

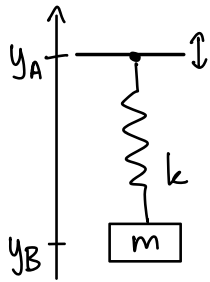
Disclaimer: Diese Bearbeitung der Prüfung ist ein Lösungsvorschlag.
Es besteht keine Garantie auf Korrektheit !

Bitte schreibe mir eine E-Mail falls du einen Fehler bemerkst:

ldewindt@ethz.ch

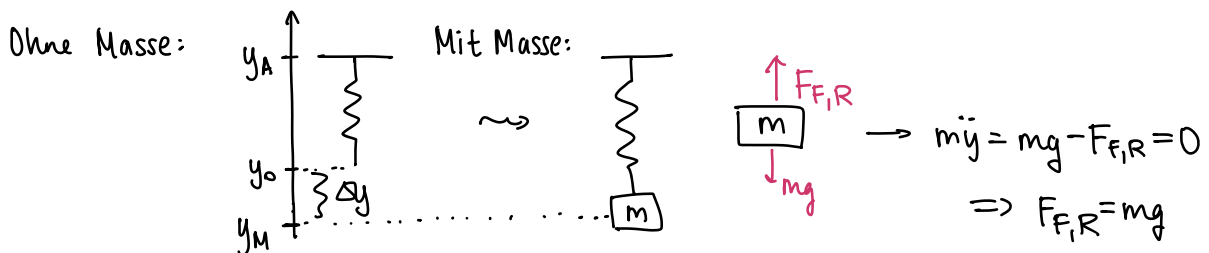
Lina De Windt

Aufgabe 1

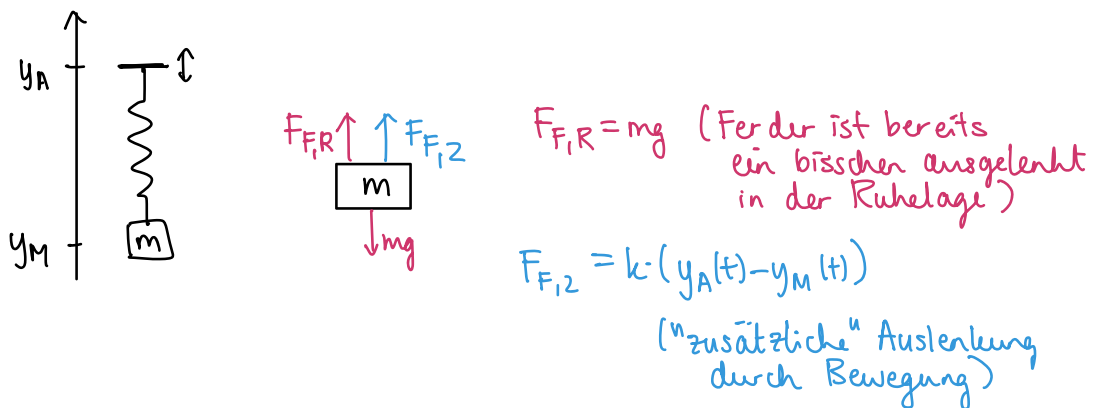


in Ruhe: $y_{A,Ruhe} - y_{B,Ruhe} = L$

a) 1. in Ruhelage:



2. Nicht in Ruhelage:



$$\Rightarrow F_F = F_{F,R} + F_{F,2} = \underline{\underline{mg + k \cdot (y_A(t) - y_M(t))}}$$

b) Newton'scher Bewegungssatz: $\ddot{y} = \sum_i F_i = F_F - mg = \underline{\underline{k \cdot (y_A(t) - y_M(t))}}$

$$\text{DGL: } \ddot{y}_M = a y_M + b \dot{y}_M + c y_A(t) + d$$

$$\text{mit } y_A(t) = C \exp(i \Omega t)$$

c) DGL kurz umformen: $\ddot{y}_M - b \dot{y}_M - a y_M = c y_A(t) + d$
Inhomogenität

Wo aus DGL ablesen: das was vor y_M (0 mal abgeleiteter Koordinate) steht ist ω_0^2 . $\Rightarrow \omega_0^2 = -a$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{\omega_0 = \sqrt{-a}}}$$

(d.h. a ist negativ, sonst würde es physikalisch keinen Sinn machen.)

d) z.z.: $y_M(t) = A e^{i \Omega t} + B$ löst die DGL $\rightarrow$ d.h. einfach in die DGL einsetzen, ableiten & zeigen dass die Gleichung erfüllt ist:

$$\ddot{y}_M - b \dot{y}_M - a y_M = c y_A(t) + d$$

$$\Leftrightarrow (A e^{i \Omega t} + B)'' - b (A e^{i \Omega t} + B)' - a (A e^{i \Omega t} + B) = c \cdot C \exp(i \Omega t) + d$$

$$\Leftrightarrow -\Omega^2 A e^{i \Omega t} - b i \Omega A e^{i \Omega t} - a A e^{i \Omega t} + a B = c C \exp(i \Omega t) + d$$

$$\Leftrightarrow (-\Omega^2 - i b \Omega - a) A e^{i \Omega t} + a B = c C \exp(i \Omega t) + d$$

$$\text{mit } a B = d \Rightarrow \underline{\underline{B = \frac{d}{a}}} \text{ und } (-\Omega^2 - i b \Omega - a) A = c C$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{A = \frac{-c C}{\Omega^2 + i b \Omega + a}}}$$

löst dieser Ansatz tatsächlich die DGL. $\square$

e) $\Omega > 0$

Betrag $|A|$ wird maximal, wenn $|\Omega^2 + a + i b|^2$ minimal wird

(Da $|A|$ max. wenn $|A|^2$ max, und $|A|^2$ ist max wenn Nenner minimal).

$$\Rightarrow |\Omega^2 + a + i b|^2 = (\Omega^2 + a)^2 + b^2$$

Wir suchen das Minimum $\rightarrow$ Ableiten nach Ω :

$$\frac{d}{d\Omega}((\Omega^2+a)^2+b^2) = 2(\Omega^2+a) \cdot 2\Omega = 4\Omega(\Omega^2+a) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \Omega=0 \quad \text{oder} \quad \Omega = +\sqrt{-a}$$

↑ weil Frequenzen immer positiv

Zweite Ableitung um zu bestimmen welches Ω den Ausdruck minimiert:

$$\frac{d^2}{d\Omega^2}((\Omega^2+a)^2+b^2) = 4(\Omega^2+a) + 8\Omega^2$$

$$\underline{\Omega=0} : 4(0+a) + 8 \cdot 0 = 4a < 0 \quad (*)$$

(*) da wir $a < 0$ als Bedingung gestellt haben, s.d. die ganze Aufgabe physikalisch Sinn macht (Frequenz muss reell sein!)

$$\underline{\Omega = \sqrt{-a}} : 4 \cdot (-a+a) + 8 \cdot (-a) = \underline{-8a > 0} \quad (*)$$

↳ Minimum!

Also ist $|A|$ maximal für $\Omega = \sqrt{-a}$

Aufgabe 2:

$$\zeta(x, y, t) = \frac{A}{1 \text{ m}^{-1} \underbrace{\sqrt{x^2 + y^2}}_{=r}} \sin\left(\underbrace{\pi \cdot 1 \text{ m}^{-1}}_{=k} \underbrace{\sqrt{x^2 + y^2}}_{=r} + \underbrace{\pi \cdot 0.5 \text{ s}^{-1}}_{=\omega} t\right), \quad A > 0$$

a) harmonische Wellen haben die Form: $\zeta(r, t) = A \sin(kr + \omega t)$

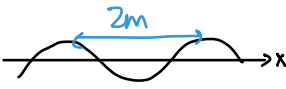
→ Wir haben es in 1D gelernt: $\zeta(x, t) = A \sin(kx + \omega t)$, aber der Prinzip ist genau dasselbe! Wir müssen hier x mit r ersetzen. r beschreibt den Radius vom Ursprung, wir haben hier eine harmonische Kreiswelle, die sich radial nach aussen (weg vom Ursprung) ausbreitet.

Wir lesen k und ω aus der Wellenfunktion ab:

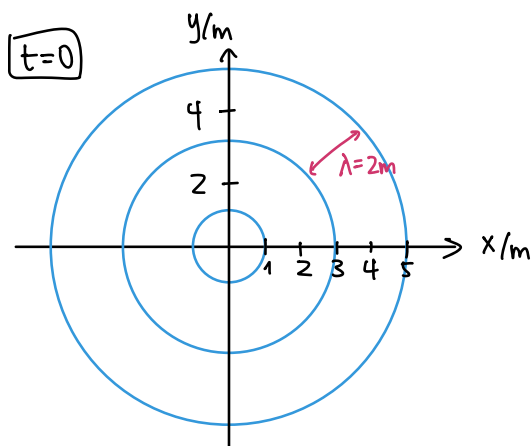
$$k = \pi \text{ m}^{-1}, \quad \omega = 0.5 \pi \text{ s}^{-1}$$

$$\Rightarrow v = \frac{\omega}{k} = \frac{0.5 \pi \text{ s}^{-1}}{\pi \text{ m}^{-1}} = \underline{\underline{0.5 \text{ m/s}}}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{v}{f} = \frac{2\pi v}{\omega} = \frac{2\pi \times 0.5 \text{ m/s}}{0.5 \pi \text{ s}^{-1}} = \underline{\underline{2 \text{ m}}}$$

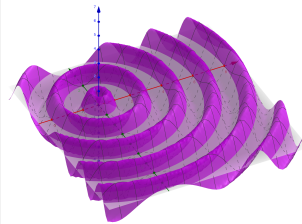
b) Wellenlänge ist $2 \text{ m} \rightarrow$  2 m zwischen 2 Maxima./Minima.

bei $r=0$ haben wir $\zeta = \frac{A}{1 \text{ m}^{-1} \cdot r} \sin(\pi \cdot 1 \text{ m}^{-1} \cdot 0) = 0$, also ein Minimum



Bem: Wir schauen hier von oben auf die xy -Ebene runter. Deswegen sieht das Ganze so "flach" aus. Wenn die z -Achse die Auslenkung der Welle beschreibt, sieht das ungefähr so aus:

$$\zeta(x, y, t) = \frac{A}{1 \text{ m}^{-1} \cdot r} \sin(\pi \cdot 1 \text{ m}^{-1} \cdot r + \pi \cdot 0.5 \text{ s}^{-1} \cdot t)$$



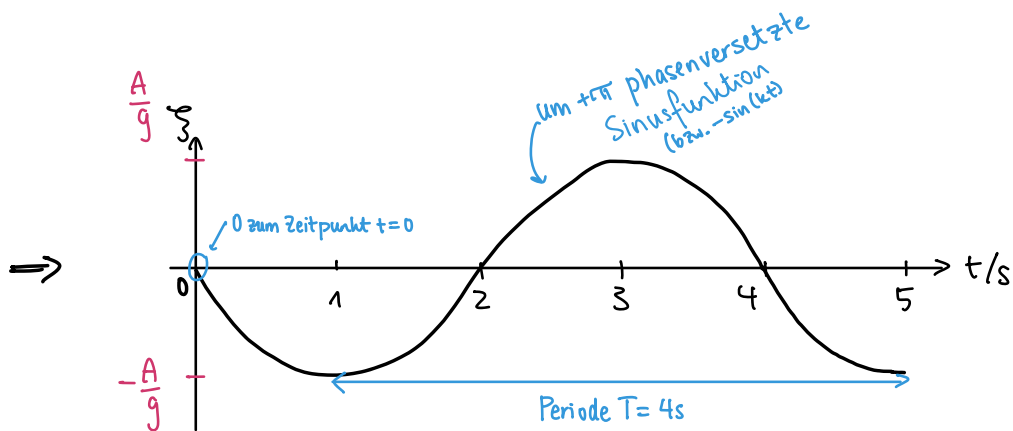
c) $x=0, y=9\text{m}, 0 \leq t \leq 5$

$$\rightarrow \zeta(x=0, y=9\text{m}, t) = \underbrace{\left(\frac{A}{g}\right)}_{\text{Amplitude}} \sin\left(9\pi + 0.5\text{s}^{-1}\pi t\right) = \frac{A}{g} \sin(\pi + kt) \stackrel{\text{Phase}}{=} -\frac{A}{g} \sin(kt)$$

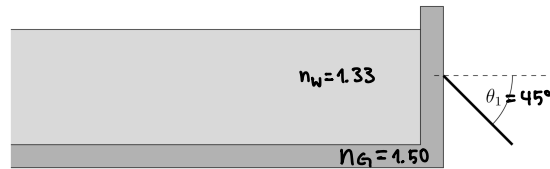
als 1. Schritt wollen wir die Periode bestimmen: $T = \frac{\lambda}{v} = \frac{2\text{m}}{0.5\text{m/s}} = 4\text{s}$

Dann bestimmen wir die Amplitude zum Zeitpunkt $t=0$:

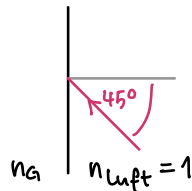
$$\zeta(x=0, y=9, t=0) = \frac{A}{g} \sin(9\pi) = \frac{A}{g} \sin(\pi) = 0$$



Aufgabe 3



a) 1. Grenzfläche:

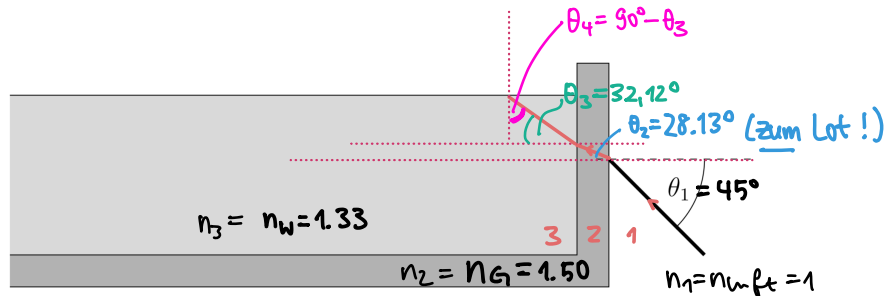


ich weiss noch, an der Prüfung hat jemand gefragt was der Brechungsindex von Luft ist (weil es steht nirgends). Dann wurde gesagt "Das solltet ihr aus den Serien wissen" und es wurde einfach nicht verraten. Das war sehr asi. Merkt euch deswegen diesen Brechungsindex / schreibt es euch auf die Zusammenfassung.

$$\text{Snell: } \frac{\sin(\theta_1)}{\sin(\theta_2)} = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow \theta_2 = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \sin(\theta_1)\right)$$

$$\theta_{\text{Glas}} = \arcsin\left(\frac{n_{\text{Luft}}}{n_G} \cdot \sin(45^\circ)\right) = \arcsin\left(\frac{1}{1.5} \cdot \sin(45^\circ)\right) = \underline{\underline{28,13^\circ}}$$

b)



c) nun $n_G = 1,50$ zu $n_W = 1,33$

$$\frac{\sin(\theta_2)}{\sin(\theta_3)} = \frac{n_3}{n_2} \rightarrow \theta_3 = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_3} \sin(\theta_2)\right) = \arcsin\left(\frac{1.5}{1.33} \cdot \sin(28.13^\circ)\right) = \underline{\underline{32,12^\circ}}$$

d) 3. Grenzfläche: Wasser $\rightarrow$ Luft

Totalreflexion nur möglich, wenn $\frac{n_{1.\text{Medium}}}{n_{2.\text{Medium}}} > 1$

Wir haben hier $\frac{n_{\text{Wasser}}}{n_{\text{Luft}}} = 1,33 > 1$ also ist Totalreflexion theoretisch möglich. Wir untersuchen auch, ob der Einfallswinkel θ_4 jemals so gross sein kann, dass Totalreflexion auftritt:

$$\theta_{4, \text{kritisch}} = \arcsin\left(\frac{n_{\text{Luft}}}{n_{\text{Wasser}}}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{1.33}\right) = 48.75^\circ$$

→ Also muss $\theta_4 > 48.75^\circ$ sein damit Totalreflexion stattfindet.

$$\text{D.h. } \theta_4 = 90^\circ - \theta_3 > 48.75^\circ \quad \Leftrightarrow \quad \theta_3 < 90^\circ - 48.75^\circ = 41.25^\circ$$

$$\text{Nun ist } \theta_3 = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_3} \sin(\theta_2)\right) = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_3} \sin\left(\arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \sin(\theta_1)\right)\right)\right) =$$

$$= \arcsin\left(\frac{n_2}{n_3} \cdot \frac{n_1}{n_2} \sin(\theta_1)\right) = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_3} \sin(\theta_1)\right) = \arcsin\left(\frac{1}{1.33} \sin(\theta_1)\right) < 41.25^\circ$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1.33} \sin(\theta_1) < \sin(41.25^\circ)$$

$$\Leftrightarrow \theta_1 < \arcsin(1.33 \times \sin(41.25^\circ)) = 59^\circ \quad \text{möglich! } \checkmark$$

⇒ Da es einen Winkel θ_1 existiert, s.d. der Einfallswinkel an der 3.

Grenzfläche den kritischen Winkel überschreitet, ist

Totalreflexion möglich //

Aufgabe 4

a) $f = 380 \text{ Hz}$ $\lambda = \frac{v}{f} = \frac{343 \text{ m/s}}{380 \text{ Hz}} \approx 0,903 \text{ m} \rightarrow \text{ungefähr } \underline{\underline{90 \text{ cm}}}$
 $v = \text{Schallgeschwindigkeit} = 343 \text{ m/s}$

b)

$\boxed{A} \rightarrow$
 $f = 380 \text{ Hz}$

$\circ$
 P
 $f_A = 370 \text{ Hz}$

$\boxed{B} \rightarrow$
 $f = 380 \text{ Hz}$

Wir wissen schon mal, dass es nach links fährt, da $f_A < f$

v bestimmen: $f_A = f \cdot \frac{v_s}{v_s + v} \Leftrightarrow v_s + v = \frac{f}{f_A} \cdot v_s \Leftrightarrow v = v_s \cdot \left(\frac{f}{f_A} - 1 \right)$

A entfernt sich von P!

$\Rightarrow v = 343 \text{ m/s} \cdot \left(\frac{380 \text{ Hz}}{370 \text{ Hz}} - 1 \right) = 9,27 \text{ m/s} = 33,4 \text{ km/h}$

$\begin{matrix} +3,6 & \rightarrow & \text{km/h} \\ \text{m/s} & \leftarrow & \div 3,6 \end{matrix}$

$\Rightarrow$ mit $|v| \approx 33,4 \text{ km/h}$ nach links

c) Wir wissen schon mal, dass sich eine Schwebung ergibt, weil hier eine Überlagerung von 2 Wellen verschiedener, aber ähnlicher Frequenz stattfindet.

Frequenz der Schwebung: $f_s = |f_A - f_B|$

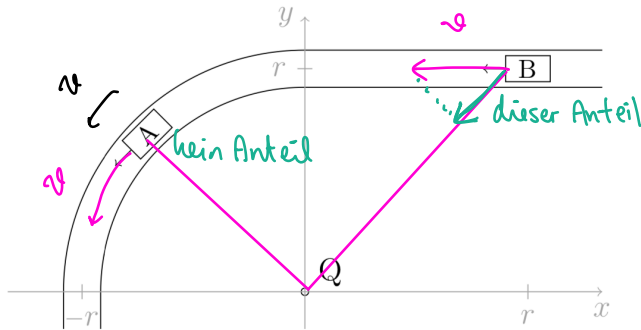
$f_B = f \cdot \frac{v_s}{v_s - v} = 380 \text{ Hz} \cdot \frac{343 \text{ m/s}}{343 \text{ m/s} - 9,27 \text{ m/s}} \approx 390 \text{ Hz}$
achtung Einheiten gleich machen

$\Rightarrow f_s \approx 20 \text{ Hz} \leftarrow \text{das ist die Frequenz der } \underline{\text{Intensität}} \text{ (bzw. Lautstärke!)}$

(Definitionsgemäss: Schwebungsfrequenz = Frequenz der Intensität)

~~X~~ Es ergibt sich eine Schwebung, wobei die Lautstärke ungefähr 20 mal pro Sekunde ihr Maximum erreicht.

d)



Nur der Anteil von v , der auf der Verbindungslinie von Quelle und Beobachter liegt, trägt zum Dopplereffekt bei!

B nähert sich Q $\rightarrow \tilde{f}_B > f$

A gleich wie der Zustand "in Ruhe" (nähert / entfernt sich nicht von Q) $\rightarrow \tilde{f}_A = f$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\tilde{f}_B > \tilde{f}_A = f}}$$

e) Distanzen bestimmen:

$$\overline{QA} = r$$

$$\overline{QB} = \sqrt{2} \cdot r$$

Kugelwellen: Aus $I \propto \frac{1}{r^2}$ (aus Zusammenfassung) und $I \propto A^2$ folgt

$$I \propto A^2 \propto \frac{1}{r^2} \rightarrow A \propto \frac{1}{r}$$

$$\text{Also is } A_A \propto \frac{1}{r} \text{ und } A_B \propto \frac{1}{\sqrt{2}r} \Rightarrow \underline{\underline{\frac{A_A}{A_B} = \sqrt{2}}}$$

Aufgabe 5

Tipp: sofort in SI-Einheiten umwandeln.

$$m_w = 500 \text{ g} = 0,5 \text{ kg}$$

$$m_s = 200 \text{ g} = 0,2 \text{ kg}$$

$$T_{s,A} = 77 \text{ K} \quad (\hat{=} \text{ Siedepunkt})$$

$$M_s = 28 \text{ g/mol} = 0,028 \text{ kg/mol}$$

$$\lambda_D = 200 \text{ kJ/kg} = 200 \times 10^3 \text{ J/kg}$$

$$c_{m, \text{Wasser}} = 4,18 \times 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

$$R = 8,315 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$

aus 1. Seite
der Prüfung

a) vollständig verdampfen: latente Wärme zufügen:

$$Q_D = m_s \lambda_D = 0,2 \text{ kg} \times 200 \times 10^3 \text{ J/kg} = \underline{\underline{40 \text{ kJ}}}$$

$$b) \quad Q' = -m c_m \Delta T \quad \Leftrightarrow \quad \Delta T = -\frac{Q'}{m c_m} = \frac{-40 \times 10^3 \text{ J}}{0,5 \text{ kg} \times 4,18 \times 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}} = \underline{\underline{-19,14 \text{ K}}}$$

c) $\text{N}_2 \rightarrow 2$ atomiges Molekül

$\Rightarrow$ 5 Freiheitsgrade (3 Translations + 2 Rotationen)

spezifische molare Wärmekapazität bei konstantem Druck:

$$c_p = \frac{f+2}{2} \cdot R = \frac{5+2}{2} \times 8,315 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} = \underline{\underline{29,1 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}}}$$

d) $T_{s,E} = 293 \text{ K}$

$$\tilde{n} = \frac{m_s}{M_s}$$

$$\Rightarrow Q' = \tilde{n} c_p \Delta T = \tilde{n} c_p \cdot (T_E - T_A) = \frac{m_s}{M_s} \cdot c_p \cdot (T_E - T_A) =$$

$$= \frac{0,2 \text{ kg}}{0,028 \text{ kg/mol}} \times 29,1 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \cdot (293 \text{ K} - 77 \text{ K}) = \underline{\underline{44,9 \text{ kJ}}}$$

Aufgabe 6

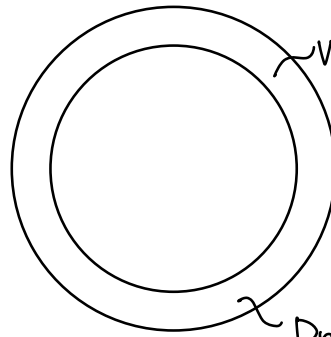
Umgebung: $p_0 = 1 \text{ bar}$

$T = 293,15 \text{ K}$

$f = 5$

ideales Gas

$\kappa = 1.4$



Druck: $p_0 \rightsquigarrow p_2 = 4 \text{ bar}$

- a) Der Druck im Reifen stieg von p_0 auf p_1 . Um diese Druckänderung zu erzeugen, wurde eine Luftmenge, die ursprünglich den Volumen V_1 hatte, in den Schlauch "reingequetscht".

adiabatische Zustandsänderung $\Rightarrow$ verwende Poisson:

$$p_0 V_1^\kappa = p_2 V_0^\kappa \Leftrightarrow V_1 = V_0 \left(\frac{p_2}{p_0} \right)^{\frac{1}{\kappa}} = 2 \text{ l} \cdot \left(\frac{4 \text{ bar}}{1 \text{ bar}} \right)^{\frac{1}{1.4}} \approx \underline{\underline{5,38 \text{ l}}}$$

- b) Verwende wieder Poisson: (Anfangstemperatur $T_0 =$ Umgebungstemperatur $= 293,15 \text{ K}$)

$$T_0^\kappa p_0^{1-\kappa} = T_2^\kappa p_2^{1-\kappa}$$

$$\Leftrightarrow T_2^\kappa = T_0^\kappa \left(\frac{p_0}{p_2} \right)^{1-\kappa} \quad / (\dots)^{\frac{1}{\kappa}}$$

$$\Leftrightarrow T_2 = T_0 \cdot \left(\frac{p_0}{p_2} \right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} = 293,15 \text{ K} \cdot \left(\frac{1 \text{ bar}}{4 \text{ bar}} \right)^{\frac{1-1.4}{1.4}} = \underline{\underline{435,62 \text{ K}}}$$

- c) kühlt langsam wieder auf $T_0 = 293,15 \text{ K}$ ab

ideale Gasgleichung: $pV = \tilde{n}RT$

Nach Ende der adiabatischen Kompression: $p_2 V_s = \tilde{n}RT_1$

Nach Abkühlen: $p_3 V_s = \tilde{n}RT_0$

$$\Rightarrow \frac{p_3 V_s}{p_2 V_s} = \frac{\tilde{n}RT_0}{\tilde{n}RT_1} = \frac{T_0}{T_1} \Rightarrow p_3 = p_2 \cdot \frac{T_0}{T_1} = 4 \text{ bar} \times \frac{293,15 \text{ K}}{435,62 \text{ K}} = \underline{\underline{2,5 \text{ bar}}}$$

d) Gleichverteilungssatz: $U = \frac{f}{2} pV$

$$\begin{aligned}\text{während der Abkühlung: } \Delta U &= \frac{f}{2} \Delta p V_s = \frac{f}{2} \cdot (p_3 - p_2) V_s = \\ &= \frac{5}{2} \cdot (2,5 \times 10^5 \text{ Pa} - 4 \times 10^5 \text{ Pa}) \cdot 0,002 \text{ m}^3 = \\ &= -750\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Es wird 750 J abgegeben

Da bei adiabatischen Zustandsänderungen $\Delta Q = 0$ gilt, entspricht die Wärme, die bei der Abkühlung abgegeben wird, der Arbeit, die Anfangs beim Aufpumpen am Gas verrichtet wurde.

Also $W^{\leftarrow} = \underline{\underline{750 \text{ J}}}$

e) Im allgemeinen findet keine adiabatischen Zustandsänderung statt.

Man kann argumentieren, dass bereits während der Kompression eine Abkühlung des Gases stattfindet, also wird T_2 kleiner sein bei Ende der Kompression. Folglich wird $p_3 = p_2 \cdot \frac{T_0}{T_2}$ grösser sein in einem realistischeren Modell. //