

Themen von Heute:

> Teil 1: Fragen zu Themen / Aufgaben von letzter Woche?

> Teil 2: Recap der Theorie für die aktuelle Serie:

1. Massenmittelpunktsatz

2. Bewegungen von rotierenden Körpern beschreiben:

2.1 Drall

2.2 Drallsatz

2.3 Drallsatz für ebene Rotationen von Starrkörpern

2.4 Massenträgheitsmoment ($\hat{=}$ Inertialmoment)

3. Zusammenfassung der heutigen Theorie & allg. Vorgehen Dynamikaufgaben

4. Beispielaufgaben \rightarrow 1 aus der Serie, 1 aus einer alten Prüfung

> Teil 3: Übungsaufgaben besprechen (Seite 12)

> Teil 4: Tipps für die Lernphase & Prüfung



Teil 1: Fragen zu Themen/Aufgaben von letzter Woche?

Teil 2: Recap der Theorie für die aktuelle Serie

Letzte Woche haben wir den Newton'schen Bewegungsgesetz kennengelernt:

$$\boxed{\quad} \quad (\hat{=} \text{Impulssatz, } \dot{\vec{p}} = \vec{R} \quad \text{wobei } \vec{p} = m\vec{v})$$

Diese Formel gilt für alle Massepunkte. ($\hat{=}$ materieller Punkt).

Nun wollen wir auch Bewegungssätze haben, welche für beliebige starre oder deformierbare Körper gelten: der **Massenmittelpunktsatz** und der **Drallsatz**.

1. Massenmittelpunktsatz: Um Bewegungen von Körpern zu beschreiben:



\vec{a}_c : Die Beschleunigung vom Massenmittelpunkt c .

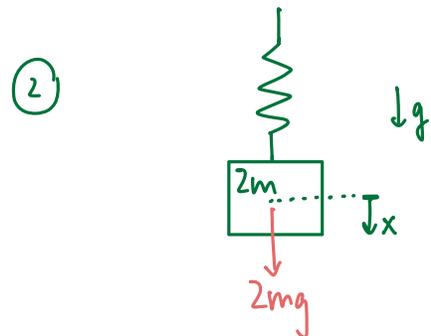
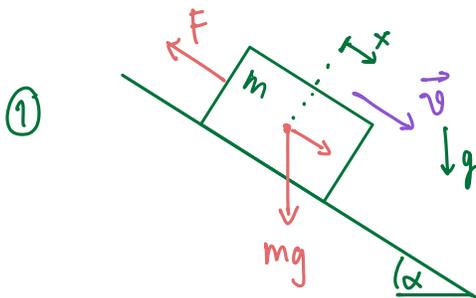
(Erinnerung: Massenmittelpunkt $\hat{=}$ geometrischer Schwerpunkt wenn Masse homogen)

↑
immer der Fall in TechMech :)

\vec{R} : Resultierende aller Kräfte (Komponenten), die eine Auswirkung auf \vec{a}_c haben.

Anwendung: In TechMech benutzen wir den Massenmittelpunktsatz gleich wie das Newton'sche Bewegungsgesetz. (Nur die Herleitung ist anders).

Beispiele:



2. Drallsatz:

2.1 Drall:

Der Drall (bzw. Drehimpuls) ist eine physikalische Grösse, welche den Bewegungszustand eines rotierenden starren Körpers bestimmt. Sie beschreibt sozusagen den "Schwung" der Rotation. Den Drall kann man bezüglich eines inertialen Punktes (d.h. ein Punkt in Ruhe) O oder bezüglich des Massenmittelpunktes bestimmen:

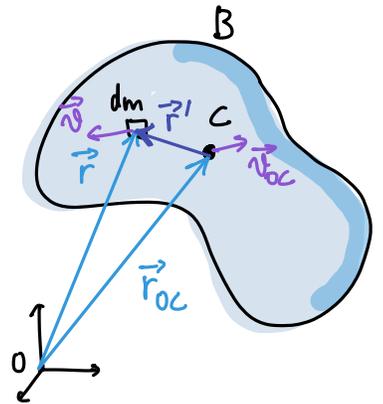
Bezüglich inertialer Punkt O :

$$\vec{L}_O = \iiint_B \vec{r} \times \vec{v} \, dm$$

Bezüglich Massenmittelpunkt C :

$$\vec{L}_C = \iiint_B \vec{r}' \times \vec{v}' \, dm$$

keine Angst ihr müsst den Drall nie berechnen.
Es ist aber gut zu wissen wie sie definiert ist :)



$$\text{mit } \vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_{OC}$$

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_{OC}$$

Transformationsregel für den Drall:

Wie beim Moment gibt es für den Drall auch eine Transformationsregel:

$$\vec{L}_O = \vec{r}_C \times \vec{p} + \vec{L}_C$$

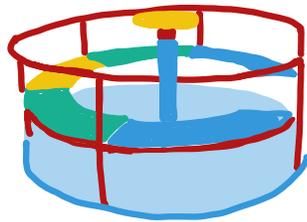
Drall bezüglich O
($\hat{=}$ Punkt in Ruhe)

Drall bezüglich Massenmittelpunkt

2.2 Drallsatz:

Der Drallsatz ist ein physikalisches Gesetz, das besagt, dass zur Änderung des Drehimpulses eines Körpers ein Drehmoment an ihm aufgebracht werden muss.

z.B. Wenn wir ein Spielplatzkarussell haben:



Um diesen Karussell in Drehung zu versetzen, muss man es anstossen ($\hat{=}$ ein Moment aufbringen, das dem Karussell Drehimpuls zuführt). Um die Drehung aufzuhören muss man wieder ein Moment in Gegenrichtung aufbringen, um den Drehimpuls zu verändern und es zum anhalten zu bringen. (Das machen in der realen Welt Reibungsmomente im Lager und der Luftwiderstand).

Die mathematische Formulierung dieses Gesetzes lautet wie folgt:

Drallsatz bezüglich des inertialen Punktes O :



Drallsatz bezüglich des Massenmittelpunktes C :



($\hat{=}$ relativer Drallsatz)

Bem: Den Drallsatz kann man "nur" bezüglich 2 Punkte aufstellen!

2.3 Drallsatz für ebene Rotationen von Starrkörpern:

Bei ebenen Rotationen kann der Drall und folglich auch der Drallsatz vereinfacht werden: Herleitung im Skript oder Vorlesung

Drallsatz bezüglich O : Inertialpunkt ($\hat{=}$ Punkt in Ruhe) (Drall:)

Drallsatz bezüglich C : Massenmittelpunkt (Drall:)

wobei I_0 bzw. I_C der Massenträgheitsmoment ist.

⚠ Der Drall und das Moment müssen in dieselbe Richtung positiv gerechnet werden.

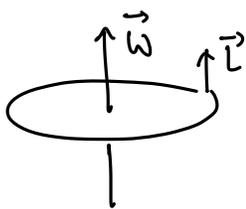
2.4 Massenträgheitsmoment ($\hat{=}$ Inertialmoment):

bezüglich O : $I_0 = \iint_B r^2 dm$

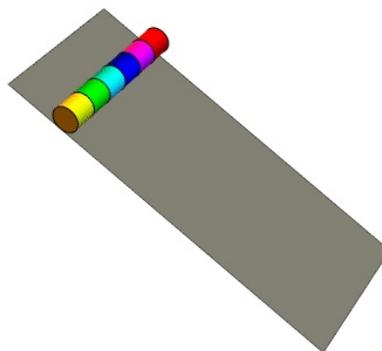
bezüglich C : $I_C = \iint_B r'^2 dm$

keine Angst, müsst ihr nie berechnen in TechMech

Sie gibt die Trägheit eines starren Körpers gegenüber einer Änderung seiner Rotationsgeschwindigkeit bei der Drehung um eine gegebene Achse an. Sie ist abhängig von der Geometrie und Masse des Körpers.



$$I = \frac{L}{\omega}$$

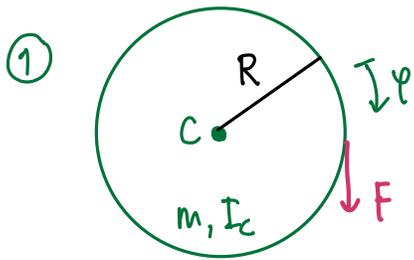


- $m = m_0$ $I = 1 I_0$
- $m = m_0$ $I = 2 I_0$
- $m = m_0$ $I = 3 I_0$
- $m = m_0$ $I = 4 I_0$
- $m = m_0$ $I = 5 I_0$
- $m = m_0$ $I = 6 I_0$

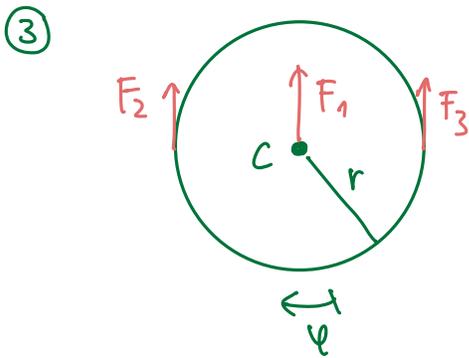
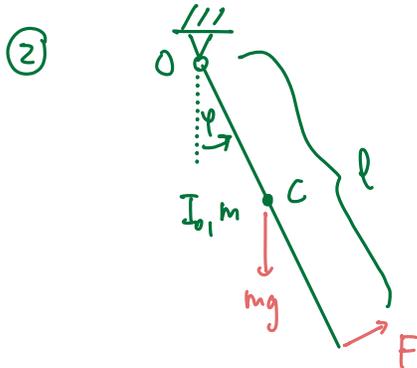
Bem: Das Massenträgheitsmoment ist bei einer ebenen SK-Bewegung konstant.

↳ Grund warum wir aus dem Drall $L_0 = I_0 \omega$ den Drallsatz $\dot{L}_0 = I_0 \dot{\omega}$ erhalten:)

Beispiele:

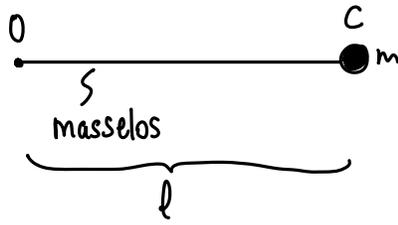


Drall und Moment in dieselbe Richtung positiv rechnen!



Einige Massenträgheitsmomente: (in der Regel werden sie auch in der Aufgabe angegeben)

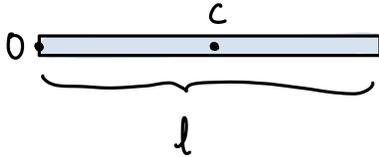
Massenpunkt:



$$I_c = 0$$

$$I_o = ml^2$$

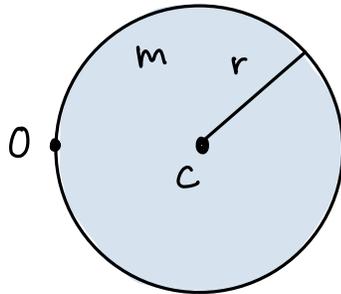
Balken:



$$I_c = \frac{1}{12} ml^2$$

$$I_o = \frac{1}{3} ml^2$$

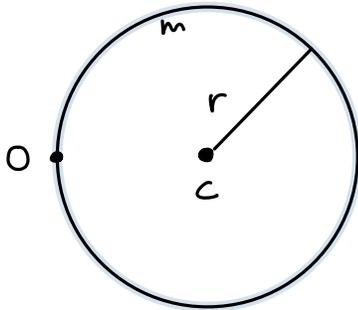
Kreisscheibe:



$$I_c = \frac{1}{2} mr^2$$

$$I_o = \frac{3}{2} mr^2$$

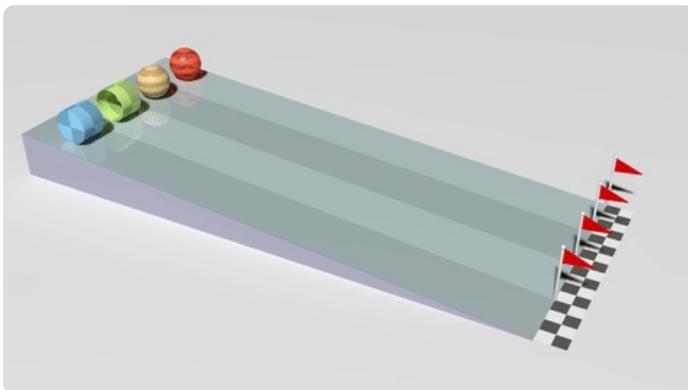
Infinitesimal dünner Ring:



$$I_c = mr^2$$

$$I_o = 2mr^2$$

Bem: Der Massenträgheitsmoment eines aus homogenen Teilen zusammengesetzten Körpers ist die Addition der einzelnen Massenträgheitsmomente.



Four objects with identical masses and radii racing down a plane while rolling without slipping. □

From back to front:

- spherical shell,
- solid sphere,
- cylindrical ring, and
- solid cylinder.

The time for each object to reach the finishing line depends on their moment of inertia. (OGV version)

3. Zusammenfassung der heutigen Theorie & allg. Vorgehen Dynamikaufgaben:

Massenpunkte: Newton'scher Bewegungsgesetz $m\vec{a} = \vec{R} = \dot{\vec{p}}$ auch: Impulssatz

Starre & deformierbare Körper:

Impulssatz: $\dot{\vec{p}} = \vec{R} \xrightarrow{m\vec{r}_c = \iiint_B \vec{r} dm}$ Massenmittelpunktsatz $m\vec{a}_c = \vec{R}$

Drallsatz:

bezüglich 0 $\dot{\vec{L}}_0 = \vec{M}_0$

Inertialpunkt
(= Pkt. in Ruhe)

wobei $\vec{L}_0 = \iiint_B \vec{r} \times \vec{v} dm$

bezüglich C $\dot{\vec{L}}_c = \vec{M}_c$

Massenmittelpunkt

wobei $\vec{L}_c = \iiint_B \vec{r}' \times \vec{v}' dm$

Ebene Rotationen von starren Körpern:

Drallsatz:

bezüglich 0: $\dot{L}_0 = I_0 \dot{\omega} = I_0 \ddot{\varphi} = M_0^{tot}$

Inertialpunkt

Drall: $L_0 = I_0 \omega$

bezüglich C: $\dot{L}_c = I_c \dot{\omega} = I_c \ddot{\varphi} = M_c^{tot}$

Massenmittelpunkt

Drall: $L_c = I_c \omega$

↳ in TechMech: Massenmittelpunkt = geom. Schwerpunkt

Wichtig: Der Drall und das Moment müssen in dieselbe Richtung positiv gerechnet werden.

wobei $I_0, I_c =$ Massenträgheitsmoment ($\hat{=}$ Inertialmoment):

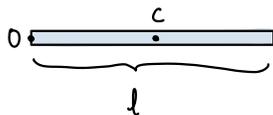
bezüglich 0: $I_0 = \iint_B r^2 dm$

bezüglich C: $I_c = \iint_B r'^2 dm$

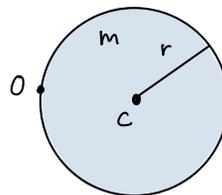
Beispiele Massenträgheitsmoment:



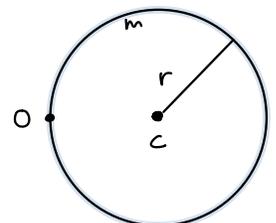
$I_c = 0$
 $I_0 = ml^2$



$I_c = \frac{1}{12} ml^2$
 $I_0 = \frac{1}{3} ml^2$



$I_c = \frac{1}{2} mr^2$
 $I_0 = \frac{3}{2} mr^2$



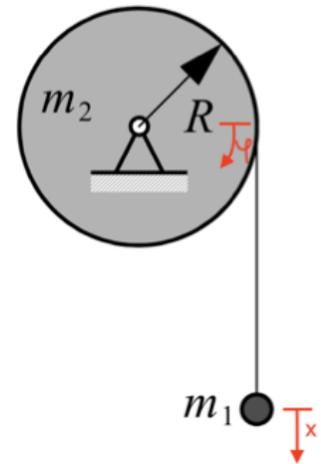
$I_c = mr^2$
 $I_0 = 2mr^2$

Vorgehen Dynamikaufgaben:

1. Identifiziere die allgemeine Lage, die unterschiedlichen Starrkörper und deren Verbindungen
2. Freischnittskizze für die einzelnen Starrkörper (von der allgemeinen Lage) erstellen:
 - (a) Körper freischneiden und Verbindungskräfte (z.B. Seilkräfte) einführen
 - (b) alle externen Kräfte einführen
 - (c) geeignetes Koordinatensystem für jeden Körper einführen. Koordinaten sollten in die Richtung zeigen, in den sich der Körper bewegen wird. Der Ursprung dieser Koordinaten sollte in der Skizze deutlich erkennbar sein (wichtig für Anfangsbedingungen).
 - (d) Freiheitsgrad ermitteln, falls danach gefragt ist
3. Newtonsches Bewegungsgesetz für jeden Körper, Drallsatz für jeden *rotierenden* Körper aufstellen

$$\underline{R} = m\underline{a} \quad \& \quad M_O = \dot{L}_O = I_O\ddot{\varphi}$$

4. Bei System mit mehreren Körpern: Kinematische Relationen aufstellen \rightarrow Zusammenhang zwischen den einzelnen Variablen der unterscheidlichen Körpern finden. Häufig gilt: $x = R\varphi$ (siehe Skizze rechts)



5. Anfangsbedingungen aufstellen (um später die Integrationskonstanten zu bestimmen)

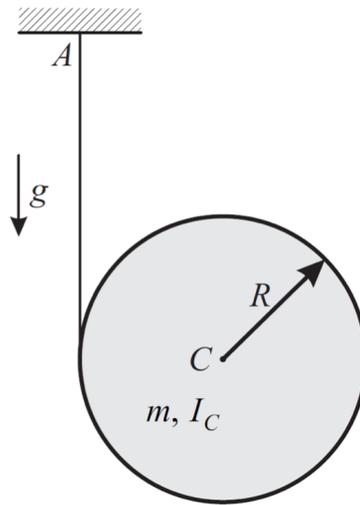
$$x(0) = \dots \quad \& \quad \dot{x}(0) = \dots \quad \text{oder} \quad \varphi(0) = \dots \quad \& \quad \dot{\varphi}(0) = \dots$$

6. DGL lösen - mithilfe von Lösungsansatz oder bei einfachen DGLs durch Integration
7. Anfangsbedingungen in Lösungen der DGL einsetzen und Integrationskonstanten bestimmen

\hookrightarrow aus Theorieblätter von Felix Stadler

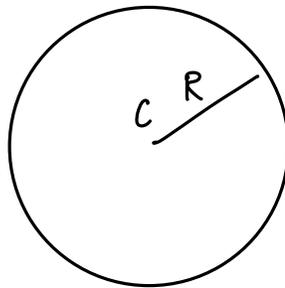
Beispielaufgabe: Serie 12 Aufgabe 1

1. ¹Eine Jo-Jo-Spule (Masse m , Radius R , Trägheitsmoment in Achsenrichtung im Massenmittelpunkt $I_C = mR^2/2$) ist mit einem vertikalen Faden in A aufgehängt und wird zum Zeitpunkt $t = 0$ aus der Ruhe losgelassen. Die Spule ist mit genügend Faden umwickelt.



1. Stellen Sie alle zur Bestimmung der Bewegung und der Fadenkraft nötigen Gleichungen auf.

Freischnitt:



Koordinaten einführen!

Massenmittelpunktsatz:

Drallsatz bezüglich Massenmittelpunkt C (ebene Rotation):

Kinematische Relationen:

Anfangsbedingungen: {

2. Bestimmen Sie die Bewegung und die Fadenkraft für die gegebenen Anfangsbedingungen.

3. Wie viel Zeit vergeht, bis die Spule um $10R$ gefallen ist?

4. Vergleichen Sie diese Zeit mit derjenigen für den freien Fall.

Freier Fall: $x(t) = \frac{1}{2}gt^2$

(Herleitung (freiwillig)):



$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= mg \\ \dot{L}_c &= I_0\ddot{\psi} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= g \Leftrightarrow \int \ddot{x} dt = \int g dt \\ \Leftrightarrow \dot{x} &= gt + v_0 \\ \Leftrightarrow \int \dot{x} dt &= \int gt + v_0 dt \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + x_0 \end{aligned}$$

Anfangsbedingungen: $v_0 = 0$
 $x_0 = 0$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

Aufgabe 3 (28 Punkte)

Eine Rolle mit Masse m_B ist im Punkt B reibungsfrei gelagert. Wenn sich die Rolle dreht, dann wird ein Quader mit der Masse m_Q eine schräge Ebene, welche reibungsbehaftet ist, hinaufgezogen. Das Seil, welches den Quader hochzieht, hat zudem eine Feder mit Federkonstante c , welche am Quader angemacht ist. Gegeben sind folgende Größen: $M, F, a, b, R_A, R_B, \mu_0, m_B, m_Q, g$. Geben Sie Ihre Lösungen mit den bekannten Größen an.

Annahmen: System eben; Seil masselos, undeformierbar und immer gespannt; Rollen reibungsfrei gelagert und Rolle A masselos; die Dichte von Quader (m_Q) und m_B ist homogen verteilt; Körper bewegen sich nur entlang der eingezeichneten Richtungen x_1, ϕ_1 und ϕ_2 ; Anfangsbedingungen $x_1 = \phi_1 = \phi_2 = 0$. Massenträgheitsmoment einer homogenen Kreisscheibe (Rolle): $I_0 = \frac{mR^2}{2}$.

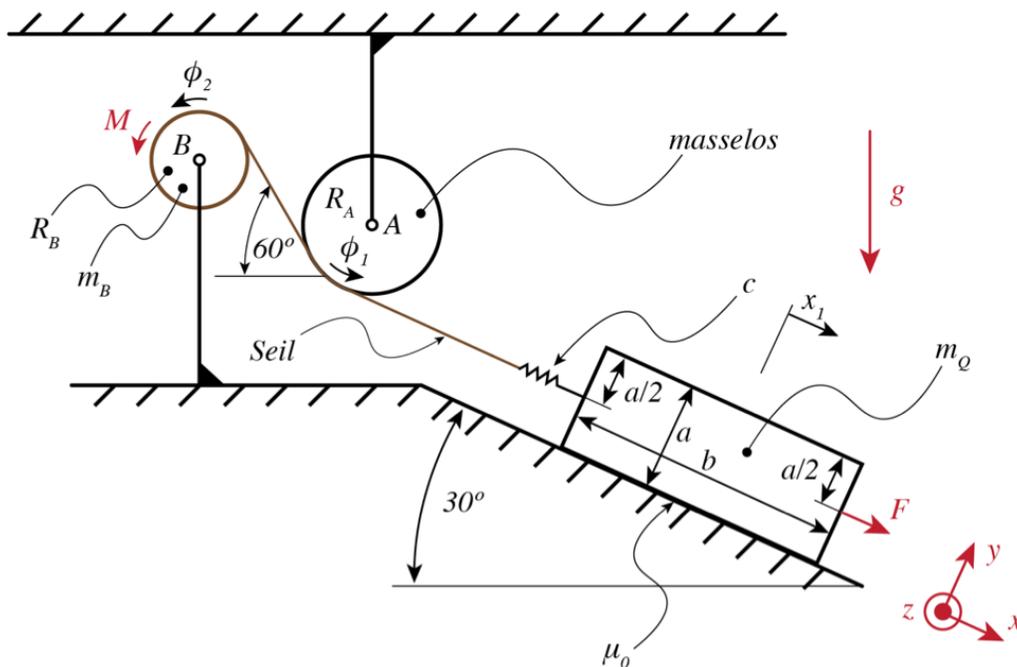


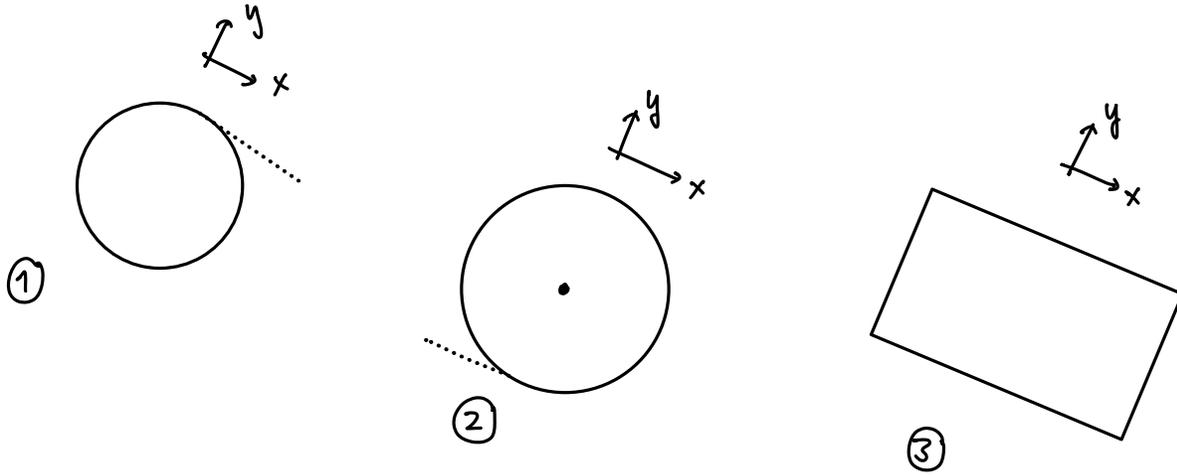
Abbildung 3: Skizze zu Aufgabe 3.

- (a) Wieviele Freiheitsgrade hat das System unter Berücksichtigung aller Bindungen? [1 Punkt]

Wieviele unabhängigen Bewegungen möglich?

- (b) Was ist die kinematische Relation zwischen ϕ_1 und ϕ_2 . [1 Punkt]

- (c) Schneiden Sie die beiden Rollen und den Quader frei und zeichnen Sie alle Reaktionskräfte ein. Nehmen Sie an, dass das System sich in einem statischen Gleichgewicht befindet. [3 Punkte]



- (d) Berechnen Sie die Lagerkräfte in A und B und die Reaktionskräfte im System. Nehmen Sie an, dass das System sich in einem statischen Gleichgewicht befindet. [12 Punkte]

② $A_x, A_y, B_x, B_y, F_S, F_{Sz}, F_R, N, e$

$$\text{SK ①: } K_B(x): 0 =$$

$$K_B(y): 0 =$$

$$M_B(B, z): 0 =$$

$$\text{SK ②: } K_B(x): 0 =$$

$$K_B(y): 0 =$$

$$M_B(A, z): 0 =$$

$$SK \textcircled{3}: KB(x): 0 =$$

$$KB(y): 0 =$$

$$MB(D, z): 0 =$$

- (e) Was sind die Kipp- und Haftbedingung? Nehmen Sie an, dass das System sich in einem statischen Gleichgewicht befindet. *Achtung, folgende Annahmen gelten nur für diesen Aufgabenteil:* Folgende Werte können zur Lösung der Aufgabe verwendet werden: $M = r_B F$, $\mu_0 = 2$, $b > a$. Gibt es Kippen oder Gleiten? [3 Punkte]

Kippen:

Haften:

(c) Schneiden Sie die beiden Rollen und den Quader frei und zeichnen Sie alle Reaktionskräfte ein. Nehmen Sie an, dass das System sich in einem statischen Gleichgewicht befindet. [3 Punkte]

(d) Berechnen Sie die Lagerkräfte in A und B und die Reaktionskräfte im System. Nehmen

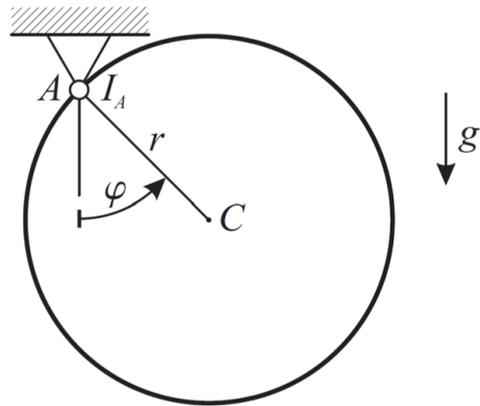
Quader: $m_a \ddot{x}_1 = -F_c + \frac{1}{2} m_a g + F$ $F_c =$

Rolle:

(g) Wie bekommt man aus diesen Differentialgleichungen die statischen Gleichungen aus dem Problem 3(d) (ohne Reibung)? Bestimmen Sie M aus den statischen Gleichungen mit den anderen bekannten Größen. [2 Punkte]

Teil 3: Übungsaufgaben - Serie 12

2. Ein homogener Reifen ist im Punkt A gelenkig gelagert und schwingt in einer Vertikalebene. Der Reifen hat die Masse m und den Radius r . Das Massenträgheitsmoment des Reifens bezüglich des Punktes A beträgt I_A .



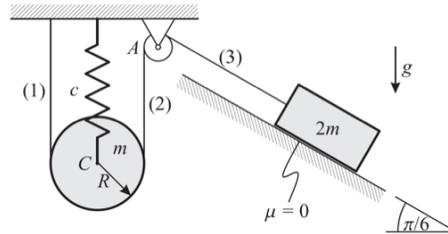
1. Finden Sie die Bewegungsdifferentialgleichung. Kommt sie Ihnen bekannt vor?
2. Linearisieren Sie die Bewegungsdifferentialgleichung und bestimmen Sie die Kreisfrequenz einer kleinen Schwingung.

3. ³Eine Rolle (Masse m und Radius R) und ein Quader (Masse $2m$) sind gemäss der Skizze über ein masseloses, undeformbares Seil miteinander verbunden. Eine Feder (deren ungespannte Länge null ist) ist im Punkt C an der Spule befestigt. Der Quader liegt auf einer schiefen Ebene und gleitet reibungsfrei.

Annahmen: Trägheit der Rolle in A vernachlässigbar, Rollenlager reibungsfrei, kein Gleiten zwischen Seil und Rolle, keine Reibung zwischen Quader und Ebene, Feder masselos.

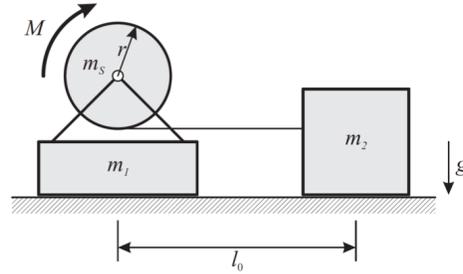
Hinweis: Massenträgheitsmoment der Rolle: $I_C = mR^2/2$

gute Aufgabe!



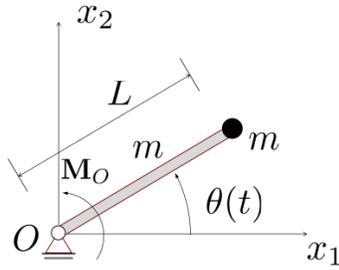
1. Bestimmen Sie den Freiheitsgrad des Systems.
2. Schneiden Sie die zwei Körper frei und formulieren Sie an ihnen den Massenmittelpunktsatz und wo nötig den Drallsatz.
3. Sofern in b) mehr Koordinaten verwendet wurden, als der Freiheitsgrad des Systems ist: Welche Beziehungen gelten zwischen diesen Koordinaten?
4. Stellen Sie die Bewegungsdifferentialgleichung für den Quader auf (ohne sie zu lösen). Bestimmen Sie die Seilkräfte in den Abschnitten (1), (2) und (3) als Funktion der Koordinate und der Beschleunigung des Quaders, die Kreisfrequenz der Bewegung des Quaders und die Gleichgewichtslage des Systems.

4. ⁴Zwei Quader bewegen sich reibungsfrei auf einer horizontalen Ebene. Der Anfangsabstand ist l_0 . Auf dem linken Quader (Masse m_1) ist reibungsfrei eine Seilspule (homogener Zylinder mit Masse m_S und Radius r) angebracht. Das Ende des um die Spule gewickelten Seiles ist am rechten Quader (Masse m_2) befestigt. Ein Motor übt ab dem Zeitpunkt $t = 0$ ein konstantes Moment M auf die Seilspule aus. Die Quader setzen sich dadurch in Bewegung, ohne zu kippen.



1. Was ist der Freiheitsgrad des Systems? Stellen Sie die Bewegungsdifferentialgleichungen auf.
2. Wie bewegt sich das System? Wie gross ist die Seilkraft?

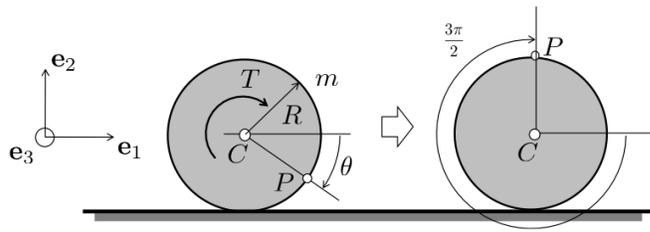
5. Ein Teilchen der Masse m wird an der Spitze eines Stabes der Länge L mit vernachlässigbarer Masse befestigt. Es dreht um den festen Punkt O mit dem Winkel $\theta(t) = a \cos^2(\Omega t)$, wobei $\Omega = \text{konst.}$ Das System bewegt sich in der $x_1 - x_2$ Ebene. Auf das System wirkt *keine* Schwerkraft.



Was ist der Betrag des Moments M_O , das auf den Punkt O ausgeübt werden muss, um das gegebene $\theta(t)$ zu erzeugen ?

- (a) $M_O = 2maL^2\Omega^2 \sin^2(2\Omega t)$
- (b) $M_O = maL^2\Omega^2$
- (c) $M_O = mL^2\Omega^2 \tan(\Omega t)$
- (d) $M_O = maL^2\Omega^2(\sin^2(2\Omega t) + 2 \cos^2(\Omega t))$
- (e) $M_O = 2maL^2\Omega^2(\sin^2(2\Omega t) - \cos^2(\Omega t))$

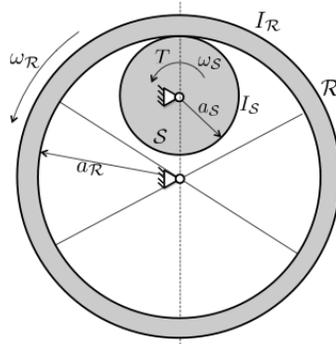
6. Eine Kreisscheibe der Masse m und des Radius R rollt ohne zu gleiten auf einer horizontalen Ebene. Sie wird mit einem konstanten Moment T belastet und befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ in Ruhe. Es wird angenommen, dass $\theta(0) = 0$ ist, wobei θ die Rotation der Scheibe angibt, wie gezeigt.



Wie gross ist die Beschleunigung \mathbf{a}_P des zur Scheibe gehörenden Punktes P , wenn $\theta = \frac{3}{2}\pi$?

- (a) $\mathbf{a}_P = \frac{4RT}{3mR^2}\mathbf{e}_1 - \frac{2\pi RT}{mR^2}\mathbf{e}_2$
 (b) $\mathbf{a}_P = \frac{2RT}{3mR^2}\mathbf{e}_1 + \frac{2\pi RT}{3mR^2}\mathbf{e}_2$
 (c) $\mathbf{a}_P = \frac{4RT}{3mR^2}\mathbf{e}_1$
 (d) $\mathbf{a}_P = \frac{RT}{mR^2}\mathbf{e}_1 + \frac{5\pi RT}{mR^2}\mathbf{e}_2$
 (e) $\mathbf{a}_P = \mathbf{0}$

7. Betrachten Sie das skizzierte Getriebesystem in der Abbildung. Das Sonnenrad S und das Hohlrad R haben die Radien a_S bzw. a_R , ihre Massenträgheitsmomente sind I_S bzw. I_R . Die Mittelpunkte der beiden Zahnräder sind gelenkig mit dem Boden verbunden. Ein Moment T wird auf das Sonnenrad ausgeübt, wenn sich das System in Ruhe befindet. Bezeichne mit ω_R und ω_S die Winkelgeschwindigkeiten des Hohlrads bzw. des Sonnenrads. Positive Richtungen sind in der Abbildung dargestellt.



Wie gross ist die Winkelbeschleunigung $\dot{\omega}_R$ des Hohlrads?

(a) $\dot{\omega}_R = \frac{T}{\frac{a_R}{a_S} I_S + \frac{a_S}{a_R} I_R}$

(b) $\dot{\omega}_R = \frac{T}{\frac{a_S}{a_R} I_S - \frac{a_S}{a_R} I_R}$

(c) $\dot{\omega}_R = \frac{T}{\frac{a_R}{a_S} (I_S + I_R)}$

(d) $\dot{\omega}_R = \frac{T}{\frac{a_R}{a_S}}$

(e) $\dot{\omega}_R = \frac{T}{\frac{a_S}{a_R} (I_S + I_R)}$