Technische Mechanik

Übung 11

14.12.2021
Lina De Windt

Themen von Heute:

> Teil 1: Fragen zu Themen / Aufgaben von letzter Woche?

> Teil 1.5: Bemerkungen zur Zwischenprüfung

> Teil 2: Recap der Theorie für die aktuelle Serie:

Dynamik:

1. Beschleunigung
2. kinematische Relationen
3. Feder
4. Impuls
5. Newton'sches Bewegungsgesetz ($\hat{=}$ Impulssatz)
6. Differenzialgleichungen

> Teil 3: Übungsaufgaben lösen (Serie 11)

Teil 1: Fragen zu Themen/Aufgaben von letzter Woche?

Dynamik:

Definition in Physik:

Dynamik (Physik)

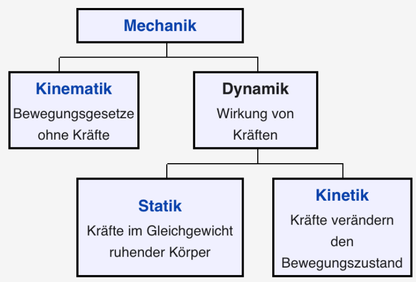
Die **Dynamik** (altgriechisch δύναμις ‚Kraft') ist das Teilgebiet der Mechanik, das sich mit der Wirkung von Kräften befasst. In der Physik wird unter Dynamik die Beschreibung der Bewegung von Körpern in ihrer Abhängigkeit von den einwirkenden Kräften verstanden.

Im allgemeineren Sinn bezeichnet Dynamik in der Physik das (zeitliche) Verhalten eines dynamischen Systems und der Bewegungsgleichungen, die ihm zugrunde liegen.

Es existieren unterschiedliche Einteilungen der Dynamik.

Inhaltsverzeichnis [Verbergen]

Strukturierung der Mechanik unter dem Gesichtspunkt der beteiligten Kräfte (typisch für die Physik)



Physik [Bearbeiten | Quelltext bearbeiten]

In der Physik wird die Dynamik eingeteilt in die Statik, die den Fall des Kräftegleichgewichts behandelt (unbeschleunigte Körper) und in die Kinetik, die sich mit beschleunigten Körpern befasst. Im Unterschied dazu beschränkt sich die Kinematik als weiteres Gebiet der Mechanik auf eine geometrische Beschreibung der Bewegungen, ohne dabei Kräfte zu berücksichtigen.

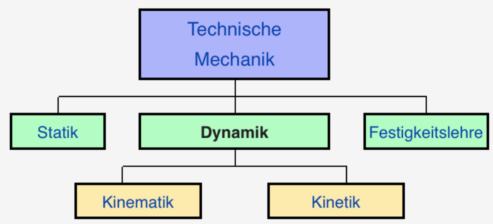
Definition in TechMech:

Technische Mechanik [Bearbeiten | Quelltext bearbeiten]

In der Technischen Mechanik wird die Dynamik als Lehre von den Bewegungen fester Körper verstanden. Mit Gasen und Flüssigkeiten befasst sich dagegen die Fluiddynamik. In der Technischen Mechanik wird die Dynamik meist eingeteilt in[1][2][3]

- die Kinematik, die keine Kräfte berücksichtigt, sondern nur geometrisch die Bahnen der bewegten Körper beschreibt und
- die Kinetik, die auch Kräfte berücksichtigt.

Die Dynamik in der Technischen Mechanik



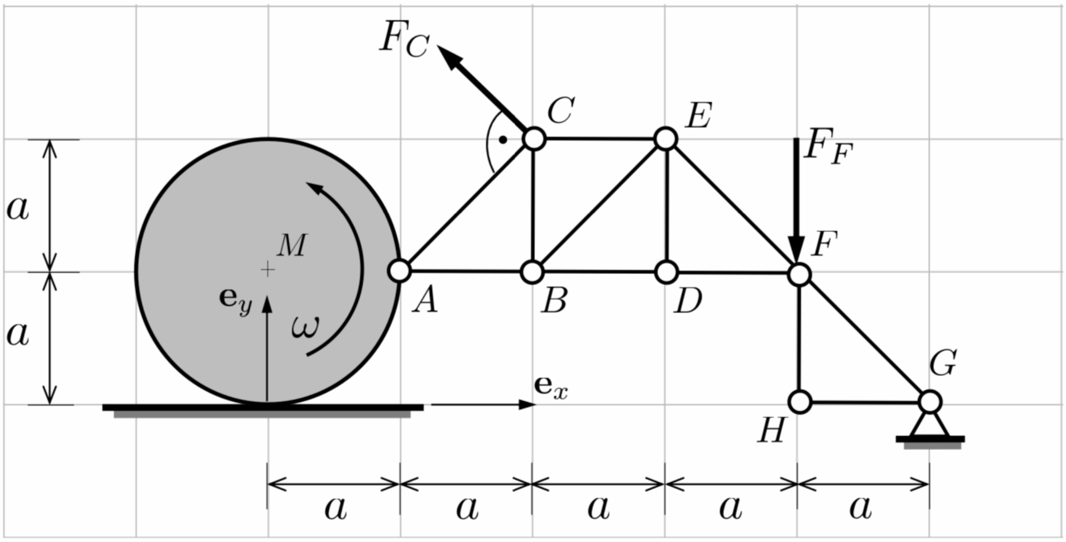
Die Dynamik ist somit neben der Statik und der Festigkeitslehre eines der drei Hauptgebiete der Technischen Mechanik. Zum Teil wird auch die Auffassung vertreten, dass die Dynamik aus den beiden Gebieten der Statik und der Kinetik besteht,[4][5][6] die entsprechenden Werke sind jedoch bei allen Autoren in drei Bände oder Kapitel unterteilt, von denen je eines die Statik und die Festigkeitslehre behandeln und ein weiteres Kinetik und Kinematik. Zum Teil werden diese Bände als *Dynamik* bezeichnet, teils auch als *Kinetik und Kinematik*[7] oder nur *Kinetik*[8] bezeichnet. Zu den Inhalten zählen die Kinematik und Kinetik von einzelnen Punktmassen, von mehreren Punktmassen und von starren Körpern sowie Schwingungen. Wenn in Problemstellungen die Trägheitskräfte mit einbezogen werden, lassen sie sich mit Methoden der Statik lösen. Insofern baut die Dynamik methodisch auf der Statik auf und wird daher erst nach der Statik gelehrt.[9][10]

↳ D.h. also: In der Dynamik sind die Körper im Gegensatz zur Statik nicht in Ruhe, sondern bewegen sich!

Ab Heute bis Ende Semester: Dynamik! :)

Teil 1.5: Bemerkungen zur Zwischenprüfung:

Das System sei nun wie in der Figur belastet, wobei die Kraft $\mathbf{F}_F = -F\mathbf{e}_y$ gegeben ist.



MuLö:

6. Finden Sie die Kraft $\mathbf{F}_C$, die senkrecht auf dem Stab AC gerichtet ist, so dass sich das System in Ruhe befindet. *[2 Punkte]*

Wir finden die Geschwindigkeit im Punkt F als

$$\mathbf{v}_F = \sqrt{2}a\omega \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$\mathbf{F}_C = F_C \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \tag{9}$$

!

Nun können wir den PdvL anwenden:

$$\tilde{P} = \mathbf{F}_C \cdot \mathbf{v}_C + \mathbf{F}_F \cdot \mathbf{v}_F = 0 \tag{10}$$

$$F_C \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3}a\omega \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} + F \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \omega a\sqrt{2} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = 0 \tag{11}$$

$$F_C \frac{\sqrt{2}}{3}a\omega + F\omega a = 0 \tag{12}$$

$$\Rightarrow \quad F_C = -\frac{3}{\sqrt{2}}F \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}_C = \frac{3}{\sqrt{2}}F \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{3}{2}F \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Viele haben die Aufgabe so gelöst:

für die Ruhelage muss gelten: $\vec{R} = 0$, $\vec{M} = 0$. $\vec{F}_C = \begin{pmatrix} F_{Cx} \\ F_{Cy} \end{pmatrix}$, $\vec{F}_F = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} F$

$$\Rightarrow \vec{R} = \vec{F}_C + \vec{F}_F = \begin{pmatrix} F_{Cx} \\ F_{Cy} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} F = \begin{pmatrix} F_{Cx} \\ F_{Cy} - F \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow F_{Cx} = 0, \; F_{Cy} = F \quad \Rightarrow \vec{F}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix}$$

Warum ist das falsch?

Hauptsatz der Statik:

In einer Ruhelage eines Systems müssen alle (äusseren) Kräfte im Gleichgewicht sein:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{0} \text{ und } \boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{0}. \tag{2.16}$$

Beweis:

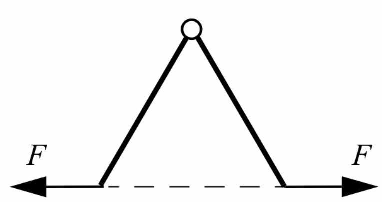
Wir betrachten virtuelle Starrkörperbewegungen mit Kinematen der Form $\{\tilde{\boldsymbol{v}}_O, \tilde{\boldsymbol{\omega}}\}$. Aus dem PdvL (2.15) schliessen wir, dass in einer Ruhelage

$$\tilde{\mathcal{P}} = \boldsymbol{R} \cdot \tilde{\boldsymbol{v}}_O + \boldsymbol{M}_O \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}} = 0, \; \forall \{\tilde{\boldsymbol{v}}_O, \tilde{\boldsymbol{\omega}}\}$$

gelten muss. Dabei können $\tilde{\boldsymbol{v}}_O$ und $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ unabhängig voneinander frei gewählt werden. Wenn jeweils nur eine Komponente verschieden von null gesetzt wird, so kann auf das Verschwinden der entsprechenden Komponente von $\boldsymbol{R}$ und $\boldsymbol{M}_O$ geschlossen werden. ■

!

☞ *Achtung:* Dieser Satz ist für Systeme (und deformierbare Körper) nur eine *notwendige* Bedingung, d.h.: die Bedingung kann erfüllt sein, ohne dass das System in Ruhe sein muss. Die skizzierten Kräfte am «Zirkel» sind im Gleichgewicht, aber der Mechanismus wird sich bewegen.



Für einen *starren Körper* gilt auch die Umkehrung des Hauptsatzes der Statik. Der Beweis dieses Satzes mit Hilfe des PdvL ist aber sehr aufwendig. Wir behelfen uns deshalb mit einem Zusatzpostulat zum PdvL, welches einen einfachen Beweis des Satzes erlaubt.

Warum wird es in der MuLö mit dem PdvL gelöst?

Prinzip der virtuellen Leistungen (PdvL):

Ein System befindet sich genau dann in einer Ruhelage, wenn die virtuelle Gesamtleistung der inneren und äusseren Kräfte bei jedem virtuellen Bewegungszustand verschwindet (und die Eigenschaften des Systems und seiner Lagerung diese Kräfte zulassen).

$\Leftrightarrow$ (d.h. diese Bedingung ist notwendig & hinreichend.

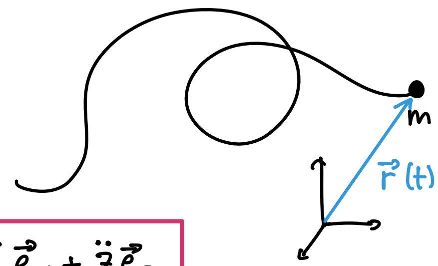
Man hätte auch die KB und MB für alle drei SK einzeln (d.h. insgesamt 9 Gleichungen) aufstellen & auflösen können. Doch das wäre hier sehr kompliziert geworden (man hätte auch alle Bindungskräfte berücksichtigen müssen usw.) & ehrlich gesagt fast unmöglich.

$\rightarrow$ PdvL geht sehr schnell & einfach in diesem Fall! :)

1. Beschleunigung:

Die Beschleunigung gibt an, wie schnell sich die Geschwindigkeit eines Körpers ändert. Sie ist die Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit (bzw. 2 Ableitung der Bewegungsfkt.)

$$\boxed{\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)}$$



In kartesischen Koordinaten: $\boxed{\vec{a} = \ddot{x}\,\vec{e}_z + \ddot{y}\,\vec{e}_y + \ddot{z}\,\vec{e}_z}$

In ebenen Polarkoordinaten: $\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$

$$\boxed{\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\,\vec{e}_\varphi + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\,\vec{e}_\varphi}$$

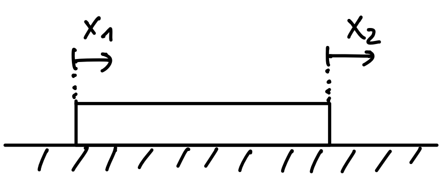
Falls r konstant ist:
(z.B. bei einem Pendel)

$$\dot{\vec{\rho}} = \ddot{\vec{\rho}} = 0$$

$$\boxed{\vec{a} = -\rho\dot{\varphi}^2\vec{e}_\rho + \rho\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi}$$

2. kinematische Relationen

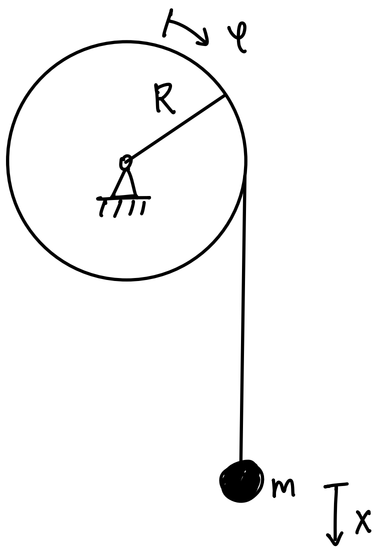
Wenn wir mehr Koordinaten haben als Freiheitsgrade, sind die Koordinaten voneinander abhängig. Man sagt, dass diese Koordinaten eine kinematische Relation haben. Unsere Aufgabe ist es, Gleichungen aufzustellen, welche diese Relationen beschreiben:



$$x_1 = x_2$$

Oft treten kinematische Relationen bei Rollen auf:

Allgemein:



$$\boxed{x = R \cdot \varphi}$$

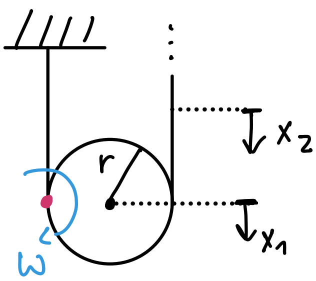
Bem: $\boxed{\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \omega}$

ω = Kreisfrequenz $= 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \dot{\varphi}$

$\hat{=}$ Rotationsgeschwindigkeit

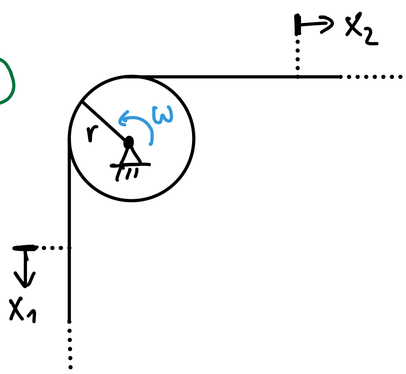
Beispiele: Bestimme die kinematischen Relationen:

1



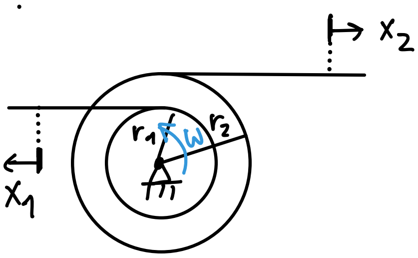
$$\omega = \frac{\dot{x}_1}{r} = \frac{\dot{x}_2}{2r} \Rightarrow \dot{x}_2 = 2\dot{x}_1$$

2



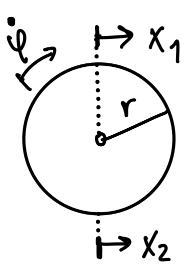
$$\omega = \frac{\dot{x}_1}{r} = -\frac{\dot{x}_2}{r} \Rightarrow \dot{x}_1 = -\dot{x}_2$$

3



$$\omega = \frac{\dot{x}_1}{r_1} = -\frac{\dot{x}_2}{r_2} \Rightarrow \dot{x}_2 = -\frac{r_2}{r_1}\dot{x}_1$$

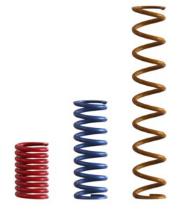
4



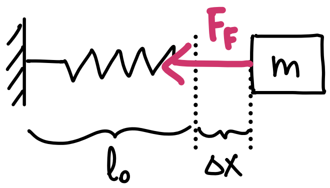
$$\dot{x}_2 = \dot{x}_1 - r\dot{\varphi}$$

3. Feder

Wir zeichnen sie so

Eine Feder ist ein Bauteil, dass sich elastisch verformen lässt:  

Wenn sie gezogen / gedrückt wird, übt sie eine Kraft in die entgegengesetzte Richtung aus. ("Sie will in die ursprüngliche Lage zurück"). Diese Kraft kann man nach dem Hookeschen Gesetz bestimmen:

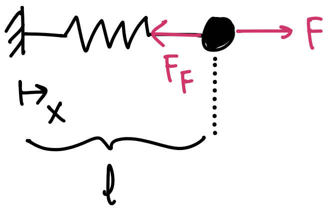


$$\boxed{F_{Feder} = \pm k \cdot \Delta x}$$

Vorzeichen: je nach dem in welche Richtung man das Pfeil eingezeichnet hat.

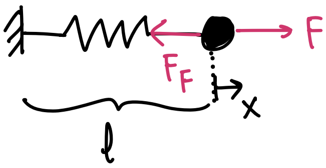
k: Federkonstante: gibt an, wie "steif" eine Feder ist (gegeben).
Δx: Auslenkung

Aufpassen, wo die Ruhelage und wo die Koordinate ist:



Ruhelage bei $x=0$ $\rightarrow$ $F_F = k \cdot x$

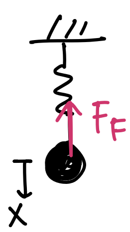
Ruhelage bei $x=\ell$ $\rightarrow$ $F_F = k \cdot (x-\ell)$



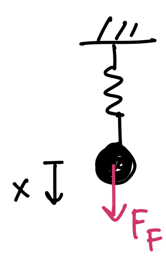
Ruhelage bei $x=-\ell$ $\rightarrow$ $F_F = k \cdot (\ell + x)$

Ruhelage bei $x=0$ $\rightarrow$ $F_F = k \cdot x$

Aufpassen mit dem Vorzeichen:

Ruhelage bei $x=0$: 

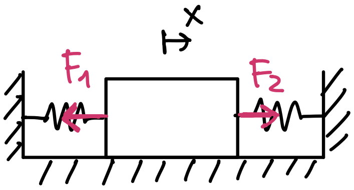
$F_F = k \cdot x$



$F_F = -kx$

Beispiele: Im folgenden haben alle Feder die Federkonstante k.

①

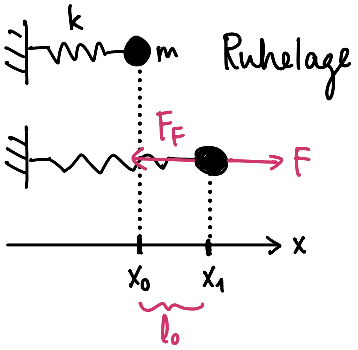


$F_1 = kx$

$F_2 = -kx$

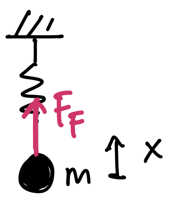
beide Feder sind in ihrer Ruhelage.

②

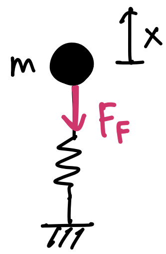


$F_F = k\cdot(x_1 - x_0) = k\cdot l_0$

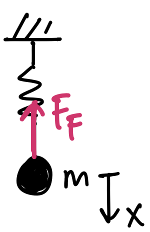
③ alle sind in Ruhelage



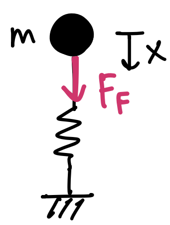
$F_F = -kx$



$F_F = kx$



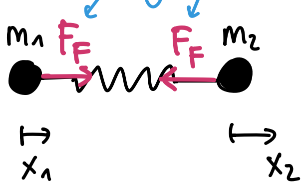
$F_F = +kx$



$F_F = -kx$

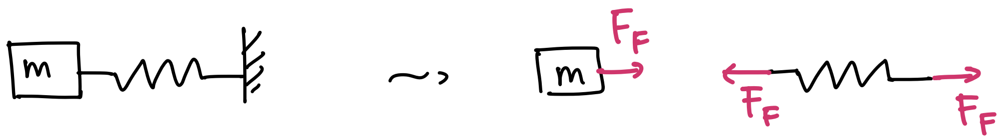
④

wegen dem Reaktionsprizip auf beide Seiten gleich!



$F_F = k\cdot(x_2 - x_1)$

Wichtig! : Beim Freischneiden einer Feder sind die Kräfte auf ihre beiden Enden gleich gross (wegen dem Reaktionsprinzip von Newton)



Wichtig!: Federn verringern den Freiheitsgrad eines Systems <u>nicht</u>.

4. Impuls

Der Impuls ist folgendermassen definiert: $\boxed{\vec{p} = m \cdot \vec{v}}$

Sie beschreibt die "Wucht" oder der "Schwung" eines Körpers.

5. Das Newton'sche Bewegungsgesetz ($\hat{=}$ Impulssatz)

In der Dynamik sind die Körper im Gegensatz zur Statik nicht in Ruhe, sondern bewegen sich. Daher führen wir neue Gleichung ein:

$$\boxed{m\vec{a} = \vec{R}} \quad \text{oder} \quad \boxed{\frac{d}{dt} m\vec{v} = \dot{\vec{p}} = \vec{R}}$$

m: Masse

$\vec{a}$ = Beschleunigung

$\vec{R}$ = Resultierende, $\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i$

$\vec{p} = m\vec{v}$ = Impuls

und der Drallsatz: $\boxed{\vec{M}_0 = \dot{\vec{L}}_0}$ (nächste Woche genauer)

Diese Gleichungen heissen Bewegungsgleichung und es sind Differenzialgleichungen. Da es sich um physikalische Systeme handelt, haben diese Gleichungen auch gewisse Anfangsbedingungen:

$$\boxed{\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}}$$

($\hat{=}$ Werte zum Zeitpunkt t=0)

Diese werden wir auch brauchen, um die DGL's komplett lösen zu können.

Bem: Falls mehrere Körper/Massepunkte gegeben sind, muss man für jeden Massepunkt das Newton'sche Bewegungsgesetz und Anfangsbedingungen aufstellen.

6. Differenzialgleichungen

→ "Crash Course DGL" auf meine Webseite anschauen :)

Um diese DGL's zu lösen gibt es Lösungsansätze, die in der Prüfung meistens gegeben sind.

Der folgende Ansatz kommt sehr häufig vor:

die Werte vor dem x einfach mit ω^2 ersetzen

Falls die DGL in diese Form umgeformt werden kann: $\boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = g}$ $\quad g \in \mathbb{R}$

nichts vor der 2. Ableitung

⚠ ω ist die Kreisfrequenz

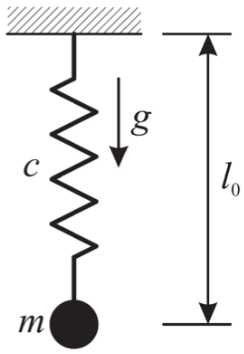
Dann löst dieser Ansatz die DGL: $\boxed{x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) + \frac{g}{\omega^2}}$

Wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ Konstanten sind, die durch das Einsetzen der Anfangsbedingungen bestimmt werden müssen. g und ω sind Konstanten, die durch die DGL bestimmt sind. Nach dem Bestimmen von c_1 und c_2 können wir die Werte für ω und g einsetzen und das ist unsere Lösung :)

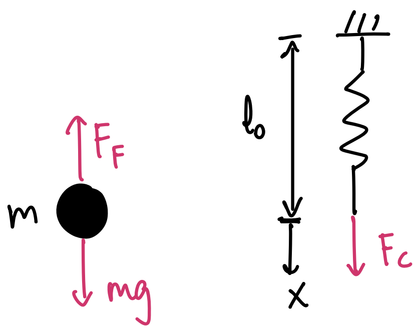
↳ Schauen wir uns das anhand eines Beispiels an!

Beispielaufgabe: Serie 11, Aufgabe 1

1. [1] Ein Massenpunkt (Masse m) hängt an einer Feder. Diese ist in vertikaler Lage am oberen Ende befestigt. Die Federkonstante ist c und die Feder besitzt die ungespannte Länge l_0 . Finde die Bewegung des Massenpunktes, wenn dieser bei ungespannter Feder aus der Ruhe losgelassen wird.



1. Nehmen Sie an, dass die Feder während der Bewegung vertikal bleibe und führen Sie in einer allgemeinen Lage die Kräfte am Massenpunkt ein.



l_0: Länge der ungespannten Feder

2. Formulieren Sie das Newtonsche Bewegungsgesetz und finden Sie die Bewegungsdifferentialgleichung.

$$m\ddot{x} = mg - F_F$$

mit $F_F = cx$ (Feder ist ungespannt wenn $x = 0$)

$$\Rightarrow m\ddot{x} = mg - cx$$

$$\Leftrightarrow m\ddot{x} + cx = mg \quad / \div m$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{c}{m}x = g$$

Tipp: die höchste Ableitung Koeffizientenfrei machen.

3. Formulieren Sie das Anfangswertproblem für die Bewegung des Massenpunktes.

DGL: $\ddot{x} + \frac{c}{m}x = g$

Anfangswerte: $\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$ (wird aus der Ruhe losgelassen (Ruhe = Geschwindigkeit 0))

4. Bestimmen Sie die Bewegung des Massenpunktes. Dieser führt eine Schwingung aus. Wie gross sind die Amplitude und die Kreisfrequenz dieser Schwingung?

Schnelle Methode:

DGL: $m\ddot{x} + cx = mg \quad / \div m$

$\ddot{x} + \frac{c}{m}x = g \quad$ / definiere $\boxed{\omega^2 = \frac{c}{m}}$

$\ddot{x} + \omega^2 x = g \quad$ / DGL hat die Form wie oben gezeigt!

Wir wenden den Ansatz $x(t) = c_1\cos(\omega t) + c_2\sin(\omega t) + \frac{g}{\omega^2}$ an:

Anfangsbedingungen einsetzen: $x(0) = c_1\cos(0) + c_2\sin(0) + \frac{g}{\omega^2} = c_1 + \frac{g}{\omega^2} \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow c_1 = -\frac{g}{\omega^2}$

$\dot{x}(0) = -\omega c_1\sin(0) + \omega c_2\cos(0) = \omega c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

Unsere Lösung ist also $x(t) = -\frac{g}{\omega^2}\cos(\omega t) + \frac{g}{\omega^2}$

$= \frac{g}{\omega^2}(1 - \cos(\omega t))$ / wir setzen wieder $\omega^2 = \frac{c}{m} \Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$ ein (Bem: $\omega \geq 0$)

$= \frac{mg}{c}\left(1 - \cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}}\,t\right)\right)$

Amplitude: $-\frac{mg}{c}$ Kreisfrequenz: $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$

Bem: $x(t) = A\cos(\omega t)$

Amplitude (A), Kreisfrequenz (ω) kann man aus der Gleichung ablesen.

Ausserdem: i.A. ist $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}}$ die Kreisfrequenz bei einen Federschwinger.

Ausführliche Methode:

unser AWP: $\begin{cases} \ddot{x}(t) + \frac{c}{m}x(t) = g & \leftarrow \text{DGL} \\ x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0 & \leftarrow \text{Anfangsbedingungen} \end{cases}$

1) als erstes schauen wir uns die entsprechende homogene Gleichung an:

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}x = 0$$

Ansatz: $x(t) = e^{\lambda t}$ in DGL einsetzen:

$$(e^{\lambda t})'' + \frac{c}{m}e^{\lambda t} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 e^{\lambda t} + \frac{c}{m}e^{\lambda t} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\lambda^2 + \frac{c}{m}\right)e^{\lambda t} = 0$$

$$\Rightarrow \text{Chp}(\lambda): \lambda^2 + \frac{c}{m} = 0$$

Schwingungsfrequenz

wir definieren: $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}}$

werdet ihr in Physik 1 genauer sehen warum

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + \omega^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 = -\omega^2$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{\underbrace{-\omega^2}_{<0\,!}} = \pm i\sqrt{\omega^2} = \pm i\omega$$

$\rightarrow \lambda$ ist komplex.

Das Fundamentalsystem ist also: $Ae^{+i\omega t}$, $Be^{-i\omega t}$

$$\Rightarrow x_h(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}$$

$$= A\cdot(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)) + B(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t))$$

$$= (A+B)\cos(\omega t) + i(A-B)\sin(\omega t) \quad / \text{ definiere } \tilde{A} = A+B, \ \tilde{B} = i(A-B) \quad \text{beide} \in \mathbb{R}$$

$$= \tilde{A}\cos(\omega t) + \tilde{B}\sin(\omega t)$$

(weil wir sind nur an reelle Lösungen interessiert (es beschreibt ein physikalisches System!))

2) partikuläre Lösung bestimmen

Inhomogenität: g $\longrightarrow$ Ansatz: $x_p(t) = \alpha \in \mathbb{R}$

in DGL einsetzen: $(\alpha)'' + \frac{c}{m}\alpha = g$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{m}\alpha = g \quad \Rightarrow \alpha = \frac{mg}{c}$$

3) allgemeine Lösung: $x(t) = x_h(t) + x_p(t) = \tilde{A}\cos(\omega t) + \tilde{B}\sin(\omega t) + \frac{mg}{c}$

4) Mittels AB die Koeffizienten $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ bestimmen:

$$x(0) = \tilde{A} + \frac{mg}{c} = 0 \quad \Rightarrow \tilde{A} = -\frac{mg}{c}$$

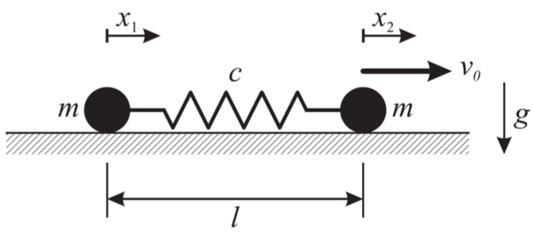
$$\dot{x}(0) = \tilde{B} = 0$$

$\Rightarrow$ Lösung: $x(t) = -\frac{mg}{c}\cos(\omega t) + \frac{mg}{c} = \frac{mg}{c}\cdot\left(1 - \cos(\omega t)\right) \quad / \omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$

$$\underline{\underline{x(t) = \frac{mg}{c}\cdot\left(1 - \cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}}\, t\right)\right)}}$$

Teil 3: Übungsaufgaben – Serie 11

2. [2] Zwei Massenpunkte (Masse m) befinden sich auf einer reibungsfreien Horizontalebene und sind durch eine Feder (Federkonstante c, ungespannte Länge l) verbunden. Zur Zeit $t = 0$ (siehe Skizze) ist die Feder ungespannt, der linke Massenpunkt in Ruhe und der rechte Massenpunkt bewegt sich mit der Schnelligkeit v_0 .



1. Formulieren Sie für beide Massen einzeln das Newtonsche Gesetz.
2. Bestimmen Sie die Bewegung der beiden Massenpunkte für die gegebenen Anfangsbedingungen.
3. Berechnen Sie die Federkraft in Funktion der Zeit.

Tipp: Die Bewegungsdifferentialgleichungen vereinfachen sich, wenn man die neuen Koordinaten $q_1 = x_1 + x_2$, $q_2 = x_2 - x_1$ verwendet.

1. Formulieren Sie für beide Massen einzeln das Newtonsche Gesetz.

Freischnitt:

$$m\ddot{x}_1 = F_c$$

$$m\ddot{x}_2 = -F_c$$

w. $F_c = k\cdot(x_2 - x_1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x}_1 = k\cdot(x_2 - x_1) \\ m\ddot{x}_2 = k\cdot(x_1 - x_2) \end{cases}$$

Bem: diese DGL sind gekoppelt! (x_1 und x_2 in den Gleichungen)

2. Bestimmen Sie die Bewegung der beiden Massenpunkte für die gegebenen Anfangsbedingungen.

Anfangsbedingungen: $x_1(0)=0 \qquad \dot{x}_1(0)=0$

$x_2(0)=0 \qquad \dot{x}_2(0)=v_0$

DGL: $\begin{cases} m\ddot{x}_1 = k\cdot(x_2-x_1) \\ m\ddot{x}_2 = k\cdot(x_1-x_2) \end{cases}$

Verwende Tipp: $q_1 = x_1 + x_2$

$q_2 = x_2 - x_1$

$\longrightarrow \; m\ddot{x}_1 + m\ddot{x}_2 = k\cdot(x_2-x_1) + k\cdot(x_1-x_2)$

$\Leftrightarrow \; m\cdot(\ddot{x}_1+\ddot{x}_2) = \cancel{kx_2} - \cancel{kx_1} + \cancel{kx_1} - \cancel{kx_2} \quad = 0$

$\Leftrightarrow \; m\ddot{q}_1 = 0 \qquad \Leftrightarrow \; \ddot{q}_1 = 0$

$\longrightarrow \; m\ddot{x}_2 - m\ddot{x}_1 = k\cdot(x_1-x_2) - k\cdot(x_2-x_1)$

$\Leftrightarrow \; m(\ddot{x}_2-\ddot{x}_1) = kx_1 - kx_2 - kx_2 + kx_1 \quad = 2kx_1 - 2kx_2 = -2k\cdot(x_2-x_1)$

$\Leftrightarrow \; m\ddot{q}_2 = -2kq_2$

$\Leftrightarrow \; m\ddot{q}_2 + 2kq_2 = 0 \qquad / \div m$

$\Leftrightarrow \; \ddot{q}_2 + \frac{2k}{m} q_2 = 0 \qquad$ / definiere $\boxed{\omega := \sqrt{\frac{2k}{m}}}$

$\Leftrightarrow \; \ddot{q}_2 + \omega^2 q_2 = 0$

neue DGL: $\begin{cases} \ddot{q}_1 = 0 & \cdots (1) \\ \ddot{q}_2 + \omega^2 q_2 = 0 & \cdots (2) \end{cases}$ $\longrightarrow$ entkoppelt! :)

neue Anfangsbedingungen: $q_1(0) = x_1(0) + x_2(0) = 0 \qquad \dot{q}_1(0) = x_1(0) + \dot{x}_2(0) = v_0$

$q_2(0) = x_2(0) - x_1(0) = 0 \qquad \dot{q}_2(0) = \dot{x}_2(0) - \dot{x}_1(0) = v_0$

Wir lösen nach q_1 und q_2 und machen am Schluss eine Rücktransformation um x_1 und x_2 zu bestimmen.

①: $\ddot{q}_1 = 0 \rightarrow \int \ddot{q}_1 \, dt = \int 0 \, dt$

$\Leftrightarrow \int \dot{q}_1 \, dt = \int c \, dt$

$q_1 = Ct + D$ w. $C, D \in \mathbb{R}$

Anfangsbedingungen: $q_1(0) = D = 0$

$\dot{q}_1(0) = C = v_0$ $\Rightarrow q_1(t) = v_0 t$

②: $\ddot{q}_2 + \omega^2 q_2 = 0$ ← harmonische Schwingung! (sogar homogen :))

Ansatz: $q_2(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$ ⊛ Warum?

Check, dass dieser Ansatz die DGL wirklich löst:

$$(C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t))'' + \omega^2 (C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cancel{-\omega^2 C_1 \cos(\omega t)} - \cancel{\omega^2 C_2 \sin(\omega t)} + \cancel{\omega^2 C_1 \cos(\omega t)} + \cancel{C_2 \omega^2 \sin(\omega t)} = 0$$

✓ Ansatz löst die DGL tatsächlich.

Anfangsbedingungen: $q_2(0) = C_1 \overbrace{\cos(0)}^{1} + C_2 \overbrace{\sin(0)}^{0} = C_1 = 0$

$\dot{q}_2(0) = -\omega \underbrace{\cancel{C_1 \sin(0)}}_{0} + \omega C_2 \cos(0) = \omega C_2 = v_0 \Rightarrow C_2 = \frac{v_0}{\omega}$

$\Rightarrow q_2(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)$

Wir haben also: $\begin{cases} q_1(t) = v_0 t \\ q_2(t) = \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t) \end{cases}$

Rücktransformation: Wir hatten: $q_1 = x_1 + x_2$

$q_2 = x_2 - x_1$

$$\Rightarrow q_1 - q_2 = x_1 + x_2 - x_2 + x_1 = 2x_1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(q_1 - q_2) = x_1$$

$$\Rightarrow q_1 + q_2 = x_1 + x_2 + x_2 - x_1 = 2x_2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(q_1 + q_2) = x_2$$

Schlussendlich haben wir:

$$x_1(t) = \frac{1}{2}\cdot(q_1 - q_2) = \underline{\underline{\frac{1}{2}\cdot\left(v_0 t - \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)\right)}}$$

$$x_2(t) = \frac{1}{2}(q_1 + q_2) = \underline{\underline{\frac{1}{2}\cdot\left(v_0 t + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)\right)}}$$

mit $\omega = \sqrt{\frac{2c}{m}}$

3. Berechnen Sie die Federkraft in Funktion der Zeit.

$$F_c = c\cdot(x_2 - x_1) = c\cdot\frac{1}{2}(q_1 + q_2 - q_1 + q_2) = c\cdot q_2 = \underline{\underline{c\cdot\frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)}} \quad \text{w. } \omega = \sqrt{\frac{2c}{m}}$$

⊛ Warum der Ansatz $q_2(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$ für die DGL $\ddot{q}_2 + \omega^2 q_2 = 0$?

Wir haben hier eine lineare gewöhnliche DGL mit konstanten Koeffizienten.

Wir machen den Euler-Ansatz: $q_2(t) = e^{\lambda t}$ und setzen diesen Ansatz in die DGL ein:

$$(e^{\lambda t})'' + \omega^2 e^{\lambda t} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 e^{\lambda t} + \omega^2 e^{\lambda t} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda^2 + \omega^2) e^{\lambda t} = 0 \quad / \ \forall t \ !$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + \omega^2 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 = -\omega^2$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{-\omega^2} = \pm \sqrt{-1} \cdot \sqrt{\omega^2} = \pm i\omega$$

Fundamentalsystem der DGL: $e^{+i\omega t}, e^{-i\omega t}$

also ist $q_1(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}$ / in KomA: $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$

$e^{-i\omega t} = \cos(\omega t) - i\sin(\omega t)$

$$= A(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)) + B(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t))$$

$$= (A+B)\cos(\omega t) + i(A-B)\sin(\omega t) \quad / \ \tilde{A} := A + B \quad \tilde{B} := i(A-B)$$

w. $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathbb{R}$

$$q_1(t) = \tilde{A}\cos(\omega t) + \tilde{B}\sin(\omega t)$$

Ist genau der Ansatz, den wir vorher verwendet haben!

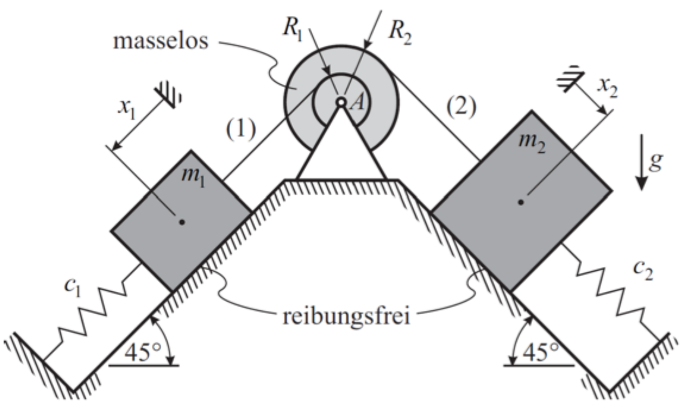
i.A.: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \rightarrow$ Ansatz: $A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ w. $A, B \in \mathbb{R}$

$\ddot{x} + \omega^2 x = D$ w. $D \in \mathbb{R}$ $\rightarrow$ Ansatz: $A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) + C$ w. $A, B, C \in \mathbb{R}$

mit Anfangsbedingungen bestimmen!

3. [3] Zwei Körper mit den Massen m_1 bzw.m_2 sind gemäss Skizze mit einem Seil über eine masselose Doppelrolle mit den Radien R_1 und R_2 verbunden. Beide Körper sind mittels zweier Federn mit den Federsteifigkeiten c_1 bzw.c_2 an einer Wand befestigt. Beide Körper gleiten reibungsfrei entlang zweier um 45° geneigter Ebenen. Die Federn seien im Anfangszustand ($x_1 = 0,\ x_2 = 0$) ungespannt.

gute Aufgabe!



1. Bestimmen Sie den Freiheitsgrad des Systems.

2. Schneiden Sie beide Körper und die Rolle frei und führen Sie alle wirkenden Kräfte ein.

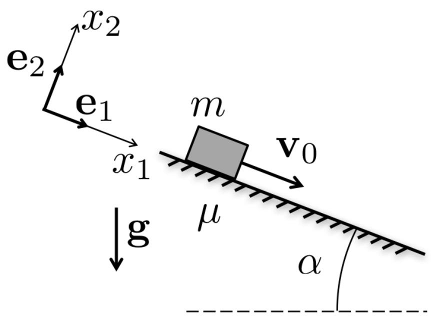
3. Stellen Sie die Gleichgewichtsbedingungen für die Rolle auf und bestimmen Sie den Zusammenhang zwischen den Seilkräften in den Seilabschnitten (1) und (2).

4. Formulieren Sie die Beziehungen zwischen den Federkräften und den gegeben Koordinaten und stellen Sie die Bewegungsdifferentialgleichungen der beiden Körper bezüglich der gegebenen Koordinaten auf, ohne sie zu lösen.

5. Bestimmen Sie die kinematische Relation zwischen den Koordinaten x_1 und x_2.

6. Es gelten die Verhältnisse: $m_2/m_1 = 1/2$, $R_2/R_1 = 2$ und $c_2/c_1 = 2$. Eliminieren Sie alle unbekannten Kräfte aus den Gleichungen und reduzieren Sie das Gleichungssystem auf möglichst wenige Gleichungen

4. Ein Block der Masse m gleitet entlang einer rauen schiefen Ebene mit dem Gleitreibungskoeffizienten μ und dem Neigungswinkel α. Der Block erhält zum Zeitpunkt t_0 eine Anfangsgeschwindigkeit $\mathbf{v}_0$ in Richtung $\mathbf{e}_1$.



Wie viel Zeit t_s braucht der Block, um zu einem Halt zu kommen?

(a) $t_s = \dfrac{v_0}{g(\mu \cos\alpha - \sin\alpha)}$

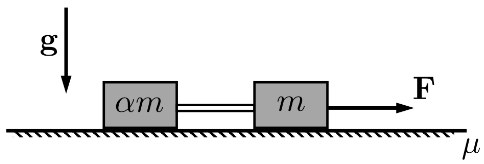
(b) $t_s = \dfrac{v_0}{g(\mu \cos\alpha + \sin\alpha)}$

(c) $t_s = \dfrac{g v_0}{(\mu \sin\alpha - \cos\alpha)}$

(d) $t_s = \dfrac{v_0}{g(\mu \sin\alpha + \cos\alpha)}$

(e) $t_s = \dfrac{v_0^2}{g(\mu \sin\alpha + \cos\alpha)}$

5. Zwei Teilchen der Masse αm und m sind durch ein starres, masseloses Stab verbunden und werden durch eine konstante Kraft $\mathbf{F}$ aus der Ruhelage gezogen. Das System gleitet auf einer horizontalen, rauen Oberfläche mit dem Gleitreibungskoeffizienten μ. Die Schwerkraft wirkt nach unten. Bezeichnen Sie mit T den Betrag der Zugkraft im Stab während des Gleitens.



Für welchen Wert von α gilt $T = \frac{1}{3}F$?

(a) $\alpha = 3$

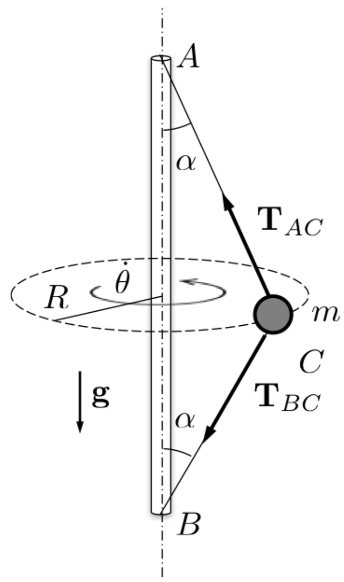
(b) $\alpha = \sqrt{2}$

(c) $\alpha = \dfrac{2}{3}$

(d) $\alpha = 1$

(e) $\alpha = \dfrac{1}{2}$

6. Die Seile AC und BC verbinden eine Kugel der Masse m mit einer senkrechten Welle, wie gezeigt. Die Schwerkraft wirkt nach unten. Wenn die Welle mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\dot{\theta}$ rotiert, bewegt sich die Kugel auf einem horizontalen Kreis, wobei die Seile unter einem Winkel α zur Welle geneigt sind. Die Spannungen in den Seilen werden mit $\mathbf{T}_{AC}$ und $\mathbf{T}_{BC}$ bezeichnet.



Was ist der minimale Wert von $\dot{\theta}$, so dass das Seil BC entspannt wird (d.h. $|\mathbf{T}_{BC}| = 0$)?

(a) $\dot{\theta} = \sqrt{\dfrac{4g}{3R}\cos^2\alpha}$

(b) $\dot{\theta} = \sqrt{\dfrac{g}{R}\tan\alpha}$

(c) $\dot{\theta} = 0$

(d) $\dot{\theta} = \sqrt{\dfrac{2g}{R}\sin\alpha}$

(e) $\dot{\theta} = \sqrt{\dfrac{3g}{R}\cos\alpha}$