Disclaimer: Diese Zusammenfassung wurde im Rahmen der D-ITET Technische Mechanik Vorlesung von Prof. Jürg Dual erstellt.

Ich kann nicht für Vollständigkeit & Richtigkeit dieses Dokuments garantieren, bin jedoch froh über Fehler informiert zu werden oder bei Fragen zu helfen: ldewindt@ethz.ch

Zürich, der 23.10.2021 Lina De Windt

last update: 05.01.2022

Grundlagen:

Freiheitsgrad: $\boxed{f = n - b}$

n: Summe der Freiheitsgrade der einzelnen Körper

b: # der lin. unabhängigen Bindungsgleichungen

Geschwindigkeit ($\underline{v}$)/Schnelligkeit (v):

$\boxed{\underline{v}(t) = \dot{\underline{r}}(t)}$ $\boxed{v = |\underline{v}|}$

in Zylinderkoordinaten:

$\boxed{\underline{v} = \dot{\rho}\underline{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\underline{e}_\varphi + \dot{z}\underline{e}_z} = \dot{\rho}\underline{e}_\rho + \rho\dot{\underline{e}}_\rho + \dot{z}\underline{e}_z$

($\underline{e}_\rho$ hängt von φ ab)

Kartesisch ↔ Zylinderkoordinaten:

$$\begin{cases} \underline{e}_\rho = \cos(\varphi)\underline{e}_x + \sin(\varphi)\underline{e}_y \\ \underline{e}_\varphi = -\sin(\varphi)\underline{e}_x + \cos(\varphi)\underline{e}_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{e}_x = \cos(\varphi)\underline{e}_\rho - \sin(\varphi)\underline{e}_\varphi \\ \underline{e}_y = \sin(\varphi)\underline{e}_\rho + \cos(\varphi)\underline{e}_\varphi \end{cases}$$

Starre Körper (SK)

SdpG: $\boxed{v_P' = v_Q'}$

$\Rightarrow \boxed{\underline{v}_P \cdot \underline{r}_{PQ} = \underline{v}_Q \cdot \underline{r}_{PQ}}$

$\Rightarrow \boxed{(\underline{v}_P - \underline{v}_Q)\cdot \underline{r}_{PQ} = (\underline{r}_P - \underline{r}_Q)\cdot(\underline{v}_P - \underline{v}_Q) = 0}$

⚠ alle SKs erfüllen SdpG.

Translation: $\boxed{\underline{v}_P = \underline{v}}$; $\forall P$ ($\underline{v}_P = \underline{v}_Q$)

Rotation: $\boxed{\underline{v}_P = \underline{v}_Q = 0}$

↳ PQ ist Rotationsachse

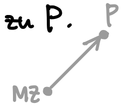
Ebene Bewegung:

→ alle $\underline{v}$ parallel zu geg. Ebene ($v_z = 0$)

→ alle Pkte auf Normalen zur Ebene besitzen gleiche $\underline{v}$.

Satz vom Momentanzentrum:

$\boxed{\underline{v}_P = \underline{w} \times \underline{r}_P}$; $\boxed{v_P = w \cdot r_P}$ wenn $\underline{w} \perp \underline{r}$ = immer in 2D.



$\underline{w}$ = Rotationsgeschwindigkeit

$\underline{r}_P$ = Verbindungsgerade vom MZ zu P.

($\underline{v}$ ist immer $\perp$ zu $\underline{r}$ und $\underline{w}$.)

2D: $\boxed{\underline{v}_P = \begin{pmatrix} yw \\ xw \end{pmatrix}}$ ← Vorzeichen aufpassen.

Polbahn = Bewegung des MZ.

Räumliche Bewegungen:

Kreiselung: momentan eine Rotation (ein Pkt. bleibt fix).

SK-Formel: $\boxed{\underline{v}_A = \underline{v}_B + \underline{w} \times \underline{r}_{BA}}$ ABBA-Formel

Kinemate: $\boxed{\{\underline{v}_B, \underline{w}\}}$

$\underline{v}_B$: Translationsgeschwindigkeit (bezüglich Pkt. auf SK)

$\underline{w}$: Rotationsgeschwindigkeit (unabhängig vom Bezugssystem). bzw. unabhängig vom Pkt. auf SK.

Invarianten: = überall gleich im SK

vektorielle Invariante: $\boxed{I_1 = \underline{w}}$

skalare Invariante: $\boxed{I_2 = \underline{w} \cdot \underline{v}_B}$

→ Translation: $\underline{I}_1 = \underline{w} = \underline{0}$

→ Rotation: $\underline{I}_1 = \underline{w} \neq \underline{0}$; $I_2 = 0$

→ Schraubung: $I_2 \neq 0$

Zentralachse = Achse in Richtung von $\underline{w}$.

Kräfte: Resultierende Kraft $\underline{R}$:

$\boxed{\underline{R} = \sum_i \underline{F}_i}$ (unabhängig vom Bezugspunkt).

Moment & Leistung:

Moment = "Rotation, die von Kräften verursacht wird".

$\boxed{\underline{M}_O(P) = \underline{r}_{OP} \times \underline{F}_P}$ (M von P bezüglich O) ← OOPP-Formel

$\underline{r}$: OP

P: Angriffspunkt der Kraft

O: Bezugspunkt

⚠ Momente sind vom Bezugssystem und vom Bezugspunkt abhängig.

$\boxed{M_O = \pm dF}$ d: Abstand von O zu P wenn $d \perp$ Wirkungslinie von F → fast nur in 2D brauchbar. F verschieben!

$\boxed{\underline{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \underline{r}_i \times \underline{F}_i} \left(= \sum_{i=1}^{n} \underline{M}_O(P_i)\right) \boxed{+ \underline{M}_{\text{Körper}}}$

↳ res. Moment bezüglich Pkt O.

$\boxed{\underline{M}_P = \underline{M}_O + \underline{r}_{PO} \times \underline{R}}$ Transformationsregel

$\underline{R}$: Resultierende Kraft

Leistung einer Kraft: $\boxed{P = \underline{F} \cdot \underline{v}_Q}$ $\underline{F}\cdot\underline{v} = F \cdot v \cdot \cos\alpha$

Q: Angriffspunkt der Kraft

Leistung eines Moments: $\boxed{P = \underline{M}_O \cdot \underline{w}}$ im Falle einer Reine Rotation

Gesamtleistung: $\boxed{P_{tot} = \sum_i \underline{F}_i \cdot \underline{v}_i + \sum_i \underline{M}_i \cdot \underline{w}_i}$ $= \sum_i P_i$

falls Kinemate $\{\underline{v}_B, \underline{w}\}$ bekannt: $\boxed{P_{tot} = \underline{R} \cdot \underline{v}_B + \underline{M}_B \cdot \underline{w}}$

Äquivalenz & Reduktion v. Kräftegruppen:

statische Äquivalenz: $\boxed{P(\{\underline{F}_i\}) = P(\{\underline{G}_i\})}$ für $\forall$ SK-Bewegungen

2 Kräftegruppen sind statisch äquivalent wenn:

- Die Resultierende & das resultierende Moment gleich sind
- Sie vektoriell gleich sind & ihre Wirkungslinien übereinstimmen.

Dyname einer Kräftegruppe: $\boxed{\{\underline{R}, \underline{M}_O\}}$ bezüglich Pkt. O

$\underline{R}$: Resultierende Kraft, unabhängig vom Bezugspunkt

$\underline{M}_O$: Moment bzg. des Pkt O (abhängig vom Bezugspunkt, ausser in Statikaufgaben.)

Invarianten: (überall gleich im SK)

vektorielle Invariante: $\boxed{\underline{I}_1 = \underline{R}}$

skalare Invariante: $\boxed{I_2 = \underline{R} \cdot \underline{M}_O}$

→ Nullsystem: $\underline{R} = \underline{0}$; $\underline{M}_O = \underline{0}$ ($\underline{I}_1 = 0, I_2 = 0$)

→ Kräftepaar/Moment: $\underline{R} = \underline{0}$; $\underline{M}_O \neq \underline{0}$ ($I_2 = 0$)

→ Einzelkraft: $\underline{R} \neq \underline{0}$; $I_2 = 0$

→ Schraube: $I_2 \neq 0$

Hauptsatz der Statik:

In einer Ruhelage muss gelten:

$\boxed{\underline{R} = \underline{0};\ \underline{M}_O = \underline{0}}$ ⊛

$\underline{R} = \underline{0}$: Komponentenbedingungen

$\underline{M}_O = \underline{0}$: Momentenbedingungen

↳ Bezugspunkt egal!

Zusatzbedingungen: Reibung, Seil, Kippen, ...

⊛ Bedingung ist für bewegliche/deformierbare Körper notwendig, für SK hinreichend

GGW:

$$\begin{cases} KB(x) = 0 = \dots \\ KB(y) = 0 = \dots \\ KB(z) = 0 = \dots \end{cases} \qquad \begin{cases} MB(x) = 0 = \dots \\ MB(y) = 0 = \dots \\ MB(z) = 0 = \dots \end{cases}$$

Blau = nur in 3D. ⊛ Moment ist nicht mehr bezüglich Pkt. Es ist für $\forall$ Pkte im SK gleich, da $\underline{R} = \underline{0}$ gilt.

→ geeigneter Pkt. aussuchen für Berechnung.

n = # lin. unabhängige GGW-Gleichungen m = # Unbekannte

- **statisch bestimmt:** $\boxed{m = n}$

→ gleich viele Unbekannte wie lin. unabhängige Gl.en

- **statisch unbestimmt:** $\boxed{m > n}$

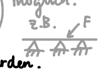
→ mehr Unbekannte als lin. unabhängige Gl.en

→ Grad der Unbestimmtheit: $m - n$

→ System klemmt ("zu viele Bindungen")

→ Lagerreaktionen können nicht (alle) bestimmt werden.

gleichzeitig möglich. z.B.



- **kinematisch unbestimmt:**

→ mehr lin. unabhängige Gl.en als Unbekannte

→ zulässige momentane Bewegungen sind möglich

→ $\nRightarrow$ statisch bestimmt

→ triviale Gl.en = Indiz einer kin. Unbestimmtheit.

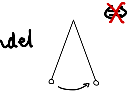
→ Momentbedingungen nicht aufstellbar ...not 100% sure.

Aufpassen:

kinematisch unbestimmt $\nRightarrow$ statisch bestimmt

$\nRightarrow$ statisch unbestimmt (im Allgemeinen)

z.B. Pendel



Ein System ist genau dann statisch bestimmt wenn es als Ganzes und in jedem Teil weder statisch unbestimmt noch kinematisch unbestimmt ist.

In diesem Fall kann man alle inneren und äusseren (Lager-) Kräfte aus den GGW-Gleichungen ermitteln.

(GGW = Gleichgewicht.)

Prinzip der virtuellen Leistungen (PdvL):

System befindet sich in Ruhe wenn:

$\boxed{\tilde{\mathcal{P}} = \tilde{\mathcal{P}}^{(i)} + \tilde{\mathcal{P}}^{(a)} = 0}$, $\forall \{\underline{v}\}$

$\{\tilde{\underline{v}}_0, \tilde{\underline{\omega}}\}$: virtueller Bewegungszustand

PdvL: $\tilde{\mathcal{P}} = \sum \tilde{\underline{v}}_i \cdot \underline{F}_i = 0$

$$\boxed{\tilde{P}_{tot} = \sum_i \underline{F}_i \cdot \tilde{\underline{v}}_i + \sum_i \underline{M}_i \cdot \tilde{\underline{\omega}}_i = 0}$$

$$\boxed{\tilde{\mathcal{P}} = \underline{R}\cdot\tilde{\underline{v}}_0 + \underline{M}_0\cdot\tilde{\underline{\omega}} = 0} \quad \forall\{\tilde{\underline{v}}_0, \tilde{\underline{\omega}}\}$$

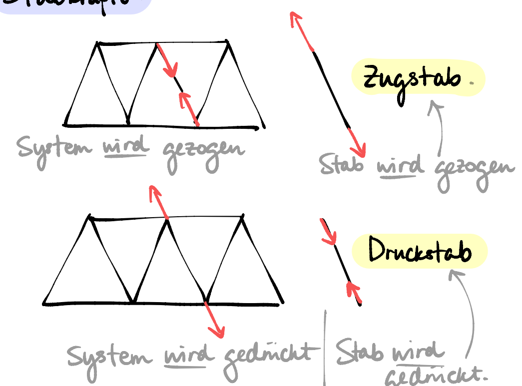
Kräfte/Momente dort einzeichnen, wo Bewegung/Drehung durch Lager/System "gestoppt" wird.

Bei PdvL: egal, in welche Richtungen wir die Kräfte einzeichnen (an Prüfung wird Skizze berücksichtigt). einfach konsistent bleiben!

Auch egal, in Bezug zu welchem Pkt. im EinzelSK wir das Moment berechnen. (Kommt schlussendlich sowieso auf dasselbe hinaus).

→ Ein geeigneter, einfach & gut positionierter Pkt auswählen!

Stabkräfte:

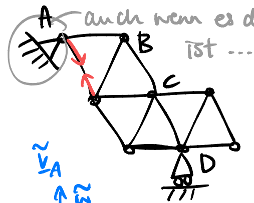


⊛ Man zeichnet Kräfte ein, welche auf das System wirken. ("wird" benutzen) gezogen/gedrückt)

PdvL: (zulässige/unzulässige Bewegungen)

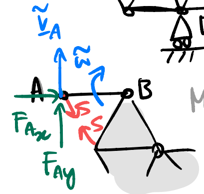
virtueller Zustand kann beliebig gewählt werden. D.h. Zustand so wählen, dass es am einfachsten ist für die Berechnung. (Lager müssen nicht unbedingt respektiert werden).

Achtung!: an der Prüfung schon



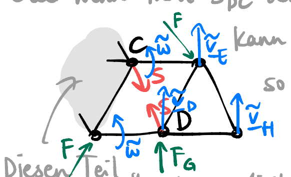
auch wenn es da eig. festgelagert ist ...

hier werden dafür die Lagerkräfte in A berücksichtigt, deswegen darf man das machen (also ist es eigentlich immer-noch eine zulässige Bewegung).



Man kann System so freischneiden und A "beweglich" machen und z.B B als MZ nehmen.

Oder wenn man S_{pc} bestimmen möchte...



kann man System z.B. so freischneiden

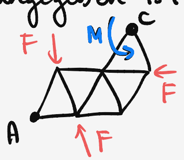
Diesen Teil "unbeweglich" machen.

Statikaufgaben:

Moment ist überall gleich auf (Einzel-) SK. (wegen $\underline{R}=\underline{0}$).

($\underline{M}_P = \underline{M}_0 + \underbrace{\underline{r}_{P0}\times\underline{R}}_{0}$). D.h. ein Pkt. nehmen, bei der die Momentberechnung am einfachsten geht.

Auch: wenn ein Moment schon angegeben ist, z.B so:



& man berechnet Moment für Pkt. A

→ angegebenes M darf man einfach so übernehmen. D.h

$M_A = \sum_i r_i \times F_i + M$

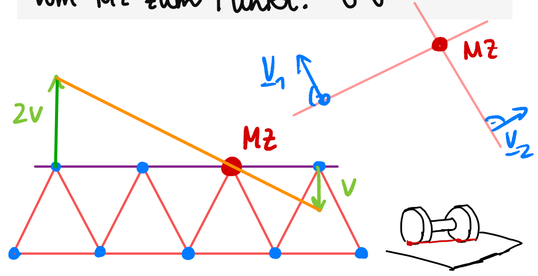
M_C ist ja auch $\sum_i r_i \times F_i + M$

PdvL, Vorgehensweise:

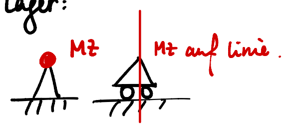
1. $\tilde{\omega}$ einführen & MZ der SK bestimmen (SdpG)
2. Relevante $\tilde{v}$ berechnen (SvM)
3. $\tilde{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \vec{v}_i + \vec{M}\cdot\vec{\omega} \stackrel{!}{=} 0$ ⇔ Ruhelage
4. Stabkraft berechnen → Zug oder Druck?

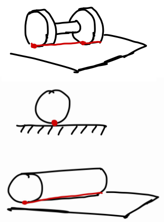
Momentanzentrum finden:

⇒ Mittels Normalen von $\underline{v}$ von Pkten, die zu mehreren SK's gehören, die MZ's der weiteren SK's finden (durch Konstruktion) ↳ $\underline{v}$ ist immer ⊥ zur Verbindungsgeraden vom MZ zum Punkt.



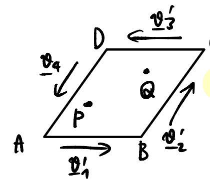
Lager:





SK-Bedingung: $\boxed{v_1' = v_2'}$ & $\boxed{\overline{PQ} = \text{konst.}}$

$v_1' = v_2'$



$v_1' + v_3' = v_2' + v_4'$

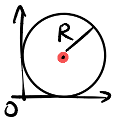
⇒ $v_1' = v_3'$

Dipolmoment: $\boxed{N = \sum_{i=1}^{N} F_i r_i}$

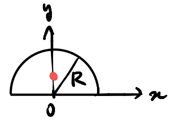
$\underline{M} = \underline{N} \times \underline{e}$ ($\underline{e}$ von $\underline{R}$)

N/Moment unabhängig vom Bezugspkt.

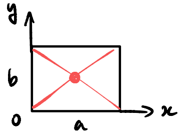
Schwerpunktberechnung:



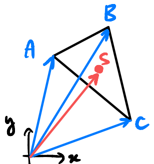
$\underline{r}_{0S} = \begin{pmatrix} R \\ R \end{pmatrix}$ $A = \pi r^2$



$\underline{r}_{0S} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4R}{3\pi} \end{pmatrix}$ $A = \frac{1}{2}\pi r^2$



$\underline{r}_{0S} = \begin{pmatrix} a/2 \\ b/2 \end{pmatrix}$ $A = a\cdot b$



$\underline{r}_{0S} = \frac{\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}}{3}$ $A = \frac{1}{2} AC\cdot h_B$

Wenn S vom Gesamtkörper berechnen:

⊛ da hom. Massenverteilung

$$\boxed{\underline{r}_m = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \underline{r}_i \Leftrightarrow \underline{r}_A = \frac{1}{A}\sum_{i=1}^{n} A_i \vec{r}_i}$$

aufschreiben!

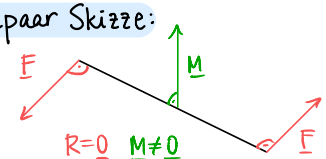
$\boxed{x_s = \frac{\sum_i x_i \cdot A_i}{\sum_i A_i}}$ $\boxed{y_s = \frac{\sum_i y_i \cdot A_i}{\sum_i A_i}}$

Kräftemittelpunkt C: ($\underline{r}_A = \underline{r}_{0A}$.)

$\boxed{\underline{r}_C = \frac{1}{R}\sum_{i=1}^{N} F_i \underline{r}_i}$ mit $R = \sum_{i=1}^{N} F_i$

auch Schwerpunkt/Massenmittelpunkt

Kräftepaar Skizze:



Moment = Drehwirkung einer Kraft auf einen Körper.

⊛ eine Kraft, die ⊥ auf $\underline{v}$ steht, ist leistungslos. P=0. ($P = \underline{v}\cdot\underline{F} = 0$)

Reibung: Haften/Gleiten

⇒ Kräfte.

Haftreibungsgesetz: $|\vec F| \le \mu_0 |\vec N|$ (Ruhe)

μ_0: Haftreibungskoeffizient; ($v_B = 0$)

Gleitreibungsgesetz: $|\vec F| = \mu_1 |\vec N|$ (Bewegung)

μ_1: Gleitreibungskoeffizient; ($v_B \ne 0$)

Vektoriell: $\vec F = -\mu_1 |\vec N| \frac{\vec v_B}{|\vec v_B|}$

$\vec v_B = \vec v$ des Berührungspunkts

Gleichung erfüllt: Haftet.

→ liefert erst nachträglich ein Kriterium dafür, dass Ruhe wirklich möglich ist.

Rollwiderstandsgesetz → rollen / nicht rollen

⇒ Momente

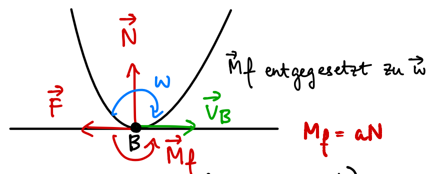
im Fall der Ruhe: $|\vec M_f| \le \mu_2 |\vec N|$

im Fall der Bewegung: $|\vec M_f| = \mu_2 |\vec N|$

liefert zusätzliche Gleichungen zum bestimmen der Unbekannten.

μ_2: Rollwiderstandslänge

Vektoriell: $\vec M_f = -\mu_2 |\vec N| \frac{\vec \omega}{|\vec \omega|}$



ideal rau: $\mu_0 = \infty$; $\mu_2 = 0$ (z.B. Zahnrad)

$|M_f| = |aN| = |a||N| \le \underbrace{a_{max}}_{=\mu_2} |N|$

Für Fall der Bewegung: $|a||N| = a_{max}|N|$

Lagerreibung:

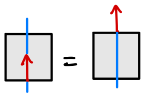
im Fall der Ruhe: $|M_f| \le \mu_0 r_L \sqrt{A^2+B^2}$

im Fall der Bewegung: $M_f = \pm \mu_1 r_L \sqrt{A^2+B^2}$

A, B: Zapfenkräfte

r_L: Lagerradius

Kräfte können entlang der Wirkungslinie verschoben werden.

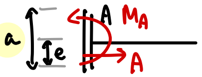


Freiheitsgrad des Gesamtsystems:

unabhängiger Bewegungen, die das Gesamtsystem machen kann. (= geringste # an Koordinaten, die nötig ist, um das Gesamtsystem zu beschreiben.)

→ Federn, die am System angebracht sind, verringern den Freiheitsgrad nicht.

Nicht kippen:



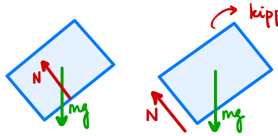
$M_A = e \cdot A \Leftrightarrow e = \frac{M_A}{A} = ⊛$ $(e = \frac{a}{2})$

$|⊛| \le \frac{a}{2} \Rightarrow a \ge ⊛ \cdot 2$

$e \in [-1, 1]\frac{a}{2}$

Wenn a schon bekannt, und e besteht aus einer nach bestimmten Kräften aufgelöste Gleichung, mit diesem Ansatz rechnen.

kippt!! → N darf sich nicht ausserhalb des Körpers befinden



Dynamik:

Beschleunigung: $\underline a = \dot{\underline v} = \ddot{\underline r}$

$\underline a = \ddot x \underline e_x + \ddot y \underline e_y + \ddot z \underline e_z$

in Zylinderkoordinaten:

$\underline a = \dot{\underline v} = \ddot{\underline r} = (\ddot \rho - \rho \dot\varphi^2)\underline e_\rho + (\rho\ddot\varphi + 2\dot\rho\dot\varphi)\underline e_\varphi + \ddot z \underline e_z$

in ebenen Polarkoordinaten:

$\underline v = \dot r \underline e_r + r\dot\varphi \underline e_\varphi$

$\underline a = (\ddot r - r\dot\varphi^2)\underline e_r + (r\ddot\varphi + 2\dot r\dot\varphi)\underline e_\varphi$ r = Radius (=ρ)

Kreisbewegung: (r = konstant) $\dot r = \ddot r = 0$

$\underline v = r\dot\varphi \underline e_\varphi$

$\underline a = -r\dot\varphi^2 \underline e_r + r\ddot\varphi \underline e_\varphi$

$r\dot\varphi^2 = \frac{v^2}{r}$: radial nach innen gerichtet

$r\ddot\varphi$: tangentiale Komponente

Trägheitskräfte, PdvL:

↳ fiktiv. verletzen das Reaktionsprinzip.

Trägheitskraftdichte: $\underline f^{(t)} = -\rho \underline a$

ρ: spezifische Masse, Dichte $\rho = \rho(\vec r)$

Trägheitskraft: $d\vec F = -\rho \vec a\, dV = -\vec a\, dm$

PdvL: $\tilde{\mathcal P}^{(i)} + \tilde{\mathcal P}^{(a)} + \tilde{\mathcal P}^{(t)} = 0, \forall \{\tilde v\}$

Inertialsystem: wenn v = konst. (kein a)
↳ wie Statikaufgabe behandeln.
↳ PdvL gilt.
Masselose Systeme: Methoden der Statik ✓
} kein $\tilde{\mathcal P}^{(t)}$.

Newton'sches Bewegungsgesetz:

$m\vec a = \vec R$

Komponentenweise:

$\sum F_x = m\ddot x$ $\sum F_y = m\ddot y$

→ ergeben DGL.
↳ Anfangsbedingungen nötig!
↳ oft: $\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot x(0) = 0 \end{cases}$ oder $\dot x(0) = v_0$

→ falls mehrere Körper → für jeden Körper aufstellen!

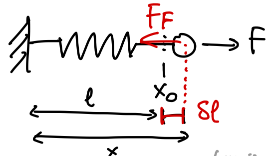
Feder:

Federgesetz: $|F| = c|\delta l|$

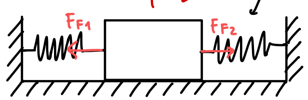
δl: Verlängerungsstrecke ($\delta l = x - l$)

c: Federkonstante

$F_F = \pm cx$



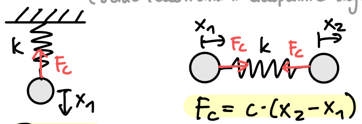
• Vorzeichen aufpassen: (variiert je nach dem in welche Richtung die Federkraft eingezeichnet hat!)



$F_{F_1} = +cx$

$F_{F_2} = -cx$

• aufpassen, wo die Koordinate ist: (beide Federn sind in entspannter Lage)

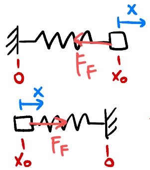


$F_c = c \cdot x_1$ $F_c = c\cdot(x_2 - x_1)$

Die Koordinaten beschreiben die Bewegung der Massenpunkte!

• aufpassen, wo die entspannte Lage der Feder ist:

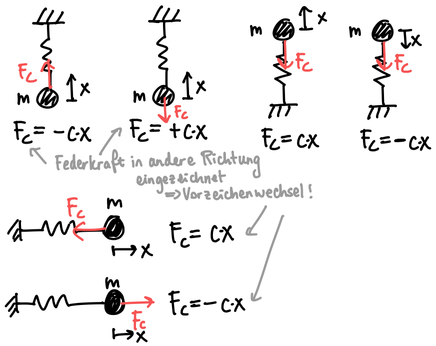
hier ist die entspannte Länge der Feder bei 0.



$F_F = c\cdot(x + x_0)$

$F_F = -c(x - x_0)$

Beispiele: (Feder alle in entspannter Lage):



Bem: Feder verringern den Freiheitsgrad eines Systems nicht.

Impuls:

Impulssatz: $\boxed{\dot{\vec{p}} = \vec{R}} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$

$\vec{p}$.. Impuls

Impuls: $\boxed{p = m \cdot v}$

⊛ **Erhaltungssatz:** wenn $\boxed{\dot{p}=0}$:

⇒ Impuls bleibt erhalten

$E_{kin} = \boxed{\frac{1}{2} m v^2}$ $\quad \vec{R} = m\vec{a}$

Anwendung: gleich wie Newton'sches Bewegungsgesetz.

Massenmittelpunktsatz: $\boxed{\vec{R} = m\vec{a}_c}$ $= m\ddot{x}$

$\vec{a}_c$.. $\vec{a}$ von MMPkt. C

m.. Masse

→ beide unabhängig vom Bezugspunkt.

Kinetik ebener Bewegungen

Drallsatz: $\boxed{\dot{\vec{L}}_0 = \vec{M}_0 = I_c \ddot{\varphi} = I_c \dot{\omega}}$

$\vec{L}_0$.. Drall bezüglich Inertialpkt. 0

Drallsatz ≈ Newton für Rotation

aus $M_0 = \iiint_B \underline{r} \times \underline{a}\, dm \quad L_0 = \iiint_B \underline{r} \times \underline{v}\, dm$

relativer Drallsatz:

Drall bezüglich C: $\boxed{\dot{\vec{L}}_c = \vec{M}_c}$

C = Massenmittelpkt.

Drallsatz, Impulssatz & Massenmittelpunktsatz gelten ganz allgemein (also nicht nur für SKs).

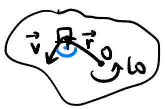
Drehimpuls: (Drallsatz) $I_0\dot{\omega}$

$\boxed{L_0 = I_0 \omega = I_0 \dot{\varphi}} \rightarrow \boxed{\dot{L}_0 = I_0 \ddot{\varphi} = M_0}$

$\boxed{L_c = I_c \omega = I_c \dot{\varphi}} \rightarrow \boxed{\dot{L}_c = I_c \ddot{\varphi} = M_c}$

I_0, I_c = **Massenträgheitsmoment**

⊛ Drall = wie ω.



$\dot{L}_0$ ⊥ aus Ebene heraus

Massenträgheitsmoment

$I_0 = \iint_B r^2\, dm \quad$ 0 = Fixpunkt, r = r_{0dm}

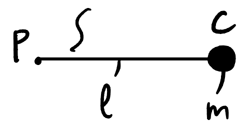
$I_c = \iint_B r'^2\, dm \quad$ C = Schwerpunkt, $r' = r_{cdm}$

Satz von Steiner (Bezugspktwechsel):

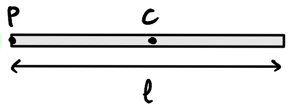
$\boxed{I_p = I_c + m a^2} \rightsquigarrow \boxed{\vec{L}_0 = \vec{r}_c \times \vec{p} + \vec{L}_c}$ $(\vec{p} = m\vec{v}_c)$

Wichtige Massenträgheitsmomente:

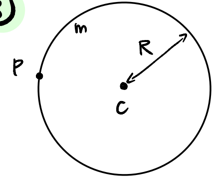
↳ konstant bei ebener SK-Bewegung.

① 

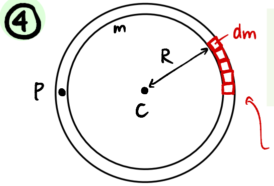
$I_c = 0$, $I_p = m l^2$

② 

$I_c = \frac{1}{12} m l^2$, $I_p = \frac{1}{3} m l^2$

③ 

$I_c = \frac{1}{2} m R^2$, $I_p = \frac{3}{2} m R^2$

④ 

$I_c = m R^2$, $I_p = 2 m R^2$

Summe aller dm's · R^2

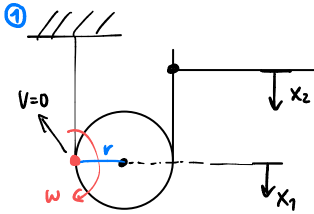
$\iint R^2\, dm = m R^2$

→ Massenträgheitsmoment eines aus homogenen Teilen zusammengesetzten Körpers = Addition der einzelnen Massenträgheitsmomente.

Kinematische Relationen:

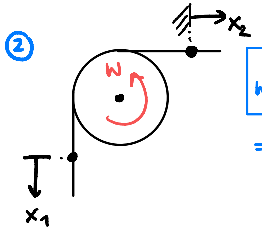
→ mehr Koordinaten als Freiheitsgrad, so sind diese voneinander abhängig.

→ Punkte finden, wo man kinematische Relationen aufstellen kann. Oft bei Rollen.

① 

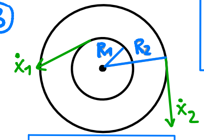
$\boxed{\omega = \frac{\dot{x}_1}{r} = \frac{\dot{x}_2}{2r}}$

$\Rightarrow 2\dot{x}_1 = \dot{x}_2$

② 

$\boxed{\omega = \frac{\dot{x}_1}{r} = -\frac{\dot{x}_2}{r}}$

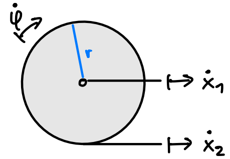
$\Rightarrow \dot{x}_1 = -\dot{x}_2$

③ 

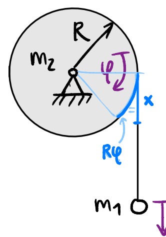
$\boxed{\dot{\varphi} = \omega = \frac{\dot{x}_1}{R_1} = -\frac{\dot{x}_2}{R_2}}$

$\Rightarrow \dot{x}_2 = -\frac{R_2}{R_1}\dot{x}_1$

oder: $\boxed{d\varphi = \frac{dx_1}{R_1} = \frac{dx_2}{R_2}}$ $\quad \Rightarrow x_2 = -\frac{R_2}{R_1} x_1 + k$

④ 

$\boxed{\dot{x}_2 = \dot{x}_1 - r \cdot \dot{\varphi}}$

allgemein: 

$\boxed{x = R\varphi}$

ω = $\dot{\varphi}$ = Rotationsgeschwindigkeit = Kreisfrequenz.

$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} \qquad \omega = \frac{\varphi}{t} \rightsquigarrow \varphi(t) = \omega t$

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ = Periodendauer, $[T] = s$

Bewegungsdiff'gleichungen:

Lösungsansatz für DGL:

falls DGL in diese Form umformbar:

höchste Ableitung Koeffizientenfrei machen. — Werte vor x mit ω^2 ersetzen

(Schwingung): $\boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = k}$ ← DGL in diese Form bringen!

$\boxed{x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) + \frac{k}{\omega^2}}$

dann löst dieser Ansatz die DGL. $\quad$ oft: $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$

Kinematik:

$\boxed{m\ddot{x} = R}$ (kein ω) $\qquad e^{\lambda x}$

$\boxed{x(t) = c_1 \frac{1}{2} x^2 + c_2 x + c_3}$

Herangehensweise einer Dynamikaufg.:

- Drallsatz: $\dot{L}_c = M_c = I_c \ddot{\varphi} = \ldots$
- Massenmittelpunktsatz $m\vec{a}_c = \vec{R}$
  → $m\ddot{x} = \ldots$
  → go to move als erstes!
- Kinematische Relationen:
  $x = R\varphi$, $\dot{x} = R\dot{\varphi} \Rightarrow \ddot{x} = R\ddot{\varphi}$

↳ aufstellen für: $x, y, \ldots$ (Strecken); $x, \varphi, \ldots$; $\varphi, \alpha, \gamma, \ldots$ (Winkel)

Tipp:

Wenn $\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{x}_1 = \ldots \\ I_1 \ddot{\varphi}_1 = \ldots \end{array} \right\}$ das schon aufgestellt, und wir müssen eine Kraft von der rechten Seite bestimmen

⇒ mit $I_1 \ddot{\varphi}_1 + r \cdot m\ddot{x}_1 = \ldots$ probieren.

$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0$

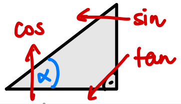
↓

$\varphi(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$

(allg. Lösung)

Sonstiges:

Trigonometrie:



DEG	0°	30°	45°	60°	90°
RAD	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–

- $\tan = \frac{\sin}{\cos}$
- $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$
- $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$
- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$
- $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$

Trigonometrische Ableitungen: $\frac{d}{dx}$: $\sin \to \cos \to -\sin \to -\cos \to \sin$

Koordinatenumwandlungen:

Kartesisch ↔ Zylinderkoordinaten:

$x = \cos(\varphi) \cdot \rho$
$y = \sin(\varphi) \cdot \rho$
$z = z$

↔

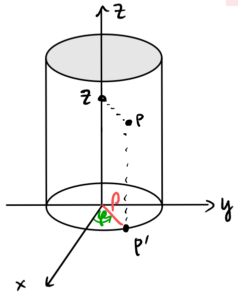
$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$
$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$
$z = z$

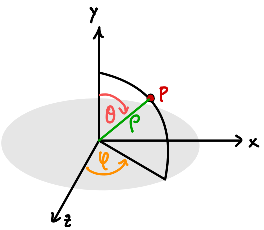
Kartesisch ↔ Kugelkoordinaten:

$x = \rho \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi)$
$y = \rho \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi)$
$z = \rho \cdot \cos(\theta)$

↔

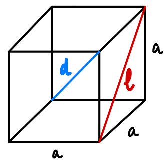
$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$
$\theta = \arccos\left(\frac{z}{\rho}\right)$



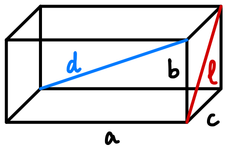


Geometrien:

Quader / Würfel:

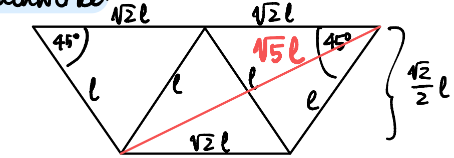


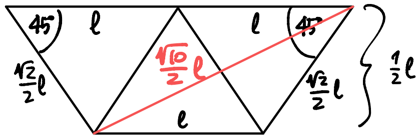
$l = \sqrt{2}\,a$
$d = \sqrt{3}\,a$



$l = \sqrt{b^2 + c^2}$
$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

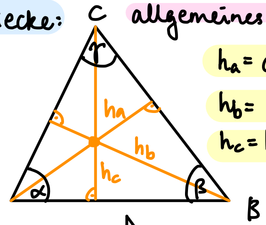
Fachwerke:





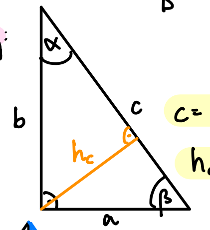
Dreiecke:

allgemeines Dreieck:



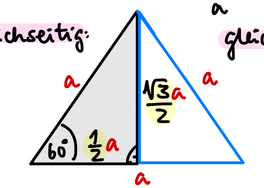
$h_a = c \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\gamma$
$h_b = a \cdot \sin\gamma = c \cdot \sin\alpha$
$h_c = b \cdot \sin\alpha = a \cdot \sin\beta$

Rechtwinklig:

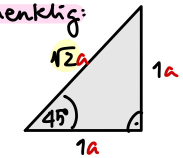


$c = \sqrt{a^2 + b^2}$
$h_c = \frac{a \cdot b}{c}$

gleichseitig:



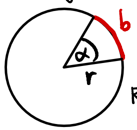
gleichschenklig:



Kreis:

Kreisgleichung: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$

Kreisbogen:



DEG: $b = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi r$

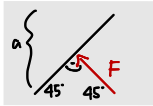
ges. Fläche $= \pi r^2$
ges. Umlauf $= 2\pi r$

RAD: $b = \alpha \cdot r \rightsquigarrow \alpha = \frac{b}{r}$

Vektoren & Einheitsvektoren:

$\boxed{e_x = \frac{x}{\|x\|}}$; $\boxed{x = e_x \cdot \|x\|}$

d.h. z.B. $\underline{F} = \underline{e_F} \cdot F$



$\Rightarrow \underline{F} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} F$

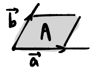
(keine 1, a usw.)

Skalarprodukt / Kreuzprodukt:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\theta$

$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\theta$ $\quad \vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$: $\vec{c} \perp \vec{a}$ & $\vec{c} \perp \vec{b}$

Anwendungen:

↳  $|\vec{a} \times \vec{b}| =$ Fläche!

↳ |Spatprodukt| = Volumen des Parallelopipeds:
↳ $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$

Abstand einer Geraden AB zum Punkt O:

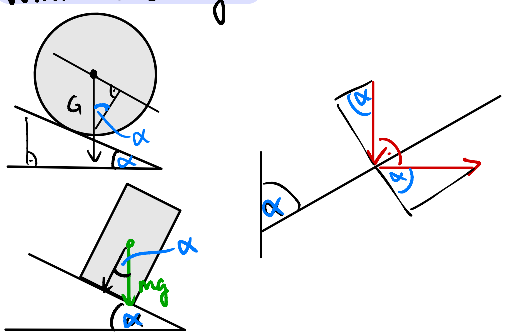
$\boxed{d_O^{AB} = |\underline{r}_{OA} \times \underline{e}_{AB}| = |\underline{r}_{OB} \times \underline{e}_{AB}|}$

oder:

$P = (P_x, P_y, P_z)$ $\quad g: \vec{Q}(s) = \vec{A} + s\vec{v}$

Abstand: $\boxed{\frac{|\vec{v} \times \vec{AP}|}{|\vec{v}|}}$

Winkelbeziehungen:



Betrag:

$|x| \geq 0$
$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
↳ $|a^n| = |a|^n$ für $n \in \mathbb{N}$
$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ für $b \neq 0$
$\left|\frac{1}{a^n}\right| = \frac{1}{|a|^n}$ für $n \in \mathbb{N}, a \neq 0$
$|a + b| \leq |a| + |b|$

Wurzelapproximationen:

$\sqrt{2} \approx 1.41$
$\sqrt{3} \approx 1.73$
$\sqrt{5} \approx 2.24$
$\sqrt{7} \approx 2.65$
$\sqrt{3} < 2 < 2\sqrt{2} < 3$

Ungleichungen:

$|x| < a = \begin{cases} x < a \\ -x > a \Leftrightarrow x > -a \end{cases} \Leftrightarrow -a < x < a$

Umformungen:

$|\vec{F}_T| \leq \mu_0 |\vec{F}_N|$
$\Leftrightarrow F_T \in [-1, 1]\, \mu_0 F_N$

$e \in [-1, 1]\, \frac{a}{2}$

Physikalische Gleichungen:

- **Physikalischer Pendel:**

$\boxed{\ddot{\varphi} + \frac{3}{2}\frac{g}{l}\sin\varphi = 0}$

- **Mathematischer Pendel:**

$\boxed{\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0}$

- **freier Fall:**

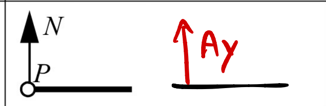
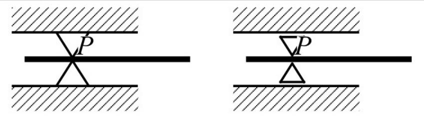
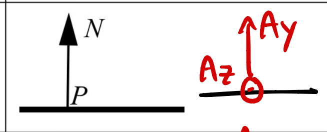
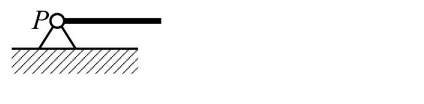
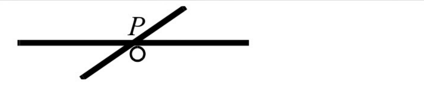
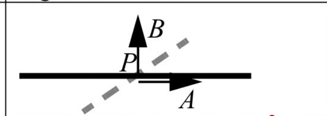
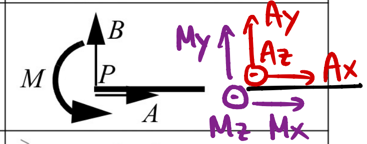
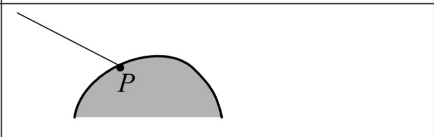
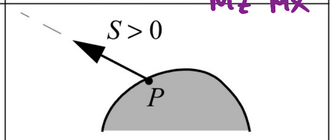
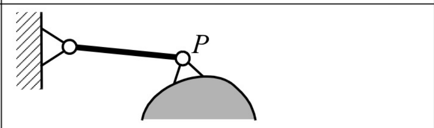
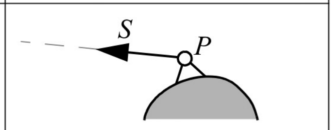
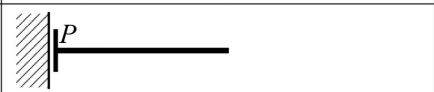
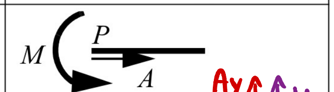
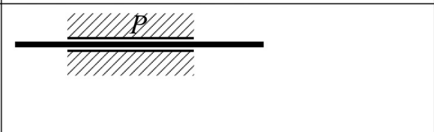
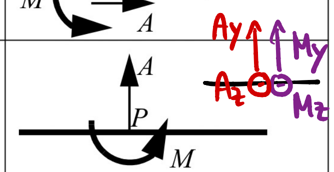
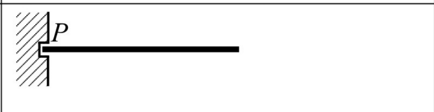
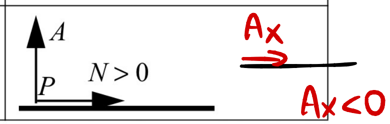
$\boxed{y(t) = \frac{1}{2} g t^2}$

- **Amplitude:**

∼ cos(...)
∼ sin(...)

Lagerreaktionen (2D):

3D:

Auflager (einseitig) *Loslager*		
Auflager (beidseitig) *Loslager*		
Auflager (beidseitig) *Kurzes Querlager Loslager*		
Gelenk *Festlager*		
Gelenk		
Gelenk (zwei gelenkig verbundene Balken)		
Einspannung		
Faden / Seil		
Pendelstütze (Modellannahme: äussere Kräfte nur in den Gelenken)		
Parallelführung		
Langes Querlager, Schiebehülse		
Längs- und kurzes Querlager		

Statikaufgaben:

1. Materielles System abgrenzen; freigeschnittenes System zeichnen (Kräfte statt Lager!)
2. Äussere Lasten & Bindungskräfte einführen
3. Zweckmässiges KS wählen
4. Gleichungen & Unbekannte zählen
   ↳ ist System statisch bestimmt oder unbestimmt?
5. GGW und evtl. weitere Gleichungen (z.B. Reibung) komponentenweise formulieren
6. Falls nötig System trennen, Schnittkräfte einführen & Schritte 1~3 wiederholen
7. Gleichungen nach den Unbekannten auflösen
8. Resultate & evtl. Zusatzbedingungen diskutieren

Dynamikaufgaben:

1. Modellbildung, materielles System abgrenzen.
2. Für die Berechnung von inneren Bindungskräften: einzelne Körper freischneiden.
3. In allgemeiner Lage (nicht in der Anfangslage!) alle angreifenden Kräfte einführen.
4. Freiheitsgrad ermitteln, Wahl von zweckmässigen KS.
5. Kinematische Relationen aufstellen (← Bindungen Rollen)
6. Bewegungsdiff'gleichungen für alle Komponenten formulieren.
   ⇒ Massenmittelpunktsatz, Drallsatz
7. Bindungskräfte bestimmen, aus den Bewegungsgleichungen eliminieren, # Gleichungen entsprechend reduzieren.
8. Anfangsbedingungen formulieren; gesuchte Grössen berechnen
9. Resultate diskutieren

allgemeine Tipps; an Prüfung:

> **Formeln aufschreiben!**
(vor dem Rechnen → nur Formel aufschreiben gibt Punkte!)

> You can do this! ☺

Begriffe:

Dynamik

- Kinematik: Studium der Beschleunigungen und Geschwindigkeiten
- Kinetik: Frage nach Zusammenhang zw. den angreifenden Kräften & seiner Bewegung (also Dyname & Kinemate)
  → Kräfte verändern Bewegungszustand

Inertialpunkt:

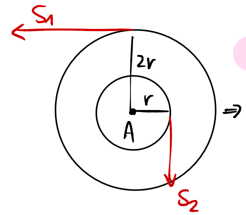
> Pkt, der in einem Inertialsystem ruht (d.h. darf nicht beschleunigt sein).

Massenträgheitsmoment (= Inertialmoment):

> Trägheit eines Körpers gegenüber einer Änderung seiner Winkelgeschwindigkeit bei der Drehung um eine gegebene Achse

Aufpassen!

- Kräftefrei: $\underline{R}=\underline{0}$, $\underline{M}=\underline{0}$
- SdpG ≠ Vektoradition
- Bindungskräfte nicht vergessen!

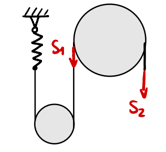


$S_1 \neq S_2$

$\Rightarrow M(A): 2rS_1 - rS_2 = 0$

$S_1 = \frac{1}{2} S_2$

Bei Dynamikaufgaben ist i.A.



$S_1 \neq S_2$

↳ weil System ist nicht in Ruhe. (& wegen Feder)

→ Falls System in Ruhe, dann $S_1 = S_2$