspricht, folgt nach dem ersten Hauptsatz

$$\delta W^\leftarrow + \delta Q_1^\leftarrow + \delta Q_2^\leftarrow = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta Q_1^\leftarrow = \delta W^\rightarrow + \delta Q_2^\rightarrow. \quad (3.4.27)$$

Daraus folgt für den Wirkungsgrad:

$$\eta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\delta W^{\nearrow}}{\delta Q_1^{\nearrow}} = \frac{\delta Q_1^{\nearrow} - \delta Q_2^{\nearrow}}{\delta Q_1^{\nearrow}} = 1 - \frac{\delta Q_2^{\nearrow}}{\delta Q_1^{\nearrow}} \leq 1 - \frac{T_k}{T_w} = \frac{T_w - T_k}{T_w}. \quad (3.4.28)$$

Im reversiblen Fall (Carnot-Maschine) gilt das Gleichheitszeichen.

Das ist das gleiche Resultat wie bereits in Abschnitt 3.4.2.1. Für die Herleitung über die Entropie benötigen wir jedoch kein Wissen über den inneren Mechanismus der Maschine und müssen keine aufwändigen Rechnungen durchführen.

3.5 Reale Gase und Flüssigkeiten

In den meisten bisherigen Diskussionen haben wir angenommen, dass ein Gas die Bedingungen des idealen Gases erfüllt. Allerdings ist klar, dass es unter realen Bedingungen Wechselwirkungen zwischen den Gasteilchen gibt, und dass letztere auch eine endliche Ausdehnung haben. Im Folgenden werden wir sehen, welche Effekte sich einstellen, wenn dies berücksichtigt wird.

3.5.1 Zustandsgleichung nach van der Waals

Aus rein phänomenologischen Überlegungen ergibt sich, dass die Wechselwirkung zwischen den Gasteilchen und deren endliche Ausdehnung zu folgender Abänderung der allgemeinen Gasgleichung führt:

$$\left(p + \frac{a \tilde{n}^2}{V^2} \right) (V - \tilde{n} b) = \tilde{n} R T. \quad (3.5.1)$$

Mit dem Molvolumen $V_M := \frac{V}{\tilde{n}}$ erhalten wir

$$\left(p + \frac{a}{V_M^2} \right) (V_M - b) = R T. \quad (3.5.2)$$

Verglichen mit der Zustandsgleichung von idealen Gasen treten zwei Korrekturen auf:

1. Zum äusseren Druck p addiert sich der sog. **Binnendruck** $p_i = a \tilde{n}^2 / V^2$, der von der Anziehung der Moleküle herrührt. Dies vermindert die Möglichkeit der Moleküle Impuls zu übertragen.
2. Vom Volumen V müssen wir das sog. **Kolvolumen** subtrahieren. Dieses kann man mit $b \approx 4 N_A \Omega$ abschätzen, wobei Ω das Eigenvolumen eines Moleküls ist.

In Abbildung 3.31 ist für ein reales Gas der Druck p als Funktion des Molvolumens V_M mit der Temperatur als Parameter wiedergegeben. Für hohe Temperaturen (hier ca. $T > 340$ K) verhält sich das reale Gas wie ein ideales Gas. Allerdings ergeben sich bei niedrigeren Temperaturen deutliche Abweichungen von diesem Verhalten.

Am kritischen Punkt (**K**) hat die Isotherme entsprechender Temperatur einen Sattelpunkt. Aus dessen Eigenschaften lassen sich die Werte p_K , $V_{M,K}$, T_K am Punkt **K** ermitteln.³³

Wir lösen die Zustandsgleichung nach p auf und erhalten

$$p = \frac{RT}{V_M - b} - \frac{a}{V_M^2}. \quad (3.5.3)$$

³³Zur besseren Lesbarkeit schreiben wir p_K , $V_{M,K}$ und T_K in der Herleitung ohne den Subskript K und fügen diesen erst im Endergebnis wieder hinzu.

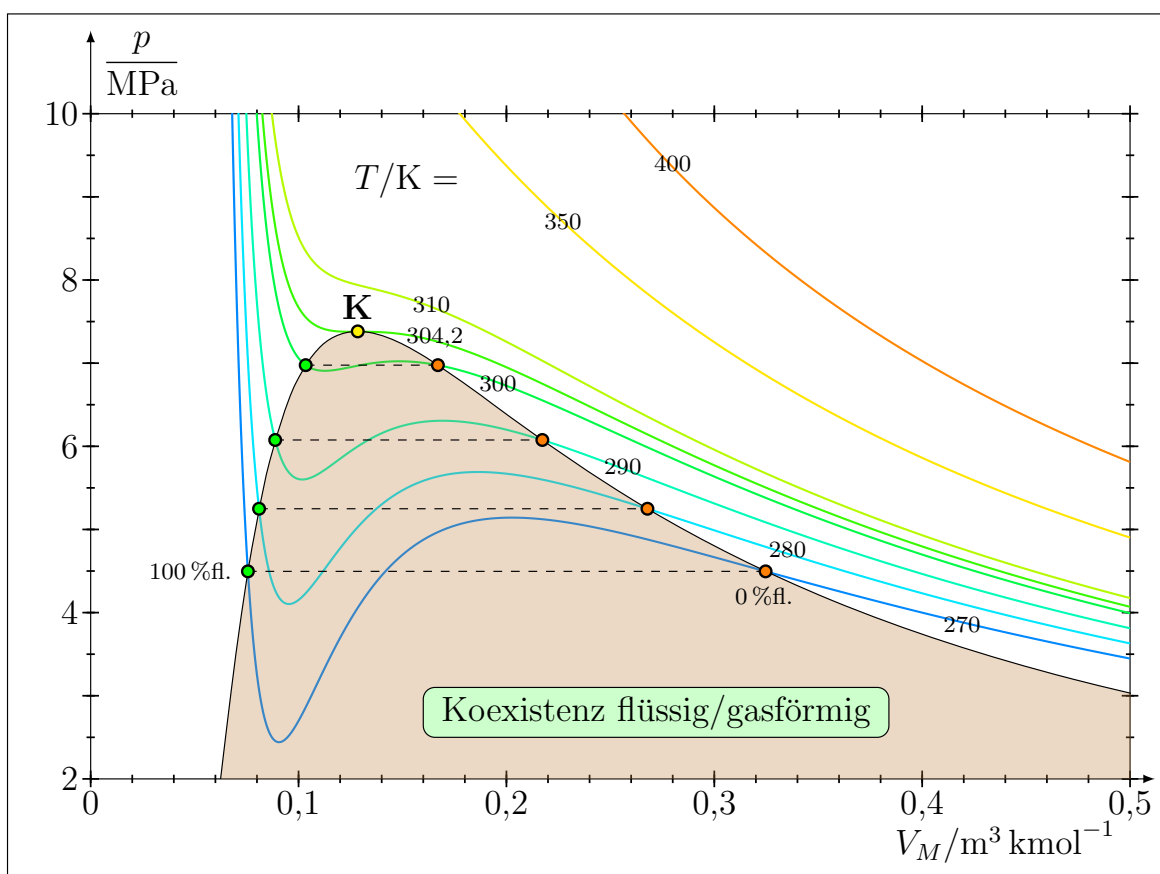


Abbildung 3.31: Isothermen für CO_2 nach van der Waals im pV_M -Diagramm. Innerhalb des Koexistenzbereiches folgt das Gemisch nicht der durchgezogenen Kurve, sondern der gestrichelten Linie bei konstantem Druck.

Die 1. Ableitung verschwindet am Sattelpunkt und es folgt

$$0 = \frac{\partial p}{\partial V_M} = -\frac{RT}{(V_M - b)^2} + \frac{2a}{V_M^3} \quad (3.5.4)$$

$$\Rightarrow RTV_M^3 = 2a(V_M - b)^2. \quad (3.5.5)$$

Auch die 2. Ableitung verschwindet und wir erhalten die Bedingung

$$0 = \frac{\partial^2 p}{\partial V_M^2} = \frac{2RT}{(V_M - b)^3} - \frac{6a}{V_M^4} \quad (3.5.6)$$

$$\Rightarrow 2RTV_M^4 = 6a(V_M - b)^3. \quad (3.5.7)$$

Nach Division von Gl. 3.5.7 durch Gl. 3.5.5 erhalten wir das kritische Volumen $V_{M,K} = 3b$. Durch Einsetzen von $V_{M,K}$ in Gl. 3.5.5 erhalten wir die kritische Temperatur T_K und schliesslich den kritischen Druck p_K durch Einsetzen von $V_{M,K}$ und T_K in Gl. 3.5.3:

$V_{M,K} = 3b,$	$T_K = \frac{8}{27} \frac{a}{bR},$	(3.5.8)
$p_K = \frac{1}{27} \frac{a}{b^2},$	$\frac{p_K V_{M,K}}{R T_K} = \frac{3}{8}.$	

Unterhalb der kritischen Temperatur setzen neue Effekte ein: Wenn man für $T < T_K$ von grossen Molvolumen her kommend (rechte Seite in der Abbildung) das Volumen verkleinert, steigt der Druck nur solange, bis die Koexistenzphase “flüssig/gasförmig” erreicht wird. Von da an bewirkt eine weitere Volumenreduktion eine Verflüssigung eines Teils des Gases derart, dass der Druck dabei konstant bleibt. Hier wird also die Wechselwirkung zwischen den Gasteilchen sehr relevant, ansonsten könnte kein Übergang von gasförmig zu flüssig erfolgen. Die Isotherme folgt in diesem Gebiet nicht der theoretischen Kurve, sondern einer horizontalen Geraden (konstanter Druck, gestrichelte Linien in Abb. 3.31). Beim Eintritt von rechts her sind 0 % des Stoffes flüssig; beim Austritt aus dem Koexistenzgebiet links ist der Stoff vollständig (zu 100 %) verflüssigt. Geht man von diesem Punkt noch weiter nach links, so steigt die Isotherme steil an, da sich Flüssigkeiten nur geringfügig komprimieren lassen.

Oberhalb der kritischen Temperatur kann das Gas auch bei grösstem Druck nicht verflüssigt werden. Einige Beispiele für Parameter von realen Gasen sind in Tabelle 3.6 aufgeführt.

3.5.2 Dampfdruck

3.5.2.1 Dampfdruckkurve

Für eine gegebene Menge $\tilde{n}$ einer Substanz erhalten wir aus der Zustandsgleichung den Druck $p = p(V, T)$ als Funktion von Volumen und Temperatur. Im Gebiet der Koexistenz

Tabelle 3.6: Van der Waals'sche Parameter für verschiedene Gase

Substanz	a Pa m ⁶ kmol ⁻²	b m ³ kmol ⁻¹	$V_{M,K}$ m ³ kmol ⁻¹	T_K K	p_K kPa
He	3 450	$24,8 \cdot 10^{-3}$	$73,8 \cdot 10^{-3}$	5,3	222
N ₂	140 800	$39,8 \cdot 10^{-3}$	$119,4 \cdot 10^{-3}$	126,1	3 290
CO ₂	365 600	$44,2 \cdot 10^{-3}$	$132,6 \cdot 10^{-3}$	304,2	7 160

von Gas und Flüssigkeit hängt der Druck p in weiten Bereichen (vgl. Abb. 3.31) nur von der Temperatur T und nicht vom Volumen V ab. Die Gleichung

$$p_d = p_d(T) \quad (3.5.9)$$

wird als **Dampfdruckkurve** bezeichnet. Die Kurve ist begrenzt durch den Tripelpunkt (Koexistenzpunkt des gasförmigen, flüssigen und festen Zustands) und den kritischen Punkt. In Abb. 3.32 ist die Dampfdruckkurve für Wasser eingezeichnet. Sie zeigt jenen Druck, bei dem die gasförmige Phase des Stoffes mit seiner flüssigen Phase im Gleichgewicht ist, als Funktion der Temperatur T .

3.5.2.2 Gleichung von Clausius-Clapeyron

Die Steigung der Dampfdruckkurve dp_d/dT wird durch die Gleichung von **Clausius-Clapeyron** beschrieben. Wir leiten diese mithilfe des zweiten Hauptsatzes her.

Wir betrachten dazu ein reales Gas und durchlaufen den in Abb. 3.33 dargestellten Kreisprozess reversibel. Dabei ist $T_1 > T_2$. Für diese reversible Wärmekraftmaschine ist der Wirkungsgrad gegeben durch

$$\eta_C = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{\Delta T}{T_1} = \frac{\delta W}{\delta Q_1} = \frac{\Delta p \cdot (V_d - V_f)}{L(T_1)} \quad (3.5.10)$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta p}{\Delta T} = \frac{L(T_1)}{(V_d - V_f) T_1}, \quad (3.5.11)$$

wobei V_d und V_f das Volumen des Dampfes bzw. der Flüssigkeit bezeichnen und $L(T_1)$ die zur Verdampfung benötigte Wärme ist.

Im Grenzfall eines infinitesimalen Temperaturunterschieds ($\Delta T \rightarrow dT$) folgt daraus mit der (auf die Masse bezogenen) **spezifischen Verdampfungswärme**³⁴ $L_m(T)$:

$$\boxed{\frac{dp_d}{dT} = \frac{L_m}{T (V_{m,d} - V_{m,f})}} \quad (3.5.12)$$

³⁴Die Verdampfungswärme ist selbst leicht von der Temperatur abhängig. Für Wasser gilt z.B. $L_m(0^\circ\text{C}) = 2503 \text{ kJ/kg}$, $L_m(100^\circ\text{C}) = 2256 \text{ kJ/kg}$ und $L_m(T_K) = 0$.

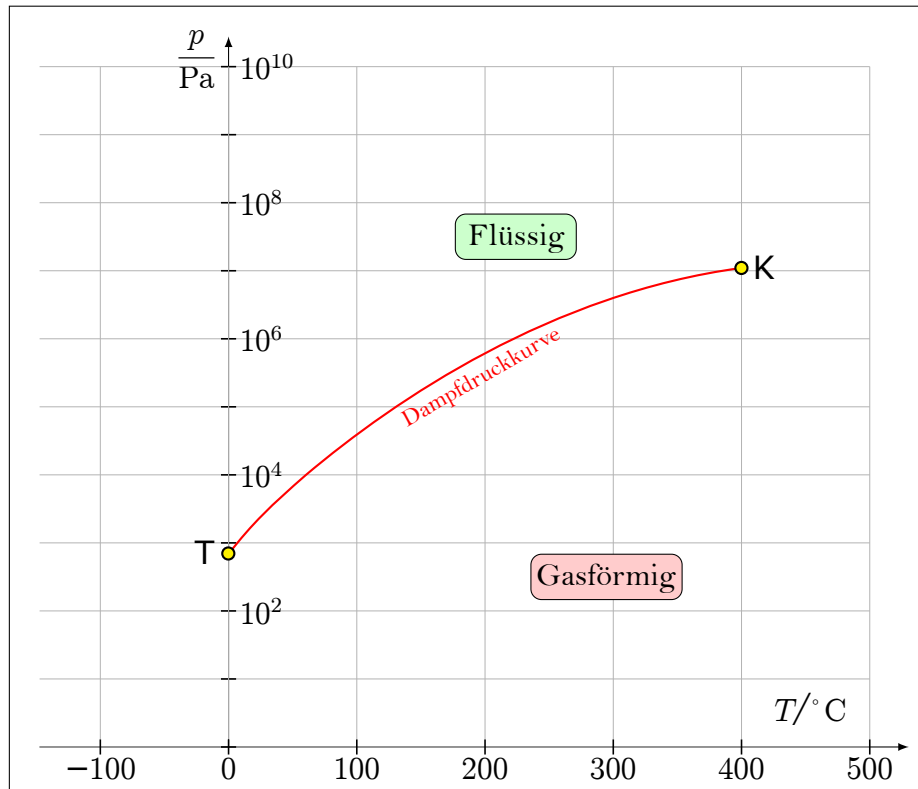


Abbildung 3.32: Dampfdruckkurve für H_2O mit kritischem Punkt **K** und Tripelpunkt **T**. Ein möglicher Übergang zum festen Zustand ist hier noch nicht berücksichtigt und wird zu einem späteren Zeitpunkt betrachtet.

Dabei sind $V_{m,d} = 1/\rho_d$ und $V_{m,f} = 1/\rho_f$ das spezifische Volumen des Dampfes bzw. der Flüssigkeit, und T ist die absolute Temperatur.³⁵ Auf die Stoffmenge bezogen erhält man entsprechend

$$\frac{dp_d}{dT} = \frac{L_M}{T(V_{M,d} - V_{M,f})}. \quad (3.5.13)$$

3.5.2.3 Bemerkung zur Hygrometrie

Luft ist ein Gemisch aus verschiedenen Gasen, darunter auch Wasserdampf. Der Anteil des Wasserdampfes am Gesamtdruck des Gemisches wird Partialdruck genannt. Dieser entspricht dem Druck, den die Wasserteilchen bei gleicher Temperatur in dem gleichen Volumen ausüben würden, wenn die anderen Anteile des Gemisches nicht vorhanden wären. Da Wasser nur sehr langsam verdampft, ist dieser Partialdruck p_{eff} i.a. verschieden vom

³⁵Übungsaufgabe: Bei welcher Temperatur siedet das Wasser bei einem Barometerstand von $p = 890 \text{ hPa}$?

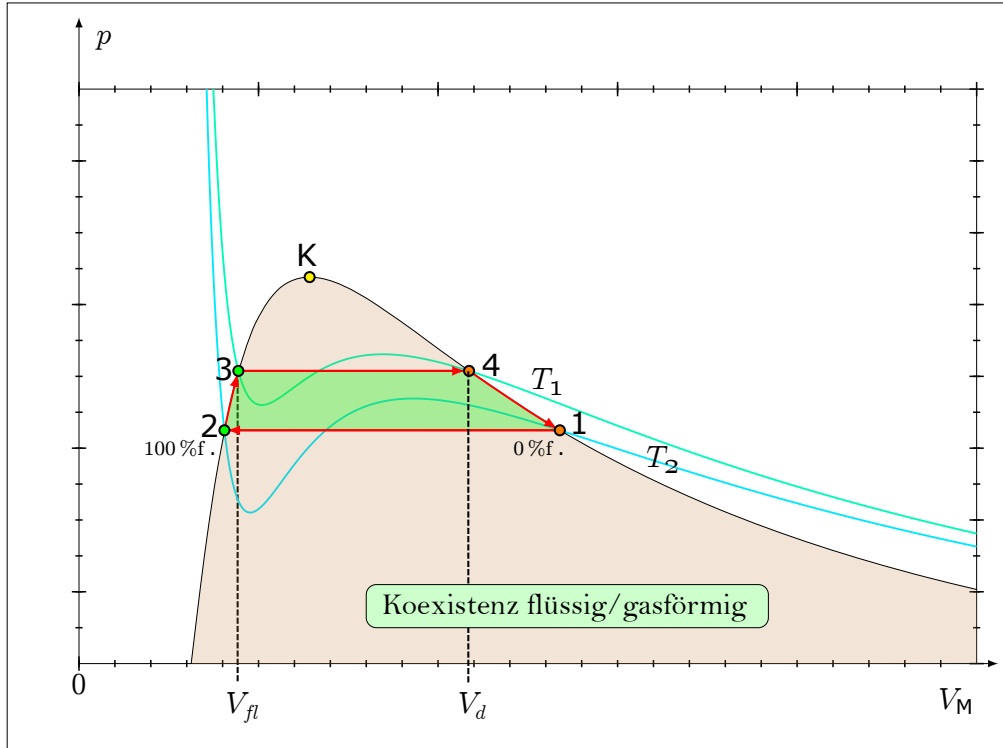


Abbildung 3.33: Kreisprozess zur Herleitung der Gleichung von Clausius-Clapeyron.

Dampfdruck p_d . Das Verhältnis von p_{eff} zu p_d bezeichnet man als relative Feuchtigkeit

$$\varphi = \frac{p_{\text{eff}}}{p_d} \cdot 100\% . \quad (3.5.14)$$

Für $\varphi > 100\%$ ist die Luft mit Wasserdampf übersättigt; es bildet sich Nebel. Für $\varphi = 100\%$ spricht man von gesättigter Luft, für $\varphi < 100\%$ ist die Luft mehr oder weniger trocken.

Falls kalte Luft (z.B. $T = 0^\circ\text{C}$), die relativ feucht ist (z.B. $f = 100\%$) erwärmt wird, so verändert sich p_{eff} nicht.³⁶ Da sich aber p_d ändert (z.B. $p_d(0^\circ\text{C}) = 6,0 \text{ hPa}$, $p_d(20^\circ\text{C}) = 23,4 \text{ hPa}$), nimmt die relative Feuchtigkeit ab:

$$\begin{aligned} \varphi(\text{warm}) &= \frac{p_{\text{eff}}}{p_d(\text{warm})} \cdot 100\% = \frac{p_{\text{eff}}}{p_d(\text{kalt})} \frac{p_d(\text{kalt})}{p_d(\text{warm})} \\ &= \frac{p_d(\text{kalt})}{p_d(\text{warm})} \varphi(\text{kalt}) \quad \left(= \frac{6,0}{23,4} \cdot 100\% = 26\% \right) . \end{aligned} \quad (3.5.15)$$

Bei einer Luftfeuchtigkeit von $\varphi \approx 100\%$, bspw. in den Tropen, ist keine Wärmeabgabe durch Schwitzen möglich. Umgekehrt schlägt sich Wasser auf kalten Gegenständen nieder (Brillen, Kühlwasserrohre), wenn deren Temperatur zu niedrig ist.

³⁶Im Beispiel Luft nehmen wir an, dass sich V und T ändern und p_{eff} konstant bleibt.

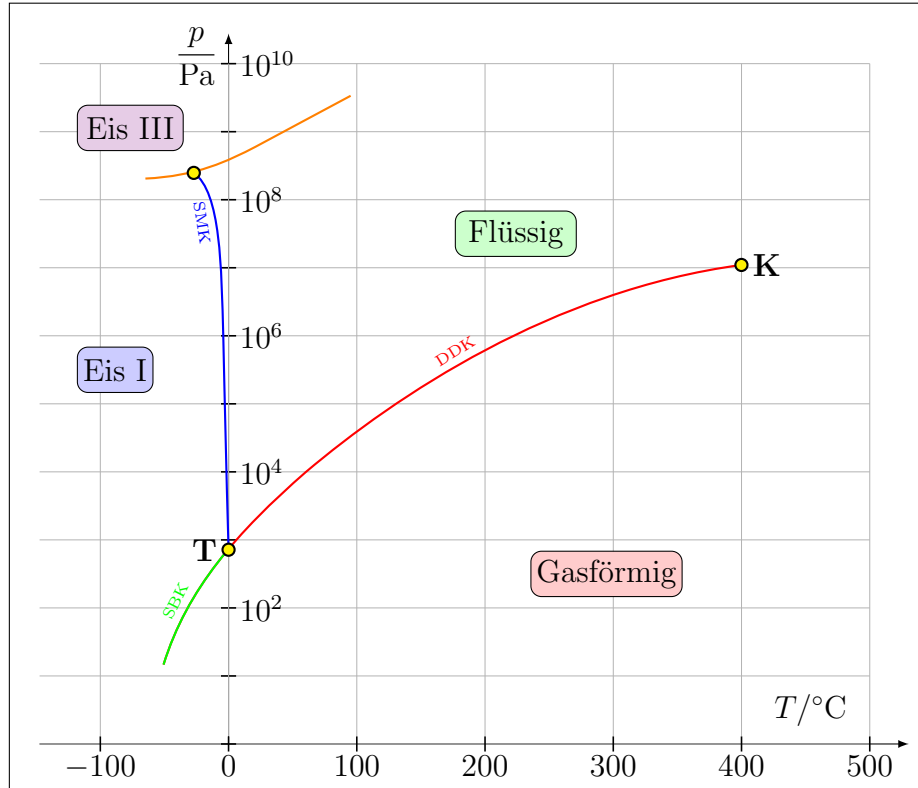


Abbildung 3.34: Phasenübergänge für H_2O mit kritischem Punkt **K**, Tripelpunkt **T**, Schmelzkurve SMK, Sublimationskurve SBK und Dampfdruckkurve DDK.

3.5.3 Phasenübergänge

Abbildung 3.34 zeigt schematisch die verschiedenen Phasen von H_2O , die durch die Dampfdruckkurve (gasförmig/flüssig), die Sublimationskurve (fest/gasförmig) und die Schmelzkurve (fest/flüssig) voneinander getrennt sind. Der feste Zustand kommt zusätzlich in verschiedenen Phasen vor (Eis I, Eis III, etc.).³⁷

Auch für die Schmelzdruckkurve $p_s(T)$ (und analog für die Sublimationskurve) gilt die Gleichung von Clausius-Clapeyron:

$$\frac{dp_s(T)}{dT} = \frac{L_{m,\text{fest} \rightarrow \text{fl}}}{T(V_{m,\text{fl}} - V_{m,\text{fest}})}. \quad (3.5.16)$$

Man beachte, dass bei H_2O $V_{m,\text{fl}} < V_{m,\text{fest}}$ und damit $\frac{dp_s}{dT} < 0$ ist. Daher schmilzt Eis bei erhöhtem Druck schon bei geringeren Temperaturen. Tabelle 3.7 gibt einige wichtige thermodynamische Eigenschaften für Wasser wieder.

³⁷Eis bildet bei unterschiedlichen Bedingungen unterschiedliche Kristallstrukturen. Daher wird zwischen verschiedenen Eis-Phasen unterschieden.

Tabelle 3.7: Thermodynamische Eigenschaften von H₂O

Tripelpunkt:	$T_T = 0,01^\circ\text{C}$ $p_T = 611,73 \text{ Pa}$
Kritischer Punkt:	$T_K = 373,99^\circ\text{C}$ $p_K = 2,206 \cdot 10^7 \text{ Pa}$
Spezifische Verdampfungswärme:	$L_{m,\text{fl} \rightarrow \text{gas}} = L_m^{\text{fl} \rightarrow \text{gas}}(T)$ $L_m^{\text{fl} \rightarrow \text{gas}}(100^\circ\text{C}) = 2256 \text{ kJ/kg}$
Spezifische Schmelzwärme:	$L_m^{\text{fest} \rightarrow \text{fl}} = L_m^{\text{fest} \rightarrow \text{fl}}(T)$ $L_m^{\text{fest} \rightarrow \text{fl}}(0^\circ\text{C}) = 333 \text{ kJ/kg}$
Spezifische Sublimationswärme:	$L_m^{\text{fest} \rightarrow \text{gas}} = L_m^{\text{fest} \rightarrow \text{gas}}(T)$ $L_m^{\text{fest} \rightarrow \text{gas}}(0^\circ\text{C}) = 2826 \text{ kJ/kg}$

3.6 Enthalpie und Joule-Thompson Effekt

3.6.1 Enthalpie H

Neben der inneren Energie U und der Entropie S werden weitere Zustandsfunktionen verwendet, von denen wir die **Enthalpie** H explizit aufführen wollen:

$$H = U + pV. \quad (3.6.1)$$

Diese Beziehung gilt, falls bei einem System nur die Volumenverdrängungsarbeit wesentlich ist; in andern Fällen, wie etwa bei der Behandlung magnetischer Phänomene, ist sie entsprechend zu erweitern.

Bei isobaren Zustandsänderungen ($dp = 0$) gilt

$$dH = \delta Q \quad (p = \text{konstant}). \quad (3.6.2)$$

In der Literatur findet man deshalb in der Regel die molaren Schmelz- oder Verdampfungsenthalpien ΔH_M (meist in kJ/mol) von Substanzen, oder die molaren Bindungsenthalpien (=Reaktionswärmen) von chemischen Reaktionen tabelliert. Ferner gilt

$$C_p = \frac{1}{\tilde{n}} \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_p. \quad (3.6.3)$$

3.6.2 Joule-Thomson-Effekt

Zur Abkühlung eines Körpers können verschiedene Verfahren verwendet werden. Wir haben zuvor bereits die Kältemaschine kennengelernt. Technisch wichtig (z.B. für die Herstellung von flüssiger Luft) ist auch die Expansion von Gasen (Joule-Thomson-Effekt).

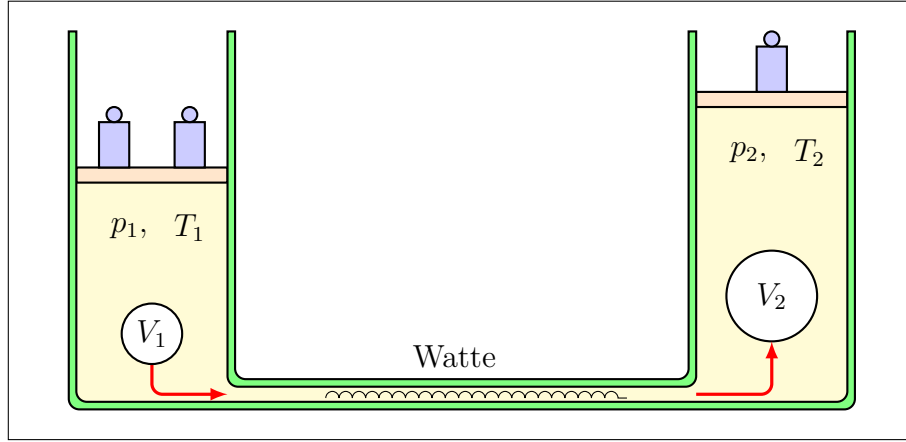


Abbildung 3.35: Joule-Thomson-Effekt.

Wir lassen ein komprimiertes Gas (konstanter Druck p_1 , Temperatur T_1) aus dem Raum 1 durch eine poröse Wand (Wattebausch), die Wirbel- und Strahlbildung unterbindet, langsam in den Raum 2, der unter dem konstanten Druck $p_2 < p_1$ steht, ausströmen. Dabei führen wir weder Arbeit noch Wärme zu (siehe Abb. 3.35).

Wir untersuchen zunächst die Energiebilanz des Vorgangs. Der linke Kolben drücke das gesamte Gasvolumen V_1 durch die Watte hindurch. Dabei wird der darin enthaltenen Gasmenge die Arbeit $p_1 V_1$ zugeführt. Dieselbe Gasmenge befindet sich jetzt im Bereich 2 mit dem Volumen V_2 und muss dabei die Arbeit $p_2 V_2$ gegen den rechten Kolben leisten. Die Differenz ist dem Gas als innere Energie zugekommen. Es gilt

$$p_1 V_1 - p_2 V_2 = U_2 - U_1$$

$$U_1 + p_1 V_1 = U_2 + p_2 V_2 \quad (3.6.4)$$

$$H_1 = H_2. \quad (3.6.5)$$

Demnach ist bei diesem Prozess die vorher eingeführte *Enthalpie* konstant geblieben.

Bei einem *realen* Gas haben wir die thermische Zustandsgleichung (Gl. 3.5.1) bereits kennengelernt. Wir müssen nun auch noch die kalorische Zustandsgleichung herleiten, also die innere Energie bestimmen. Diese enthält ausser der kinetischen Energie $\frac{1}{2}\tilde{n}fRT$ auch eine potentielle Energie (Arbeit gegen die van der Waals-Kräfte, die den Binnendruck p_i bewirken). Hierzu berechnen wir die Arbeit, die an einem realen Gas verrichtet wird, um es von einem unendlich grossen Volumen auf ein endliches Volumen V zu komprimieren, ohne dass zusätzlich noch Wärmeaustausch stattfindet:

$$\delta W_{\sphericalangle} = \int_{\infty}^V p_i dV' = \int_{\infty}^V \tilde{n}^2 \frac{a}{V'^2} dV' = -\tilde{n}^2 \frac{a}{V}. \quad (3.6.6)$$

Die innere Energie beträgt somit

$$U = \tilde{n} \frac{f}{2} RT - \frac{\tilde{n}^2 a}{V}. \quad (3.6.7)$$

Wir berechnen nun die Enthalpie des realen Gases:

$$\begin{aligned}
 H &= U + pV \\
 &= \left(\tilde{n} \frac{f}{2} RT - \frac{\tilde{n}^2 a}{V} \right) + \underbrace{\left(\frac{\tilde{n} RT}{V - \tilde{n} b} - \frac{\tilde{n}^2 a}{V^2} \right)}_{=p} V \\
 &= \tilde{n} RT \left(\frac{f}{2} + \frac{V}{V - \tilde{n} b} \right) - 2\tilde{n}^2 \frac{a}{V}.
 \end{aligned} \tag{3.6.8}$$

Wir haben durch die Elimination des Drucks $p = p(V, T)$ die Enthalpie als $H = H(V, T)$ dargestellt. Um daraus die Temperaturänderung als Funktion der Volumenänderung zu berechnen bilden wir das totale Differential von H und erinnern uns daran, dass sich die Enthalpie beim Joule-Thompson-Effekt nicht ändert:

$$\begin{aligned}
 dH &= \frac{\partial H}{\partial V} dV + \frac{\partial H}{\partial T} dT := 0 \\
 \Rightarrow dT &= -dV \frac{\left(\frac{\partial H}{\partial V} \right)}{\left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)} = -dV \frac{\tilde{n} RT \frac{1(V - \tilde{n} b) - 1}{(V - \tilde{n} b)^2} + 2\tilde{n}^2 \frac{a}{V^2}}{\tilde{n} R \left(\frac{f}{2} + \frac{V}{V - \tilde{n} b} \right)} \\
 &= dV \frac{\frac{\tilde{n} b T}{(V - \tilde{n} b)^2} - \frac{2a\tilde{n}}{RV^2}}{\frac{f}{2} + \frac{V}{V - \tilde{n} b}} = \tilde{n} dV \frac{\frac{bT}{(V - \tilde{n} b)^2} - \frac{2a}{RV^2}}{\frac{f}{2} + \frac{V}{V - \tilde{n} b}}.
 \end{aligned} \tag{3.6.10}$$

Für ein *ideales* Gas ist $a = b = 0$ und somit $dT = 0$; in diesem Fall gibt es also weder eine Abkühlung noch eine Erwärmung. Um den Prozess beim *realen* Gas zu beschreiben, nähern wir das Ergebnis (3.6.10) für $V \gg \tilde{n} b$ durch

$$dT \approx \tilde{n} \frac{dV}{V^2} \cdot \frac{bRT - 2a}{\left(\frac{f}{2} + 1 \right) R} = \tilde{n} \frac{dV}{V^2} \cdot \frac{bRT - 2a}{C_p}. \tag{3.6.11}$$

Demnach erfolgt bei hohen Temperaturen eine Erwärmung,³⁸ bei Temperaturen *unterhalb* der Inversionstemperatur

$$T_{\text{Inv}} = \frac{2a}{Rb} = \frac{27}{4} T_{\text{krit}} \tag{3.6.12}$$

dagegen eine Abkühlung.³⁹

Der Joule-Thomson-Effekt wird bei der Linde'schen Maschine zur Luftverflüssigung verwendet, bei welcher mit dem Gegenstromverfahren das Gas vorgekühlt wird. Bei genügender Vorkühlung können mit dem Joule-Thomson-Effekt auch Wasserstoff ($T_s = 20$ K) und

³⁸z.B. bei $H_2 \Rightarrow$ Explosionsgefahr beim Öffnen der Flasche!

³⁹z.B. bei Luft: $\Delta p \approx 20$ MPa ergibt eine Abkühlung von etwa $\Delta T = 50$ K.

Helium ($T_s = 4,2$ K) verflüssigt werden. Noch tiefere Temperaturen erhält man durch Abdampfen (Entzug der Verdampfungswärme), z.B. bis zu 0,3 K bei ^3He . Auf bis zu 10^{-3} K kommt man schliesslich durch adiabatisches Demagnetisieren. Je mehr man sich dem absoluten Nullpunkt annähert, umso aufwendiger werden aber die Prozesse.

Besonders wichtig sind tiefe Temperaturen, wenn man von der Supraleitung Gebrauch machen möchte. Bei gewissen Metallen fällt unterhalb einer sogenannten Sprungtemperatur T_s der elektrische Widerstand eines Leiters auf unmessbar kleine Werte (Supraleitung). In der Regel⁴⁰ ist die Sprungtemperatur T_s sehr tief, z.B.

$$T_s(\text{Al}) = 1,1 \text{ K}, \quad T_s(\text{Pb}) = 7,3 \text{ K}. \quad (3.6.13)$$

3.7 Zusammenfassung

In diesem Kapitel haben wir wichtige Aspekte aus dem Gebiet der Thermodynamik und Wärmelehre diskutiert. Als wesentliche Punkte kann man zusammenfassen:

- In der Thermodynamik befasst man sich mit der Beschreibung von Vielteilchen-Systemen, bei denen die Anzahl der Teilchen sehr gross ist. Man versucht, makroskopische Eigenschaften (Zustände) und deren Beziehungen zueinander zu finden, so dass der Zustand eines Systems zu einem bestimmten Zeitpunkt eindeutig festgelegt ist.
- Beispiele für solche Zustandsgrössen sind Temperatur, Druck, Volumen, innere Energie, Entropie.
- Als nützliches Modell eines Vielteilchen-Systems erweist sich das ideale Gas. Es handelt sich dabei um eine Ansammlung vieler identischer Teilchen, welche keine Ausdehnung besitzen und welche lediglich über elastische Stösse miteinander Wechselwirken. Ein solches Gas hat keine potentielle Energie. Die Zustandsgleichung des idealen Gases liefert einen universellen Zusammenhang zwischen Druck, Volumen und Temperatur. Reale Gase mit geringer Dichte, welche die Zustandsgleichung in guter Näherung erfüllen, können gut durch das Modell des idealen Gases beschrieben werden.
- Die Temperatur ist ein Mass für die mittlere kinetische Energie der ungeordneten Bewegung der Teilchen eines Systems. Die Änderung der Temperatur kann gemessen werden durch Änderungen anderer Systemzustände, wie z.B. Druck oder Volumensänderungen.

⁴⁰Karl Müller und J. Bednorz fanden dann den ersten sog. Hochtemperatur-Supraleiter mit $T_s = 35$ K (Nobelpreis 1987). Im Jahr 2020 gelang es an der University of Rochester erstmals einen Supraleiter bei Raumtemperatur $T_s = 288$ K zu erzeugen, dafür war jedoch ein hoher Druck von $p = 2.67 \times 10^6$ bar nötig, was die praktische Nutzbarkeit noch einschränkt (zum Vergleich: Druck im Erdkern $p \approx 3.5 \times 10^6$ bar).

- Druck ist eine skalare Grösse, definiert als das Verhältnis der Normalkomponente einer resultierenden Kraft auf einer Fläche und der Fläche selbst. Bei einem Gas ergibt sich der Druck aus den ständigen elastischen Stössen der Gasteilchen mit der Oberfläche des Gasbehälters.
- In der kinetischen Gastheorie versucht man aus den mikroskopischen Eigenschaften der Gasteilchen und deren statistischen Verteilungen Zusammenhänge zu den makroskopischen Eigenschaften herzustellen. Auf diese Weise konnten wir den Zusammenhang der Temperatur mit der kinetischen Energie der Gasteilchen herleiten.
- Wärme ist eine Form der Energie, welche zwischen Systemen ausgetauscht werden kann. Dieser Austausch findet dann statt, wenn zwei Systeme in Kontakt gebracht werden, welche unterschiedliche Temperaturen besitzen.
- Wärme und Arbeit sind keine Zustandsfunktionen. Wir können einem System keinen Betrag an Wärme oder Arbeit zuordnen. Stattdessen beschreiben die Grössen Wärme und Arbeit Mengen an Energie, die in der jeweiligen Form zwischen Systemen übertragen werden.
- Bei Wärmezufuhr in ein System ist dessen Temperaturänderung linear proportional zur zugeführten Wärme (zumindest bei nicht zu tiefen Temperaturen). Die Proportionalitätskonstante (pro Masseneinheit/pro Mol) wird (spezifische/molare) Wärmekapazität genannt. Bei idealen Gasen hängt die molare Wärmekapazität im wesentlichen von der Anzahl der Freiheitsgrade ab.
- Der Gleichverteilungssatz besagt, dass bei einem System im thermodynamischen Gleichgewicht die Gesamtenergie im Mittel gleichmässig verteilt ist auf die einzelnen Freiheitsgrade (z.B. kinetische Energie der einzelnen Bewegungskomponenten, Rotationsenergie, Schwingungsenergie). Die mittlere Energie eines Teilchens ist proportional zur Temperatur des Systems und zur halben Anzahl der Freiheitsgrade. Die Proportionalitätskonstante ist die Boltzmann-Konstante.
- Der erste Hauptsatz der Wärmelehre besagt, dass die innere Energie eines Systems verändert werden kann durch Zufuhr von Wärme oder durch Verrichten von Arbeit am System. Es handelt sich hierbei um eine Formulierung des Energieerhaltungssatzes. Die innere Energie ist dabei die Gesamtenergie des Systems (kinetische und potentielle Energie aller Teilchen).
- Es zeigt sich, dass zwar Arbeit vollständig in Wärme umgewandelt werden kann, dass aber der umgekehrte Prozess nicht möglich ist, d.h. Wärme kann nicht vollständig in Arbeit umgewandelt werden. Dies ist eine mögliche Formulierung des zweiten Hauptsatzes der Wärmelehre. Eine andere mögliche Formulierung ist, dass Wärme nicht von selbst von einem kalten in ein warmes System fliesst, sondern dass dies nur unter Zufuhr von Arbeit möglich ist.

- Wärmekraftmaschinen sind Maschinen, in denen ein System (z.B. ein Gas) einen Kreisprozess durchläuft und dabei Wärme aus einem warmen Reservoir verwendet um Arbeit zu verrichten. Ein Teil der Wärme wird allerdings an ein kaltes Reservoir abgegeben und kann nicht als Arbeit genutzt werden.
- Der Carnot-Prozess ist ein reversibler Kreisprozess und hat den grössten Wirkungsgrad aller Kreisprozesse. In der Realität haben alle Kreisprozesse irreversible Anteile in den Zustandsänderungen, was dazu führt, dass der reale Wirkungsgrad von Wärmekraftmaschinen kleiner ist als der Carnot-Wirkungsgrad.
- Die Entropie ist eine Zustandsfunktion, welche definiert ist als das Verhältnis aus reversibel zugeführter Wärme und Temperatur eines Systems. Sie steht in Zusammenhang mit der Wahrscheinlichkeit eines Zustands des Systems und kann als Grad der Unordnung interpretiert werden. Jedes abgeschlossene System strebt seinem wahrscheinlichsten (ungeordnetsten) Zustand zu. Die Entropie eines abgeschlossenen Systems kann nur konstant bleiben oder zunehmen. Um die Entropie eines Systems zu verringern, muss z.B. Arbeit an ihm verrichtet werden. Dabei nimmt aber die Entropie eines anderen Systems (welches die Arbeit verrichtet) zu, und zwar so, dass die Gesamtentropie konstant bleibt oder zunimmt.
- Die Zustandsgleichung eines realen Gases nach van der Waals berücksichtigt die Effekte der endlichen Ausdehnung der Gasteilchen und deren Wechselwirkung untereinander. Bei Temperaturen über einer bestimmten kritischen Temperatur stimmt die Zustandsgleichung sehr gut mit jener des idealen Gases überein. In der Nähe der kritischen Temperatur kommt es zu starken Abweichungen.
- Unterhalb der kritischen Temperatur kann ein Gas bei Kompression verflüssigt werden. Dabei bleibt der Druck solange konstant, bis das gesamte Gas verflüssigt ist. Es handelt sich hierbei um einen Phasenübergang.
- Die Dampfdruckkurve beschreibt jenen Druck als Funktion der Temperatur, bei dem ein Phasenübergang von gasförmig auf flüssig (oder umgekehrt) stattfindet.

Anhang A

Differentialgleichungen

A.1 Einleitung

Dieser Anhang wird als mathematisches Hilfsmittel zur Verfügung gestellt. Er gibt eine Zusammenfassung der Lösungen von Differentialgleichungen, die wichtig sind, um Schwingungen und Wellen zu analysieren. Sie werden diese Differentialgleichungen in den Mathematikvorlesungen detaillierter behandeln. Die Herleitungen hier sind mathematisch nicht vollständig und exakt, zeigen aber, worum es im Wesentlichen geht – und sie genügen um die Beispiele, die wir in Physik 1 besprechen, zu lösen.

Der Anhang soll einen kurzen Einblick in die Lösungsmethoden für einfache Differentialgleichungen geben. Allerdings ist es nicht sehr sinnvoll, hier nur „Rezepte“ aufzuführen, da Rezepte allein nicht unbedingt zum Verständnis der Problematik beitragen.¹ Vielmehr wird zuerst anhand eines allgemeinen Beispiels das nötige Vokabular definiert, und anschliessend werden die Lösungen für allgemeine Differentialgleichungen (in aufsteigendem Schwierigkeitsgrad) hergeleitet. Anschliessend werden zu jedem Typ Gleichung ein paar Beispiele vorgelöst. Diese Beispiele illustrieren dann auch den schwierigsten Teil der Differentialgleichungsproblematik in der Physik: Wie kommt man von einem physikalischen Problem überhaupt zu einer Differentialgleichung?

A.2 Einige Definitionen

Ehe man sich an das Lösen einer Differentialgleichung macht, sollte man zu allererst erkennen, um welchen Typ Gleichung es sich handelt. Für die Ableitungen einer Funktion $u(t)$ nach der Variablen t wird im Weiteren die folgende Notation gebraucht:

$$\frac{d}{dt}u(t) = \dot{u} \quad \text{sowie} \quad \left(\frac{d}{dt}\right)^n u(t) \equiv \frac{d^n u}{dt^n} := u^{(n)}(t). \quad (\text{A.2.1})$$

¹Nicht alles, was man einem Kochbuchrezept nachkocht, ist nachher essbar! Ist jetzt das Rezept schlecht oder hat der „Koch“ irgendwas falsch verstanden?

Die Hauptbegriffe sollen anhand des Beispiels

$$u^{(n)}(t) + a_{n-1}(t) u^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t) \dot{u}(t) + a_0(t) u(t) = s(t) \quad (\text{A.2.2})$$

erläutert werden. Auf den ersten Blick mag diese Gleichung kompliziert aussehen, aber wenn man systematisch vorgeht, kann man leicht erkennen, um welchen Typ es sich hier handelt.

1. Die **Ordnung** einer Differentialgleichung ist die höchste vorkommende Ableitung in der Gleichung. In unserem Beispiel ist dies die n -te Ableitung. Wir haben es also hier mit einer Gleichung der n -ten Ordnung zu tun.
2. Weiter merkt man, dass die Ableitungen nur als Linearkombinationen vorkommen, d.h. die Funktion u und ihre Ableitungen treten nicht als Potenzen oder in anderen Funktionen auf, sondern stets direkt als Summand, der höchstens noch mit einem Faktor multipliziert wird. Eine solche Gleichung nennt man **linear**. Alle Gleichungen, die diesen Kriterien nicht genügen, sind **nichtlinear** und lassen sich wieder in Kategorien unterteilen, die wir hier aber nicht betrachten.
3. Zusätzlich gibt es noch *einen* Term, der nicht in Verbindung mit der Funktion u auftritt, nämlich $s(t)$. Diesen Term nennt man die **Störfunktion**. Wir bezeichnen die Gleichung als **homogen**, falls die Störfunktion verschwindet, d.h. $s(t) = 0 \forall t$, andernfalls ist die Gleichung **inhomogen**.
4. Die Koeffizienten sind die Funktionen $a_{n-1}(t), \dots, a_0(t)$. Die a_i sind in diesem Beispiel ebenfalls Funktionen von t , genauso wie u . In diesem Fall sagt man, dass es sich um eine Gleichung mit **variablen Koeffizienten** handelt. Sind die a_i keine Funktionen, sondern Konstanten, redet man von einer Gleichung mit **konstanten Koeffizienten**.

Die Gleichung A.2.2 wurde somit als eine inhomogene lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung mit variablen Koeffizienten identifiziert.

A.3 Die lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung sind Gleichungen vom Typ²

$$\dot{u} = a(t) \cdot u(t) + s(t) \quad \text{inhomogen, mit variablen Koeffizienten} \quad (\text{A.3.1})$$

$$\dot{u} = a \cdot u(t) + s(t) \quad \text{inhomogen, mit konstanten Koeffizienten} \quad (\text{A.3.2})$$

$$\dot{u} = a(t) \cdot u(t) \quad \text{homogen, mit variablen Koeffizienten} \quad (\text{A.3.3})$$

$$\dot{u} = a \cdot u(t) \quad \text{homogen, mit konstanten Koeffizienten.} \quad (\text{A.3.4})$$

Die Gleichungen (A.3.3) und (A.3.4) heissen die zu (A.3.1) und (A.3.2) zugehörigen homogenen Gleichungen.

²Beachte dass im Folgenden zwecks klarerer Darstellung der Multiplikationspunkt häufig explizit hingeschrieben wird, aber nicht mit einem Skalarprodukt zwischen Vektoren missverstanden werden soll.

A.3.1 Die homogene Gleichung

Zuerst werden wir die homogene Gleichung (A.3.3) lösen. Dazu werden wir die **Methode der Trennung der Variablen** gebrauchen. Um diese zu illustrieren, schreiben wir Gl. (A.3.3) nochmals in der Form

$$\frac{du}{dt} = a(t) \cdot u. \quad (\text{A.3.5})$$

Wir trennen nun nach Variablen, d.h., alle Grössen, die explizit von u abhängen, ziehen wir auf die linke Seite und alle, die explizit von t abhängen, auf die rechte Seite. Wir erhalten

$$\frac{du}{u} = a(t) \cdot dt. \quad (\text{A.3.6})$$

Wir bilden das unbestimmte Integral auf beiden Seiten:

$$\int \frac{du}{u} = \int a(t) \cdot dt \quad (\text{A.3.7})$$

$$\Rightarrow \ln u = \int a(t) \cdot dt + c_1 \quad (\text{A.3.8})$$

$$\Rightarrow u = e^{\left\{ \int a(t) \cdot dt + c_1 \right\}}. \quad (\text{A.3.9})$$

In dieser Gleichung ist c_1 die Integrationskonstante. Bei der Integration von $a(t)$ wird dementsprechend eine weitere Konstante auftreten, welche aber über eine Neudefinition von c_1 absorbiert werden kann. Mit $c_2 = \exp c_1$ erhält man schliesslich die **allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung**:

$$u(t) = c_2 e^{\int a(t) dt}. \quad (\text{A.3.10})$$

Man sollte nun keineswegs versuchen, dieses Resultat auswendig zu lernen. Es ist viel wichtiger, die Methode, mit welcher wir zu dem Resultat gekommen sind, verstanden zu haben. Die spezifische Lösung zu einem Problem kann man sich dann selber konstruieren! Die Konstante c_2 wird in der Regel durch zusätzliche Bedingungen, wie z.B. Anfangsbedingungen $u(0) = u_0$ bestimmt.

A.3.2 Die inhomogene Gleichung

Nun wollen wir die inhomogene Gleichung

$$\dot{u} = a(t) \cdot u(t) + s(t) \quad (\text{A.3.11})$$

lösen. Es gilt der Satz:

Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung
 = partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung
 + allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung.

Das allgemeine Lösen der homogenen Gleichung haben wir in Kap. A.3.1 gelernt. Es verbleiben die Fragen, was eine partikuläre Lösung ist, und wie man eine solche finden kann. Unter **partikulärer Lösung** einer Differentialgleichung versteht man eine spezielle Lösung der Gleichung, also eine, bei der keine frei wählbaren Konstanten mehr vorkommen, oder anders gesagt, eine vollständig bestimmte Lösung.

Dass obiger Satz vernünftig ist, kann man folgendermassen sehen: Sei u_p eine bestimmte Lösung der inhomogenen Gleichung. Es gelte also

$$\dot{u}_p = a(t) \cdot u_p(t) + s(t). \quad (\text{A.3.12})$$

Dann gilt auch

$$\frac{d}{dt}(u - u_p) = \dot{u} - \dot{u}_p = \{a(t) \cdot u(t) + s(t)\} - \{a(t) \cdot u_p(t) + s(t)\} \quad (\text{A.3.13})$$

$$= a(t) \cdot \{u(t) - u_p(t)\}. \quad (\text{A.3.14})$$

Demnach ist $u - u_p$ eine Lösung der homogenen Gleichung

$$\frac{d}{dt}(u - u_p) = a(t) \cdot \{u(t) - u_p(t)\}. \quad (\text{A.3.15})$$

Nach Gl. A.3.10 gilt aber für die Lösung einer solchen Gleichung:

$$u(t) - u_p = C e^{\int a(t) \cdot dt}, \quad (\text{A.3.16})$$

also muss die Lösung der inhomogenen Gleichung u die Form

$$u(t) = u_p + C e^{\int a(t) \cdot dt} \quad (\text{A.3.17})$$

haben, d.h., u ist tatsächlich die Summe von partikulärer und allgemeiner Lösung der homogenen Gleichung.

Es gibt zwei einfache Methoden, mit denen sich partikuläre Lösungen finden lassen, und zwar die Methode der unbestimmten Koeffizienten und die Methode der Variation der Konstanten.

Betrachten wir zuerst die **Methode der Variation der Konstanten**. In Worten ausgedrückt funktioniert das folgendermassen: Man fasst die Konstante C in der Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung als differenzierbare Funktion von t auf, schreibt also $C(t)$, und versucht nun dieses $C(t)$ so zu bestimmen, dass

$$u_p = C(t) e^{\int a(t) \cdot dt} \quad (\text{A.3.18})$$

der inhomogenen Gleichung (A.3.11) genügt. Dazu setzt man den Ansatz (A.3.18) in Gleichung (A.3.11) ein und erhält

$$\frac{d}{dt} \left\{ C(t) e^{\int a(t) \cdot dt} \right\} = a(t) \cdot \left\{ C(t) e^{\int a(t) \cdot dt} \right\} + s(t) \quad (\text{A.3.19})$$

$$e^{\int a(t) \cdot dt} \cdot \frac{d}{dt} C(t) + C(t) \cdot \frac{d}{dt} e^{\int a(t) \cdot dt} = a(t) \cdot \left\{ C(t) e^{\int a(t) \cdot dt} \right\} + s(t) \quad (\text{A.3.20})$$

$$e^{\int a(t) \cdot dt} \cdot \frac{d}{dt} C(t) + C(t) \cdot a(t) \cdot e^{\int a(t) \cdot dt} = a(t) \cdot \left\{ C(t) e^{\int a(t) \cdot dt} \right\} + s(t). \quad (\text{A.3.21})$$

Damit nun u_p aus Gl. (A.3.18) eine Lösung der inhomogenen Dgl. ist, muss gelten:

$$e^{\int a(t) \cdot dt} \cdot \frac{d}{dt} C(t) := s(t) \quad (\text{A.3.22})$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} C(t) = s(t) \cdot e^{-\int a(t) \cdot dt}. \quad (\text{A.3.23})$$

Die anschließende Integration beider Seiten dieser Gleichung über t gibt uns die gesuchte Funktion

$$C(t) = \int s(t) \cdot e^{-\int a(t) \cdot dt} dt, \quad (\text{A.3.24})$$

die aus Gl. (A.3.18) eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung Gl. (A.3.11) erzeugt. Wiederum sollte man nicht versuchen, dieses Resultat „auswendig“ zu lernen! Vielmehr sollte man die Methode verstehen und deren Anwendung durch Üben erlernen.

Die **Methode der unbestimmten Koeffizienten** ist nur auf *Gleichungen mit konstanten Koeffizienten* anwendbar. Sie berücksichtigt die spezielle Struktur von bestimmten Störfunktionen. Bei dieser Methode wird je nach Störfunktion ein spezieller Ansatz in die Differentialgleichung eingesetzt, dessen Koeffizienten nachher durch Vergleich gefunden werden müssen. Die Ansätze dazu sind in Tabelle A.1 aufgeführt.

Eine weitere Möglichkeit, die in der Physik und in den Ingenieurwissenschaften sehr beliebt ist, bietet sich im Spezialfall von homogenen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und konstanter Störfunktion. In diesem Fall lässt sich die Differentialgleichung durch eine **Koordinatentransformation** auf eine homogene Differentialgleichung transformieren. Im Fall von (A.3.11) mit $a(t) = a \forall t$ und $s(t) = s \forall t$ erhalten wir durch die Einführung einer neuen Koordinate

$$\tilde{u}(t) = u(t) + \frac{s}{a} \quad (\text{A.3.25})$$

mit $\dot{\tilde{u}} = \dot{u}$ die homogene Differentialgleichung

$$\dot{\tilde{u}} = a \cdot \left(\tilde{u}(t) - \frac{s}{a} \right) + s = a \cdot \tilde{u}(t). \quad (\text{A.3.26})$$

Zusammenfassend zeigt Abb. A.1 das Lösungsschema für die lineare Differentialgleichung 1. Ordnung.

A.3.3 Beispiele

Ein Sättigungsprozess: Das Lernen

Jeder von uns hat sicher schon einmal bemerkt, dass er am Anfang recht viel und schnell lernen kann, es mit der Zeit doch immer schwieriger wird und man langsamer lernt. Nach geraumer Zeit kann man dann kaum noch zusätzlichen Stoff aufnehmen. Die Frage ist,

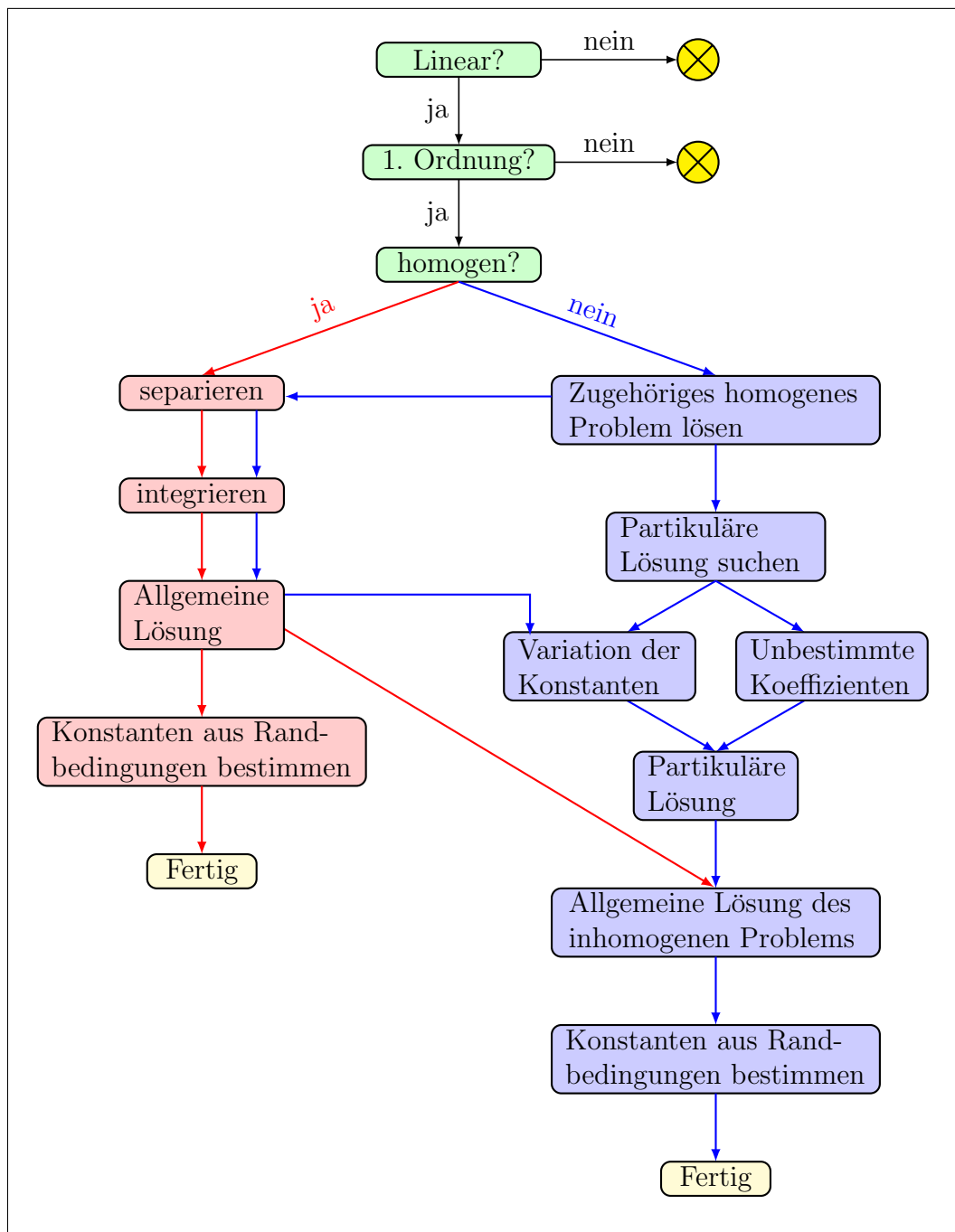


Abbildung A.1: Lösungsschema für die lineare Differentialgleichung 1. Ordnung.

Tabelle A.1: Einige Ansätze für partikuläre Lösungen der Differentialgleichung $\dot{u} = a \cdot u + s(t)$ mit konstantem a .

Störfunktion		Lösungsansatz	
$s(t) = \sum_{\mu=0}^m b_{\mu} t^{\mu}$		$u(t) = \sum_{\mu=0}^m A_{\mu} t^{\mu}$	
$s(t) = e^{\alpha t} \sum_{\mu=0}^m b_{\mu} t^{\mu}$		$u(t) = e^{\alpha t} \sum_{\mu=0}^m A_{\mu} t^{\mu}$	$\alpha \neq a$
		$u(t) = t e^{\alpha t} \sum_{\mu=0}^m A_{\mu} t^{\mu}$	$\alpha = a$
$s(t) = \cos \omega t \sum_{\mu=0}^m b_{\mu} t^{\mu}$	$\omega \neq 0$	$u(t) = \cos \omega t \sum_{\mu=0}^m A_{\mu} t^{\mu}$	
$s(t) = \sin \omega t \sum_{\mu=0}^m b_{\mu} t^{\mu}$		$u(t) = \sin \omega t \sum_{\mu=0}^m A_{\mu} t^{\mu}$	
$s(t) = e^{\alpha t} \cos \omega t \sum_{\mu=0}^m b_{\mu} t^{\mu}$	$\omega \neq 0$	$u(t) = e^{\alpha t} \cos \omega t \sum_{\mu=0}^m A_{\mu} t^{\mu}$	
$s(t) = e^{\alpha t} \sin \omega t \sum_{\mu=0}^m b_{\mu} t^{\mu}$		$u(t) = e^{\alpha t} \sin \omega t \sum_{\mu=0}^m A_{\mu} t^{\mu}$	

wie man dies mathematisch beschreiben kann.³ Die Funktion, die es zu beschreiben gilt, ist die Menge an Stoff, die bis zu einer gewissen Zeit t aufgenommen wird, nennen wir sie $L(t)$. $L(t)$ wächst ständig, aber die Lerngeschwindigkeit dL/dt wird umso kleiner, je grösser $L(t)$ wird, und zwar so lange, bis eine gewisse Sättigung L_m erreicht ist. Trivialerweise ist $L(0) = 0$, denn wer keine Zeit aufwendet, wird auch nichts lernen. Wenn $L(t)$ den Sättigungswert L_m erreicht hat, soll L nicht mehr weiter wachsen, also wird die Geschwindigkeit Null. Eine Gleichung, die diese Eigenschaften erfüllt, ist

$$\frac{dL}{dt} = k(L_m - L). \quad (\text{A.3.27})$$

Etwas umgeformt lautet sie:

$$\frac{dL}{dt} = -kL + kL_m \quad (\text{A.3.28})$$

und ist demnach eine inhomogene lineare Gleichung 1. Ordnung.

Die Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung

$$\frac{dL}{dt} = -kL \quad (\text{A.3.29})$$

lässt sich durch Separation und Integration auf beiden Seiten finden:

$$\frac{dL}{L} = -k dt \quad (\text{A.3.30})$$

$$\Rightarrow \ln L = -kt + c_1 \quad (\text{A.3.31})$$

$$L(t) = C \cdot e^{-kt}. \quad (\text{A.3.32})$$

Hier steht c_1 für die Integrationskonstante, und $C = e^{c_1}$.

Eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung können wir mit der Methode der Variation der Konstanten finden. Wir ersetzen dazu die Konstante C in Gl. (A.3.32) durch eine Funktion $C(t)$. Den so erhaltenen Ansatz

$$L_p(t) = C(t) \cdot e^{-kt} \quad (\text{A.3.33})$$

³Die folgende Modellbildung, die natürlich mit einem Augenzwinkern gemeint ist, verfolgt eine sogenannte phänomenologische Herangehensweise. Es wird nach einer mathematischen Beschreibung gesucht, welche möglichst gut den Beobachtungen entspricht, die man in einer bestimmten Situation macht. Das Modell liefert keine Begründung für die beobachteten Phänomene und erhebt keinen Anspruch darauf, ein allgemeines Naturgesetz zu beschreiben, das sich auf andere Situationen übertragen liesse. Es besteht also Hoffnung: Durch gute Lerntechniken (Modifikation des Experiments) könnte es möglich sein, den beobachteten Sättigungseffekt zu vermeiden.

setzen wir dann in die Gleichung (A.3.28) ein und erhalten

$$\frac{d}{dt} \{C(t) \cdot e^{-kt}\} = -k \cdot \{C(t) \cdot e^{-kt}\} + kL_m \quad (\text{A.3.34})$$

$$e^{-kt} \frac{dC(t)}{dt} - k \cdot C(t) \cdot e^{-kt} = -k \cdot C(t) \cdot e^{-kt} + kL_m \quad (\text{A.3.35})$$

$$\frac{dC(t)}{dt} = kL_m e^{kt} \quad (\text{A.3.36})$$

$$\Rightarrow C(t) = kL_m \frac{1}{k} e^{kt} = L_m e^{kt}. \quad (\text{A.3.37})$$

Eingesetzt in Gl. (A.3.33) erhalten wir somit eine partikuläre Lösung für das inhomogene Problem:

$$L_p(t) = L_m e^{kt} e^{-kt} = L_m. \quad (\text{A.3.38})$$

Hätten wir dieses Resultat erraten können? Selbstverständlich! Denn die Ableitung der Funktion geht gegen null, wenn die Funktion nicht mehr weiter zunimmt, also konstant wird! Dies geschieht laut Gleichung Gl. (A.3.27) aber nur, falls $L(t) = L_m$ ist! Die partikuläre Lösung stand also quasi in der Gleichung selber.

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist gleich der Summe der allgemeinen Lösung der homogenen und der partikulären Lösung L_p des inhomogenen Problems,

$$L(t) = L_m + C e^{-kt}. \quad (\text{A.3.39})$$

Es bleibt nur noch die Konstante C den Rand- bzw. Anfangsbedingungen anzupassen. Wir wissen, dass $L(0) = 0$ sein muss:

$$L(0) = L_m + C e^{-k \cdot 0} = L_m + C = 0 \quad (\text{A.3.40})$$

$$\Rightarrow C = -L_m. \quad (\text{A.3.41})$$

Dies ergibt dann schliesslich die Lösung

$$L(t) = L_m (1 - e^{-kt}), \quad (\text{A.3.42})$$

welche für $t \rightarrow \infty$ auch tatsächlich gegen den Grenzwert L_m strebt.

Exponentieller Zerfall mit zeitlich konstanter Zufuhr

Die Zerfallsrate $\dot{N}$ (=Anzahl Zerfälle pro Zeit) einer radioaktiven Substanz ist stets proportional zur noch vorhandenen Menge N des radioaktiven Stoffes in der Probe:

$$dN = -\lambda N dt. \quad (\text{A.3.43})$$

Dies ist eine homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung. Die Lösung finden wir durch Separieren und Integrieren:

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt \quad (\text{A.3.44})$$

$$\Rightarrow \ln N = -\lambda t + c_1 \quad (\text{A.3.45})$$

$$N(t) = C e^{-\lambda t}. \quad (\text{A.3.46})$$

Zur Zeit $t = 0$ ist die Menge an radioaktivem Stoff $N(0) = N_0$, also ist

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}. \quad (\text{A.3.47})$$

Wie ändert sich jetzt diese Lösung, wenn man ständig den Mengenstrom β (= Anzahl Atome der Substanz pro Zeit) der radioaktiven Substanz der Probe zuführt? Die Differentialgleichung schreibt sich dann

$$dN = -\lambda N dt + \beta dt \quad (\text{A.3.48})$$

$$\Rightarrow \frac{dN}{dt} = -\lambda N + \beta. \quad (\text{A.3.49})$$

Wir haben nun eine inhomogene Gleichung, die sich genau gleich wie im vorhergehenden Beispiel lösen lässt, allerdings nun mit einer anderen Anfangsbedingung ($N(0) = N_0$). Es ergibt sich die Lösung

$$N(t) = \frac{\beta}{\lambda} + \left\{ N_0 - \frac{\beta}{\lambda} \right\} \cdot e^{-\lambda t}. \quad (\text{A.3.50})$$

Für $t \rightarrow \infty$ erhält man den Grenz- und Gleichgewichtswert

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \frac{\beta}{\lambda}. \quad (\text{A.3.51})$$

Dieses Ergebnis lässt sich auch auf andere Gebiete übertragen, wie z.B. auf die künstliche Ernährung durch Tropfinfusion. Glukose wird im Körper nach dem Gesetz (A.3.44) abgebaut. Führt man jetzt von aussen einen Glukosestrom β zu, erreicht man nach einer genügend langen Zeit eine konstante Glukosemenge β/λ im Blut.

A.4 Die lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

Man nennt

$$\ddot{u}(t) + a_1 \cdot \dot{u}(t) + a_0 \cdot u(t) = s(t) \quad (\text{A.4.1})$$

eine **inhomogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten** und

$$\ddot{u}(t) + a_1 \cdot \dot{u}(t) + a_0 \cdot u(t) = 0 \quad (\text{A.4.2})$$

die zugehörige homogene Gleichung. Gibt man zusätzlich noch die Rand- bzw. Anfangsbedingungen

$$u(t_0) = u_0, \quad \dot{u}(t_0) = v_0 \quad (\text{A.4.3})$$

vor, dann spricht man vom **zugehörigen Rand- bzw. Anfangswertproblem**.

A.4.1 Die homogene Gleichung

Zuerst werden wir uns wieder dem homogenen Problem zuwenden. Beweise zur Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen werden wir hier nicht betrachten. Diese werden in der Regel in den Mathematikvorlesungen zur Genüge behandelt.

Es ist klar, dass $u(t) = 0$ in jedem Fall eine Lösung ist. Zudem gilt das **Superpositionsprinzip**, d.h., wenn $u_1, \dots, u_m$ Lösungen von Gl. (A.4.2) sind, dann ist $C_1 \cdot u_1 + \dots + C_m \cdot u_m$ ebenfalls eine Lösung. Zur Konstruktion der allgemeinen Lösung gehen wir mit dem **Eulerschen Ansatz**

$$u(t) := e^{\lambda t} \quad (\text{A.4.4})$$

an Gl. (A.4.2) heran, wobei λ eine beliebige komplexe Zahl ist. Wir erhalten dann:

$$\frac{d^2}{dt^2} e^{\lambda t} + a_1 \frac{d}{dt} e^{\lambda t} + a_0 e^{\lambda t} = 0 \quad (\text{A.4.5})$$

$$\Rightarrow \lambda^2 e^{\lambda t} + a_1 \lambda e^{\lambda t} + a_0 e^{\lambda t} = 0 \quad (\text{A.4.6})$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad (\text{A.4.7})$$

Die Gleichung A.4.7 folgt, weil die vorhergehende Gleichung A.4.6 für alle Werte von t gelten soll. Man sieht also, dass $e^{\lambda t}$ genau dann eine Lösung der Differentialgleichung ist, wenn Gl. (A.4.7) erfüllt ist. Man nennt die Gleichung

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad (\text{A.4.8})$$

die **charakteristische Gleichung** und

$$p(\lambda) = \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 \quad (\text{A.4.9})$$

das **charakteristische Polynom** der Differentialgleichung. Um jetzt die tatsächliche Lösung der Differentialgleichung zu finden, müssen wir uns die Lösungen der charakteristischen Gleichung Gl. (A.4.8) anschauen. Je nach Vorzeichen der Diskriminante⁴

$$\Delta = a_1^2 - 4a_0 \quad (\text{A.4.10})$$

findet man die Lösungen

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} \frac{1}{2} (-a_1 \pm \sqrt{\Delta}) , & \Delta > 0 & (\text{Zwei reelle Wurzeln}) \\ -\frac{1}{2} a_1 , & \Delta = 0 & (\text{Eine reelle Doppelwurzel}) \\ \frac{1}{2} (-a_1 \pm i\sqrt{-\Delta}) , & \Delta < 0 & (\text{Zwei konjugiert komplexe Wurzeln}). \end{cases} \quad (\text{A.4.11})$$

⁴Man sollte noch wissen, wie man eine quadratische Gleichung löst, sonst nachschlagen!

1. **Fall I:** Zwei verschiedene reelle Wurzeln λ_1 und λ_2

In diesem Fall sind $e^{\lambda_1 t}$ und $e^{\lambda_2 t}$ und, wegen des Superpositionsprinzips, auch alle Funktionen der Form

$$u(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \quad (\text{A.4.12})$$

Lösungen der Gl. (A.4.2). Die Konstanten C_1 und C_2 erhält man aus den Randbedingungen Gl. (A.4.3) durch

$$u(t_0) = u_0 = C_1 e^{\lambda_1 t_0} + C_2 e^{\lambda_2 t_0} \quad (\text{A.4.13})$$

$$\dot{u}(t_0) = v_0 = C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t_0} + C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t_0}. \quad (\text{A.4.14})$$

2. **Fall II:** Eine reelle Doppelwurzel $\lambda_1 = \lambda_2$

Durch Einsetzen in die Dgl. (A.4.2) kann man leicht überprüfen, dass für diesen Fall die Funktionen $u(t) = e^{\lambda_1 t}$ und $u(t) = t e^{\lambda_1 t}$, also auch

$$u(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 t e^{\lambda_1 t} = (C_1 + C_2 t) e^{\lambda_1 t} \quad (\text{A.4.15})$$

Lösungen sind. Die Konstanten lassen sich ähnlich bestimmen wie bei Fall I.

3. **Fall III:** Zwei konjugiert komplexe Wurzeln $\lambda_1 = \lambda_2^*$

Wir bezeichnen die Wurzeln mit

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \quad (\text{A.4.16})$$

$$\text{mit } \alpha := -\frac{1}{2}a_1 \quad (\text{A.4.17})$$

$$\text{und } \beta := -\frac{1}{2}\sqrt{-\Delta}. \quad (\text{A.4.18})$$

Die Eulersche Formel

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad (\text{A.4.19})$$

verknüpft die Winkelfunktionen mit der e -Funktion. Die Lösung der Differentialgleichung lautet also

$$u(t) = C_1 e^{(\alpha+i\beta)t} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)t} \quad (\text{A.4.20})$$

$$= e^{\alpha t} \{C_1 e^{+i\beta t} + C_2 e^{-i\beta t}\} \quad (\text{A.4.21})$$

$$= e^{\alpha t} \{(C_1 + C_2) \cos \beta t + i(C_1 - C_2) \sin \beta t\}. \quad (\text{A.4.22})$$

Da $u(t)$ reell sein soll, die Konstanten C_1 und C_2 jedoch auch komplex sein können, wählen wir sie derart, dass $B_1 := (C_1 + C_2)$ reell und $iB_2 := -(C_1 - C_2)$ imaginär ist. Damit erhalten wir schliesslich die endgültige Form unserer Lösung:

$$u(t) = e^{\alpha t} (B_1 \cos \beta t + B_2 \sin \beta t). \quad (\text{A.4.23})$$

A.4.2 Die inhomogene Gleichung

Für die inhomogene Gleichung gilt genau der gleiche Grundsatz wie beim Problem 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} &\text{Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung} = \\ &\quad \text{partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung} \\ &+ \text{allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung} \end{aligned}$$

Das bedeutet also, dass wir auch hier zuerst wieder eine partikuläre Lösung finden müssen. Wiederum können wir eine der beiden vorher diskutierten Methoden, entweder die der Variation der Konstanten oder die der Unbestimmten Koeffizienten verwenden. Erstere wird jedoch zusehends komplizierter, sodass in der Praxis eher mit der Methode der unbestimmten Koeffizienten gearbeitet wird. Die meisten vorkommenden Störfunktionen lassen sich in eine der in Tabelle A.2 aufgelisteten Kategorien einordnen.

A.4.3 Beispiele

Ein rein mathematisches Beispiel

Wir untersuchen die Differentialgleichung

$$y'' - y = xe^{2x}. \quad (\text{A.4.24})$$

1. Schritt: Erkennen, um welchen Typ Gleichung es sich handelt.

- Da hier andere als die bisher verwendeten Variablen verwendet werden, sollte man zunächst die Variablen korrekt einander zuordnen. Hier gilt $u \rightarrow y$ und $t \rightarrow x$.
- Anschliessend sollte man die Ordnung der Differentialgleichung, d.h., die höchste vorkommende Ableitung, bestimmen. Bei unserem Beispiel ist das die 2. Ableitung und damit eine Dgl. 2. Ordnung.
- Ist sie linear? Falls ja, ist es gut für uns, falls nein, ist es ein etwas grösseres Problem. Aber sie ist linear!
- Ist sie homogen? Nein! Es gibt eine Störfunktion

$$s(x) = xe^{2x}. \quad (\text{A.4.25})$$

- Sind die Koeffizienten der Funktion y und ihrer Ableitung konstant? Ja!

2. Schritt: Lösen der homogenen Gleichung

Tabelle A.2: Ansätze für partikuläre Lösungen für die inhomogene Differentialgleichung n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. In der 3. Spalte wird das charakteristische Polynom $p(\lambda)$ derart faktorisiert, dass das verbleibende Polynom $q(\lambda) \neq 0$ an der entsprechenden Nullstelle ist.

Störfunktion	Lösungsansatz	Nullstellen von $p(\lambda)$
$s(t) = \sum_{\mu=0}^m b_{\mu} t^{\mu}$	$u(t) = \sum_{\mu=0}^m A_{\mu} t^{\mu}$	$p(0) \neq 0$
	$u(t) = t^{\nu} \sum_{\mu=0}^m A_{\mu} t^{\mu}$	$\frac{p(\lambda)}{q(\lambda)} = \lambda^{\nu}$
$s(t) = e^{\alpha t} \sum_{\mu=0}^m b_{\mu} t^{\mu}$	$u(t) = e^{\alpha t} \sum_{\mu=0}^m A_{\mu} t^{\mu}$	$p(\alpha) \neq 0$
	$u(t) = t^{\nu} e^{\alpha t} \sum_{\mu=0}^m A_{\mu} t^{\mu}$	$\frac{p(\lambda)}{q(\lambda)} = (\lambda - \alpha)^{\nu}$
$s(t) = \cos \omega t \sum_{\mu=0}^m b_{\mu} t^{\mu} + \sin \omega t \sum_{\mu=0}^m c_{\mu} t^{\mu}$	$u(t) = \cos \omega t \sum_{\mu=0}^m B_{\mu} t^{\mu} + \sin \omega t \sum_{\mu=0}^m C_{\mu} t^{\mu}$	$p(i\beta) \neq 0$
	$u(t) = t^{\nu} \cos \omega t \sum_{\mu=0}^m B_{\mu} t^{\mu} + t^{\nu} \sin \omega t \sum_{\mu=0}^m C_{\mu} t^{\mu}$	$\frac{p(\lambda)}{q(\lambda)} = (\lambda - i\beta)^{\nu}$
$s(t) = e^{\alpha t} \cos \omega t \sum_{\mu=0}^m b_{\mu} t^{\mu} + e^{\alpha t} \sin \omega t \sum_{\mu=0}^m c_{\mu} t^{\mu}$	$u(t) = e^{\alpha t} \cos \omega t \sum_{\mu=0}^m B_{\mu} t^{\mu} + e^{\alpha t} \sin \omega t \sum_{\mu=0}^m C_{\mu} t^{\mu}$	$p(\alpha + i\beta) \neq 0$
	$u(t) = t^{\nu} e^{\alpha t} \cos \omega t \sum_{\mu=0}^m B_{\mu} t^{\mu} + t^{\nu} e^{\alpha t} \sin \omega t \sum_{\mu=0}^m C_{\mu} t^{\mu}$	$\frac{p(\lambda)}{q(\lambda)} = \{\lambda - (\alpha + i\beta)\}^{\nu}$

- Aufschreiben der homogenen Gleichung:

$$y'' - y = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 \cdot y'' + 0 \cdot y' - 1 \cdot y = 0. \quad (\text{A.4.26})$$

- Bestimmen der charakteristischen Gleichung:

$$\lambda^2 + 0 \cdot \lambda - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad p(\lambda) = \lambda^2 - 1 = 0. \quad (\text{A.4.27})$$

- Nullstellen von $p(\lambda)$ suchen. Hier ist $p(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 1)$. Man hat also die beiden voneinander verschiedenen Nullstellen $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$. Damit handelt es sich hier um den **Fall I** ($\Delta > 0$), und man hat sofort die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}. \quad (\text{A.4.28})$$

3. Schritt: Bestimmung einer partikulären Lösung $y_p(x)$ der inhomogenen Gleichung.

- Bestimmung des Typs der Störfunktion $s(x) = x e^{2x}$: In Tabelle A.2 findet man, dass sie zum Typ

$$e^{\alpha t} \sum_{\mu=0}^m b_\mu t^\mu \quad (\text{A.4.29})$$

zählt, wobei jetzt t durch x ersetzt ist, $\alpha = 2$ ist, und alle $b_\mu = 0$ sind, ausser $b_1 = 1$.

- Auswahl des korrekten Ansatzes:

Da $p(\alpha) \neq 0$, ist der richtige Ansatz

$$y_p = (A_0 + A_1 x) e^{2x}. \quad (\text{A.4.30})$$

Zu beachten ist dabei, dass man alle A_μ bis zum Wert $\mu = m$ verwendet, auch wenn für gewisse Indizes $b_\nu = 0$ ist (in diesem Fall A_0)!

- Diesen Ansatz setzt man nun in die Differentialgleichung (A.4.24) ein und findet nach einigen Rechnungsschritten

$$\{4(A_0 + A_1 x) + 4A_1 - A_0 - A_1 x\} e^{2x} := x e^{2x} \quad (\text{A.4.31})$$

$$\Rightarrow 3A_0 + 4A_1 + 3A_1 x = x. \quad (\text{A.4.32})$$

Der Koeffizientenvergleich ergibt nun

$$3A_0 + 4A_1 = 0 \quad \text{und} \quad 3A_1 = 1, \quad (\text{A.4.33})$$

was zur Lösung $A_0 = -4/9$ und $A_1 = 1/3$ führt. Somit haben wir die partikuläre Lösung

$$y_p(x) = \left(-\frac{4}{9} + \frac{1}{3}x\right) e^{2x} \quad (\text{A.4.34})$$

gefunden.

4. Schritt: Bestimmung der allgemeinen Lösung $y(x)$ der inhomogenen Gleichung.

Die Regel besagt, dass man zu einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Problems addieren muss, also findet man:

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = \left(-\frac{4}{9} + \frac{1}{3}x\right) e^{2x} + C_1 e^x + C_2 e^{-x}. \quad (\text{A.4.35})$$

Das mathematische Pendel

Wir betrachten einen Massenpunkt der Masse m , welcher an einer masselosen Stange der Länge ℓ an einem Punkt drehbar aufgehängt ist. Reibungskräfte am Drehpunkt sowie Luftwiderstand vernachlässigen wir, sodass die einzige wirkende Kraft die Gravitationskraft ist. Einen solchen idealisierten Aufbau nennt man das mathematische Pendel (siehe Abb. A.2).

Sei φ der Winkel zwischen der Pendelstange und der Vertikalen. Wir wollen nun versuchen, eine Gleichung aufzustellen, die die Schwingungen des Pendels beschreibt, also wie sich der Winkel φ mit der Zeit verändert. Wir wenden dazu den Satz von Newton an:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (\text{A.4.36})$$

Der Massenpunkt m wird von der Pendelstange auf eine Kreisbahn mit Radius ℓ gezwungen, die von der Schwerkraft verursachte Beschleunigung kann also nur eine Komponente tangential zu dieser Kreisbahn haben. Sei s die vom Tiefpunkt des Pendels aus gemessene Bogenlänge, dann finden wir

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -mg \sin \varphi, \quad (\text{A.4.37})$$

und, da die Bogenlänge $s = \ell\varphi$ ist,

$$m\ell \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -mg \sin \varphi \quad (\text{A.4.38})$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \sin \varphi = 0 \quad (\text{A.4.39})$$

Diese Gleichung ist nichtlinear und somit nicht mit den hier behandelten Methoden lösbar. Wenn wir unsere Betrachtung jedoch auf kleine Winkel φ einschränken, können wir den Sinus in der Taylorentwicklung 1. Ordnung um den Ursprung ($\varphi = 0$) annähern durch $\sin \varphi \approx \varphi$, so dass man schliesslich die lineare Differentialgleichung

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \varphi = 0 \quad (\text{A.4.40})$$

erhält. Es fällt auf, dass die Bewegung des Pendels unabhängig von der Masse m ist, die sich ja aus der Gleichung herausgekürzt hat! Der Lösungsweg ist identisch mit dem aus

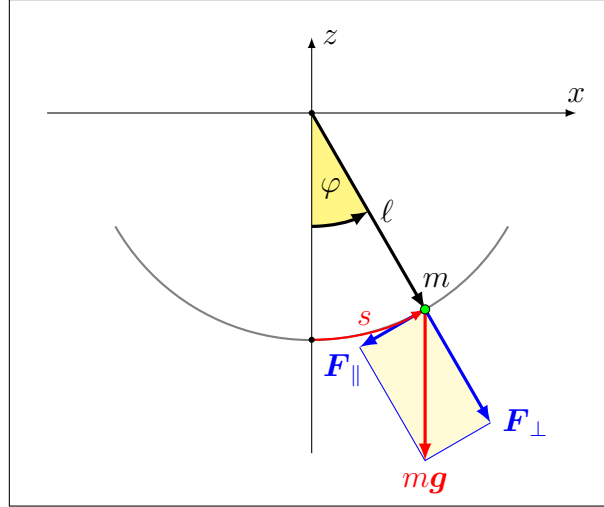


Abbildung A.2: Mathematisches Pendel.

dem vorhergehenden Beispiel. Es handelt sich hier um eine homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Zuerst müssen wir die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + \frac{g}{\ell} = 0 \quad (\text{A.4.41})$$

lösen. Die Diskriminante ergibt sich zu

$$\Delta = -4\frac{g}{\ell} < 0, \quad (\text{A.4.42})$$

und somit haben wir den **Fall III** vorliegen. Die Lösungen von Gl. (A.4.40) sind also nach Gl. (A.4.23) gegeben durch

$$\varphi(t) = e^{\alpha t} (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t) \quad \text{mit} \quad \alpha := -\frac{a_1}{2}, \quad \omega := \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}, \quad (\text{A.4.43})$$

wobei hier $a_1 = 0$ in Gl. (A.4.8) gilt und gemäss Gl. (A.4.10) somit $\alpha = 0$ und $\omega = \sqrt{g/\ell}$ sind. Man findet also die allgemeine Lösung

$$\varphi(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t. \quad (\text{A.4.44})$$

Damit das Pendel überhaupt schwingen kann, muss es erst einmal in Bewegung gesetzt werden. Man muss es also beispielsweise um den Winkel φ_0 auslenken und zum Zeitpunkt $t = 0$ loslassen. Die Winkelgeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$ ist dann $\dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0 = 0$. Die Konstanten C_1 und C_2 erhalten wir aus den folgenden Gleichungen:

$$\varphi(0) = C_1 \cos(\omega \cdot 0) + C_2 \sin(\omega \cdot 0) = \varphi_0 \quad (\text{A.4.45})$$

$$\dot{\varphi}(0) = -C_1 \omega \sin(\omega \cdot 0) + C_2 \omega \cos(\omega \cdot 0) = \dot{\varphi}_0 = 0 \quad (\text{A.4.46})$$

$$\Rightarrow C_1 = \varphi_0 \quad \text{und} \quad C_2 = 0 \quad (\text{A.4.47})$$

Die vollständige Lösung des Anfangswertproblems lautet also

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos \omega t. \quad (\text{A.4.48})$$

Das Pendel beschreibt also eine Kosinusschwingung mit der Anfangsauslenkung φ_0 und der Periode

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}. \quad (\text{A.4.49})$$

Die Periode ist demnach unabhängig von der Masse des Pendels und zusätzlich auch von der Anfangsauslenkung φ_0 . Diese Ergebnisse für das mathematische Pendel gelten jedoch alle nur unter der Annahme, dass die Amplitude klein ist.

In der Diskussion von Schwingungen und Wellen haben wir ständig mit solchen linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung zu tun. Dass in Gl. (A.4.40) der Koeffizient $a_1 = 0$ ist, also die erste Ableitung nicht vorkommt, ist ein Spezialfall, der bei harmonischen Oszillatoren ohne Dämpfung vorliegt. Die allgemeine Lösung (A.4.44) für diesen Fall lässt sich intuitiv darüber erklären, dass Sinus und Kosinus nach zweimaligem Ableiten jeweils eine skalierte Version ihrer selbst ergeben und deshalb als Lösung in Frage kommen, wenn nur die zweite Ableitung in der linearen Differentialgleichung enthalten ist. In gedämpften Systemen ist $a_1 \neq 0$ und es kommen alle drei Fälle aus Abschnitt A.4.1 als Lösung in Frage.

Anhang B

Fouriertransformation

B.1 Fourieranalyse

B.1.1 Fourierreihen

B.1.1.1 Definition und Eigenschaften

Das im Kapitel Schwingungen behandelte Konzept der Überlagerung zweier Schwingungen kann auf die Überlagerung beliebig vieler Schwingungen übertragen werden.

Definition:

Eine **Fourierreihe** ist eine Überlagerung von endlich vielen oder auch unendlich vielen, aber abzählbaren, Schwingungen.

Jede **periodische** Funktion $f(t)$ mit Periode T , also

$$f(t + T) = f(t), \quad (\text{B.1.1})$$

kann geschrieben werden als

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(\omega_n t + \delta_n) \\ \text{oder } f(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \{a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)\} \end{aligned} \quad (\text{B.1.2})$$

mit

$$\omega_n = n\omega_0, \quad \text{Frequenzen der \textbf{Oberschwingungen},} \quad (\text{B.1.3})$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad \text{Frequenz der \textbf{Grundschwingung}.} \quad (\text{B.1.4})$$

Die Funktionen $\cos \omega_n t$ und $\sin \omega_n t$ bilden die Basisvektoren eines unendlich dimensionalen Vektorraums, in dem sich periodische Funktionen als Linearkombination dieser Basisvektoren darstellen lassen.

Man beachte:

- $\cos \omega_n t$ sind die Basisvektoren im Raum der **geraden** periodischen Funktionen f_g mit Periode $T = 2\pi/\omega_0$ und der Symmetrie

$$f_g(t) = f_g(-t) \quad (\text{B.1.5})$$

- $\sin \omega_n t$ sind dagegen die Basisvektoren im Raum der **ungeraden** periodischen Funktionen f_u mit Periode $T = 2\pi/\omega_0$ und der Symmetrie

$$f_u(t) = -f_u(-t) \quad (\text{B.1.6})$$

Es gilt also

$$f_g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t) \quad (\text{B.1.7})$$

$$f_u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\omega_n t) \quad (\text{B.1.8})$$

Man beachte auch, dass $b_0 \equiv 0$ gilt, da der konstante Term eine gerade Symmetrie aufweist und bereits durch a_0 dargestellt ist.

Beliebige periodische Funktionen ohne Symmetrie können dann als eine Linearkombination von geraden und ungeraden Funktionen dargestellt werden:

$$f(t) = a f_g(t) + b f_u(t) \quad (\text{B.1.9})$$

Falls nun sowohl $f(t)$ als auch die Periode $T = 2\pi/\omega_0$ bekannt sind, kann man die **Fourierkoeffizienten** a_k und b_k bestimmen. Dies entspricht einer Projektion eines Vektors $\mathbf{r}$ im $\mathbb{R}^n$ auf die Basisachse $\hat{\mathbf{x}}_k$:

$$a_n = \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{x}}_n \quad (\text{B.1.10})$$

Beim Vektor wird diese Projektion durch das Skalarprodukt erreicht, bei der Funktion im Funktionenraum durch das Integral über das Produkt der Funktion $f(t)$ mit der Basisfunktion, berechnet für eine Periode T .

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(\omega_k t) dt \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(\omega_k t) dt \end{aligned} \quad (\text{B.1.11})$$

Dies ist die Grundlage der Signalverarbeitung und Informationstechnik. Auch in der Quantentheorie spielt diese Zerlegung eine grundlegende Rolle.

B.1.1.2 Beispiel: Mäanderkurve

Die Mäanderkurve wird auch als Rechtecksignal bezeichnet (siehe Abb. B.1):

$$f(t) = \begin{cases} +A, & 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ -A, & \frac{T}{2} \leq t \leq T \end{cases} \quad (\text{B.1.12})$$

Da die Kurve mit dieser Definition punktsymmetrisch bzw. ungerade ist, kann sie ausschliesslich mit Sinusfunktionen dargestellt werden:

$$f(-t) = -f(t) \quad (\text{B.1.13})$$

$$\Rightarrow f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(\omega_k t) \quad (\text{B.1.14})$$

Die Koeffizienten b_k ergeben sich aus

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(\omega_k t) dt \quad (\text{B.1.15})$$

$$= \frac{2A}{T} \left\{ \int_0^{T/2} \sin(\omega_k t) dt - \int_{T/2}^T \sin(\omega_k t) dt \right\} \quad (\text{B.1.16})$$

Zwischenrechnung: Integral über die Sinusfunktion in Gl. (B.1.16)

$$\int_a^b e^{ik\omega_0 t} dt = \int_a^b \{\cos(k\omega_0 t) + i \sin(k\omega_0 t)\} dt \quad (\text{B.1.17})$$

$$\left[-\frac{i}{k\omega_0} e^{ik\omega_0 t} \right]_a^b = \int_a^b \cos(k\omega_0 t) dt + i \int_a^b \sin(k\omega_0 t) dt \quad (\text{B.1.18})$$

$$= \frac{1}{k\omega_0} \{\sin(k\omega_0 b) - \sin(k\omega_0 a)\} - \frac{i}{k\omega_0} \{\cos(k\omega_0 b) - \cos(k\omega_0 a)\} \quad (\text{B.1.19})$$

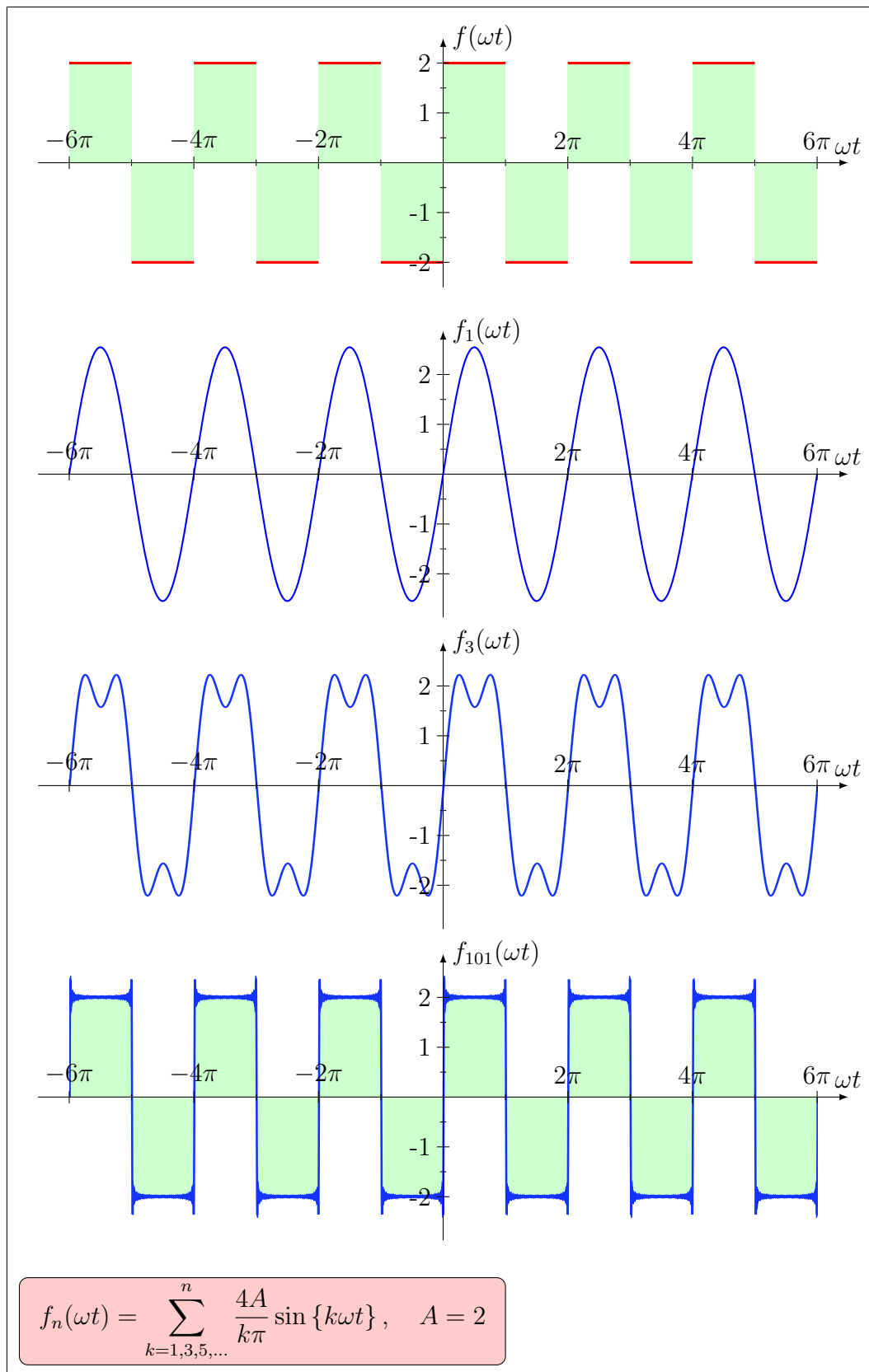


Abbildung B.1: Mäanderkurve und deren Approximation durch eine Fourierreihe.

Der Vergleich der Real- und Imaginärteile ergibt:

$$\int_a^b \cos(k\omega_0 t) dt = \frac{1}{k\omega_0} \{\sin(k\omega_0 b) - \sin(k\omega_0 a)\} \quad (\text{B.1.20})$$

$$\int_a^b \sin(k\omega_0 t) dt = -\frac{1}{k\omega_0} \{\cos(k\omega_0 b) - \cos(k\omega_0 a)\} \quad (\text{B.1.21})$$

$$\Rightarrow \int_0^{T/2} \sin(\omega_k t) dt = -\frac{1}{k\omega_0} \left\{ \cos\left(k \frac{2\pi T}{T} \frac{T}{2}\right) - 1 \right\} \quad (\text{B.1.22})$$

$$= \frac{1}{k\omega_0} \{1 - \cos(k\pi)\} = \frac{1}{k\omega_0} \{1 - (-1)^k\} \quad (\text{B.1.23})$$

Entsprechend ist

$$\int_{T/2}^T \sin(\omega_k t) dt = \frac{1}{k\omega_0} \{(-1)^k - 1\} \quad (\text{B.1.24})$$

$$\Rightarrow b_k = \frac{2}{T} \frac{A}{k\omega_0} [1 - (-1)^k - (-1)^k + 1] \quad (\text{B.1.25})$$

$$= \frac{2A}{k\pi} [1 - (-1)^k] = \begin{cases} \frac{4A}{k\pi}, & k \text{ ungerade} \\ 0, & k \text{ gerade} \end{cases} \quad (\text{B.1.26})$$

Damit folgt für die Mäanderkurve:

$$f(t) = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4A}{k\pi} \sin(k\omega_0 t) \quad (\text{B.1.27})$$

Das entsprechende Amplitudenspektrum ist in Abb. B.2 wiedergegeben.

B.1.1.3 Gibbs'sches Phänomen

Das Gibbs'sche Phänomen beschreibt das Verhalten von Fourierreihen in der Umgebung von Sprungstellen. Bei der Approximation entstehen Überschwinger an der Sprungstelle, die sich auch mit verbesserter Approximation nicht ausmerzen lassen.

B.1.1.4 Komplexe Darstellung der Fourierreihe

Statt mit Winkelfunktionen kann man die Fourierreihe auch mit der komplexen Exponentialfunktion darstellen:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} \quad (\text{B.1.28})$$

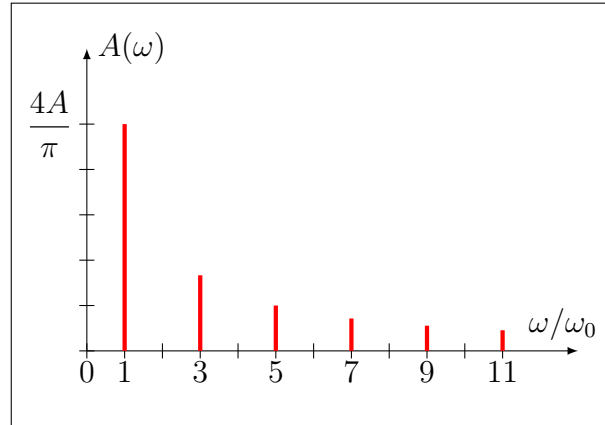


Abbildung B.2: Amplitudenspektrum der Mäanderkurve.

Man beachte, dass bei dieser Darstellung auch *negative* Frequenzen erforderlich sind.

Für

$$c_n = c_{-n}^* \quad (\text{B.1.29})$$

ist $f(t) \in \mathbb{R}$ mit

$$c_0 = \frac{a_0}{2} \quad (\text{B.1.30})$$

$$c_n = \frac{1}{2} (a_n - ib_n) \quad (\text{B.1.31})$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + ib_n) \quad (\text{B.1.32})$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)\} \quad (\text{B.1.33})$$

Die Amplituden c_n ergeben sich zu

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega_0 t} dt \quad (\text{B.1.34})$$

B.1.1.5 Anwendungen der Fourierreihe

Bei der **Fourieranalyse** einer periodischen Funktion $f(t)$, z.B. eines Signals, wird ermittelt, mit welcher Amplitude die Vielfachen der Grundfrequenz ω_0 auftreten.

Bei der **Fouriersynthese** versucht man dagegen, eine vorgegebene periodische Funktion durch eine geeignete Kombination von Schwingungen zu erzeugen.

B.1.2 Fourierintegrale

B.1.2.1 Definition

Wir haben im vorhergehenden Abschnitt gelernt, dass man *periodische* Signale durch unendliche Fourierreihen ausdrücken kann. Das zugehörige Amplitudenspektrum besteht aus einzelnen, diskreten Amplituden. Wenn man nun die Periode $T \rightarrow \infty$ gehen lässt, erhält man kein periodisches Signal mehr, sondern eine nichtperiodische Funktion. Dabei geht aber auch $\omega_0 = 2\pi/T \rightarrow 0$, so dass bei gleichbleibendem Massstab im Amplitudenspektrum die Linien immer dichter werden, bis sich eine kontinuierliche Verteilung ergibt.

Statt der Koeffizienten c_n in Gl. (B.1.28) erhält man dann eine Amplitudenfunktion $A(\omega)$, auch *Spektrum* genannt, und die Summe wird durch ein Integral ersetzt:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (\text{B.1.35})$$

Der Faktor vor dem Integral ist frei wählbar. Ist er aber einmal gewählt, dann ist damit der Vorfaktor bei der Amplitude $A(\omega)$ nicht mehr frei. Der Faktor $1/\sqrt{2\pi}$ hat den Vorzug, dass sich bei der Berechnung der Amplitudenfunktion der gleiche Faktor ergibt:

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (\text{B.1.36})$$

B.1.2.2 Beispiel: Knall

Ein Knall lässt sich näherungsweise durch eine konstante Schallamplitude während eines gewissen Zeitintervalls beschreiben (siehe Abb. B.3):

$$f(t) = \begin{cases} f_0, & -\tau \leq t \leq \tau \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{B.1.37})$$

Die Fouriertransformierte $A(\omega)$ dieser Funktion ist dann

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{f_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\tau}^{\tau} e^{-i\omega t} dt \quad (\text{B.1.38})$$

$$= \frac{f_0}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \right]_{-\tau}^{\tau} = \frac{f_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{i\omega} \underbrace{[e^{i\omega\tau} - e^{-i\omega\tau}]}_{=2i \sin \omega\tau} \quad (\text{B.1.39})$$

$$A(\omega) = \frac{2f_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(\omega\tau)}{\omega} \quad (\text{B.1.40})$$

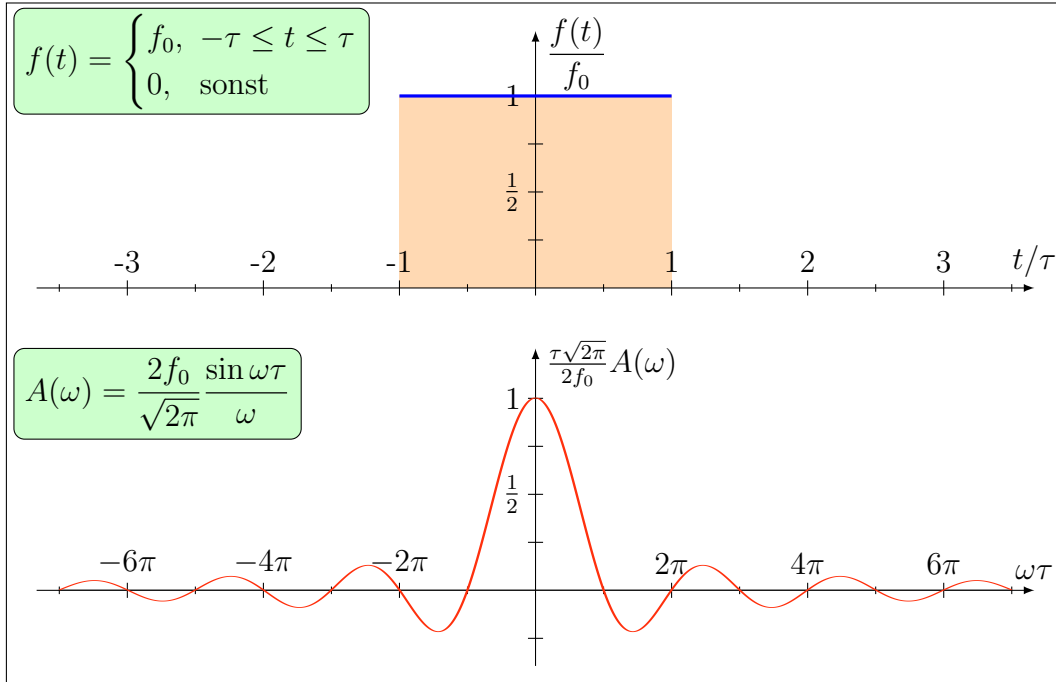


Abbildung B.3: Zeitliche Verteilung und Spektrum eines Knalls.

B.1.2.3 „Unendlich kurzer Knall“ und Deltafunktion

Offensichtlich benötigt man zur Fouriersynthese eines Knalls unendlich viele Frequenzen, wobei sich aber die Hauptbeiträge im Gebiet des 1. Maximums um $\omega = 0$ herum befinden. Je kürzer der Knall ist, desto breiter wird die Amplitudenverteilung und damit auch das Gebiet des 1. Maximums.

Wir betrachten dazu als geeignetes Mass die Breite $\Delta\omega$ zwischen $\omega = 0$ und der 1. Nullstelle.¹ Dort ist

$$\sin(\Delta\omega\tau) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta\omega = \frac{\pi}{\tau} \quad (\text{B.1.41})$$

Die Breite der Amplitudenverteilung ist also umgekehrt proportional zur Zeitdauer des Knalls.

Was geschieht nun, wenn der Knall immer kürzer gemacht wird, aber derart, dass gleichzeitig f_0 vergrößert wird, so dass die Fläche $f_0 \cdot 2\tau$ konstant bleibt (siehe Abb. B.4)? Für eine Einheitsfläche erhält man die Deltafunktion:

$$\delta(x - a) = \begin{cases} 0, & x \neq a \\ \infty, & x = a \end{cases} \quad (\text{B.1.42})$$

¹Normalerweise nimmt man die volle Breite auf halber Höhe (Halbwertsbreite, FWHM), was aber hier zu einer transzendenten Gleichung führt.

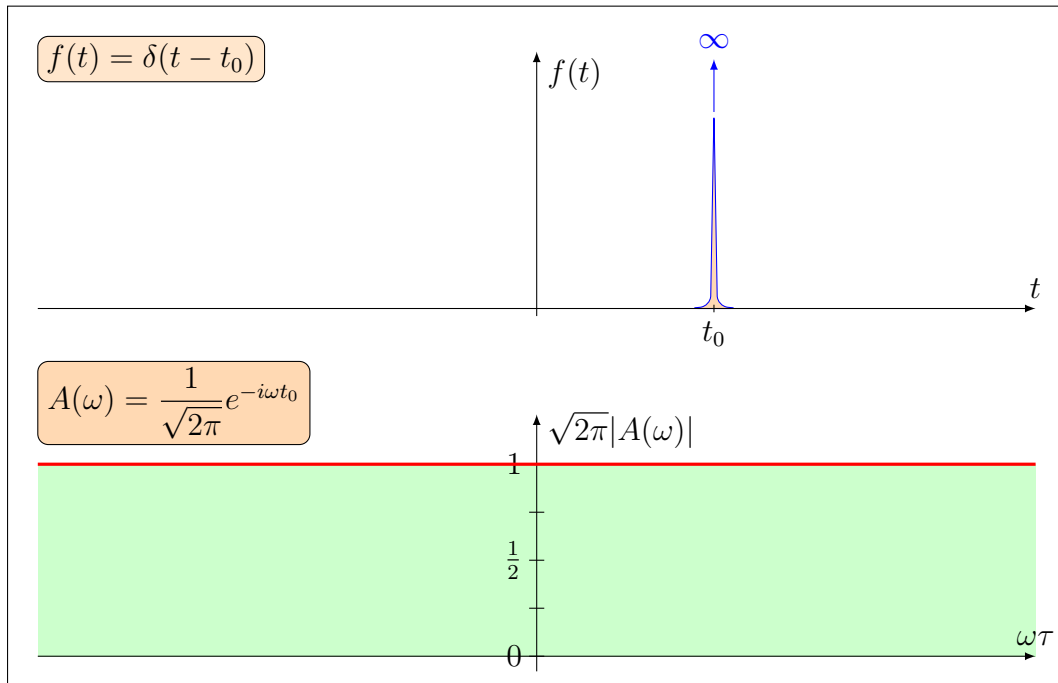


Abbildung B.4: Zeitliche Verteilung und Spektrum eines unendlich kurzen Knalls.

Dies ist offensichtlich keine Funktion im normalen Sinne. Man bezeichnet sie vielmehr als **Distribution**, und als solche ist sie über das folgende Integral definiert:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) dx = 1 \quad (\text{B.1.43})$$

Man beachte, dass gilt:

$$\int_{-\infty}^{b < a} \delta(x - a) dx = 0 \quad \text{und} \quad \int_{c > a}^{\infty} \delta(x - a) dx = 0 \quad (\text{B.1.44})$$

Die Deltafunktion $\delta(x - a)$ projiziert aus einer beliebigen Funktion den Funktionswert $f(a)$ heraus:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - a) dx = f(a) \quad (\text{B.1.45})$$

Die Fouriertransformierte der δ -Funktion ist gleich:

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega t_0} \quad (\text{B.1.46})$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}\{A(\omega)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos(\omega t_0) \quad (\text{B.1.47})$$

$$\operatorname{Im}\{A(\omega)\} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sin(\omega t_0) \quad (\text{B.1.48})$$

Das Amplitudenspektrum der Deltafunktion erstreckt sich also von $-\infty$ bis ∞ .

Diese Art von Zusammenhang zwischen der Breite eines Zeitsignals und der Breite der Amplitude im Frequenzspektrum werden wir in der Quantenmechanik in der Heisenberg'schen Unschärferelation wiederentdecken.

B.2 Gekoppelte Schwingungen

Als letztes Thema in diesem Kapitel betrachten wir gekoppelte Schwingungen. Diese sind von Interesse, da in der Natur häufig Wechselwirkungen zwischen oszillierenden Systemen auftreten, beispielsweise zwischen Atomen in Festkörpern. Zudem stellen gekoppelte Oszillatoren die Grundlage für das Phänomen einer Welle dar, welches wir im nächsten Kapitel behandeln werden.

B.2.1 Zwei Oszillatoren

Zwei identische Pendel der Masse m und der Eigenfrequenz $\omega_0 = \sqrt{g/\ell}$ seien durch eine Feder mit der Federkonstanten k miteinander verbunden (siehe Abb. B.5). Für kleine Auslenkungen x_i , $i = 1, 2$ kann die Schwingung als rein horizontal angenähert werden.

Dann lauten die Bewegungsgleichungen

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 + \frac{k}{m} (x_1 - x_2) = 0 \quad (\text{B.2.1})$$

$$\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 - \frac{k}{m} (x_1 - x_2) = 0. \quad (\text{B.2.2})$$

Dies sind zwei gekoppelte Differentialgleichungen 2. Ordnung. Zur Lösung machen wir einen Ansatz mit sogenannten **Normalkoordinaten**:

$$z_1 := x_1 - x_2 \quad (\text{B.2.3})$$

$$z_2 := x_1 + x_2. \quad (\text{B.2.4})$$

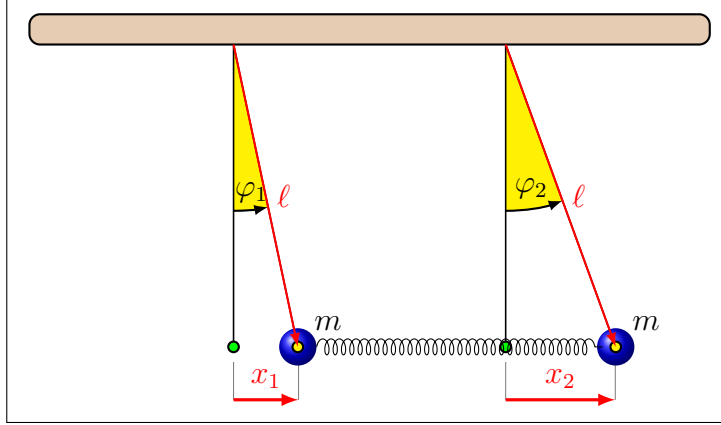


Abbildung B.5: Zwei gekoppelte Pendel.

Durch Bildung der Summe bzw. der Differenz der Gleichungen (B.2.1) und (B.2.2) ergeben sich die beiden neuen Differentialgleichungen

$$\ddot{z}_2 + \omega_0^2 z_2 = 0 \quad \text{und} \quad (\text{B.2.5})$$

$$\ddot{z}_1 + \omega_0^2 z_1 + 2\frac{k}{m}z_1 = 0. \quad (\text{B.2.6})$$

Diese Gleichungen sind nun entkoppelt (d.h. voneinander unabhängig) und stellen jeweils eine ungedämpfte Schwingung dar. Wir nennen die Lösungen von $z_1(t)$ und $z_2(t)$ auch Normalschwingungen. Die entsprechenden Kreisfrequenzen sind

$$\omega_2 = \omega_0 \quad \text{und} \quad (\text{B.2.7})$$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 + 2\frac{k}{m}}. \quad (\text{B.2.8})$$

Aus der Rücktransformation zu den Ortskoordinaten x_1 und x_2 folgt die allgemeine Lösung

$$x_1(t) = \frac{1}{2}(z_1 + z_2) \quad (\text{B.2.9})$$

$$x_2(t) = \frac{1}{2}(z_2 - z_1). \quad (\text{B.2.10})$$

Aufgrund der Überlagerung dieser beiden Frequenzen erhält man im allgemeinen Fall eine Schwebung. Durch eine geeignete Wahl der Anfangsbedingungen, lassen sich jedoch auch Schwingungen mit nur einer der beiden Frequenzen erzeugen. Dies führt uns zu folgender Fallunterscheidung.

1. Gleichläufige Schwingung

Falls für alle Zeiten t gilt, dass $x_1(t) = x_2(t)$, so folgt

$$z_1(t) = 0 \quad \text{und} \quad z_2(t) = 2x_1(t). \quad (\text{B.2.11})$$

In diesem Fall ist nur die Normalschwingung $z_2(t)$ mit der Eigenfrequenz $\omega_2 = \omega_0$ angeregt (siehe Abb. B.6).

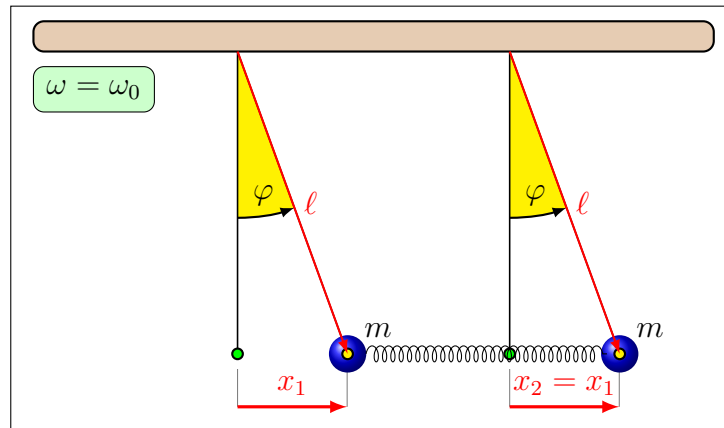


Abbildung B.6: Zwei gekoppelte Pendel mit gleichläufiger Schwingung.

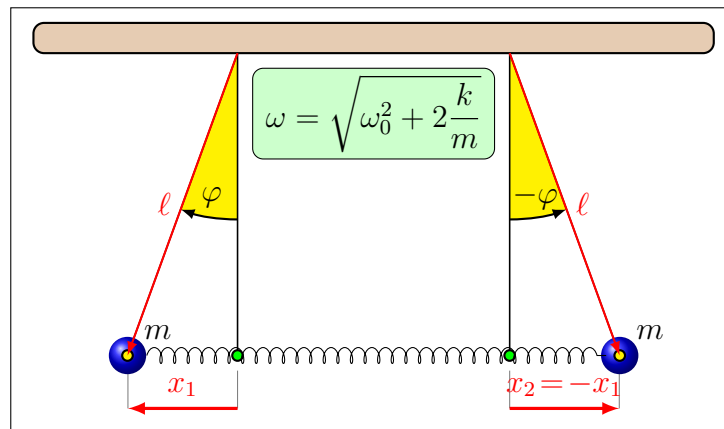


Abbildung B.7: Zwei gekoppelte Pendel mit gegenläufiger Schwingung.

2. Gegenläufige Schwingung

Falls hingegen $x_1(t) = -x_2(t)$ für alle Zeiten t gilt, so folgt

$$z_1(t) = 2x_1(t) \quad \text{und} \quad z_2(t) = 0. \quad (\text{B.2.12})$$

In diesem Fall ist nur die Normalschwingung $z_1(t)$ mit der Eigenfrequenz ω_1 angeregt (siehe Abb. B.7).

3. Allgemeiner Fall

Zum Schluss untersuchen wir noch den Fall, bei dem beide Normalschwingungen gleichzeitig auftreten. Als Beispiel wählen wir die folgenden Anfangsbedingungen. Das erste Pendel sei um A ausgelenkt, das zweite Pendel hingegen in Ruhelage, und beide werden bis zur Zeit $t = 0$ festgehalten und dann gleichzeitig losgelassen.

Die Anfangsbedingungen in den Koordinaten x_i lauten damit

$$x_1 = A \quad x_2 = 0 \quad (\text{B.2.13})$$

$$\dot{x}_1 = 0 \quad \dot{x}_2 = 0. \quad (\text{B.2.14})$$

Für die Normalkoordinaten bedeutet dies, dass

$$z_1 = A \quad z_2 = A \quad (\text{B.2.15})$$

$$\dot{z}_1 = 0 \quad \dot{z}_2 = 0. \quad (\text{B.2.16})$$

Die allgemeinen Lösungen der entkoppelten Differentialgleichungen lauten

$$z_1 = C_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) \quad z_2 = C_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2). \quad (\text{B.2.17})$$

Mit den Anfangsbedingungen aus Gl. (B.2.13)–(B.2.14) folgt daraus

$$z_1 = A \cos \omega_1 t \quad z_2 = A \cos \omega_2 t. \quad (\text{B.2.18})$$

Die beiden Normalschwingungen haben demnach die gleiche Amplitude und die gleiche Phase zur Zeit $t = 0$. In den Koordinaten x_i lautet die Lösung

$$x_1(t) = A \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \quad (\text{B.2.19})$$

$$x_2(t) = A \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right). \quad (\text{B.2.20})$$

Wir nehmen nun an, dass die Kopplung zwischen den Pendeln nur gering sei, dass also

$$\frac{k}{m} \ll \omega_0^2 \quad (\text{B.2.21})$$

gilt. Dann ist $\omega_1 \gtrapprox \omega_2$ und

$$\omega_1 + \omega_2 \gg \omega_1 - \omega_2. \quad (\text{B.2.22})$$

Es liegt also in diesem Fall eine Schwebung vor (siehe Abb. B.8).

Die Periode T der kleinen (modulierenden) Frequenz ist

$$T = \frac{4\pi}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{4\pi}{\sqrt{\omega_0^2 + 2k/m} - \omega_0} \quad (\text{B.2.23})$$

$$= \frac{4\pi}{\omega_0} \frac{1}{\sqrt{1 + 2k/(m\omega_0^2)} - 1} \approx \frac{4\pi}{\omega_0} \cdot \frac{1}{\{1 + k/(m\omega_0^2)\} - 1} \quad (\text{B.2.24})$$

$$\Rightarrow T \approx \frac{4\pi m \omega_0}{k}. \quad (\text{B.2.25})$$

Man beachte auch den **Phasensprung** beim Nulldurchgang der Einhüllenden, der durch deren Vorzeichenänderung zustande kommt.

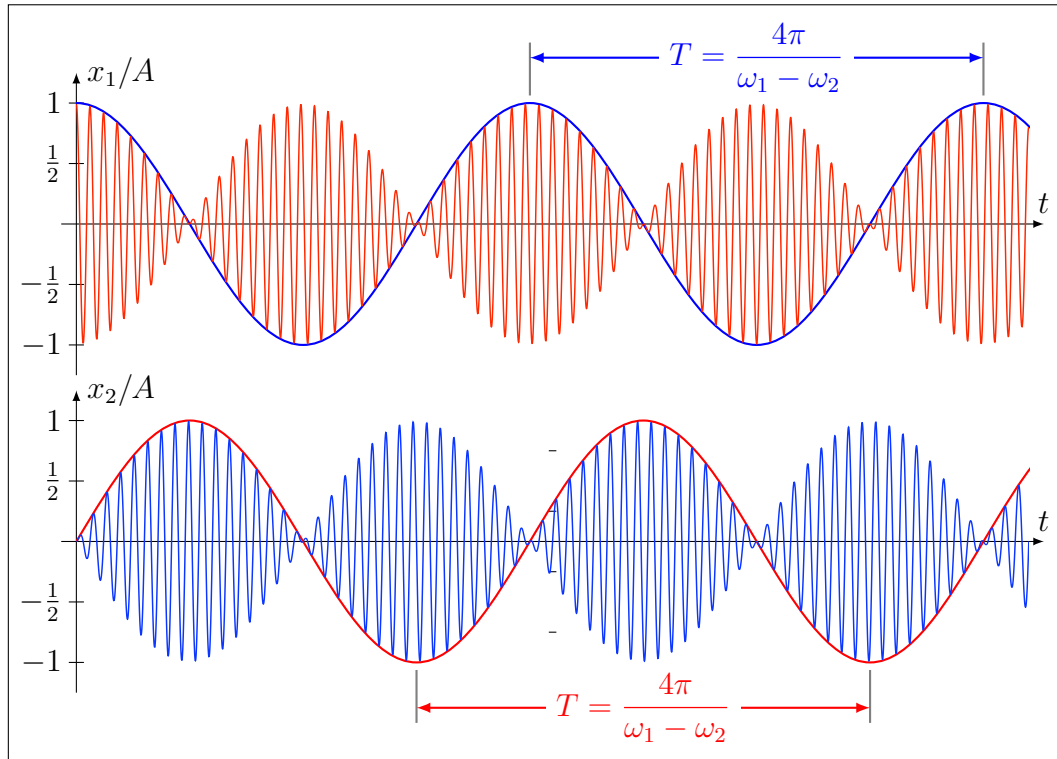


Abbildung B.8: Schwebung bei 2 schwach gekoppelten identischen Pendeln.

Von ganz besonderem Interesse ist die Tatsache, dass zu bestimmten Zeiten eines der Pendel in Ruhe ist, während das andere die gesamte Energie übernommen hat. Diese Situation kehrt sich nach der Zeit $\Delta t = T/4$ derart um, dass dann das andere Pendel die Energie übernommen hat. Die Kopplung der beiden Pendel bietet also die Möglichkeit, Energie vollständig von einem Oszillator auf einen benachbarten Oszillator zu übertragen. Genau diese Tatsache ermöglicht es mittels Wellen Energie (und Informationen) zu übertragen, ohne Masse zu transportieren.

B.3 Zusammenfassung

In diesem Kapitel haben wir Schwingungen diskutiert. Als wesentliche Punkte kann man zusammenfassen:

- In der Natur sind Schwingungen von grosser Relevanz. Harmonische Schwingungen treten immer dann auf, wenn ein System eine Gleichgewichtslage besitzt und die Kraft im System **rücktreibend und linear** zur Auslenkung aus dieser Gleichgewichtslage ist.
- Sehr oft können beliebige Potentiale bei kleinen Abweichungen aus der Gleichgewichtslage mit quadratischen Potentialen angenähert werden, was dann zu einer linearen rücktreibenden Kraft und damit zu einer harmonischen Schwingung führt.
- Die harmonische Schwingung beschreibt die Auslenkung aus einer Ruhelage anhand einer Sinus- und/oder Kosinusfunktion. Die Dynamik des Systems (z.B. die Masse und die Federkonstante) legt die Kreisfrequenz und damit die Periode der Schwingung fest. Die beiden Anfangsbedingungen (z.B. Auslenkung und Geschwindigkeit zur Zeit $t = 0$) bestimmen die Amplitude und die Phase einer harmonischen Schwingung.
- Eine sehr effiziente Behandlung und Berechnung von Schwingungen erhält man über die Einführung von komplexen Variablen. Am Ende kann der physikalisch relevante Anteil aus dem Realteil der komplexen Lösung gefunden werden.
- Die Gesamtenergie des harmonischen Oszillators (ohne Dämpfung) ist zeitlich konstant und proportional zum Quadrat der Amplitude und zum Quadrat der Kreisfrequenz. Im zeitlichen Mittel sind die kinetische und potentielle Energie des Oszillators gleich gross und genau gleich der halben Gesamtenergie.
- Bei schwach gedämpften Schwingungen fällt die Amplitude exponentiell ab, und die Kreisfrequenz ist reduziert gegenüber der freien Schwingung. In diesem Fall entspricht die zeitliche Änderung der Gesamtenergie des Systems genau der Leistung, welche durch die Dämpfungskraft entzogen wird.
- Wirkt eine externe periodische Kraft auf das System ein, schwingt es nach dem Einschwingvorgang mit der Frequenz des Erregers. Die Resonanzkurve beschreibt dabei das Verhalten der Amplitude des Oszillators als Funktion der Frequenz des ungestörten Systems, der Erregerfrequenz, der Dämpfung/Reibung sowie der Beschleunigung aufgrund der externen Kraft. Amplitudenresonanz tritt ein, wenn das Maximum der Amplitude erreicht wird. Dies ist für eine Erregerfrequenz der Fall, welche kleiner ist als die freie Kreisfrequenz (Eigenfrequenz des Systems). Leistungsresonanz, d.h. maximale Leistungsübertragung, tritt ein, wenn die Erregerfrequenz genau mit der Eigenfrequenz übereinstimmt.

- Die Überlagerung von mehreren Schwingungen liefert wieder eine periodische Funktion. Die Überlagerung von 2 Schwingungen mit ähnlicher Frequenz führt zu einer Schwebung. Hier variiert die Amplitude periodisch mit kleiner Frequenz, während die Schwingung selbst mit hoher Frequenz erfolgt.
- Eine beliebige periodische Funktion kann dargestellt werden als Überlagerung von unendlich vielen harmonischen Funktionen. Das Amplitudenspektrum (die Fourier-Reihe) beschreibt dabei, welche Frequenzen (als Vielfache der Grundfrequenz) mit welchen Amplituden in der Überlagerung auftreten.
- Die Verallgemeinerung auf eine beliebige, nicht notwendigerweise periodische Funktion erhält man über das Fourier-Integral. Auch hier beschreibt das Amplitudenspektrum, welche Frequenzen mit welchen Amplituden auftreten. Allerdings ist nun das Frequenzspektrum kontinuierlich (Fourier-Transformierte) und nicht mehr diskret.
- Wechselwirkungen (Kopplungen) zwischen oszillierenden Systemen führen zu gekoppelten Schwingungen. Die dabei auftretenden Gleichungssysteme können durch Einführung der Normalkoordinaten entkoppelt und damit gelöst werden. Diese Normalkoordinaten (bzw. Normalschwingungen) entsprechen speziellen Schwingungszuständen des Systems, wo sämtliche Oszillatoren mit derselben Frequenz harmonisch schwingen und kein Energieaustausch zwischen ihnen stattfindet. Die allgemeine gekoppelte Schwingung ergibt sich aus der Linearkombination dieser Normalschwingungen.

Anhang C

Musikinstrumente

C.1 Akustik, Musikinstrumente

Schallwellen in Gasen sind reine Longitudinalwellen, bei denen sich die Dichte und der Druck periodisch ändern (siehe auch Abbildung 2.5). Dabei sind Druck und Dichte maximal dort, wo die Auslenkung minimal ist (siehe dazu Abbildung 2.35).

Als **Klang** bezeichnen wir eine allgemeine stehende Welle $\xi(x, t)$ der Form von Gleichung (2.6.40), also eine Überlagerung von Grund- und Oberwellen. Ein **reiner Ton** ist ein Spezialfall davon, mit nur einer Grundfrequenz und keinen Oberwellen, d. h., keine Vielfache der Grundfrequenz. Die Überlagerung von Klängen wird als angenehm („harmonisch“) empfunden, falls beide Klänge möglichst viele gemeinsame Oberwellen aufweisen. Solche speziellen Überlagerungen nennt man **Akkorde**.

Beispielsweise verhalten sich die Grundfrequenzen $\nu_{1,1}$ und $\nu_{2,1}$ einer **Oktave** wie

$$\frac{\nu_{2,1}}{\nu_{1,1}} = 2 : 1 \quad (\text{C.1.1})$$

und einer **Quinte** wie

$$\frac{\nu_{2,1}}{\nu_{1,1}} = 3 : 2. \quad (\text{C.1.2})$$

Die Oktave und die Quinte usw. bezeichnen die **Tonintervalle** zwischen den beiden Grundfrequenzen. Diese Intervalle und die jeweils gemeinsamen Obertöne sind in Abbildung C.1 dargestellt.

Die notwendige Bedingung für gemeinsame Obertöne ist offensichtlich ein rationales Verhältnis der beiden Grundfrequenzen, also

$$\frac{\nu_{2,1}}{\nu_{1,1}} = \frac{q}{p}, \quad q, p \in \mathbb{N}. \quad (\text{C.1.3})$$

Die Auslenkungen der beiden sich überlagernden stehenden Wellen sind damit

$$\xi_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) [a_n \cos(n\omega_{1,1}t) + b_n \sin(n\omega_{1,1}t)] \quad (\text{C.1.4})$$

$$\xi_2(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) [a'_n \cos(n\omega_{2,1}t) + b'_n \sin(n\omega_{2,1}t)] \quad (\text{C.1.5})$$

$$\text{mit } n\omega_{2,1} = n \frac{q}{p} \omega_{1,1}. \quad (\text{C.1.6})$$

Tabelle C.1 zeigt die innerhalb einer Oktave auftretenden Tonintervalle.

Ein Instrument, das derart gestimmt ist, hat eine *reine Stimmung*. Man erkennt jedoch aus Tabelle C.2, dass die Frequenzverhältnisse von zwei aufeinanderfolgenden Tönen der Tonleiter nicht gleich sind, sondern die drei Werte $9/8$, $10/9$ und $16/15$ annehmen. Damit klingt ein für die C-Dur-Tonleiter rein gestimmtes Klavier für eine andere Tonart „unrein“. Um Instrumente mit fester Stimmung für alle Tonarten verwenden zu können, hat man die gleichmässig temperierte Stimmung eingeführt, bei der das Frequenzverhältnis zweier aufeinanderfolgender Halbtöne konstant den Wert $\sqrt[12]{2}$ besitzt (siehe dazu auch Demtröder, Physik I).

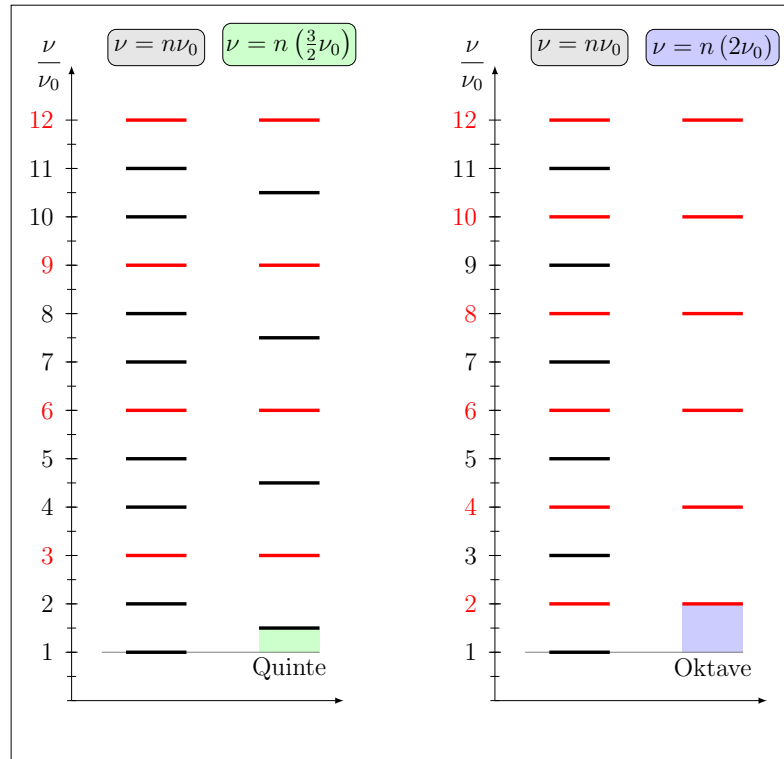


Abbildung C.1: Die Tonintervalle Quinte und Oktave und gemeinsame Obertöne.

Tabelle C.1: Tonintervalle innerhalb einer Oktave.

Intervall	ν_2/ν_1
Oktave	2:1
Quinte	3:2
Quarte	4:3
grosse Terz	5:4
kleine Terz	6:5
grosse Sexte	5:3
kleine Sexte	8:5
kleine Septime	9:5
grosse Septime	15:8
grosse Sekunde	9:8
kleine Sekunde	10:9

Tabelle C.2: C-Dur-Tonleiter

Ton	Relative Frequenz	Frequenz-verhältnis	Temperierte Stimmung	Intervall
c	1			
d	9:8	9:8	$2^{2/12}$	gr. Sekunde
e	5:4	10:9	$2^{4/12}$	gr. Terz
f	4:3	16:15	$2^{5/12}$	Quarte
g	3:2	9:8	$2^{7/12}$	Quinte
a	5:3	10:9	$2^{9/12}$	gr. Sexte
h	15:8	9:8	$2^{11/12}$	gr. Septime
c'	2:1	16:15	$2^{12/12}$	Oktave

