Übung 10

07.12.2021
Lina De Windt

Themen von Heute:

> Teil 1: Fragen zu Themen bisher / dringende Fragen zur Zwischenprüfung?

> Teil 2: Recap der Theorie für die aktuelle Serie (VL 9 und 10):

1. Reibung
   - 1.1 Haftreibung
   - 1.2 Gleitreibung
   - 1.3 Rollwiderstand (≙ Rollreibung)

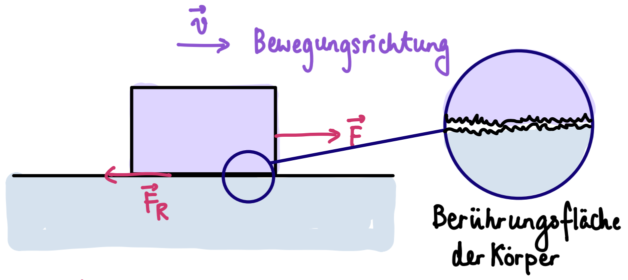
> Teil 3: Übungsaufgaben lösen (Serie 10)

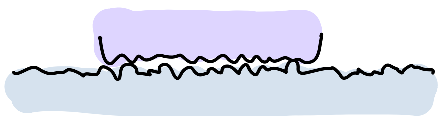
Teil 1: Fragen zu Themen bisher / dringende Fragen zur Zwischenprüfung?

Teil 2: Recap der Theorie für die aktuelle Serie

1. Reibung:

Körper sind in der Realität nicht reibungsfrei, sondern es treten Reibungskräfte auf.



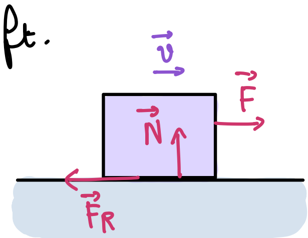


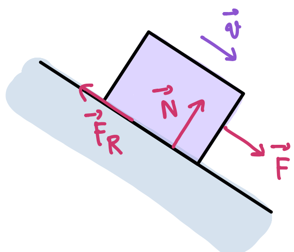
$\vec{F}$: Kraft, die die Bewegung hervorruft
$\vec{F}_R$: Reibungskraft

Intuitiv: je grösser F_R, desto schwieriger ist es, den Klotz zu bewegen.

Was bedeutet das für uns?
→ Wenn in einer Aufgabe angegeben wird, dass Reibung stattfindet, müssen wir einfach auch die Reibungskräfte im Freischnitt einzeichnen & in den Berechnungen berücksichtigen.

Die Reibungskraft wirkt entgegen der Bewegungsrichtung und ist immer senkrecht zur Normalkraft.



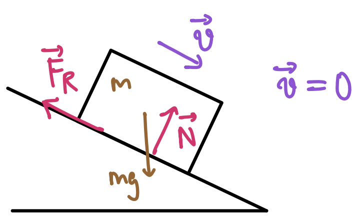


Wir unterscheiden zwischen Haftreibung, Gleitreibung und Rollreibung.

Bem: Reibungskräfte treten zw. 2 Körper auf.

1.1 Haftreibung:

Bei der Haftreibung findet keine Bewegung der Körper zueinander statt.



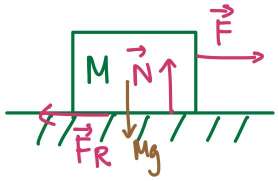
$\vec{v} = 0$

$$\boxed{|\vec{F}_R| \leq \mu_0 |\vec{N}|}$$

← Das ist die Bedingung, s.d. der Körper haftet!

μ_0 heisst Haftreibungskoeffizient.

Bem: Haften liefert uns eine zusätzliche Bedingung!

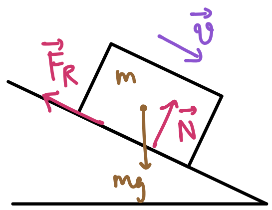
Bsp: 

Sei $\vec{N} = \begin{pmatrix} 0 \\ Mg \end{pmatrix}$, $\vec{F}_R = \begin{pmatrix} -F \\ 0 \end{pmatrix}$. Wie gross muss μ_0 mind. sein, s.d. der Quader haftet?

Lö: haften: $|\vec{F}_R| \leq \mu_0 |\vec{N}| \iff F \leq \mu_0 Mg \iff \underline{\underline{\mu_0 \geq \frac{F}{Mg}}}$

1.2 Gleitreibung:

Bei der Gleitreibung bewegen sich die Oberflächen der Körper relativ zueinander. Dabei gleitet der Körper und erfährt eine konstante Reibungskraft.



$\vec{v} \neq 0$

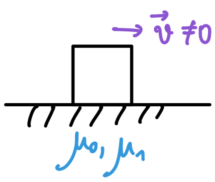
$$\boxed{|\vec{F}_R| = \mu_1 \cdot |\vec{N}|}$$

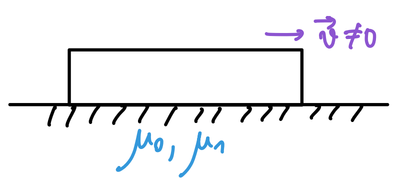
μ_1 heisst Gleitreibungskoeffizient.

Bem: Gleiten liefert eine zusätzliche Gleichung!

Zusatzinfos zu μ_0, μ_1:

μ_0, μ_1 sind Materialeigenschaften. Sie sind unabhängig von $\vec{N}$ und der Grösse der Berührungsfläche. Es gilt $\mu_0, \mu_1 > 0$.





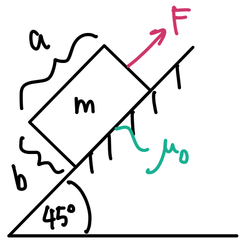
μ_0, μ_1 bleiben gleich!

Bsp. einige Haft- (μ_0) und Gleitreibungskoeffizienten (μ_1): (nicht prüfungsrelevant)

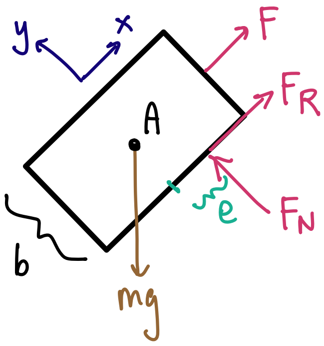
	μ_0	μ_1
Stahl - Stahl	0,1 ~ 0,5	0.1 ~ 0.4
Holz - Metall	0,5 ~ 0,65	0.2 ~ 0,5
Ski - Schnee	0,1 ~ 0.3	0,04 ~ 0.2

Beispielaufgabe 1: (von mir erstellt :))

Ein Quader liegt wie skizziert auf einer schiefen Ebene. Zwischen dem Quader und der Ebene herrscht Haftreibung mit Gleitreibungskoeffizient μ_0. Eine Kraft F greift auf den Quader wie skizziert:



Schneide den Quader frei & führe alle an ihn angreifende Kräfte ein:



Stelle die Gleichgewichtsbedingungen auf:

$$\begin{cases} KB(x): 0 = F_R - \frac{\sqrt{2}}{2} mg + F & \cdots ① \\ KB(y): 0 = F_N - \frac{\sqrt{2}}{2} mg & \cdots ② \\ MB(A,z): 0 = eF_N + \frac{b}{2} F_R & \cdots ③ \end{cases}$$

und $|\vec{F}_R| \leq \mu_0 \cdot |\vec{F}_N|$

Welche Bedingung muss F erfüllen, damit das System nicht zu gleiten beginnt?

Gleichungen auflösen: ① $\Rightarrow F_R = \frac{\sqrt{2}}{2} mg - F$

② $\Rightarrow F_N = \frac{\sqrt{2}}{2} mg$

mg>0

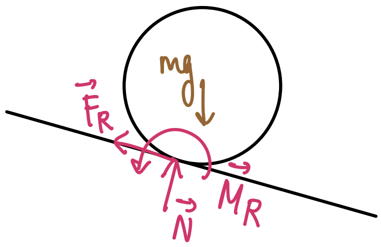
$\Rightarrow \left|\frac{\sqrt{2}}{2} mg - F\right| \leq \mu_0 \cdot \left|\frac{\sqrt{2}}{2} mg\right| \Leftrightarrow -\mu_0 \frac{\sqrt{2}}{2} mg \leq \frac{\sqrt{2}}{2} mg - F \leq \mu_0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} mg$

$\Leftrightarrow -\mu_0 \frac{\sqrt{2}}{2} mg - \frac{\sqrt{2}}{2} mg \leq -F \leq \mu_0 \frac{\sqrt{2}}{2} mg - \frac{\sqrt{2}}{2} mg$

$\Leftrightarrow \mu_0 \frac{\sqrt{2}}{2} mg + \frac{\sqrt{2}}{2} mg \geq F \geq -\mu_0 \frac{\sqrt{2}}{2} mg + \frac{\sqrt{2}}{2} mg \quad \Rightarrow F \in \frac{\sqrt{2}}{2} mg (1 + [-1, 1]\mu_0)$ //

1.3 Rollwiderstand (≙ Rollreibung):

Rollreibung tritt auf, wenn ein Körper über einen anderen Körper rollt. Sie ist auch entgegen der Bewegung gerichtet. Wichtig: Rollreibung ist ein **Moment**!



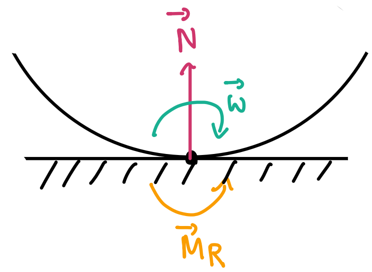
$\vec{M}_R$ beschreibt das Rollmoment.

Beim Rollen unterscheiden wir auch zw. Körper in Ruhe & in Bewegung (relativ zueinander)

im Fall der Ruhe : $\boxed{|\vec{M}_R| \leq \mu_2 \cdot |\vec{N}|}$ (auch "Haftreibung")

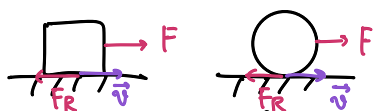
im Fall der Bewegung: $\boxed{|\vec{M}_R| = \mu_2 \cdot |\vec{N}|}$ (auch "Gleitreibung")

Vektoriell: $\vec{M}_R = -\mu_2 \cdot |\vec{N}| \cdot \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}$

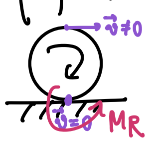


μ_2 heisst Rollwiderstandslänge / Rollreibungslänge

Achtung: Passt auf, Haften / Gleiten

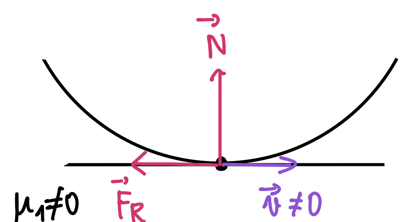


nicht mit Rollwiderstand



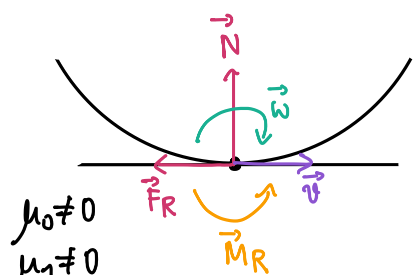
zu verwechseln! Lest die Aufgabenstellungen genau & schaut, was man einführen muss und was nicht.

V.a: tritt nur Reibung oder auch Rollwiderstand auf?



nur Reibung

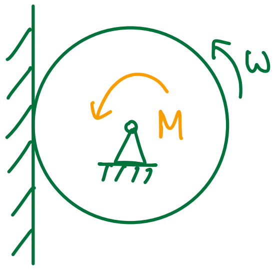
(Wenn das Rad nicht rollt oder wenn $\mu_2 = 0$)



beides

(Rad rollt und hat $\mu_2 \neq 0$ und haftet / gleitet gleichzeitig.)

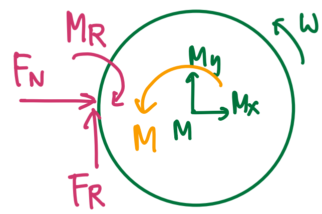
Bsp: Rotierende Welle an einer Wand:



freischnitt ⇝

Rollwiderstandsmoment

→ entgegengesetzt zum Moment M der Welle!

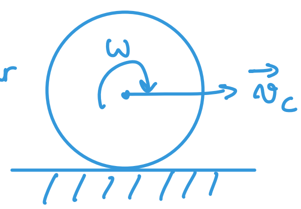


Gleitreibung, weil Welle "schleift" an der Wand

Good to know: Eine Berührung ist ideal rau, wenn $\mu_0 = \infty$, $\mu_2 = 0$.

Quiz: Ist rollen (mit $\mu_2 \neq 0$) ohne gleiten auf einer Oberfläche mit $\mu_0 = 0$ möglich?

d.h. Rollwiderstand nicht vernachlässigbar



$\mu_0 = 0$, $\mu_2 \neq 0$

⇒ Ja!

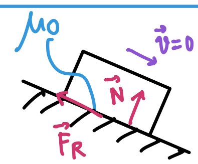
→ genauer: Bsp. im Skript S.71 unten ~ S.72 oben

Alles auf einen Blick:

kein Rollen:

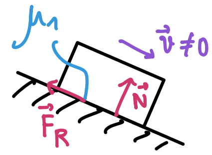
Haften: $\boxed{|\vec{F}_R| \leq \mu_0 |\vec{N}|}$

μ_0 = Haftreibungskoeffizient



Gleiten: $\boxed{|\vec{F}_R| = \mu_1 |\vec{N}|}$

μ_1 = Gleitreibungskoeffizient



⚠ $\vec{F}_R \perp \vec{N}$

Rollen:

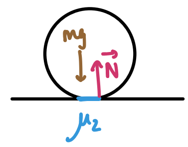
im Fall der Ruhe: $\boxed{|\vec{M}_R| \leq \mu_2 |\vec{N}|}$

zusätzliche Bedingung

im Fall der Bewegung: $\boxed{|\vec{M}_R| = \mu_2 |\vec{N}|}$

zusätzliche Gleichung

μ_2 = Rollwiderstandslänge / Rollreibungslänge



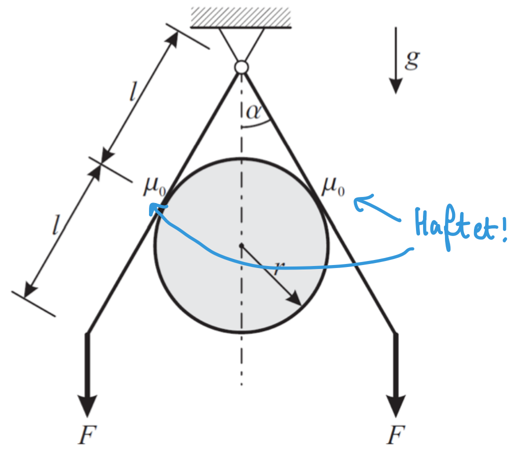
Kochrezept Aufgaben mit Reibungskräften:

1. System freischneiden & geeignetes Koordinatensystem einführen.
2. Lagerkräfte einzeichnen (inkl. Normalkräfte → Abstandsvariable nicht vergessen!)
3. Reibungs- & Rollwiderstandskräfte als unbekannte Grössen einführen:
   Entgegen der zur erwartenden Bewegungsrichtung (wenn nicht klar, dann egal)
   und Senkrecht zur Normalkraft.
4. Gleichgewichtsbedingungen aufstellen (Gleiten liefert zusätzliche Gleichungen!)
5. Diskussion (über Wertebereich von μ_0, μ_1, μ_2, über gewisse Kräfte usw.)

↳ schauen wir uns das anhand eines Beispiels an! :)

Beispielaufgabe: Aufgabe 1 Serie 10

1. [1] Eine Kugel mit dem Gewicht F_G wird von zwei um $\alpha = 30°$ geneigten gewichtslosen Platten laut Abbildung festgehalten. Die dabei aufgewendeten Kräfte vom Betrag F seien $5F_G$.

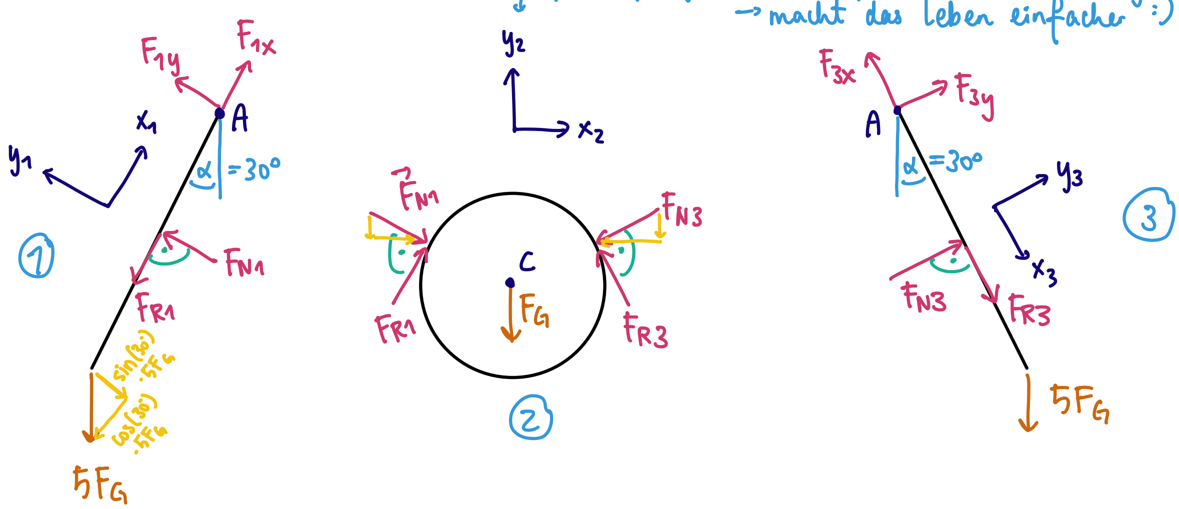


1. Wie gross muss der zwischen Platte und Kugel auftretende Haftreibungskoeffizient μ_0 mindestens sein, damit die Kugel nicht hinunterfällt?

Hinweis: Der Rollwiderstand ist vernachlässigbar.

1. freischneiden:

führt für jeden SK ein passendes Koordinatensystem ein!
→ macht das Leben einfacher :)



2. GGW-Bedingungen:

SK ①:

KB(x): $0 = F_{1x} - \cos(30°)\cdot 5F_G - F_{R1} = F_{1x} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 5F_G - F_{R1}$ ... ①

KB(y): $0 = F_{1y} + F_{N1} - \sin(30°)\cdot 5F_G = F_{1y} + F_{N1} - \frac{5}{2}F_G$ ... ②

MB(A, z): $0 = -l\cdot F_{N1} - l\cdot \sin(30°)\cdot 5F_G = -l\, F_{N1} + 2l\cdot\frac{5}{2}F_G$ ... ③

SK 2: $KB(x): 0 = -F_{3x} + F_{R3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 5F_G$ ... 4

$KB(y): 0 = F_{3y} + F_{N3} - \frac{5}{2} F_G$ ... 5

$MB(C,z): 0 = l \cdot F_{N3} - 2l \cdot \frac{5}{2} F_G$ ... 6

SK 3: $KB(x): 0 = \frac{\sqrt{3}}{2} F_{N1} + \frac{1}{2} F_{R1} - \frac{\sqrt{3}}{2} F_{N3} - \frac{1}{2} F_{R3}$ ... 7

$KB(y): 0 = -\frac{1}{2} F_{N1} + \frac{\sqrt{3}}{2} F_{R1} - \frac{1}{2} F_{N3} + \frac{\sqrt{3}}{2} F_{R3} - F_G$ ... 8

$MB(A,z): 0 = r F_{R3} - r F_{R1}$ ... 9

3. nach F_{R1} und F_{N1} auflösen:

6 $\Rightarrow$ $l F_{N1} = \cancel{2} l \cdot \frac{5}{\cancel{2}} F_G \quad / \div l$

$F_{N1} = 5F_G$

9 $\Rightarrow$ $F_{R3} = F_{R1}$

7 $\Rightarrow$ $\frac{\sqrt{3}}{2} F_{N1} + \frac{1}{2} F_{R1} - \frac{\sqrt{3}}{2} F_{N3} - \frac{1}{2} F_{R3} = 0 \quad / \; F_{R3} = F_{R1}$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} F_{N1} - \frac{\sqrt{3}}{2} F_{N3} = 0$

$\Leftrightarrow F_{N1} = F_{N3}$

8 $\Rightarrow$ $0 = -\frac{1}{2} F_{N1} + \frac{\sqrt{3}}{2} F_{R1} - \frac{1}{2} F_{N3} + \frac{\sqrt{3}}{2} F_{R3} - F_G \quad / \; F_{R3} = F_{R1}, \; F_{N3} = F_{N1}$

$\Leftrightarrow 0 = -\frac{1}{2} F_{N1} - \frac{1}{2} F_{N1} + \frac{\sqrt{3}}{2} F_{R1} + \frac{\sqrt{3}}{2} F_{R1} - F_G \quad / \; F_{N1} = 5F_G$

$\Leftrightarrow 0 = -5F_G + \sqrt{3} F_{R1} - F_G \Leftrightarrow \sqrt{3} F_{R1} = 6F_G \Leftrightarrow F_{R1} = 2\sqrt{3} F_G$

4. Bedingung für Haften aufstellen:

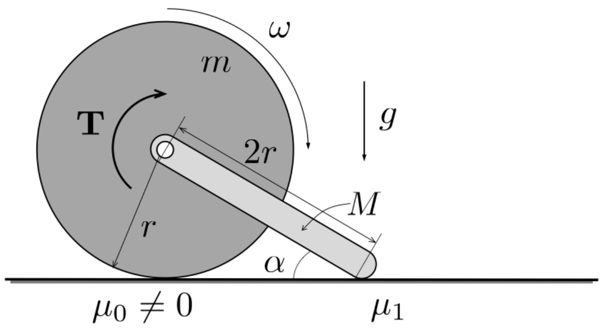
$|F_{R1}| \leq \mu_0 |F_{N1}|$ ($= |F_{R3}| \leq \mu_0 |\vec{F}_{N3}|$ aus Symmetriegründen)

$|2\sqrt{3} F_G| \leq \mu_0 |5F_G| \Leftrightarrow 2\sqrt{3} F_G \leq \mu_0 5F_G \Leftrightarrow \mu_0 \geq \frac{2\sqrt{3}}{5}$

F_G ist >0 (Betrag)

Teil 3: Übungsaufgaben - Serie 10

2. Ein Rad von Masse m und Radius r, auf dem ein Moment $\mathbf{T} = -T\mathbf{e}_z$ wirkt, rollt ohne zu gleiten auf dem Boden mit gegebener Rotationsgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$. Der Mittelpunkt des Rades ist durch einen Gelenk mit einem Stab von homogener Masse M und Länge $L = 2r$ verbunden, der auf dem Boden gleitet und mit dem einen Winkel $\alpha = \pi/6$ einschliesst. Der Boden ist rau mit Haftreibungskoeffizient $\mu_0 \neq 0$ und Gleitreibungskoeffizient μ_1. Die Gewichtskraft g wirkt nach unten.



1. Wie gross muss der Gleitreibungskoeffizient μ_1 sein, damit sich das System mit einer Konstante Geschwindigkeit bewegt?

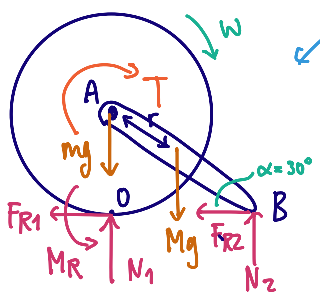
Wir benutzen Methoden aus der Statik, um diese Aufgabe zu lösen. Warum? →

aus Wikipedia

Statik (Mechanik)

Die **Statik** ist ein Teilgebiet der Mechanik, das sich mit unbewegten, ruhenden Körpern befasst. Bei diesen befinden sich alle Kräfte im Gleichgewicht; die Statik wird daher auch als „Lehre vom Gleichgewicht" bezeichnet. Mit beschleunigten Körpern befasst sich die Kinetik. Die Methoden und Erkenntnisse der Statik sind auch auf Körper anwendbar, die sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegen, da diese keine Beschleunigung erfahren.

freischnitt:



Wir schneiden die 2 SK nicht auseinander sondern behalten das System ganz, weil uns die Bdgskräfte nicht interessieren :)

$$|\vec{F}_{R2}| = \mu_1 |\vec{N}_2|$$

Wir brauchen diese 2 Grössen um μ_1 bestimmen zu können!

PdvL anwenden: $v_0 = 0$ (MZ - Rad rollt ohne zu gleiten)

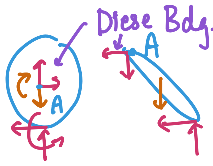
$v_A = \omega r$

$v_B = v_A = \omega r$

$$P_{tot} = T\cdot\omega - F_{R2}\cdot v_B \overset{!}{=} 0 \iff T\cdot\omega - F_{R2}\cdot\omega r = 0 \Rightarrow F_{R2} = \frac{T}{r}$$

Momentenbedingung im Pkt. A <u>auf den Stab</u>:

(Bem: d.h. wir nehmen das System für eine kurze Zeit auseinander und betrachten die 2 SK:



Diese Bdg.kräfte im Punkt A sind unbekannt, aber wir brauchen sie auch nicht um die MB für den Stab bez. Pkt. A zu bestimmen :)

Danach fügen wir das System im Gedanken wieder zusammen, denn unser Ziel ist es nicht, die Bdgskräfte im Pkt. A zu bestimmen.

→ Es lohnt sich nicht, alle SK auseinander zu schneiden!

$$MB(A,z):\ 0 = -Mg\cdot r\cos(\alpha) + N_2\, 2r\cos(\alpha) - F_{R2}\, 2r\sin(\alpha)$$

$$\alpha = 30^\circ /\ \Leftrightarrow\ 0 = -Mg\cdot r\,\frac{\sqrt{3}}{2} + N_2\cdot 2r\,\frac{\sqrt{3}}{2} - F_{R2}\cdot 2r\cdot\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow\ N_2\cdot r\sqrt{3} = Mg\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}r + F_{R2}\cdot r$$

$$\Leftrightarrow\ N_2 = \frac{1}{2}Mg + \frac{F_{R2}}{\sqrt{3}} \quad /\ F_{R2} = \frac{T}{r}$$

$$\Leftrightarrow\ N_2 = \frac{1}{2}Mg + \frac{T}{\sqrt{3}\,r}$$

Gleitreibungsgesetz: $|\vec{F}_{R2}| = \mu_1\cdot|\vec{N}_2|$

$$\Leftrightarrow\ \left|\frac{T}{r}\right| = \mu_1\cdot\left|\frac{1}{2}Mg + \frac{T}{\sqrt{3}r}\right| \quad (T, r, M, g \text{ sind alle per Def.} > 0)$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{T}{r} = \mu_1\cdot\left(\frac{1}{2}Mg + \frac{T}{\sqrt{3}r}\right)$$

$$\Leftrightarrow\ \mu_1 = \frac{\frac{T}{r}}{\frac{1}{2}Mg + \frac{T}{\sqrt{3}r}} = \underline{\underline{\frac{2\sqrt{3}T}{\sqrt{3}Mgr + 2T}}}$$

2. Was ist der minimale Wert von μ_0, damit das Rad nicht gleitet?

Rad gleitet nicht: d.h. die Haftbedingung $|\vec{F}_{R1}| \leq \mu_0 |\vec{N}_1|$ muss erfüllt sein.

Wir brauchen diese 2 Grössen!

-> Wieder als Statikaufgabe betrachten:

GGW- Gleichungen für das System:

$$KB(x): 0 = -F_{R1} - F_{R2} \quad \Rightarrow \quad F_{R1} = -F_{R2} = -\frac{T}{r}$$

$$KB(y): 0 = N_1 + N_2 - mg - Mg \quad \Rightarrow \quad N_1 = (M+m)g - N_2 \qquad / N_2 = \frac{1}{2}Mg + \frac{T}{\sqrt{3}r}$$

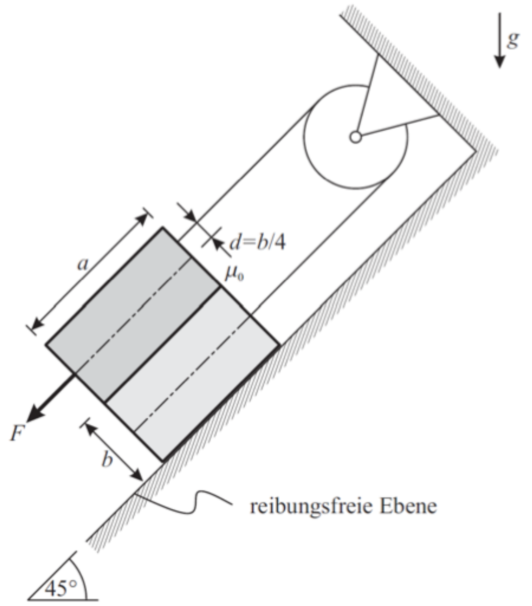
$$\Leftrightarrow N_1 = (M+m)g - \frac{1}{2}Mg - \frac{T}{\sqrt{3}r} = \left(\frac{1}{2}M + m\right)g - \frac{T}{\sqrt{3}r}$$

$$\Rightarrow |\vec{F}_{R1}| \leq \mu_0 |\vec{N}_1| \quad \Leftrightarrow \quad \frac{T}{r} \leq \mu_0 \cdot \left| \left(\frac{1}{2}M + m\right)g - \frac{T}{\sqrt{3}r} \right|$$

$$\Leftrightarrow \quad \mu_0 \geq \frac{T}{r \cdot \left| \left(\frac{1}{2}M + m\right)g - \frac{T}{\sqrt{3}r} \right|}$$

in den Mulö haben sie hier die Betragsstriche weggenommen, das kann man aber eigentlich nicht einfach so machen.

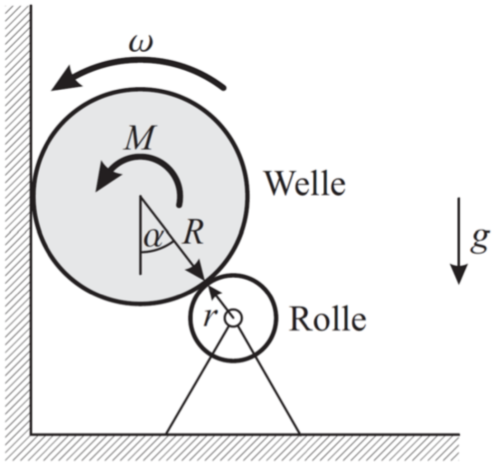
3. [2] Zwei identische Quader (je Gewicht F_G, Länge a, Höhe b) liegen wie skizziert aufeinander und auf einer schiefen Ebene (Neigungswinkel 45°). Ein Seil verbindet die beiden Quader über eine Umlenkrolle. Am unteren Quader ist das Seil auf Höhe der Mittellinie befestigt, am oberen Quader $d = b/4$ oberhalb der Mittellinie. Zwischen den Quadern herrscht Haftreibung ($\mu_0 > 0$). Der Kontakt zwischen dem unteren Quader und der schiefen Ebene ist reibungsfrei. Die Gewichtskräfte der Quader und die skizzierte Kraft vom Betrag F bilden die Belastung.



Annahmen: Ebenes System, Quader homogen, Seil undehnbar und masselos, Umlenkrolle reibungsfrei, Seilkräfte parallel zur Unterlage.

1. Schneiden Sie die Quader einzeln frei und führen Sie alle an ihnen angreifenden Kräfte ein.
2. Stellen Sie die Gleichgewichtsbedingungen auf.
3. Berechnen Sie die Reibungskraft, die Seilkraft, die Normalkräfte und deren Angriffspunkte.
4. Gegeben seien F_G und μ_0 . Welche Bedingungen muss F erfüllen, damit das System nicht zu gleiten beginnt?
5. Welche Bedingung muss F erfüllen, damit das Seil gespannt bleibt?
6. Welche Ungleichungen stellen sicher, dass die Klötze nicht kippen? Diskutieren Sie diese Ungleichungen bei gegebenem a, b und F_G .

4. [3] Eine Welle rotiert mit konstanter Rotationsschnelligkeit $\boldsymbol{\omega}$. Sie ist mit einer vertikalen Wand und einer Rolle abgestützt. Alle Berührungen sind rau. Der Haftreibungskoeffizient ist μ_0 , der Gleitreibungskoeffizient μ_1. Die Rollwiderstandslänge ist μ_2. Die Welle hat das Gewicht F_G. Die Rolle ist reibungsfrei gelenkig gelagert und dreht mit, ihr Gewicht kann vernachlässigt werden. Die Radien von Welle und Rolle sind R und r. Es sei $\alpha = 45°$.



1. Bestimmen Sie alle Kräfte und Momente an Rolle und Welle, insbesondere auch das Antriebsmoment M.

Tipp: Die Aufgabe ist als ebenes Problem mit den Methoden der Statik zu lösen.

Aufpassen beim Freischnitt!

Wo rollt es, wo gleitet es, wo haftet es?