Technische Mechanik

# Übung 12

21.12.2021
Lina De Windt

## Themen von Heute:

> Teil 1: Fragen zu Themen / Aufgaben von letzter Woche?

> Teil 2: Recap der Theorie für die aktuelle Serie:

1. Massenmittelpunktsatz
2. Bewegungen von rotierenden Körpern beschreiben:
   - 2.1 Drall
   - 2.2 Drallsatz
   - 2.3 Drallsatz für ebene Rotationen von Starrkörpern
   - 2.4 Massenträgheitsmoment ($\hat{=}$ Inertialmoment)
3. Zusammenfassung der heutigen Theorie & allg. Vorgehen Dynamikaufgaben
4. Beispielaufgaben → 1 aus der Serie, 1 aus einer alten Prüfung

> Teil 3: Übungsaufgaben besprechen (Serie 12)

> Teil 4: Tipps für die Lernphase & Prüfung

## Teil 1: Fragen zu Themen/Aufgaben von letzter Woche?

## Teil 2: Recap der Theorie für die aktuelle Serie

Letzte Woche haben wir den Newton'schen Bewegungsgesetz kennengelernt:

$$\boxed{m\vec{a} = m\ddot{\vec{x}} = \vec{R}} \qquad (\hat{=} \text{ Impulssatz}, \ \dot{\vec{p}} = \vec{R} \quad \text{wobei } \vec{p} = m\vec{v})$$

Diese Formel gilt für alle Massepunkte. ($\hat{=}$ materieller Punkt).

Nun wollen wir auch Bewegungssätze haben, welche für beliebige starre oder deformierbare Körper gelten: der Massenmittelpunktsatz und der Drallsatz.

### 1. Massenmittelpunktsatz:

Um Bewegungen von Körpern zu beschreiben:

$$\boxed{m\vec{a}_c = \vec{R}}$$

$\vec{a}_c$: Die Beschleunigung vom Massenmittelpunkt $c$.

(Erinnerung: Massenmittelpunkt $\hat{=}$ geometrischer Schwerpunkt wenn Masse homogen)

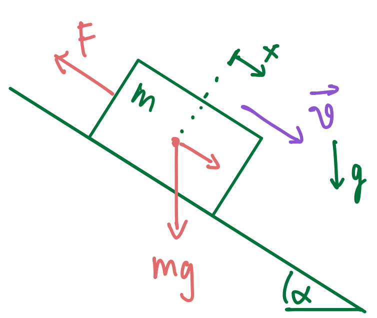
immer der Fall in TechMech :)

$\vec{R}$: Resultierende aller Kräfte (komponenten), die eine Auswirkung auf $\vec{a}_c$ haben.

Anwendung: In TechMech benutzen wir den Massenmittelpunktsatz gleich wie das Newton'sche Bewegungsgesetz. (Nur die Herleitung ist anders).

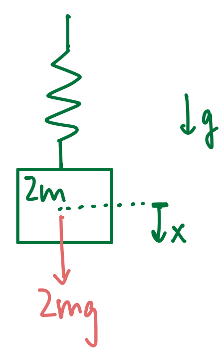
Beispiele:

1




$$m\vec{a}_c = m\ddot{x} = mg \cdot \sin(\alpha) - F$$

2

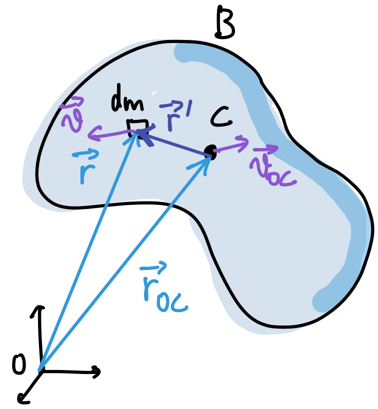



$$m\vec{a}_c = m\ddot{x} = 2mg - F_c$$

# 2. Drallsatz:

## 2.1 Drall:

Der Drall (bzw. Drehimpuls) ist eine physikalische Grösse, welche den Bewegungs-zustand eines rotierenden starren Körpers bestimmt. Sie beschreibt sozusagen den "Schwung" der Rotation. Den Drall kann man bezüglich eines inertialen Punktes (d.h. ein Punkt in Ruhe) O oder bezüglich des Massenmittelpunktes bestimmen:




Bezüglich inertialer Punkt O: $\boxed{\vec{L}_O = \iiint_B \vec{r} \times \vec{v}\, dm}$

Bezüglich Massenmittelpunkt C: $\boxed{\vec{L}_C = \iiint_B \vec{r}\,' \times \vec{v}\,'\, dm}$

keine Angst ihr müsst den Drall nie berechnen.
Es ist aber gut zu wissen wie sie definiert ist :)

mit $\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{r}_{OC}$

$\vec{v}\,' = \vec{v} - \vec{v}_{OC}$

### Transformationsregel für den Drall:

Wie beim Moment gibt es für den Drall auch eine Transformationsregel:

$$\boxed{\vec{L}_O = \vec{r}_C \times \vec{p} + \vec{L}_C}$$

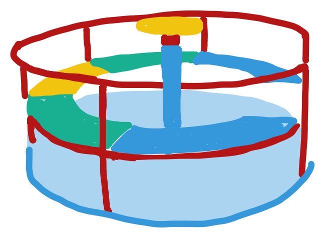
Drall bezüglich O
($\hat{=}$ Punkt in Ruhe)

Drall bezüglich Massenmittelpunkt

## 2.2 Drallsatz:

Der Drallsatz ist ein physikalisches Gesetz, das besagt, dass zur Änderung des Drehimpulses eines Körpers ein Drehmoment an ihm aufgebracht werden muss.

z.B. Wenn wir ein Spielplatzkarussel haben:



Um diesen Karussel in Drehung zu versetzen, muss man es anstossen (≙ ein Moment aufbringen, das den Karussel Drehimpuls zuführt). Um die Drehung aufzuhören muss man wieder ein Moment in Gegenrichtung aufbringen, um den Drehimpuls zu verändern und es zum anhalten zu bringen. (Das machen in der realen Welt Reibungsmomente im Lager und der Luftwiderstand).

Die mathematische Formulierung dieses Gesetzes lautet wie folgt:

zeitliche Ableitung!

Drallsatz bezüglich des inertialen Punktes O: $\boxed{\dot{\vec{L}}_O = \vec{M}_O^{tot}}$

Drallsatz bezüglich des Massenmittelpunktes C: $\boxed{\dot{\vec{L}}_C = \vec{M}_C^{tot}}$

(≙ relativer Drallsatz)

Bem: Den Drallsatz kann man "nur" bezüglich 2 Punkte aufstellen!

## 2.3 Drallsatz für ebene Rotationen von Starrkörpern:

Herleitung im Skript oder Vorlesung

d.h. 2D

Bei ebenen Rotationen kann der Drall und folglich auch der Drallsatz vereinfacht werden:

Inertialpunkt (≙ Punkt in Ruhe)

Drallsatz bezüglich $O$: $\boxed{\dot{L}_O = I_O\dot{\omega} = I_O\ddot{\varphi} = M_O^{tot}}$ (Drall: $\boxed{L_O = I_O\omega}$)

Massenmittelpunkt

Drallsatz bezüglich $C$: $\boxed{\dot{L}_C = I_C\dot{\omega} = I_C\ddot{\varphi} = M_C^{tot}}$ (Drall: $\boxed{L_C = I_C\omega}$)

wobei $I_O$ bzw. $I_C$ der Massenträgheitsmoment ist.

⚠ Der Drall und das Moment müssen in dieselbe Richtung positiv gerechnet werden.

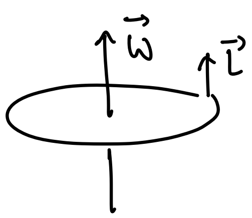
## 2.4 Massenträgheitsmoment (≙ Inertialmoment):

bezüglich $O$: $\boxed{I_O = \iint_B r^2\, dm}$

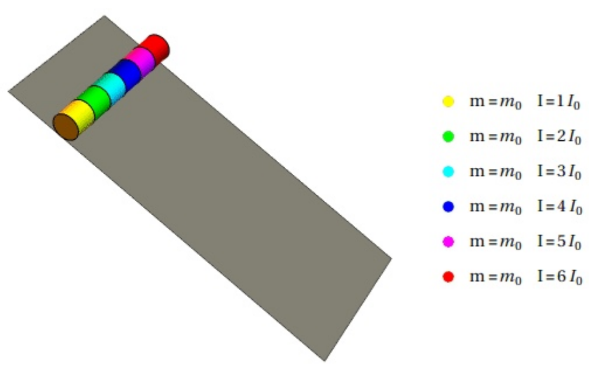
bezüglich $C$: $\boxed{I_C = \iint_B r'^2\, dm}$

keine Angst, müsst ihr nie berechnen in TechMech

Sie gibt die Trägheit eines starren Körpers gegenüber einer Änderung seiner Rotationsgeschwindigkeit bei der Drehung um eine gegebene Achse an. Sie ist abhängig von der Geometrie und Masse des Körpers.




$I = \frac{L}{\omega}$

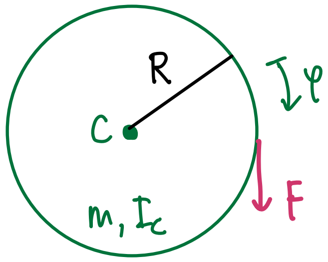



Bem: Das Massenträgheitsmoment ist bei einer ebenen SK-Bewegung konstant.

↳ Grund warum wir aus dem Drall $L_O = I_O\omega$ den Drallsatz $\dot{L}_O = I_O\dot{\omega}$ erhalten :)

Beispiele:

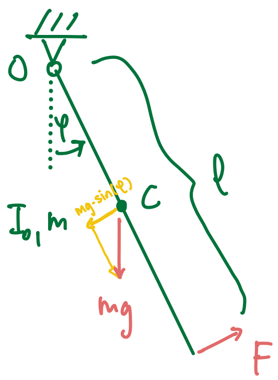
① 




$$\dot{L}_c = I_c\ddot{\varphi} = M_c = RF$$

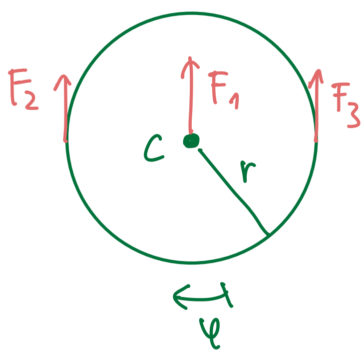
Drall und Moment in <u>dieselbe Richtung</u> positiv rechnen!

② 




$$\dot{L}_0 = I_0\ddot{\varphi} = M_0 = lF - \frac{l}{2}mg\cdot\sin(\varphi)$$

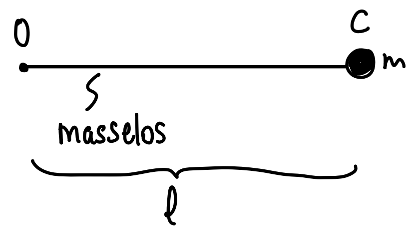
③ 




$$\dot{L}_c = I_c\ddot{\varphi} = M_c = rF_2 - rF_3$$

## Einige Massenträgheitsmomente: (in der Regel werden sie auch in der Aufgabe angegeben)

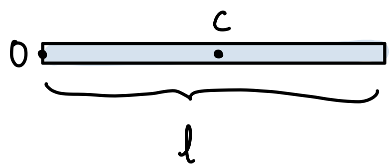
Massenpunkt:




$I_c = 0$

$I_0 = ml^2$

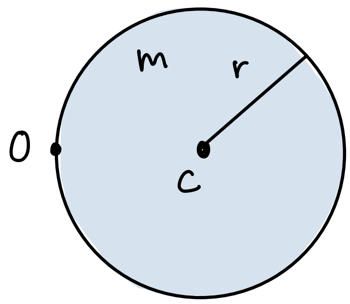
Balken:




$I_c = \frac{1}{12} ml^2$

$I_0 = \frac{1}{3} ml^2$

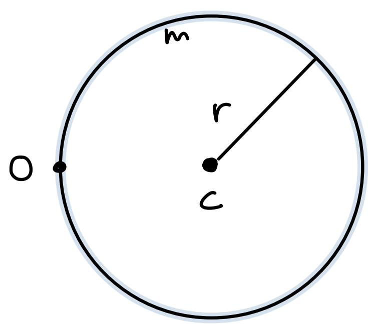
Kreisscheibe:




$I_c = \frac{1}{2} mr^2$

$I_0 = \frac{3}{2} mr^2$

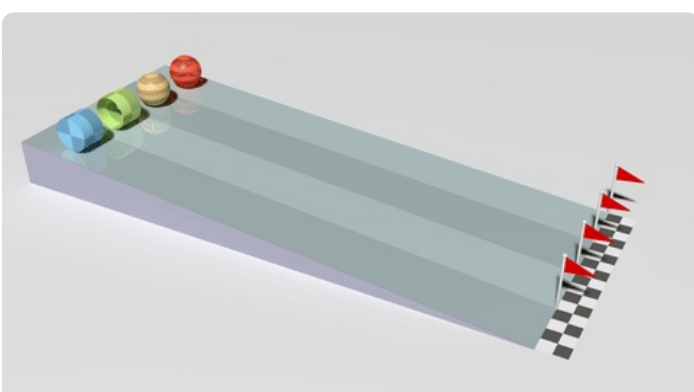
Infinitesimal dünner Ring:




$I_c = mr^2$

$I_0 = 2mr^2$

Bem: Der Massenträgheitsmoment eines aus homogenen Teilen zusammengesetzten Körpers ist die Addition der einzelnen Massenträgheitsmomente.



Four objects with identical masses and radii racing down a plane while rolling without slipping.

From back to front:
- spherical shell,
- solid sphere,
- cylindrical ring, and
- solid cylinder.

The time for each object to reach the finishing line depends on their moment of inertia. (OGV version)

# 3. Zusammenfassung der heutigen Theorie & allg. Vorgehen Dynamikaufgaben:

**Massenpunkte:** Newton'scher Bewegungsgesetz $\boxed{m\vec{a} = \vec{R}} = \dot{\vec{p}}$ auch: Impulssatz

**Starre & deformierbare Körper:**

Impulssatz: $\dot{\vec{p}} = \vec{R} \xRightarrow{m\vec{r}_c = \iiint_B \vec{r}\,dm}$ Massenmittelpunktsatz $\boxed{m\vec{a}_c = \vec{R}}$

Drallsatz:

Inertialpunkt (= Pkt. in Ruhe)

bezüglich 0 $\boxed{\dot{\vec{L}}_0 = \vec{M}_0}$ wobei $\vec{L}_0 = \iiint_B \vec{r} \times \vec{v}\, dm$

Massenmittelpunkt

bezüglich C $\boxed{\dot{\vec{L}}_c = \vec{M}_c}$ wobei $\vec{L}_c = \iiint_B \vec{r}\,' \times \vec{v}\,'\, dm$

**Ebene Rotationen von starren Körpern:**

Drallsatz:

Inertialpunkt

bezüglich 0: $\boxed{\dot{L}_0 = I_0 \dot{\omega} = I_0 \ddot{\varphi} = M_0^{tot}}$ Drall: $\boxed{L_0 = I_0 \omega}$

Massenmittelpunkt

bezüglich C: $\boxed{\dot{L}_c = I_c \dot{\omega} = I_c \ddot{\varphi} = M_c^{tot}}$ Drall: $\boxed{L_c = I_c \omega}$

in TechMech: Massenmittelpunkt = geom. Schwerpunkt

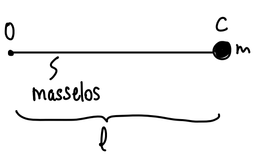
Wichtig: Der Drall und das Moment müssen in dieselbe Richtung positiv gerechnet werden.

wobei $I_0, I_c$ = Massenträgheitsmoment (≙ Inertialmoment):

bezüglich 0: $I_0 = \iint_B r^2\, dm$

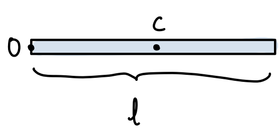
bezüglich C: $I_c = \iint_B r'^2\, dm$

**Beispiele Massenträgheitsmoment:**



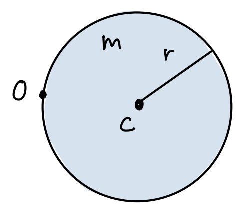

$I_c = 0$

$I_0 = m\ell^2$



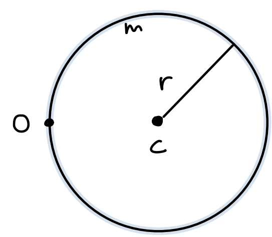

$I_c = \frac{1}{12} m\ell^2$

$I_0 = \frac{1}{3} m\ell^2$




$I_c = \frac{1}{2} mr^2$

$I_0 = \frac{3}{2} mr^2$




$I_c = mr^2$

$I_0 = 2mr^2$

# Vorgehen Dynamikaufgaben:

1. Identifiziere die allgmeine Lage, die unterschiedlichen Starrkörper und deren Verbindungen

2. Freischnittskizze für die einzelnen Starrkörper (von der allgemeinen Lage) erstellen:

   (a) Körper freischneiden und Verbindungskräfte (z.B. Seilkräfte) einführen

   (b) alle externen Kräfte einführen

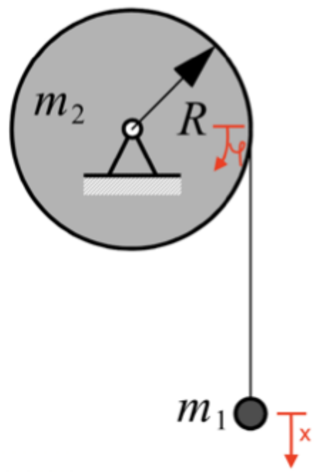
   (c) geeignetes Koordinatensystem für jeden Körper einführen. Koordinaten sollten in die Richtung zeigen, in den sich der Körper bewegen wird. Der Ursprung dieser Koordinaten sollte in der Skizze deutlich erkennbar sein (wichtig für Anfangsbedingungen).

   (d) Freiheitsgrad ermitteln, falls danach gefragt ist

3. Newtonsches Bewegungsgesetz für jeden Körper, Drallsatz für jeden *rotierenden* Körper aufstellen

$$\underline{R} = m\underline{a} \qquad \& \qquad M_O = \dot{L}_O = I_O\ddot{\varphi}$$

4. Bei System mit mehreren Körpern: Kinematische Relationen aufstellen → Zusammenhang zwischen den einzelnen Variablen der unterscheidlichen Körpern finden. Häufig gilt: $x = R\varphi$ (siehe Skizze rechts)




5. Anfangsbedingungen aufstellen (um später die Integrationskonstanten zu bestimnmen)

$$x(0) = ... \quad \& \quad \dot{x}(0) = ... \quad \text{oder} \quad \varphi(0) = ... \quad \& \quad \dot{\varphi}(0) = ...$$

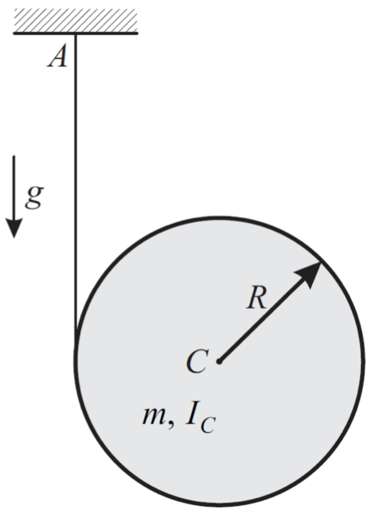
6. DGL lösen - mithilfe von Lösungsansatz oder bei einfachen DGLs durch Integration

7. Anfangsbedingungen in Lösungen der DGL einsetzten und Integrationskonstanten bestimmen

↪ aus Theorieblätter von Felix Stadler

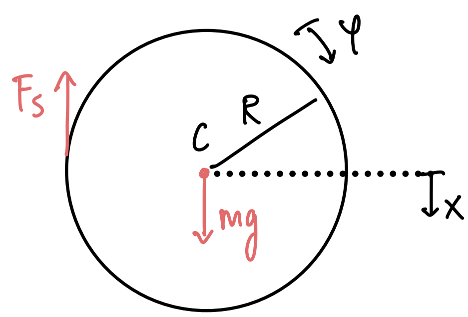
# Beispielaufgabe: Serie 12 Aufgabe 1

1. [1]Eine Jo-Jo-Spule (Masse $m$, Radius $R$, Trägheitsmoment in Achsenrichtung im Massenmittelpunkt $I_C = mR^2/2$ ) ist mit einem vertikalen Faden in $A$ aufgehängt und wird zum Zeitpunkt $t = 0$ aus der Ruhe losgelassen. Die Spule ist mit genügend Faden umwickelt.




1. Stellen Sie alle zur Bestimmung der Bewegung und der Fadenkraft nötigen Gleichungen auf.

Freischnitt:




Koordinaten einführen!

Massenmittelpunktsatz: $ma_c = m\ddot{x} = R = mg - F_s$ ... ①

Drallsatz bezüglich Massenmittelpunkt C (ebene Rotation): $\dot{L}_c = I_c\ddot{\varphi} = M_c$

$\leadsto I_c\ddot{\varphi} = RF_s$ ... ②

Kinematische Relationen: $x = R\varphi$

Wir wollen ① und ② reduzieren in eine Gleichung (weil System hat Freiheitsgrad 1

$\Rightarrow$ Bewegung kann durch 1 Gleichung beschrieben werden!)

$$① + \frac{②}{R}: m\ddot{x} + \frac{I_c\ddot{\varphi}}{R} = mg - F_S + F_S \quad / \text{ kin. Relation: } \ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}}{R}$$

$$\Leftrightarrow m\ddot{x} + \frac{I_c\ddot{x}}{R^2} = mg$$

$$\Leftrightarrow \left(m + \frac{I_c}{R^2}\right)\ddot{x} = mg \quad / \quad I_c = \frac{mR^2}{2} \text{ einsetzen}$$

$$\Leftrightarrow \left(m + \frac{m}{2}\right)\ddot{x} = mg$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}m\ddot{x} = mg \quad / \div m \, / \cdot \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x} = \frac{2}{3}g$$

Anfangsbedingungen: $\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$

2. Bestimmen Sie die Bewegung und die Fadenkraft für die gegebenen Anfangsbedingungen.

DGL: $\ddot{x} = \frac{2}{3}g$

$$\Leftrightarrow \int \ddot{x}\, dt = \int \frac{2}{3}g \, dt$$

$$\Leftrightarrow \dot{x} = \frac{2}{3}gt + v_0$$

$$\Leftrightarrow \int \dot{x}\, dt = \int \frac{2}{3}gt + v_0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}gt^2 + v_0 t + x_0$$

Anfangsbedingungen: $x(0) = x_0 \overset{!}{=} 0$

$\dot{x}(0) = v_0 \overset{!}{=} 0$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x(t) = \frac{1}{3}gt^2}}$$

Fadenkraft: aus 1 : $m\ddot{x} = mg - F_S$

$$\Leftrightarrow \quad F_S = mg - m\ddot{x} \qquad / \; \ddot{x} = \left(\tfrac{1}{3}gt^2\right)'' = \left(\tfrac{2}{3}gt\right)' = \tfrac{2}{3}g$$

$$F_S = mg - \frac{2}{3}mg = \underline{\underline{\frac{1}{3}mg}}$$

3. Wie viel Zeit vergeht, bis die Spule um $10R$ gefallen ist?

Sei $t_1$ die Zeit, wenn die Spule um 10R gefallen ist.

$$\Rightarrow \quad x(t_1) = \frac{1}{3}gt_1^2 \overset{!}{=} 10R$$

$$\Leftrightarrow \quad t_1^2 = 10R \cdot \frac{3}{g}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{t_1 = \sqrt{\frac{30R}{g}}}}$$

4. Vergleichen Sie diese Zeit mit derjenigen für den freien Fall.

Freier Fall: $x(t) = \frac{1}{2}gt^2$

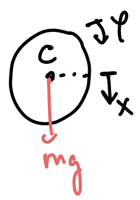
Sei $t_2$ die Zeit, wenn die Spule um 10R gefallen ist im freien Fall:

$$x(t_2) = \frac{1}{2}gt_2^2 \overset{!}{=} 10R$$

$$\Leftrightarrow \quad t_2^2 = \frac{20R}{g} \quad \Leftrightarrow \quad t_2 = \sqrt{\frac{20R}{g}}$$

Verhältnis $\dfrac{t_2}{t_1} = \dfrac{\sqrt{\frac{20\cancel{R}}{\cancel{g}}}}{\sqrt{\frac{30\cancel{R}}{\cancel{g}}}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{t_2 = \dfrac{\sqrt{6}}{3}t_1}}$

(Herleitung (freiwillig)):




$m\ddot{x} = mg$

$\dot{L}_C = I_0\ddot{\varphi} = 0$

$$\ddot{x} = g \Leftrightarrow \int \ddot{x}\,dt = \int g\,dt$$

$$\Leftrightarrow \dot{x} = gt + v_0$$

$$\Leftrightarrow \int \dot{x}\,dt = \int gt + v_0\,dt$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + x_0$$

Anfangsbedingungen: $v_0 = 0$, $x_0 = 0$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

Prüfungsaufgabe zu Dynamik: Basisprüfung HS 20

## Aufgabe 3 (28 Punkte)

Eine Rolle mit Masse $m_B$ ist im Punkt $B$ reibungsfrei gelagert. Wenn sich die Rolle dreht, dann wird ein Quader mit der Masse $m_Q$ eine schräge Ebene, welche reibungsbehaftet ist, hinaufgezogen. Das Seil, welches den Quader hochzieht, hat zudem eine Feder mit Federkonstante $c$, welche am Quader angemacht ist. Gegeben sind folgende Grössen: $M$, $F$, $a$, $b$, $R_A$, $R_B$, $\mu_0$, $m_B$, $m_Q$, $g$. Geben Sie Ihre Lösungen mit den bekannten Grössen an.
*Annahmen: System eben; Seil masselos, undehnbar und immer gespannt; Rollen reibungsfrei gelagert und Rolle A masselos; die Dichte von Quader ($m_Q$) und $m_B$ ist homogen verteilt; Körper bewegen sich nur entlang der eingezeichneten Richtungen $x_1$, $\phi_1$ und $\phi_2$; Anfangsbedingungen $x_1 = \phi_1 = \phi_2 = 0$. Massenträgheitsmoment einer homogenen Kreisscheibe (Rolle): $I_0 = \frac{mR^2}{2}$.*

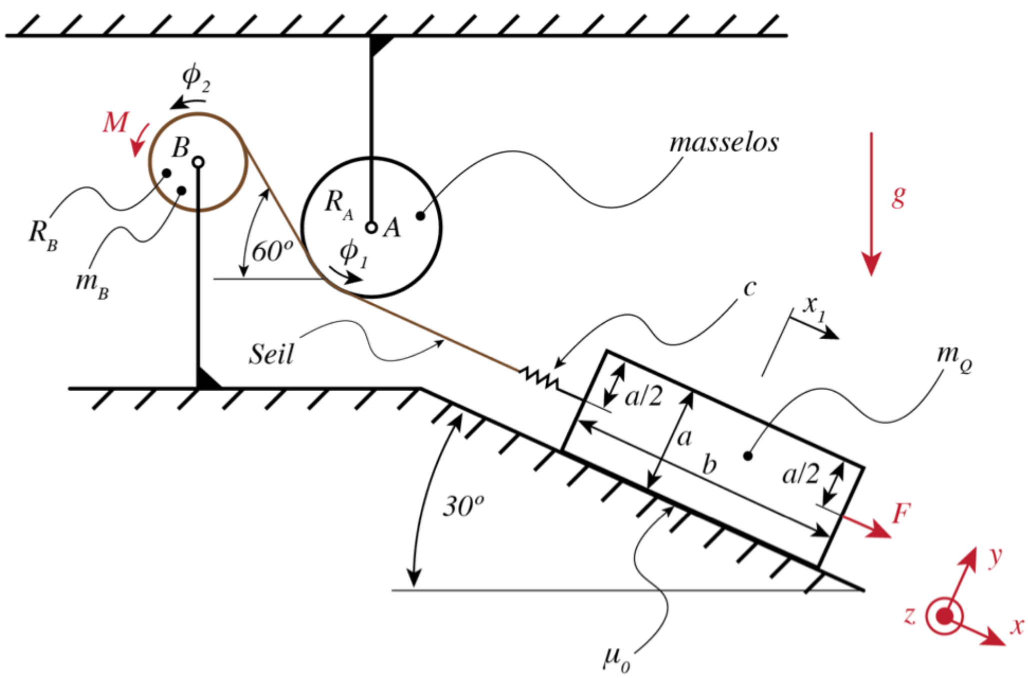



Abbildung 3: Skizze zu Aufgabe 3.

(a) Wieviele Freiheitsgrade hat das System unter Berücksichtigung aller Bindungen? [*1 Punkt*]

Wie viele unabhängigen Bewegungen möglich? $\rightarrow \underline{\underline{2}}$

(Quader ↘ und Rolle B inklusive Seil ↶)

(b) Was ist die kinematische Relation zwischen $\phi_1$ und $\phi_2$. [*1 Punkt*]

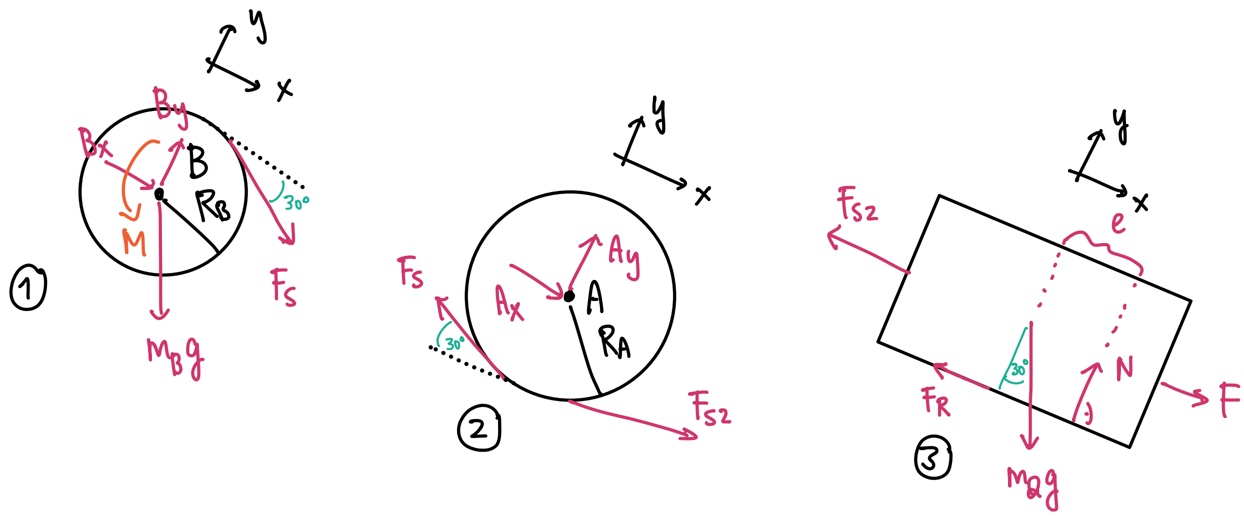
$$v_s = R_B \cdot \dot{\phi}_2 = -R_A \cdot \dot{\phi}_1 \quad \Rightarrow \quad \dot{\phi}_2 = -\frac{R_A}{R_B}\dot{\phi}_1 \quad \Rightarrow \quad \phi_2 = -\frac{R_A}{R_B}\phi_1$$

Weil $\int \dot{\phi}_2 \, dt = \int -\frac{R_A}{R_B}\dot{\phi}_1 \, dt$

$$\Leftrightarrow \phi_2 = -\frac{R_A}{R_B}\phi_1 + C$$

$$\text{Anfangsbedingungen: } \phi_2(0) = -\frac{R_A}{R_B}\underbrace{\phi_1(0)}_{=0} + C \overset{!}{=} 0 \Rightarrow C = 0$$

(c) Schneiden Sie die beiden Rollen und den Quader frei und zeichnen Sie alle Reaktionskräfte ein. Nehmen Sie an, dass das System sich in einem statischen Gleichgewicht befindet. [*3 Punkte*]




(d) Berechnen Sie die Lagerkräfte in $A$ und $B$ und die Reaktionskräfte im System. Nehmen Sie an, dass das System sich in einem statischen Gleichgewicht befindet. [*12 Punkte*]

? $A_x, A_y, B_x, B_y, F_S, F_{S2}, F_R, N, e$

SK 1: $KB(x): 0 = B_x + F_S \cdot \cos(30°) + m_B g \cdot \sin(30°) = B_x + \frac{\sqrt{3}}{2} F_S + \frac{1}{2} m_B g$ ... (1)

$KB(y): 0 = B_y - F_S \cdot \sin(30°) - m_B g \cdot \cos(30°) = B_y - \frac{1}{2} F_S - \frac{\sqrt{3}}{2} m_B g$ ... (2)

$MB(B,z): 0 = M - R_B F_S \Rightarrow \underline{\underline{F_S = \frac{M}{R_B}}}$ ... (3)

SK 2: $KB(x): 0 = A_x - F_S \cos(30°) + F_{S2}$ ... (4)

$KB(y): 0 = A_y + F_S \cdot \sin(30°)$ ... (5)

$MB(A,z): 0 = R_A \cdot F_{S2} - R_A \cdot F_S \Rightarrow F_{S2} = F_S = \underline{\underline{\frac{M}{R_B}}}$ ... (6)

SK ③: KB(x): $0 = m_Q g \cdot \sin(30°) - F_{S2} - F_R + F$ ... ⑦

KB(y): $0 = N - m_Q g \cdot \cos(30°)$ ... ⑧

MB(D, z): $0 = eN - \frac{a}{2} \cdot F_R$ ... ⑨

① & ③ $\Rightarrow$ $B_x = -\frac{\sqrt{3}}{2} F_S - \frac{1}{2} m_B g = \underline{\underline{-\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{M}{R_B} - \frac{1}{2} m_B g}}$

② & ③ $\Rightarrow$ $B_y = \frac{1}{2} F_S + \frac{\sqrt{3}}{2} m_B g = \underline{\underline{\frac{1}{2} \cdot \frac{M}{R_B} + \frac{\sqrt{3}}{2} m_B g}}$

④ & ⑥ $\Rightarrow$ $A_x = \frac{\sqrt{3}}{2} F_S - F_{S2} = \underline{\underline{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) \cdot \frac{M}{R_B}}}$

⑤ & ⑥ $\Rightarrow$ $A_y = -\frac{1}{2} F_S = \underline{\underline{-\frac{M}{2R_B}}}$

⑦ & ⑥ $\Rightarrow$ $F_R = \frac{1}{2} m_Q g - F_{S2} + F = \underline{\underline{\frac{1}{2} m_Q g - \frac{M}{R_B} + F}}$

⑧ $\Rightarrow$ $\underline{\underline{N = \frac{\sqrt{3}}{2} m_Q g}}$ ... ⑩

⑨ $\Rightarrow$ $e = \frac{a}{2} \cdot \frac{F_R}{N} = \frac{a}{\cancel{2}} \cdot \frac{\frac{1}{2} m_Q g - \frac{M}{R_B} + F}{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} m_Q g} = \underline{\underline{\frac{a}{\sqrt{3} m_Q g} \cdot \left(\frac{1}{2} m_Q g - \frac{M}{R_B} + F\right)}}$

(e) Was sind die Kipp- und Haftbedingung? Nehmen Sie an, dass das System sich in einem statischen Gleichgewicht befindet. *Achtung, folgende Annahmen gelten nur für diesen Aufgabenteil:* Folgende Werte können zur Lösung der Aufgabe verwendet werden: $M = r_B F$, $\mu_0 = 2$, $b > a$. Gibt es Kippen oder Gleiten? [*3 Punkte*]

Kippen: $|e| > \frac{b}{2} \iff \frac{2|e|}{b} > 1$

e umformen: $e = \frac{a}{\sqrt{3} m_Q g} \cdot \left(\frac{1}{2} m_Q g - \frac{M}{R_B} + F\right) \cdot \frac{R_B}{R_B}$

$$\Rightarrow \quad e = \frac{a}{\sqrt{3} m_Q g \cdot R_B} \cdot \left( \frac{1}{2} m_Q g \cdot R_B - M + R_B F \right)$$

$$\Leftrightarrow \quad e = \frac{a}{\sqrt{3} m_Q g R_B} \cdot \left( \frac{1}{2} m_Q g R_B \cancel{- M + M} \right) = \frac{a \cdot \cancel{m_Q g R_B}}{2\sqrt{3} \cancel{m_Q g R_B}} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

Bedingung $\Rightarrow \quad \frac{2|e|}{b} = \frac{\cancel{2} \frac{a}{\cancel{2}\sqrt{3}}}{b} = \frac{a}{\sqrt{3} b} \overset{?}{>} 1$

Verwende $b > a \quad \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{3} b} < 1$ ! $\rightarrow$ kippt nicht

Haften: $|F_R| \leq \mu_0 |N|$

$F_R$ umformen: $F_R = \frac{1}{2} m_Q g - \frac{M}{R_B} + F \quad \Big/ \cdot \frac{R_B}{R_B}$

$$\Leftrightarrow F_R = \frac{1}{R_B} \cdot \left( \frac{1}{2} m_Q g R_B \cancel{- M + \underbrace{F \cdot R_B}_{=M}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} m_Q g$$

$N = \frac{\sqrt{3}}{2} m_Q g$

Bedingung: $\frac{1}{2} m_Q g \overset{?}{\leq} \cancel{2} \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} m_Q g = \sqrt{3} m_Q g$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \leq \sqrt{3} \quad \checkmark \text{ gilt.}$$

$\Rightarrow$ haftet

kein Kippen & kein Gleiten //

(f) Bestimmen Sie die Differentialgleichungen für die Bewegung des Quaders und der Rolle. Nehmen Sie an, dass der Quader nun nicht reibungsbehaftet ist und geben Sie Ihre Lösung in Abhängigkeit von $x_1$ und $\phi_2$ an. *Hinweis: Die Lösung der Differentialgleichungen wird nicht benötigt.* [*6 Punkte*]

Quader: $m_Q \ddot{x}_1 = -F_c + \frac{1}{2} m_Q g + F \qquad F_c = c \cdot (x_1 + \phi_2 R_B)$

$$\Rightarrow m_Q \ddot{x}_1 = -c(x_1 + \phi_2 R_B) + \frac{1}{2} m_Q g + F \qquad / \text{alle } x_1 \text{ nach links}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{m_Q \ddot{x}_1 + c x_1 = -c \phi_2 R_B + \frac{1}{2} m_Q g + F}} \quad \text{---} \; 1$$

Rolle: $\dot{L}_B = I_B \ddot{\phi}_2 = M - R_B \cdot F_c \qquad / F_c = c \cdot (x_1 + \phi_2 R_B) \;, \; I_B = \frac{m R_B^2}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{m R_B^2}{2} \ddot{\phi}_2 = M - R_B \, c \, (x_1 + \phi_2 R_B) \qquad / \text{alle } \phi_2 \text{ nach links}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{\frac{m R_B^2}{2} \ddot{\phi}_2 + c R_B^2 \phi_2 = M - c R_B x_1}} \quad \text{---} \; 2$$

(g) Wie bekommt man aus diesen Differentialgleichungen die statischen Gleichungen aus dem Problem 3(d) (ohne Reibung)? Bestimmen Sie $M$ aus den statischen Gleichungen mit den anderen bekannten Grössen. [*2 Punkte*]

statisch: $\dot{x} = \ddot{x} = 0 \;, \; \dot{\phi}_2 = \ddot{\phi}_2 = 0$ (keine Geschwindigkeit & keine Beschleunigung!)

$$1 \text{ mit } \ddot{x} = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c x_1 = \underbrace{-c \phi_2 R_B + \frac{1}{2} m_Q g + F}_{\text{einsetzen}} \\ c R_B^2 \phi_2 = M - c R_B x_1 \end{array} \right.$$

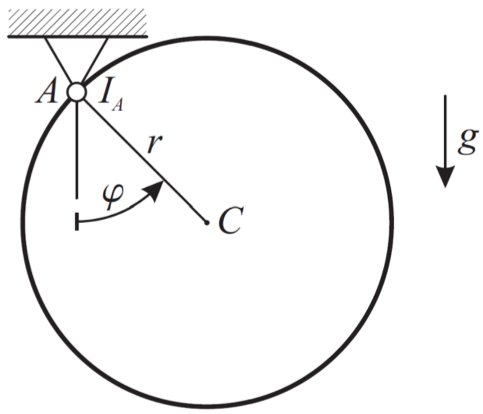
$$2 \text{ mit } \ddot{\phi}_2 = 0 \Rightarrow$$

$$c R_B^2 \phi_2 = M - R_B \cdot (-c \phi_2 R_B + \frac{1}{2} m_Q g + F)$$

$$\Leftrightarrow \cancel{cR_B^2}\phi_2 = M + \cancel{cR_B^2}\phi_2 - \frac{1}{2}m_Q g R_B - FR_B$$

$$\Leftrightarrow \quad M = \frac{1}{2}m_Q g R_B + FR_B = \underline{\underline{R_B \cdot \left(F + \frac{1}{2}m_Q g\right)}}$$

**2.** [2]Ein homogener Reifen ist im Punkt A gelenkig gelagert und schwingt in einer Vertikalebene. Der Reifen hat die Masse m und den Radius r. Das Massenträgheitsmoment des Reifens bezüglich des Punktes A beträgt .

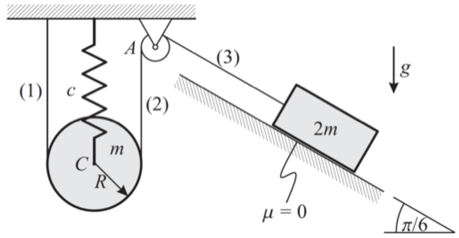



1. Finden Sie die Bewegungsdifferentialgleichung. Kommt sie Ihnen bekannt vor ?
2. Linearisieren Sie die Bewegungsdifferentialgleichung und bestimmen Sie die Kreisfrequenz einer kleinen Schwingung.

**3.** [3]Eine Rolle (Masse $m$ und Radius $R$) und ein Quader (Masse $2m$) sind gemäss der Skizze über ein masseloses, undehnbares Seil miteinander verbunden. Eine Feder (deren ungespannte Länge null ist) ist im Punkt $C$ an der Spule befestigt. Der Quader liegt auf einer schiefen Ebene und gleitet reibungsfrei.

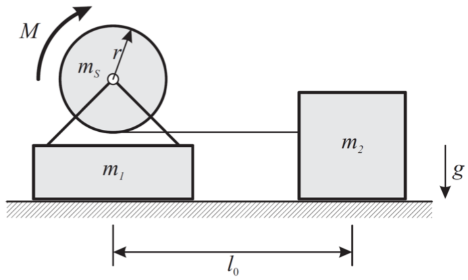
*Annahmen: Trägheit der Rolle in $A$ vernachlässigbar, Rollenlager reibungsfrei, kein Gleiten zwischen Seil und Rolle, keine Reibung zwischen Quader und Ebene, Feder masselos.*
*Hinweis: Massenträgheitsmoment der Rolle: $I_C = mR^2/2$*

gute Aufgabe !



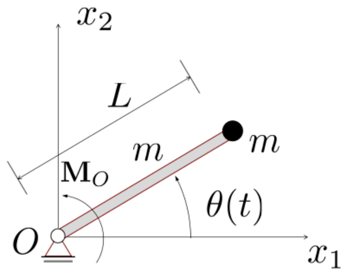

1. Bestimmen Sie den Freiheitsgrad des Systems.
2. Schneiden Sie die zwei Körper frei und formulieren Sie an ihnen den Massenmittelpunktsatz und wo nötig den Drallsatz.
3. Sofern in b) mehr Koordinaten verwendet wurden, als der Freiheitsgrad des Systems ist: Welche Beziehungen gelten zwischen diesen Koordinaten?
4. Stellen Sie die Bewegungsdifferentialgleichung für den Quader auf (ohne sie zu lösen). Bestimmen Sie die Seilkräfte in den Abschnitten (1), (2) und (3) als Funktion der Koordinate und der Beschleunigung des Quaders, die Kreisfrequenz der Bewegung des Quaders und die Gleichgewichtslage des Systems.

**4.** [4]Zwei Quader bewegen sich reibungsfrei auf einer horizontalen Ebene. Der Anfangsabstand ist $l_0$. Auf dem linken Quader (Masse $m_1$ ) ist reibungsfrei eine Seilspule (homogener Zylinder mit Masse $m_S$ und Radius $r$) angebracht. Das Ende des um die Spule gewickelten Seiles ist am rechten Quader (Masse $m_2$ ) befestigt. Ein Motor übt ab dem Zeitpunkt $t = 0$ ein konstantes Moment $M$ auf die Seilspule aus. Die Quader setzen sich dadurch in Bewegung, ohne zu kippen.




1. Was ist der Freiheitsgrad des Systems? Stellen Sie die Bewegungsdifferentialgleichungen auf.
2. Wie bewegt sich das System? Wie gross ist die Seilkraft?

**5.** Ein Teilchen der Masse $m$ wird an der Spitze eines Stabes der Länge $L$ mit vernachlässigbarer Masse befestigt. Es dreht um den festen Punkt $O$ mit dem Winkel $\theta(t) = a\cos^2(\Omega t)$, wobei $\Omega =$ konst. Das System bewegt sich in der $x_1 - x_2$ Ebene . Auf das System wirkt *keine Schwerkraft*.




Was ist der Betrag des Moments $M_O$, das auf den Punkt $O$ ausgeübt werden muss, um das gegebenen $\theta(t)$ zu erzeugen ?

(a) $M_O = 2maL^2\Omega^2\sin^2(2\Omega t)$

(b) $M_O = maL^2\Omega^2$

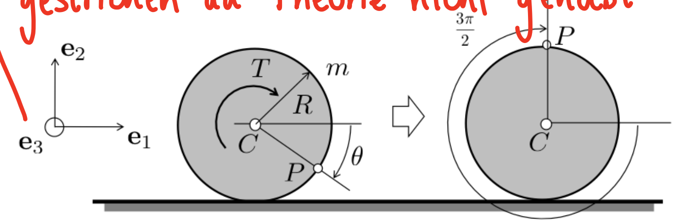
(c) $M_O = mL^2\Omega^2\tan(\Omega t)$

(d) $M_O = maL^2\Omega^2(\sin^2(2\Omega t) + 2\cos^2(\Omega t))$

(e) $M_O = 2maL^2\Omega^2(\sin^2(2\Omega t) - \cos^2(\Omega t))$

**6.** Eine Kreisscheibe der Masse $m$ und des Radius $R$ rollt ohne zu gleiten auf einer horizontalen Ebene. Sie wird mit einem konstanten Moment $T$ belastet und befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ in Ruhe. Es wird angenommen, dass $\theta(0) = 0$ ist, wobei $\theta$ die Rotation der Scheibe angibt, wie gezeigt.

gestrichen da Theorie nicht gehabt




Wie gross ist die Beschleunigung $\mathbf{a}_P$ des zur Scheibe gehörenden Punktes $P$, wenn $\theta = \frac{3}{2}\pi$?

(a) $\mathbf{a}_P = \frac{4RT}{3mR^2}\mathbf{e}_1 - \frac{2\pi RT}{mR^2}\mathbf{e}_2$

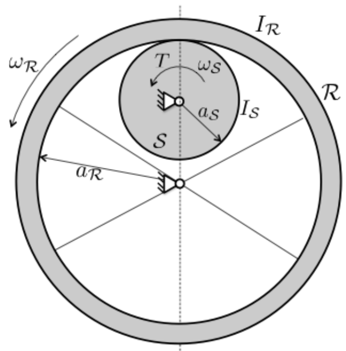
(b) $\mathbf{a}_P = \frac{2RT}{3mR^2}\mathbf{e}_1 + \frac{2\pi RT}{3mR^2}\mathbf{e}_2$.

(c) $\mathbf{a}_P = \frac{4RT}{3mR^2}\mathbf{e}_1$

(d) $\mathbf{a}_P = \frac{RT}{mR^2}\mathbf{e}_1 + \frac{5\pi RT}{mR^2}\mathbf{e}_2$

(e) $\mathbf{a}_P = \mathbf{0}$

**7.** Betrachten Sie das skizzierte Getriebesystem in der Abbildung. Das Sonnenrad $S$ und das Hohlrad $R$ haben die Radien $a_S$ bzw. $a_R$, ihre Massenträgheitsmomente sind $I_S$ bzw. $I_R$. Die Mittelpunkte der beiden Zahnräder sind gelenkig mit dem Boden verbunden. Ein Moment $T$ wird auf das Sonnenrad ausgeübt, wenn sich das System in Ruhe befindet. Bezeichne mit $\omega_R$ und $\omega_S$ die Winkelgeschwindigkeiten des Hohlrads bzw. des Sonnenrads. Positive Richtungen sind in der Abbildung dargestellt.




Wie gross ist die Winkelbeschleunigung $\dot{\omega}_R$ des Hohlrads?

(a) $\dot{\omega}_R = \dfrac{T}{\dfrac{a_R}{a_S} I_S + \dfrac{a_S}{a_R} I_R}$

(b) $\dot{\omega}_R = \dfrac{T}{\dfrac{a_s}{a_R} I_S - \dfrac{a_S}{a_R} I_R}$

(c) $\dot{\omega}_R = \dfrac{T}{\dfrac{a_R}{a_s}(I_S + I_R)}$

(d) $\dot{\omega}_R = \dfrac{T}{\dfrac{a_R}{a_s}}$

(e) $\dot{\omega}_R = \dfrac{T}{\dfrac{a_S}{a_R}(I_S + I_R)}$