Tipps Übungsserie 11

⊛ In dieser Serie müsst ihr unter anderem auch Differenzialgleichungen (bzw. Anfangswertprobleme) lösen. Ihr habt eigentlich noch nicht gelernt, wie man Differenzialgleichungen löst. (Kommt in Analysis 2). Doch in dieser Serie & auch an der Prüfung in TechMech müsst ihr dies können. Deswegen werde ich in der Übungsstunde einen Crash Course für DGL machen.

Für diejenigen die es ein bisschen genauer studieren möchten:
Als Einstieg in die Welt der DGL empfehle ich die Seiten 397 ~ 399, 439 ~ 441 (auch Bsp. 24.1.1 anschauen), 445 ~ 446 aus dem Buch "Analysis 1" von Thomas C.T. Michaels (2. Auflage).
(Ich werde diese Seiten auch am Ende dieses Dokuments anhängen)
Die Beispiele in diesem Buch sind auch sehr gut :)

Bem: In TechMech werden nur lineare gewöhnliche Differenzialgleichungen 2ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten vorkommen.

Aufgabe 1:

1) Schneide zuerst das System frei und zeichne alle angreifenden Kräfte ein.
Führe eine Koordinate ein!

2) Newton'scher Bewegungssatz ≙ Impulssatz $\left(\dot{p} = \frac{d}{dt} mv = ma = R \right)$

3) Anfangswertproblem = Differenzialgleichung + Anfangsbedingungen
↑ direkt aus 2)
↑ überlege dir, was $x(t)$ und $\dot{x}(t)$ zum Zeitpunkt $t = 0$ ist.

4) AWP lösen:

Wir haben hier eine inhomogene DGL!

D.h.: $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$
↑ separat ↑ bestimmen.

erst danach die Anfangsbedingungen in $x(t)$ einsetzen um die spezifische Lösung zu bestimmen!

Aufgabe 2:

1) Körper freischneiden & alle angreifenden Kräfte einzeichnen. Dann für die 2 Massen (separat) das Newton'sche Gesetz anwenden um eine Bewegungsgleichung aufzustellen. Bestimme auch alle Anfangsbedingungen.

2) Wende den Tipp an um die Gleichungen zu entkoppeln! Danach sind es ganz normale lineare DGL 2. Ordnung.

3) die in 2) bestimmten $x_1(t)$ und $x_2(t)$ in die Gleichung der Federkraft einsetzen.

Aufgabe 3:

1) Freiheitsgrad = Wie viele unabhängige Bewegungen kann das System ausführen?

Achtung: Federn verringern den Freiheitsgrad nicht!

2) –

3) –

4) Federgesetz anwenden um eine Gleichung für die beiden Federkräften zu bestimmen. Newton'sches Bewegungsgesetz anwenden um die Bewegungsgleichung zu bestimmen.

5) Kinematische Relation = Zusammenhänge zwischen den Koordinaten.

Wir werden das in der Ü-Stunde genau besprechen.

6) Alle Verhältnisse aus der Aufgabenstellung und die kinematischen Relationen aus 5) verwenden um das Gleichungssystem zu vereinfachen. Ihr solltet am Schluss nur noch eine einzige DGL haben (ihr müsst diese dann nicht mehr lösen!)

Aufgabe 4:

1. Körper freischneiden & Koordinatensystem einführen
   ↳ Reibungskraft nicht vergessen!
2. Newton'sches Bewegungsgesetz anwenden → Bewegungs-DGL
3. Wie gross ist die Normalkraft? → in DGL einsetzen

4. Nun habt ihr eine Gleichung der Form $\ddot{x}(t) = \ldots$

   → nach der Zeit integrieren gibt euch die Geschwindigkeit $\dot{x}(t) = \ldots$

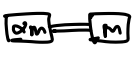
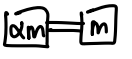
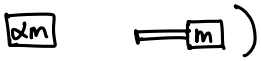
5. Was muss für die Geschwindigkeit gelten, damit der Körper zu einem Halt kommt?

   → diese Bedingung nutzen und $\dot{x}(t) = \ldots = \ldots$ nach t auflösen.

   ↑ hier die Bedingung für Halt

Aufgabe 5:

1. Körper freischneiden & Koordinate einführen.

   (einmal als ganzes  und einmal αm separieren  ⇝ )

2. Newton'scher Bewegungsgesetz für das gesamte System aufstellen
3. Newton'scher Bewegungsgesetz für αm aufstellen
4. Die beiden Gleichungen und die Bedingung $T = \frac{1}{3}F$ verwenden um α zu bestimmen.

Kapitel 21

Grundbegriffe

21.1 Differenzialgleichungen

Eine ***Differenzialgleichung*** ist eine Gleichung in welcher eine unbekannte Funktion $y(x)$ einer oder mehrerer Variablen und ihre Ableitungen vorkommen. Im Fall, dass y eine auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definierte Funktion ist

$$y : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

spricht man von einer ***gewöhnlichen Differenzialgleichung***. Eine allgemeine (gewöhnliche) Differenzialgleichung ist somit eine Gleichung der Form

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), ...) = 0.$$

Zum Beispiel

(1) $y' + x = y$

(2) $y'' + y' + 3y = 0$

(3) $y''' + 2(y'')^2 + y' = \sin^2 x$

(4) $xy'' + \sin(y) = y' + x$

Die ***Ordnung*** einer Differenzialgleichung ist die Ordnung der höchsten Ableitung, die in der Differenzialgleichung vorkommt. Die Differenzialgleichung (1) hat Ordnung 1. Die Gleichungen (2) und (4) haben Ordnung 2, während die dritte Gleichung eine Differenzialgleichung dritter Ordnung ist.
Eine Differenzialgleichung heisst ***linear***, falls für je zwei Lösungen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ der Differenzialgleichung auch jede Linearkombination $ay_1(x) + by_2(x)$ eine Lösung derselben Gleichung ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn y und alle Ableitungen y', y'', etc. linear vorkommen, d.h. in Ausdrücken der Form

$$a(x)y(x) + b(x), \quad c(x)y'(x) + d(x), \quad \text{etc.}$$

Es dürfen also keine nicht linearen Terme wie $y^2, (y'')^3, \sin(y), e^{y'}$, etc. vorkommen. Die Gleichungen (1) und (2) sind beispielsweise linear, weil nur lineare Terme in y, y' und y'' vorkommen. Die Gleichungen (3) und (4) sind hingegen nicht linear, da die nicht linearen Termen $(y'')^2$ bzw. $\sin(y)$ vorkommen.
Eine Differenzialgleichung heisst ***homogen***, falls keine Terme vorkommen, die rein von der Funktionsvariablen x abhängen. Sonst nennt man die Gleichung ***inhomogen***. Die Differenzialgleichung (2) ist beispielsweise homogen, weil es keine Terme gibt, welche rein von x abhängig sind. Die Gleichungen (1), (3) und (4) sind hingegen inhomogen, weil Terme vorkommen, die rein von x abhängen.

Beispiel 21.1.1 ○○○ *Klassifiziere die folgenden Differenzialgleichungen*

a) $(x^2-1)y' + y^2 = 0$

b) $y' = \frac{xy''}{(x-1)^2}$

c) $\sin(y'-1) + x\cos(y) = \sin x$

d) $(x^3 + e^y)y' = \sqrt{1-e^{2y}}$

e) $y^{(4)} + y''' - 3y'' - xy = x^3$

Lösung:

Differentialgleichung	Ordnung	linear?	homogen/inhomogen?
$(x^2-1)y' + y^2 = 0$	1	Nein	homogen
$y' = \frac{xy''}{(x-1)^2}$	2	Ja	homogen
$\sin(y'-1) + x\cos(y) = \sin x$	1	Nein	inhomogen
$(x^3 + e^y)y' = \sqrt{1-e^{2y}}$	1	Nein	homogen
$y^{(4)} + y''' - 3y'' - xy = x^3$	4	Ja	inhomogen

■

21.2 Anfangswertprobleme

Ein ***Anfangswertproblem*** n-ter Ordnung ist eine gewöhnliche Differenzialgleichung n-ter Ordnung zusammen mit n Anfangsbedingungen

$$\begin{cases} F(x, y(x), y'(x), y''(x), \cdots, y^{(n)}(x)) = 0 \\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ y''(x_0) = y_2,\ \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \end{cases}$$

Der Satz von Picard-Lindelöf, den wir in Kapitel 26 kennenlernen werden) besagt, dass das obige Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung besitzt, falls F einige Regularitätsbedingungen erfüllt. Diese eindeutige Lösung $y(x)$ ist auf einem maximalen Existenzintervall definiert und hängt von den Anfangsdaten $y_0, y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}$ ab.

21.3 Grundprinzip für lineare, inhomogene Differenzialgleichungen

Viele Probleme, die in der Physik vorkommen, werden von linearen, inhomogenen Differenzialgleichungen beschrieben. Eine der wichtigsten Eigenschaften solcher Gleichungen, welche ich bereits jetzt benennen möchte, besteht darin, dass die allgemeine Lösung folgende Form hat

$$\underbrace{y(x)}_{\text{Gesamtlösung}} = \underbrace{y_{\text{Homo}}(x)}_{\text{allg.Lösung des homogenen Problems}} + \underbrace{y_p(x)}_{\text{partikuläre Lösung des inhomogenen Problems}} ,$$

wobei $y_{\text{Homo}}(x)$ die allgemeine Lösung des zugehörigen ***homogenen Problems*** (d.h. die Differenzialgleichung ohne den inhomogenen Term) und $y_p(x)$ eine ***partikuläre Lösung*** des inhomogenen Problems ist. Das Lösen von linearen, inhomogenen Differenzialgleichungen erfolgt also zuerst durch die Lösung des zugehörigen homogenen Problems und danach durch die Suche einer partikulären Lösung, welche die inhomogene Gleichung erfüllt. Die allgemeine Prozedur erfolgt gemäss den folgenden drei Schritten

(1) Lösen der homogenen Gleichung;

(2) Bestimmung einer partikulären Lösung $y_p(x)$ der inhomogenen Gleichung;

(3) Die allgemeine Lösung $y(x)$ der inhomogenen Gleichung ist die Summe der homogenen und partikulären Lösung, d.h.

$$y(x) = y_{\text{Homo}}(x) + y_p(x).$$

In den nächsten Kapiteln werden wir verschiedene Techniken diskutieren, welche dazu dienen, homogene bzw. partikuläre Lösungen zu berechnen.

Kapitel 24

Lineare Differenzialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Während Differenzialgleichungen höherer Ordnung i.Allg. schwierig zu lösen sind, gibt es für lineare Differenzialgleichungen höherer Ordnung mit *konstanten Koeffizienten* explizite Lösungsverfahren.

24.1 Homogene Differenzialgleichungen

Eine allgemeine lineare, homogene Differenzialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten lautet

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = 0,$$

wobei $a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ und $a_n \neq 0$ sind[1]. Solche Differenzialgleichungen werden immer mit dem sogenannten ***Euler-Ansatz*** gelöst

$$y(x) = e^{\lambda x},$$

wobei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein zu bestimmender Parameter ist. Das Einsetzen des Euler-Ansatzes $y(x) = e^{\lambda x}$ in die Differenzialgleichung liefert

$$a_n \lambda^n e^{\lambda x} + a_{n-1} \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \cdots + a_0 e^{\lambda x} = 0.$$

Da $e^{\lambda x} \neq 0$, darf man den Term $e^{\lambda x}$ einfach wegkürzen. So bekommt man eine Gleichung für den unbekannten Parameter λ

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_0 = 0,$$

[1] Wir setzen voraus, dass a_n ungleich Null ist, denn sonst wäre die betrachtete Gleichung keine Differenzialgleichung n-ter Ordnung.

die sogenannte ***charakteristische Gleichung***. Mit dem Euler-Ansatz überführt man somit die Differenzialgleichung auf ein Nullstellenproblem für das sogenannte ***charakteristische Polynom*** $\chi(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0$. Um die obige Differenzialgleichung zu lösen, genügt es also, das charakteristische Polynom zu berechnen und dessen Nullstellen zu bestimmen. In anderen Worten, muss man das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerlegen

$$\chi(\lambda) = \prod_{k=1}^{n}(\lambda - \lambda_k),$$

wobei $\lambda_1, ..., \lambda_n$ die n Nullstellen von $\chi(\lambda)$ sind. Im Allgemeinen können wir nicht ausschliessen, dass eine oder mehrere Nullstellen mehrmals vorkommen. Falls eine Nullstelle λ mehrmals vorkommt, sagen wir m mal, so sagt man, dass λ ***Vielfachheit*** m hat (man sagt auch, dass λ eine m-fache Nullstelle ist). Betrachtet man nun nur die unterschiedlichen Nullstellen von χ so gilt

$$\chi(\lambda) = \prod_{k=1}^{r}(\lambda - \lambda_k)^{m_k}.$$

$\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ sind die r *unterschiedlichen* Nullstellen des charakteristischen Polynoms und m_k ist die *Vielfachheit* der Nullstelle λ_k (d.h. wie oft diese Nullstelle in der Zerlegung vorkommt). Zu einer m-fachen Nullstelle λ gehören die m linear unabhängigen Lösungen

$$e^{\lambda x}, x \cdot e^{\lambda x}, \cdots, x^{m-1} \cdot e^{\lambda x}.$$

Zur m-fachen Nullstelle $\lambda = 0$ gehören die Lösungen

$$1, x, \cdots, x^{m-1}.$$

Zusammenfassend: Hat also das charakteristische Polynom die Nullstellen $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ mit Vielfachheiten $m_1, \cdots, m_k$, so besitzt die Differenzialgleichung die linear unabhängigen Lösungen

$$e^{\lambda_1 x}, x \cdot e^{\lambda_1 x}, \cdots, x^{m_1-1} \cdot e^{\lambda_1 x}$$

$$e^{\lambda_2 x}, x \cdot e^{\lambda_2 x}, \cdots, x^{m_2-1} \cdot e^{\lambda_2 x}$$

$$\vdots$$

$$e^{\lambda_k x}, x \cdot e^{\lambda_k x}, \cdots, x^{m_k-1} \cdot e^{\lambda_k x}.$$

Diese Lösungen bilden ein ***Fundamentalsystem*** der Differenzialgleichung. Die allgemeine Lösung ist eine Linearkombination aller Lösungen im Fundamentalsystem. Die Koeffizienten der Linearkombination werden dann aus den Anfangsbedingungen bestimmt.

Beispiel 24.1.1 • ○ ○ $y''' + y'' - y' - y = 0$

Lösung: Es handelt sich um eine lineare, homogene Differenzialgleichung dritter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Um die allgemeine Lösung zu finden, machen wir also den Euler-Ansatz

$$y(x) = e^{\lambda x},$$

wobei der Parameter $\lambda \in \mathbb{C}$ zu bestimmen ist. Das Einsetzen des Euler-Ansatzes in die Differenzialgleichung liefert

$$\lambda^3 e^{\lambda x} + \lambda^2 e^{\lambda x} - \lambda e^{\lambda x} - e^{\lambda x} = 0.$$

Das Wegkürzen von $e^{\lambda x}$ ergibt das folgende charakteristische Polynom

$$\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 = 0.$$

Durch Einsetzen sieht man, dass $\lambda = 1$ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist. Somit ist das charakteristische Polynom durch $(\lambda - 1)$ teilbar. Die Polynomdivision liefert

$$\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)^2.$$

Wir haben also das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerlegt. Die Nullstellen lauten somit: $1, -1, -1$. Die Nullstelle -1 ist doppelt, d.h. sie hat Vielfachheit 2. Somit ist

$$\underbrace{e^{-x}, \quad x \cdot e^{-x}}_{\lambda=-1 \text{ doppelt}}, \quad e^{x}$$

das Fundamentalsystem. Die allgemeine Lösung lautet somit

$$y(x) = Ae^{-x} + Bx \cdot e^{-x} + Ce^{x},$$

wobei A, B, C Konstanten sind, welche aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden können. ■

Beispiel 24.1.2 • ○ ○ $y'' - 2y' - 8y = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$.

Lösung: Wir machen einen Euler-Ansatz

$$y(x) = e^{\lambda x}.$$

Das Einsetzen des Euler-Ansatzes in die Differenzialgleichung liefert

$$\lambda^2 e^{\lambda x} - 2\lambda e^{\lambda x} - 8e^{\lambda x} = 0.$$

Es ergibt sich also das folgende charakteristische Polynom

$$\lambda^2 - 2\lambda - 8 = (\lambda - 4)(\lambda + 2) = 0.$$

Wir haben somit die zwei Nullstellen $4, -2$. Beide Nullstellen sind reell und kommen je einmal vor (Vielfachheit 1). Somit ist

$$e^{4x}, \quad e^{-2x}$$

das Fundamentalsystem. Die allgemeine Lösung lautet somit

$$y(x) = Ae^{4x} + Be^{-2x},$$

24.2 Inhomogene Differenzialgleichungen

Für die Lösung inhomogener Probleme

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_0 y(x) = b(x)$$

gilt genau der gleiche Grundsatz wie für Differenzialgleichungen erster Ordnung

$$y(x) = \text{homogene Lösung} + \text{partikuläre Lösung}.$$

Das bedeutet also, dass wir auch hier zuerst die Lösung des zugehörigen homogenen Problems finden müssen und dann eine partikuläre Lösung des inhomogenen Problems. Die Berechnung der homogenen Lösung erfolgt mit den Techniken, die im vorigen Abschnitt besprochen wurden. Für die Bestimmung einer partikulären Lösung kann man eine Verallgemeinerung der Methode der Variation der Konstanten anwenden, diese wird aber für Differenzialgleichungen höherer Ordnung zusehends komplizierter, sodass man in der Praxis lieber die ***Methode des direkten Ansatzes*** benutzt. Die grösste Schwierigkeit bei dieser Methode ist aber die Wahl eines dem Problem angepassten Ansatzes für die partikuläre Lösung. Wie geht man vor? Es gilt:

"Der Ansatz für $y_p(x)$ hat dieselbe Form wie der inhomogene Term $b(x)$".

Was heisst das konkret? Ganz einfach! Es bedeutet, dass $y_p(x)$ eine Funktion vom selben Typ wie $b(x)$ ist. Für $b(x) = 10$ wird beispielsweise ein konstanter Ansatz $y_p(x) = C$ gewählt, wobei C durch Einsetzen bestimmt werden kann. Für $b(x) = 2x$ wird ein linearer Ansatz gemacht $y_p(x) = Ax + B$. Falls $b(x)$ ein Polynom vom Grad m ist (zum Beispiel $b(x) = 20x^7 - 3x^2$ mit $m = 7$), so wird ein Polynom vom Grad m als Ansatz gewählt

$$y_p(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_m x^m.$$

Für $b(x) = e^{3x}$ wird $y_p(x) = Ae^{3x}$ gewählt. Für $b(x) = \cos(5x)$ wird der Ansatz

$$y(x) = A\cos(5x) + B\sin(5x)$$

gemacht, usw. Es ist einfach wichtig, dass $y_p(x)$ eine Funktion derselben Form wie $b(x)$ ist. Wie sieht es nun mit $b(x) = 5x + \sin x e^{3x}$ aus? In solchen Situationen kann man die vorigen Fälle einfach kombinieren. $b(x)$ ist die Summe von zwei Termen: einem linearen Term und einem Produkt. Darum macht man den folgenden Ansatz

$$y_p(x) = \underbrace{Ax + B}_{\text{I Teil}} + \underbrace{(C\sin x + D\cos x)e^{3x}}_{\text{II Teil}}.$$

Die folgende Tabelle hilft bei der Wahl eines dem Problem angepassten Ansatzes für die partikuläre Lösung.

Inhomogener Term $b(x)$	Ansatz für $y_p(x)$
Polynom: $\sum_{i=0}^{m} b_i x^i$	$\sum_{i=0}^{m} A_i x^i$
Exp-term-Polynom $e^{\alpha x} \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$	$e^{\alpha x} \sum_{i=0}^{m} A_i x^i$
$\sin(\omega x) \sum_{i=0}^{m} b_i x^i + \cos(\omega x) \sum_{i=0}^{m} c_i x^i$	$\sin(\omega x) \sum_{i=0}^{m} A_i x^i + \cos(\omega x) \sum_{i=0}^{m} B_i x^i$
$\sinh(\omega x) \sum_{i=0}^{m} b_i x^i + \cosh(\omega x) \sum_{i=0}^{m} c_i x^i$	$\sinh(\omega x) \sum_{i=0}^{m} A_i x^i + \cosh(\omega x) \sum_{i=0}^{m} B_i x^i$
$e^{\alpha x} \sin(\omega x) \sum_{i=0}^{m} b_i x^i + e^{\alpha x} \cos(\omega x) \sum_{i=0}^{m} c_i x^i$	$e^{\alpha x} \sin(\omega x) \sum_{i=0}^{m} A_i x^i + e^{\alpha x} \cos(\omega x) \sum_{i=0}^{m} B_i x^i$

Besonderer Fall: Wenn es vorkommt, dass ein Teil der für $y_p(x)$ zu wählenden Funktion bereits in der Lösung des homogenen Problems vorhanden ist (vgl. Beispiel 24.2.3), wird der Ansatz zusätzlich mit x multipliziert.

Beispiel 24.2.1 • ○ ○ $y'' - 4y' + 13y = xe^x$

Lösung: Homogene Lösung: Wir lösen die homogene Gleichung

$$y'' - 4y' + 13y = 0$$

mit dem Euler-Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$. Das charakteristische Polynom lautet

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0.$$

Die Lösungen sind $\lambda = 2 \pm 3i$. Daher ist $e^{(2+3i)x}, e^{(2-3i)x}$ das Fundamentalsystem der homogenen Differenzialgleichung. Die homogene Lösung lautet somit

$$y_{\text{homo}}(x) = Ae^{(2+3i)x} + Be^{(2-3i)x},$$

was man am besten mit Sinus und Cosinus schreibt

$$y_{\text{homo}}(x) = e^{2x}(\tilde{A}\sin(3x) + \tilde{B}\cos(3x)).$$

Partikuläre Lösung: Da der inhomogene Term xe^x ein Polynom vom Grad 1 mal e^x ist, machen wir den folgenden Ansatz für die partikuläre Lösung

$$y_p(x) = e^x \cdot (ax + b).$$

Die Koeffizienten a, b finden wir durch Einsetzen und Koeffizientenvergleich. Da $y_p'(x) = e^x(ax + b) + ae^x$ und $y_p''(x) = e^x(ax + b) + 2ae^x = (ax + 2a + b)e^x$, haben wir

$$e^x(ax + 2a + b - 4ax - 4b - 4a + 13ax + 13b) = e^x(10ax - 2a + 10b) \stackrel{!}{=} xe^x.$$

Es folgt $10a = 1$ und $-2a + 10b = 0$. Somit ist $a = 1/10$ und $b = 1/50$. Ausserdem ist

$$y_p(x) = \left(\frac{x}{10} + \frac{1}{50}\right) e^x$$

die gesuchte partikuläre Lösung.

Zusammenfassend: Die gesamte Lösung ist die Summe der homogenen und der partikulären Lösung

$$y(x) = e^{2x}(\tilde{A}\sin(3x) + \tilde{B}\cos(3x)) + \left(\frac{x}{10} + \frac{1}{50}\right) e^x.$$