Disclaimer: Diese Bearbeitung der Prüfung ist ein Lösungsvorschlag.
Es besteht keine Garantie auf Korrektheit !

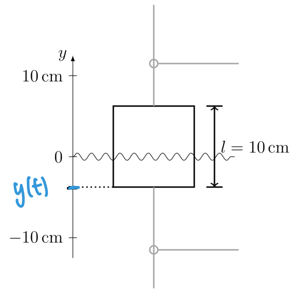
Bitte schreibe mir eine E-Mail falls du einen Fehler bemerkst:

ldewindt@ethz.ch

Lina De Windt

Physik 1 | BP 27. Jan. 2021 | Lina De Windt

Aufgabe 1:



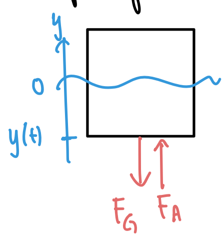
Holzwürfel: $l = 10\,cm = 10 \times 10^{-2}\,m$

$\rho_H = 650\,kg \cdot m^{-3}$

Wasser: $\rho_W = 1 \times 10^3\,kg \cdot m^{-3}$

Würfel taucht nie komplett auf & nie komplett unter.

a) Würfel freischneiden:



$F_G = m \cdot g = \rho_H V_H g = \underline{\underline{\rho_H l^3 g}}$

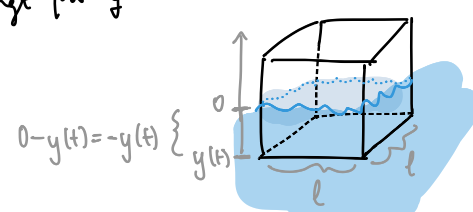
$\rho = \frac{m}{V} \Leftrightarrow m = \rho \cdot V$

$F_A \hat{=}$ Gewichtskraft des verdrängten Wassers

$= m_{W,verdrängt} \cdot g = V_{verdrängt} \cdot \rho_W \cdot g$

$= \underbrace{l^2 \cdot (-y(t))}_{} \cdot \rho_W \cdot g$

Verdrängtes Volumen:



$= \underline{\underline{-y(t) l^2 \rho_W g}}$

b) Newton'scher Bewegungssatz:

$m\ddot{y} = \sum_i F_i$ — Kraft (-komponenten) in Richtung der Koordinate y

Masse des Würfel

$\Rightarrow m\ddot{y} = F_A - F_G = -y l^2 \rho_W g - \rho_H l^3 g \quad | \div m$

$\Leftrightarrow \ddot{y} = -\frac{l^2 \rho_W g}{m} y - \frac{\rho_H l^3 g}{m} \quad | \; m = \rho_H \cdot V_H = \rho_H l^3$

$\Leftrightarrow \ddot{y} = -\frac{\cancel{l^2} \rho_W g}{\rho_H l^{\cancel{3}}} - \frac{\cancel{\rho_H l^3} g}{\cancel{\rho_H l^3}} = -\underbrace{\frac{\rho_W \cdot g}{\rho_H \cdot l}}_{:=\alpha} - \underbrace{g}_{:=\beta} = -\alpha y - \beta$

mit $\alpha = \frac{\rho_W \cdot g}{\rho_H \cdot l} = \frac{1 \times 10^3\,kg \cdot m^{-3} \times 9.81\,m/s^2}{650\,kg \cdot m^{-3} \times 10 \times 10^{-2}\,m} = \underline{\underline{151\,s^{-2}}}$

und $\beta = g = \underline{\underline{9.81\,m/s^2}}$

c) Wir haben eine DGL der Form: $\ddot{y} + \underbrace{\alpha}_{:=\omega_0^2} y = -\beta$ lin. DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

ω_0 aus DGL ablesen: Das was vor y steht mit ω_0^2 ersetzen! (bzw. das als ω_0^2 definieren)

$$\Rightarrow \text{ da } \alpha = -\frac{\rho_W \cdot g}{\rho_H \cdot l} \quad \Rightarrow \omega_0^2 = \alpha = -\frac{\rho_W \cdot g}{\rho_H \cdot l}$$

$$\Leftrightarrow \omega_0 = + \sqrt{-\frac{\rho_W \cdot g}{\rho_H \cdot l}} = \sqrt{151 s^{-2}} = \underline{\underline{12{,}3 \text{ Hz}}}$$

+ da eine negative Kreisfrequenz phys. keinen Sinn macht

$$T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{12{,}3 \text{ Hz}} = \underline{\underline{0.511 s}}$$

$\omega_0 = 2\pi f_0 \Leftrightarrow f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$

d) In Ruhelage gilt: $\vec{R} = 0$, bzw: $\ddot{y} = 0$ (keine Beschleunigung):

$$\Rightarrow \ddot{y}_{ggw} = -\alpha y_{ggw} - \beta \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha y_{ggw} = -\beta$$

$$\Leftrightarrow y_{ggw} = -\frac{\beta}{\alpha} = \frac{-9{,}81 \, m/s^2}{151 \, s^{-2}} = -0{,}065 \, m = \underline{\underline{-6{,}5 \, cm}}$$

e) Anfangsbedingungen: $\begin{cases} y(0) = y_0 \\ \dot{y}(0) = 0 \end{cases}$ DGL lösen: $\ddot{y} = -\alpha y - \beta$

$$\Leftrightarrow \ddot{y} + \alpha y = -\beta$$

Homogener Teil $\ddot{y} + \underbrace{\alpha}_{\omega_0^2} y = 0 \Leftrightarrow \ddot{y} + \omega_0^2 y = 0 \Rightarrow y_h(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$

Partikulärer Teil: $\ddot{y} + \omega_0^2 y = -\beta \Rightarrow$ Ansatz: $y_p(t) = \underbrace{C}_{\text{Konstante}}$

$$\Leftrightarrow C'' + \omega_0^2 C = -\beta$$

$$\Leftrightarrow \omega_0^2 C = -\beta \Leftrightarrow C = -\frac{\beta}{\omega_0^2}$$

Folglich erhalten wir: $y(t) = y_h(t) + y_p(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) - \frac{\beta}{\omega_0^2}$ (allgemeine Lö)

Wir verwenden die AB um die spezifische Lö zu bestimmen:

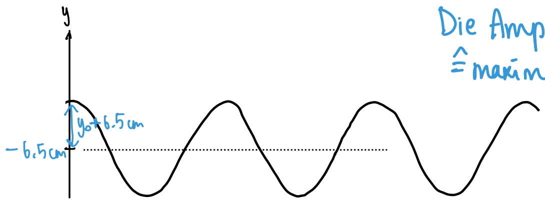
$$y(0) = A - \frac{\beta}{\omega_0^2} \overset{!}{=} y_0 \iff A = y_0 + \frac{\beta}{\omega_0^2}$$

$$\dot{y}(0) = \omega_0 B \overset{!}{=} 0 \implies B = 0 \qquad \frac{\beta}{\omega_0^2} = \frac{9.81\,m/s^2}{151\,s^{-2}} = 6.5\,cm$$

$$\implies y(t) = \left(y_0 + \frac{\beta}{\omega_0^2}\right)\cos(\omega_0 t) - \frac{\beta}{\omega_0^2} = \underbrace{(y_0 + 6{,}5\,cm)}_{:=A}\cos(\omega_0 t) - 6.5\,cm$$

Die Amplitude der Schwingung $\hat{=}$ maximale Auslenkung!

Schwingung ist um so viel "versetzt"



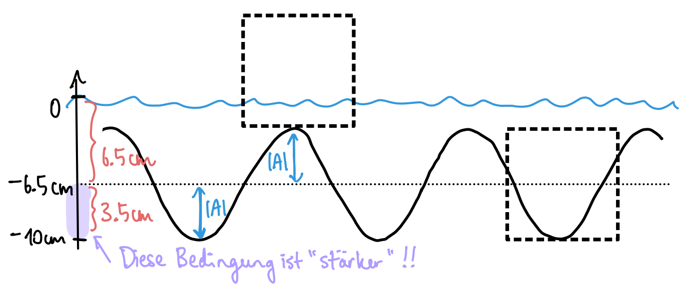
Würfel darf nie komplett eintauchen oder auftauchen:

d.h. $|A| \overset{!}{<} 3{,}5\,cm \iff |y_0 + 6.5\,cm| < 3.5\,cm$

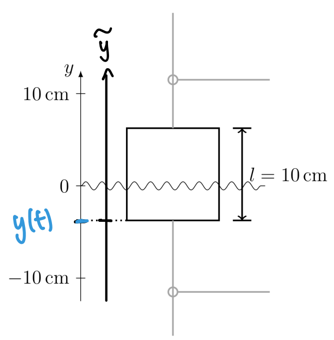
$\iff -3.5\,cm < y_0 + 6.5\,cm < 3.5\,cm$

$\iff -10\,cm < y_0 < -3\,cm$

$\implies \underline{\underline{y_0 \in (-10\,cm, -3\,cm)}}$



f)



Wir definieren $\tilde{y}$ so, dass es bei der Gleichgewichtslage $\tilde{y} = 0$ gilt:

$$\underline{\underline{\tilde{y} = y - y_{ggw} = y + 6{,}5\,cm}}$$

$y_{ggw} = -6{,}5\,cm$

Check: DGL wird zu: $\hookrightarrow y = \tilde{y} + y_{ggw}$

$\ddot{y} + \alpha y = -\beta \implies (\ddot{\tilde{y}} + \ddot{y}_{ggw}) + \alpha\cdot(\tilde{y} + y_{ggw}) = -\beta$

$\iff \ddot{\tilde{y}} + \alpha\tilde{y} + \alpha y_{ggw} = -\beta$

$\iff \ddot{\tilde{y}} + \alpha\tilde{y} = -\beta - \alpha y_{ggw} \qquad$ / aus d): $y_{ggw} = -\frac{\beta}{\alpha}$

$\iff \ddot{\tilde{y}} + \alpha\tilde{y} = -\beta + \alpha\cdot\frac{\beta}{\alpha} = -\beta + \beta = 0$ homogen :)

g) neue DGL: $\ddot{\tilde{y}} = -\alpha\tilde{y} - \gamma\dot{\tilde{y}} \iff \ddot{\tilde{y}} + \gamma\dot{\tilde{y}} + \underset{\omega_0^2}{\alpha} y = 0$

Schwache Dämpung: $\frac{\gamma}{2} < \omega_0 \quad / \omega_0 = \sqrt{\alpha}$

$$\iff \frac{\gamma}{2} < \sqrt{\alpha}$$

$$\iff \underline{\underline{\gamma < 2\sqrt{\alpha}}} \quad \left(= 2 \cdot 12{,}3\text{ Hz} = 24.6\text{ Hz} \right)$$ weiss nicht ob da Werte verlangt sind

h) $\tilde{y}(t)$ bestimmen für Fall der schwachen Dämpfung, d.h. $\gamma < 2\sqrt{\alpha}$

AB: $\begin{cases} \tilde{y}(0) = \tilde{y}_0 \\ \dot{\tilde{y}}(0) = 0 \end{cases}$ DGL lösen: $\ddot{\tilde{y}} + \gamma\dot{\tilde{y}} + \alpha\tilde{y} = 0$ Ansatz: $\tilde{y}(t) = e^{\lambda t}$

$\Rightarrow \mathrm{Chp}(\lambda): \lambda^2 + \gamma\lambda + \alpha = 0$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\alpha}}{2}$$ ← negativ, da $\gamma < 2\sqrt{\alpha} \Rightarrow \gamma^2 < 4\alpha$

$$= \frac{-\gamma \pm \sqrt{(-1)\cdot(4\alpha - \gamma^2)}}{2}$$ ← jetzt positiv.

$$= \frac{-\gamma \pm i\sqrt{4\alpha - \gamma^2}}{2}$$

$$\Rightarrow \tilde{y}(t) = Ae^{\frac{-\gamma + i\sqrt{4\alpha-\gamma^2}}{2}t} + Be^{\frac{-\gamma - i\sqrt{4\alpha-\gamma^2}}{2}t}$$

$$= e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(Ae^{i\frac{\sqrt{4\alpha-\gamma^2}}{2}t} + Be^{-i\frac{\sqrt{4\alpha-\gamma^2}}{2}t}\right)$$ $:= \delta$ (um Schreibarbeit zu reduzieren :)

$$= e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left\{A\left(\cos(\delta t) + i\sin(\delta t)\right) + B\left(\cos(\delta t) - i\sin(\delta t)\right)\right\}$$

$$= e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left\{\underbrace{(A+B)}_{:=\tilde{A}}\cos(\delta t) + \underbrace{i(A-B)}_{:=\tilde{B}}\sin(\delta t)\right\}$$

mit $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathbb{R}$ (In physik suchen wir nur nach reellen Lösungen!)

$$= e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(\tilde{A}\cos(\delta t) + \tilde{B}\sin(\delta t)\right)$$

Anfangsbedingungen einsetzen:

$\tilde{y}(0) = \hat{A} = \hat{y}_0$

$\dot{\tilde{y}}(0) = -\frac{\gamma}{2}e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(\tilde{A}\cos(\delta t) + \tilde{B}\sin(\delta t)\right) + e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(-\delta\tilde{A}\sin(\delta t) + \delta\tilde{B}\cos(\delta t)\right)\Big|_{t=0} =$

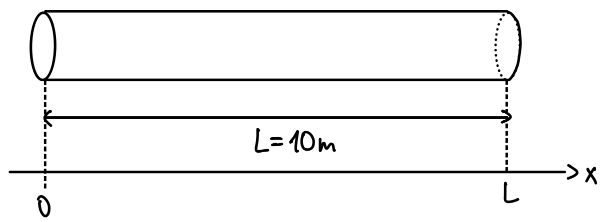
$$= -\frac{\gamma}{2}\tilde{A} + \delta\tilde{B} \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{B} = \frac{\gamma}{2\delta}\tilde{A} = \frac{\cancel{\gamma}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\sqrt{4\alpha-\gamma^2}} \cdot \tilde{y}_0 = \frac{\gamma}{\sqrt{4\alpha-\gamma^2}}\tilde{y}_0$$

$$\delta = \frac{\sqrt{4\alpha-\gamma^2}}{2} = \sqrt{\alpha - \frac{\gamma^2}{4}}, \quad \tilde{A} = \tilde{y}_0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\tilde{y}(t) = \tilde{y}_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left\{\cos\left(\sqrt{\alpha-\frac{\gamma^2}{4}}\,t\right) + \frac{\gamma}{\sqrt{4\alpha-\gamma^2}}\sin\left(\sqrt{\alpha-\frac{\gamma^2}{4}}\,t\right)\right\}}}$$

Bem: Ich glaube, man darf auch direkt den Ansatz für schwache Dämpfungen verwenden $\left(\tilde{y}(t) = (c_1\cos(\omega_0 t) + c_2\sin(\omega_0 t))e^{-\frac{\gamma}{2}t}\right)$, dann geht es schneller :)

Aufgabe 2:



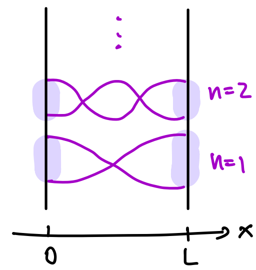
Schallwelle: $v_s = 343\,m/s$

↑

⚠ longitudinal!

Schallauslenkung: $\xi(x,t) = A\cos(kx)\cos(2\pi f t - \psi)$

a) Beide Enden geöffnet:



Randbedingungen: $\underset{①}{|\xi(0,t)|} = \underset{②}{|\xi(L,t)|} = A_{max}(t)$

① $\Rightarrow \xi(0,t) = |\underbrace{A\cos(2\pi f t - \psi)}_{\text{maximal wenn } = \pm 1}| \overset{!}{=} A_{max}(t)$

Muss maximal sein $\forall t$, insbesondere auch für $t=0$ → wähle $t=0$ und setze ein, so kann man ψ bestimmen :)

$\Rightarrow |\cos(-\psi)| \overset{!}{=} 1$

$\Rightarrow \psi = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$

eigentlich nicht so wichtig, ψ muss man ja nicht bestimmen in dieser Aufgabe
⇒ dh. diese Randbedingung bringt uns nicht weiter!

② $\Rightarrow \xi(L,t) = |A\cos(k \cdot L)\cos(2\pi f t - n\pi)| \overset{!}{=} A_{max}(t)$

$\Rightarrow |\underbrace{\cos(k \cdot L)}_{\overset{!}{=} \pm 1} \underbrace{\cos(2\pi f t - n\pi)}_{\overset{!}{=} \pm 1}| \overset{!}{=} 1$ (da wir den maximalen Wert wollen!)

$\Rightarrow \cos(kL) \overset{!}{=} \pm 1 \Rightarrow kL = n\pi \Rightarrow k = \frac{n\pi}{L}$

b) $f_n = \frac{v \cdot k_n}{2\pi}$

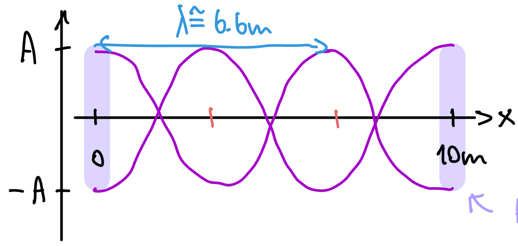
Zahlenwert für Fall $k = \frac{2\pi}{L}$: $f = \frac{v \cdot 2\pi}{2\pi L} = \frac{v}{L} = \frac{343\,m/s}{10\,m} = 34.3\,Hz$

$v(\text{Schall}) = 343\,m/s$

c) $k = \frac{3\pi}{L} \Rightarrow f = \frac{v \cdot 3\cancel{\pi}}{2\cancel{\pi} L} = \frac{3}{2}\frac{v}{L} =$

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{\cancel{v}}{\frac{3}{2}\frac{\cancel{v}}{L}} = \frac{2}{3}L = \frac{2}{3} \cdot 10\text{m} \cong 6.6\text{m}$$

$\Rightarrow$



Maximale Auslenkung an beiden Enden!

d) Katze kann nur $f > 45$ Hz wahrnehmen

$v = 343$ m/s , $L = 10$m

i) Grundschwingung: $n=1 \Rightarrow f = \frac{v}{2L} = 17.15$ Hz ↯ zu tief

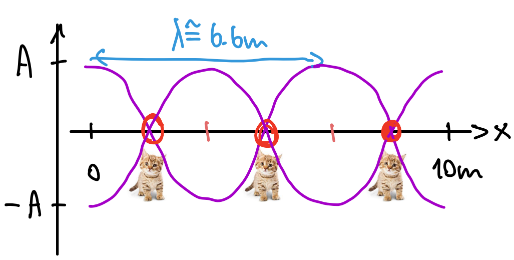
ii) 1. Oberschwingung: $n=2 \Rightarrow f = \frac{2v}{2L} = 34.3$Hz ↯ zu tief

iii) 2. Oberschwingung: $n=3 \Rightarrow f = \frac{3v}{2L} = 51.45$ Hz ✓ Katze kann einen Ton wahrnehmen!

Das Gehör nimmt Druckänderungen wahr. D.h. die Lautstärke ist bei den Knoten der Auslenkung am grössten. Why? → ⊛

Bei der 2. Oberschwingung haben wir:

$$\lambda = \frac{2L}{3} = \frac{2}{3}L$$ → genau das was wir in c) skizziert haben!



Knoten bei $x \in \left\{\frac{L}{6}, \frac{L}{2}, \frac{5}{6}L\right\}$

$\Rightarrow$ Es ist am lautesten bei

$\underline{\underline{x \cong 1.67\text{m} \quad x \cong 5\text{m} \quad \text{und} \quad x \cong 8{,}33\text{m}}}$

Skript S.99:

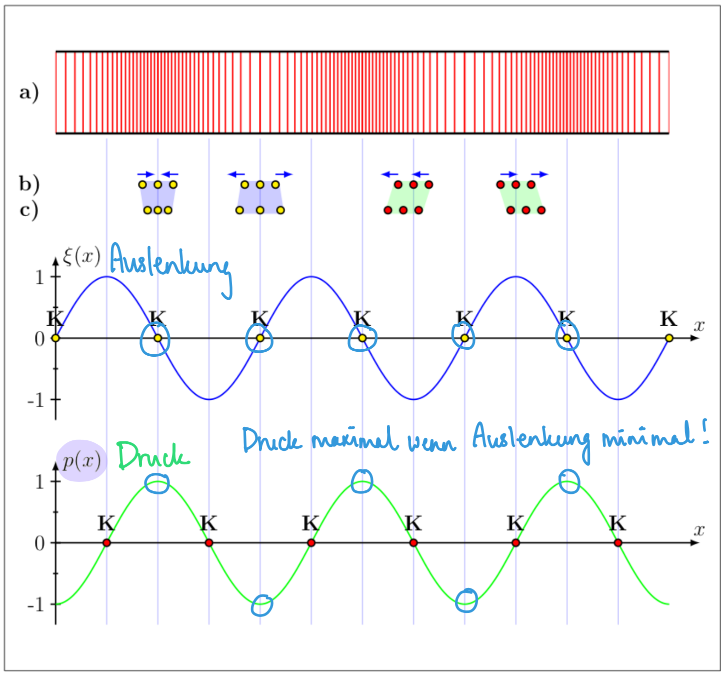
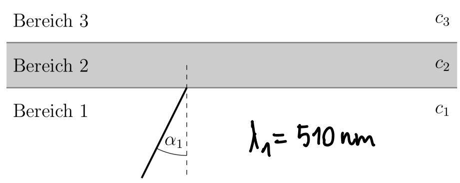


Abbildung 2.35: Druck- und Amplitudenverteilung einer stehenden Schallwelle in einem Gas zu einem festgelegten Zeitpunkt: a) Dichteverteilumg des Gases, b) Ruhelagen einiger ausgewählter Moleküle (dargestellt durch die Kugeln in der oberen Reihe) mit Richtung ihrer Auslenkung gemäss $\xi(x)$ (dargestellt durch die Pfeile und die neuen Positionen der Kugeln in der unteren Reihe). Jedes der vier Beispiele entspricht einem Ort gemäss der x-Achsen in c). Insbesondere treten die blau hinterlegten Szenarien an den Orten auf, bei denen $\xi(x)$ einen Nulldurchgang hat (Extrema des Drucks), während die grün hinterlegten an den Orten der Nulldurchgänge von $p(x)$ (Extrema der Dichte) auftreten. c) Verlauf der Auslenkung $\xi(x)$ und des Drucks $p(x)$ über dem Ort.

Aufgabe 3:

Im Bereich 1 und 3 sei die Lichtgeschwindigkeit $c_1 = c_3 = 2 \cdot 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, im Bereich 2 sei sie $c_2 = 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.



$\lambda_1 = 510\,\mathrm{nm}$

a) v kleiner → licht bricht zum Lot hin
v grösser → licht bricht vom Lot weg } Why? → (*)

(a) Was gilt für den Winkel α_2 des Lichtstrahls im Bereich 2 und für den Winkel α_3 im Bereich 3?

- ☐ $\alpha_2 < \alpha_1$ und $\alpha_3 < \alpha_1$
- ☐ $\alpha_2 < \alpha_1$ und $\alpha_3 = \alpha_1$
- ☐ $\alpha_2 < \alpha_1$ und $\alpha_3 > \alpha_1$
- ☐ $\alpha_2 = \alpha_1$ und $\alpha_3 < \alpha_1$
- ☐ $\alpha_2 = \alpha_1$ und $\alpha_3 = \alpha_1$
- ☐ $\alpha_2 = \alpha_1$ und $\alpha_3 > \alpha_1$
- ☐ $\alpha_2 > \alpha_1$ und $\alpha_3 < \alpha_1$
- ☒ $\alpha_2 > \alpha_1$ und $\alpha_3 = \alpha_1$
- ☐ $\alpha_2 > \alpha_1$ und $\alpha_3 > \alpha_1$

Da $c_1 < c_2 \Rightarrow \alpha_1 < \alpha_2$

$c_2 > c_3 \Rightarrow \alpha_2 > \alpha_3$

$c_1 = c_3 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_3$

(*) Why? c_2 kleiner als c_1: $\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{c_1}{c_2} < 1 \Leftrightarrow \sin\theta_1 < \sin\theta_2 \Rightarrow \theta_1 < \theta_2$

c_2 grösser als c_1: $\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{c_1}{c_2} > 1 \Leftrightarrow \sin\theta_1 > \sin\theta_2 \Rightarrow \theta_1 > \theta_2$

geht da $\theta_i \in [0°, 90°)$ ✓

b) Totalreflexion: wenn $\sin\alpha_2 = \underbrace{\sin\alpha_1 \frac{c_2}{c_1}}_{} > 1 \Rightarrow \sin\alpha_1 \frac{c_2}{c_1} > 1$

$\Leftrightarrow \alpha_1 > \arcsin\left(\frac{c_1}{c_2}\right) = \arcsin\left(\frac{2\times10^8\,\mathrm{m/s}}{3\times10^8\,\mathrm{m/s}}\right) \cong \underline{\underline{41.8°}}$

(b) Ab welchem Winkel tritt an der Grenzfläche zwischen Bereich 1 und Bereich 2 Totalreflexion auf?

- ☐ $\alpha_1 = 30°$
- ☒ $\alpha_1 \approx 42°$
- ☐ $\alpha_1 = 45°$
- ☐ $\alpha_1 \approx 48°$
- ☐ $\alpha_1 = 60°$
- ☐ Es ist keine Totalreflexion möglich.

c) Wellenlänge: $\lambda_{medium} = \frac{v_{medium}}{f}$ und f ändert sich nicht bei Reflexion / Transmission:

$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\frac{v_2}{f}}{\frac{v_1}{f}} = \frac{v_2}{v_1} \Rightarrow \lambda_2 = \frac{c_2}{c_1} \cdot \lambda_1 = \frac{3\times10^8\,\mathrm{m/s}}{2\times10^8\,\mathrm{m/s}} \times 510\,\mathrm{nm} = \underline{\underline{765\,\mathrm{nm}}}$

(c) Welche Wellenlänge λ_2 hat das Licht im Bereich 2?

- ☐ $\lambda_2 = 255\,\mathrm{nm}$
- ☐ $\lambda_2 = 340\,\mathrm{nm}$
- ☐ $\lambda_2 = 510\,\mathrm{nm}$
- ☐ $\lambda_2 = 612\,\mathrm{nm}$
- ☒ $\lambda_2 = 765\,\mathrm{nm}$
- ☐ $\lambda_2 = 1020\,\mathrm{nm}$

d) Wenn $\alpha_1 = 0$: $A_{1,\text{reflektiert}} = 0.2 \times A_1$

Leistung ist proportional zum Quadrat der Amplitude.

$\Longrightarrow P_1 \propto A_1^2 \quad , \quad P_{1,\text{reflektiert}} \propto (A_{1,\text{reflektiert}})^2$

$$\Longrightarrow \frac{P_{1,\text{reflektiert}}}{P_1} = \frac{(A_{1,\text{reflektiert}})^2}{A_1^2} = \frac{(0.2 \times A_1)^2}{A_1^2} = 0.04$$

$$\Longrightarrow \text{In dB}: \; 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{P_{1,\text{reflektiert}}}{P_1}\right) \text{dB} = 10 \cdot \log_{10}(0.04) \cong \underline{\underline{-14\,\text{dB}}}$$

In Physik $\underline{\underline{10}} \cdot \log_{10}(|x|)$! (NuS II $20 \cdot \log_{10}(|x|)$)

(d) Der Betrag der Amplitude der an der ersten Grenzschicht reflektierten Welle ist im Fall $\alpha_1 = 0$ gleich 20% des Betrages der Amplitude der einfallenden Welle. Geben Sie für diesen Fall die Leistung der reflektierten Welle in dB bezogen auf die ursprüngliche Leistung an.

- ☐ ungefähr −28 dB
- ☒ ungefähr −14 dB
- ☐ ungefähr −7 dB
- ☐ ungefähr −3 dB
- ☐ ungefähr 3 dB
- ☐ ungefähr 7 dB
- ☐ ungefähr 14 dB
- ☐ ungefähr 28 dB

e) $c_1 = c_3 = 3 \times 10^8\,\text{m/s} \quad , \quad c_2 = 2 \times 10^8\,\text{m/s}$

Totalreflexion: $\sin\theta_t = \sin\theta_i \frac{v_t}{v_i} > 1$ i: einfallend , t: transmittiert

nur möglich, wenn $\frac{v_t}{v_i} > 1$, da $\sin\theta_i \leq 1$!
und $\sin(\theta_i)$ sollte auch ausreichend gross sein $\rightarrow \theta_i$ ausreichend gross.

$\frac{c_2}{c_1} < 1, \quad \frac{c_3}{c_2} > 1$ ✓

Eine Totalreflexion wäre also (wenn sie überhaupt auftritt) nur bei der Grenzfläche $2 \rightarrow 3$ möglich. Aber:

$\underline{2 \rightarrow 3:}$ $\sin\alpha_3 = \sin\alpha_2 \frac{c_3}{c_2} \overset{!}{>} 1$ Bedingung für Totalreflexion

einsetzen

$\underline{1 \rightarrow 2:}$ $\sin\alpha_2 = \sin\alpha_1 \frac{c_2}{c_1}$ $\quad \longrightarrow \quad \sin\alpha_1 \cdot \frac{c_2}{c_1} \cdot \frac{c_3}{c_2} = \sin\alpha_1 \frac{c_3}{c_1} \overset{v_3 = v_1}{=} \sin\alpha_1 \overset{!}{>} 1$

Diese Bedingung ist nie erfüllt, da $\sin \in [-1,1]$!

(D.h. in Worten, α_2 wird nie gross genug sein s.d. eine Totalreflexion auftritt).

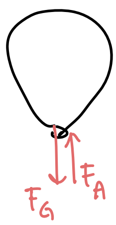
Von nun an werde eine modifizierte Anordnung betrachtet, bei der $c_1 = c_3 = 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ und $c_2 = 2 \cdot 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ gilt. Der Lichtstrahl falle wie zuvor aus dem Bereich 1 kommend mit einem Winkel α_1 ein.

(e) Wo und wann kann bei dieser modifizierten Anordnung Totalreflexion auftreten?

- ☐ An der Grenzfläche zwischen 1 und 2, wenn α_1 ausreichend klein ist.
- ☐ An der Grenzfläche zwischen 1 und 2, wenn α_1 ausreichend gross ist.
- ☐ An der Grenzfläche zwischen 2 und 3, wenn α_1 ausreichend klein ist.
- ☐ An der Grenzfläche zwischen 2 und 3, wenn α_1 ausreichend gross ist.
- ☒ Es ist keine Totalreflexion möglich.

Aufgabe 4:

a) Gerade schweben System muss im Gleichgewicht sein:



$$F_G = (m + m_{Luftfüllung}) \cdot g = (m + \rho' \cdot V_{Ballon})\, g$$

$$F_A = m_{Luft,verdrängt} \times g$$

$$= \rho \times \underbrace{V_{Luft,verdrängt}}_{= V_{Ballon}} \times g$$

$$\Rightarrow \text{gerade schweben: } F_G \overset{!}{=} F_A$$

$$\Leftrightarrow m + \rho' V_{Ballon} = \rho V_{Ballon}$$

$$\Leftrightarrow \rho' = \rho - \frac{m}{V_{Ballon}}$$

b) Verwenden $\boxed{pV = \tilde{n}RT}$ (idealer Gas), $\boxed{M = \frac{m}{\tilde{n}}}$ $\Leftrightarrow \tilde{n} = \frac{m}{M}$, $\boxed{m = \rho \cdot V}$

$$\Leftrightarrow pV = \frac{m}{M_{Luft}} RT = \frac{\rho \cdot V}{M_{Luft}} RT$$

$$\Leftrightarrow \rho = \frac{p \cdot M_{Luft}}{RT}$$

c) gerade schweben → in a) bestimmt: $\boxed{\rho' = \rho - \frac{m}{V_{Ballon}}}$

$$\text{b)} \Rightarrow \boxed{\frac{p' M_{Luft}}{RT'} = \frac{p \cdot M_{Luft}}{RT} - \frac{m}{V_{Ballon}}} = \frac{p M_{Luft} V_B - mRT}{RT V_B}$$

Hinweis verwenden: p' (Druck im Ballon) = p (Druck in Umgebung), da die Ballonhülle unten eine Öffnung hat!

$$\Leftrightarrow T' = \frac{p \cdot M_{Luft}}{\cancel{R}} \cdot \frac{\cancel{R} T V_B}{p M_{Luft} V_B - mRT} = \underline{\underline{\frac{p \cdot M_{Luft} T V_B}{p M_{Luft} V_B - mRT}}}$$

Werte einsetzen: $m = 800\,kg$
$V = 4000\,m^3$
$T = 293\,K$
$p = 1020 \times 10^{-3} \times 10^5\,Pa = 1020 \times 10^2\,Pa$
$M_{Luft} = 29 \times 10^{-3}\,kg \cdot mol^{-1}$
$R = 8.315\,J mol^{-1} K^{-1}$

$$\Rightarrow T' = \frac{1020 \times 10^2 \times 29 \times 10^{-3} \times 293 \times 4000}{1020 \times 10^2 \times 29 \times 10^{-3} \times 4000 - 800 \times 8.315 \times 293}\,K = \underline{\underline{350{,}8\,K}}$$

d) $T'' = 360\,K$

$c_{Luft} = 1{,}01 \times 10^3 \frac{J}{kg \cdot K}$

benötigte Energie: $Q = m \cdot c_m \cdot \Delta T = \frac{p M_{Luft} V_B}{R T''} c_{Luft} \cdot (T'' - T) =$

Masse der Luft, welcher im Ballon eingefüllt wird: $m = \rho V = \frac{p \cdot M_{Luft} V_B}{R T''}$

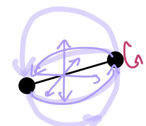
$$= \frac{1020 \times 10^2 \times 29 \times 10^{-3} \times 4000}{8.315 \times 360} \times 1.01 \times 10^3 \times (360 - 293)\,J = \underline{\underline{267\,kJ}}$$

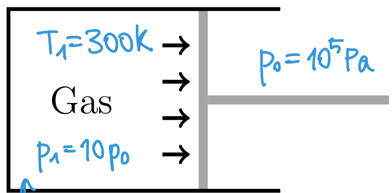
Aufgabe 4:

a) Ideales Gas $\Rightarrow$ Freiheitsgrade sind nur Translation (x, y, z - Richtung) und Rotation.

Freiheitsgrad $f=5$ $\Rightarrow$ Es ist ein 2-atomiges Gas.

(Molekül ist Rotationssymmetrisch um eine Achse.)





Gas wird expandiert $\Rightarrow$ leistet mechanische Arbeit.

Zu bestimmen: $U^{\nearrow}$ (Energie die dem Energiespeicher entnommen wird)

Isotherme expansion bis $p_1 \longrightarrow p_2 = p_0$

b) $$W^{\nearrow} = \int_{V_1}^{V_2} p\, dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\tilde{n}RT_1}{V} dV = \tilde{n}RT_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = \tilde{n}RT_1 \ln\left(\frac{\frac{\tilde{n}RT_1}{p_2}}{\frac{\tilde{n}RT_1}{p_1}}\right) = \tilde{n}RT_1 \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)$$

$pV = \tilde{n}RT$ (ideales Gas) $\qquad pV = \tilde{n}RT$

mechanische Arbeit pro Kubikmeter Anfangsvolumen:

$$\frac{W^{\nearrow}}{V_1} = \frac{\tilde{n}RT_1 \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)}{V_1} = \frac{\cancel{\tilde{n}RT_1} \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)}{\frac{\cancel{\tilde{n}RT_1}}{p_1}} = p_1 \cdot \ln\left(\frac{p_1}{p_0}\right) = 10 \times 10^5\, Pa \times \ln(10) = \underline{\underline{2{,}3\, MJ}}$$

$pV = \tilde{n}RT \qquad p_2 = p_0$, $p_1 = 10 p_0$

c) T konstant halten: Isotherme Expansion: $Q^{\swarrow} - W^{\nearrow} \stackrel{!}{=} 0$

$$\Rightarrow \frac{Q^{\swarrow}}{V_1} = \frac{W^{\nearrow}}{V_1} = \underline{\underline{2{,}3\, MJ}}$$

$\Rightarrow$ Das System ist ein schlechter Energiespeicher, da er für die Speicherung der Energie ($\Delta U = 0$) eine riesige Wärmezufuhr brauchen würde.

Nun Adiabatische Expansion bis $p_1 \longrightarrow p_2 = p_0$

d) Poisson: $T_1^{\gamma} p_1^{1-\gamma} \stackrel{!}{=} T_2^{\gamma} p_2^{1-\gamma}$

$$\Leftrightarrow T_2^\gamma = T_1^\gamma \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1-\gamma} \quad / \; p_2 = p_0 \text{ und } (\dots)^{\frac{1}{\gamma}} \text{ auf beiden Seiten}$$

$$\Leftrightarrow T_2 = T_1 \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}-1} \qquad \gamma = \frac{f+2}{f} = \frac{7}{5} \qquad p_1 = 10\, p_0$$

$$\Rightarrow T_2 = 300\,K \cdot (10)^{\frac{5}{7}-1} = \underline{\underline{155\,K}}$$

e) Innere Energie: adiabatische Expansion: $\Delta U = \Delta W^{\swarrow} = \tilde{n} c_V \Delta T = \frac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{\gamma - 1}$

$$\Rightarrow \frac{W^{\nearrow}}{V_1} = -\frac{W^{\swarrow}}{V_1} = \frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{V_1 \cdot (\gamma - 1)} \underset{\uparrow}{=} \frac{p_1 \cancel{V_1} - p_2 \cancel{V_1} \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}}}{\cancel{V_1}(\gamma - 1)} \underset{\uparrow}{=} \frac{p_1 - p_0 \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}}}{\gamma - 1} \underset{\uparrow}{=}$$

$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma \Leftrightarrow V_2 = V_1 \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$ $\qquad p_2 = p_0 \qquad p_1 = 10 \cdot p_0$

$$= \frac{10 \times 10^5\,\text{Pa} - 10^5\,\text{Pa} \cdot (10)^{5/7}}{\frac{7}{5} - 1} = \underline{\underline{1.21\,\text{MJ}}}$$

$\Rightarrow$ Das Gas gibt 1.21 MJ pro Kubikmeter Anfangvolumen in die Umgebung ab.

Macht auch intuitiv Sinn, da durch die Expansion das Gas kälter wird
$\Rightarrow$ diese vom Gas "verlorene" Wärme wurde in mechanische Arbeit umgewandelt um den Kolben zu drücken und zu expandieren.