Übung 2

05.10.2021
Lina De Windt

Themen von Heute:

> Update Organisatorisches

> Teil 1: Fragen zu Themen / Aufgaben von letzter Woche?

> Teil 2: Theorie dieser Woche:

1. Satz der projizierten Geschwindigkeiten (SdpG)
2. ebene Bewegungen: Translation & Rotation
   - 2.1 Satz vom Momentanzentrum (SvM)
3. Räumliche Bewegungen

> Teil 3: Übungsaufgaben lösen (Serie 2)

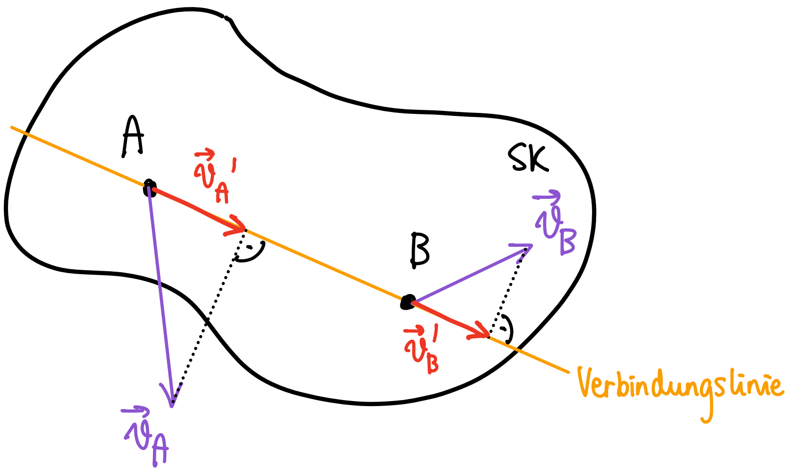
Teil 1: Fragen zu Themen von letzter Woche?

Teil 2: Recap der Theorie von dieser Woche:

1. Der Satz der projizierten Geschwindigkeiten (SdpG):

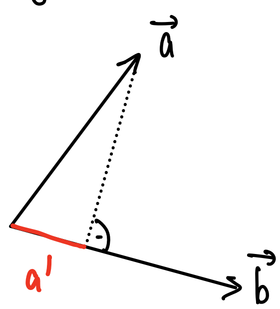
gilt für alle Starrkörper.

Dieser Satz besagt, dass die Projektionen (mit einem Strich ' gekennzeichnet) der Geschwindigkeiten von 2 Punkten auf einem SK auf ihre Verbindungslinie gleich sind:



$$\boxed{\vec{v}_A' = \vec{v}_B'}$$

So weit so gut, aber wie beschreibt man Projektionen mathematisch?



Die Projektion von $\vec{a}$ auf $\vec{b}$ ist: $\boxed{a' = \vec{a} \cdot \vec{e}_b}$

Achtung das ist ein Skalar.
("Anteil von $\vec{a}$ auf $\vec{b}$")

Falls ihr den Vektor braucht: $\vec{a}' = a' \cdot \vec{e}_b = (\vec{a} \cdot \vec{e}_b) \cdot \vec{e}_b$

Mit diesem Kenntnissen können wir den SdpG umformen zu:

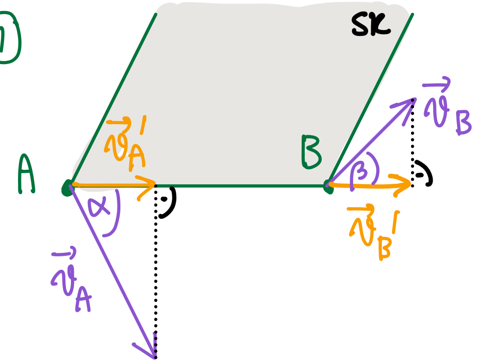
$$\vec{v}_A' = \vec{v}_B' \iff \vec{v}_A \cdot \vec{r}_{AB} = \vec{v}_B \cdot \vec{r}_{AB} \iff (\vec{v}_A - \vec{v}_B) \cdot \vec{r}_{AB} = 0$$

$$\iff \boxed{(\vec{v}_A - \vec{v}_B) \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_A) = 0}$$

Je nach Aufgabe kann die eine oder die andere Gleichung nützlich sein.
Im Kern sind diese Gleichungen alle äquivalent!

Beispiele:

1



Quiz: Welche Aussagen sind korrekt?

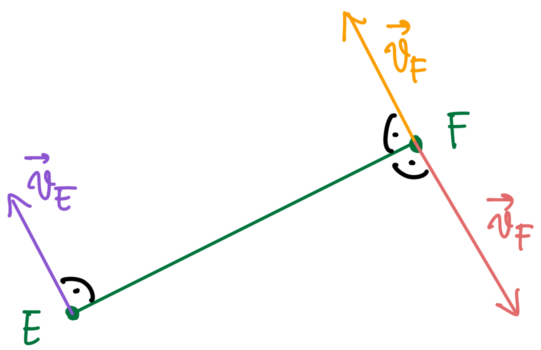
1) $\vec{v}_A \cdot \vec{e}_{AB} = \vec{v}_B \cdot \vec{e}_{AB}$

2) $\vec{v}_A' = \vec{v}_B'$

3) $\vec{v}_A = \vec{v}_B$

4) $v_A \cos(\alpha) = v_B \cos(\beta)$

2



Quiz: Welches ist der korrekte Geschwindigkeitsvektor von F?

1) $\vec{v}_F$

2) $\vec{v}_F$

3) Ohne weitere Informationen können wir das nicht wissen.

2. Ebene Bewegungen

Ebene Bewegungen sind einfach gesagt Bewegungen, die in Ebenen (2D) stattfinden.

Eine ebene Bewegung bezüglich der xy- Ebene erfüllt folgende Gleichungen:

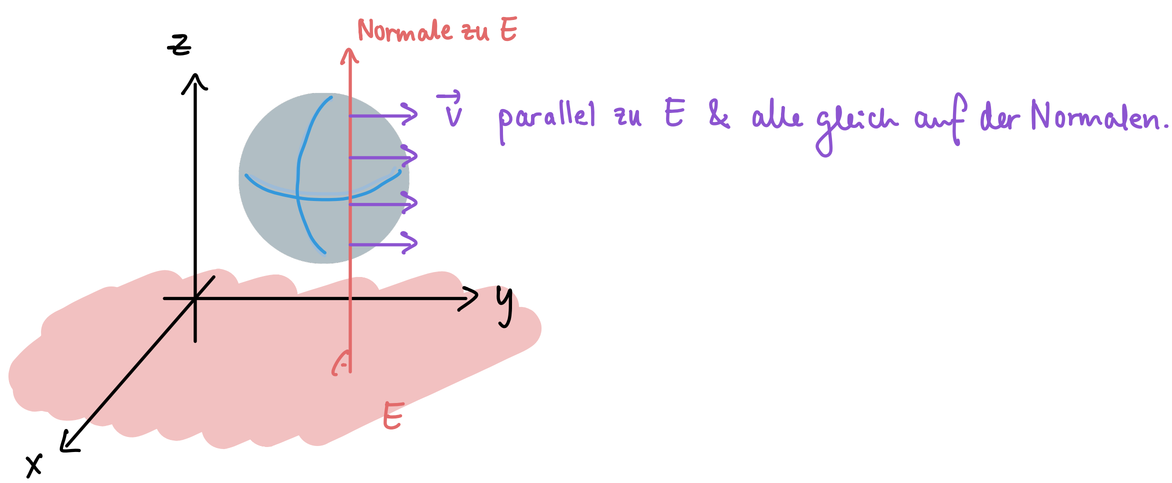
$$\begin{cases} v_z = 0 \\ v_x = v_x(x,y) \text{ und } v_y = v_y(x,y) \end{cases}$$

$v_z = 0$: keine Geschwindigkeit in z-Richtung $\Rightarrow$ alle $\vec{v}$ sind parallel zur xy-Ebene

$v_x = v_x(x,y)$ und $v_y = v_y(x,y)$: Die Geschwindigkeiten hängen nur von der x- und y-Koordinate ab.

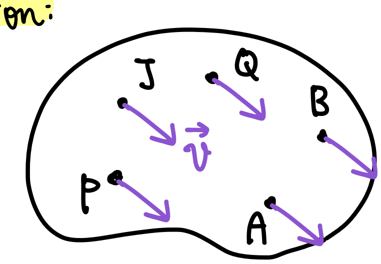
D.h. alle Punkte auf einer Normalen zu E haben die gleiche Geschwindigkeit.

z.B. das wäre eine ebene Bewegung auf der xy- Ebene:



Eine ebene Bewegung ist momentan entweder eine Translation oder eine Rotation:

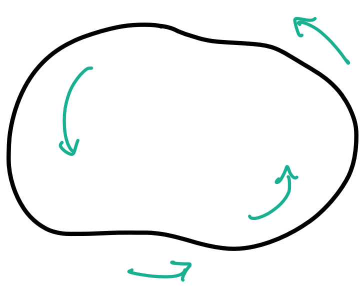
Translation:



$$\boxed{\vec{v}_P = \vec{v}_Q} \quad \forall P, Q \in SK$$

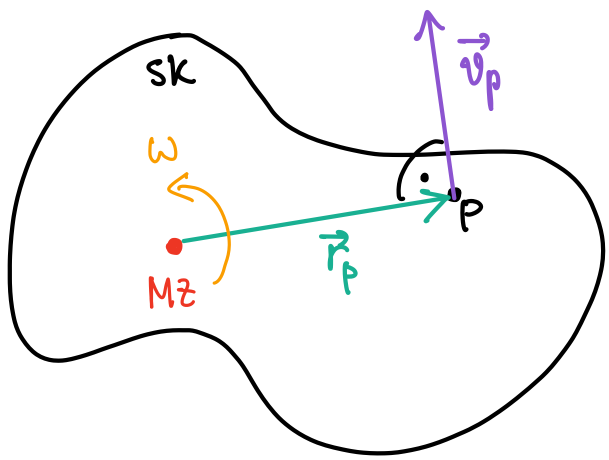
alle Punkte auf dem SK haben die gleiche Geschwindigkeit.

Rotation:



$\rightarrow$ SvM

2.1 Der Satz vom Momentanzentrum (SvM):



$$\boxed{\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{r}_P}$$

Achtung diese 2 nicht vertauschen!

Setup: M/MZ: Momentanzentrum

$\vec{\omega}$: Rotationsgeschwindigkeit (ist ein Vektor)

ω: Rotationsschnelligkeit (ist ein Skalar) $\omega = \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ (wichtig für Serie)

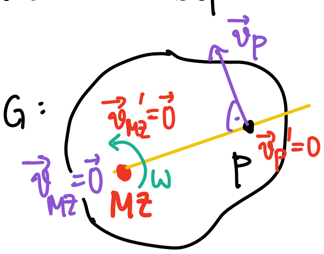
$\vec{r}_P$: Vektor vom MZ zum Punkt

Wichtig: $\vec{v}_P$ ist immer senkrecht zu $\vec{r}_P$ (Verbindungsgerade vom MZ zum Pkt.)

Warum? → 3 Argumente:

1) Intuition: Bsp. Bostitch

2) SdpG:



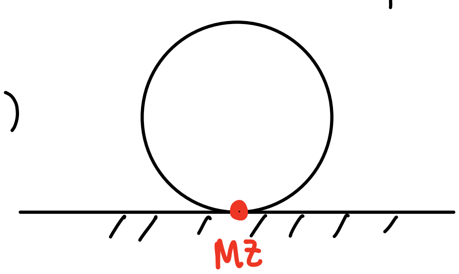
Das MZ hat $\vec{v}_{MZ} = \vec{0}$. ⇒ $\vec{v}_{MZ}'$ ist auch $\vec{0}$ auf alle möglichen Verbindungslinien. D.h. $\vec{v}_P' \overset{!}{=} \vec{0}$ $\forall P \in SK$.
⇒ das ist nur möglich wenn $\vec{v}_P \perp \vec{v}_{MZ}$ (oder $\vec{v}_P = 0$)

3) Kreuzprodukt: $\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{r}_P$ impliziert sofort, dass $\vec{v}_P \perp \vec{r}_P$ und $\vec{v}_P \perp \omega$

Aber... Was ist ein Momentanzentrum?

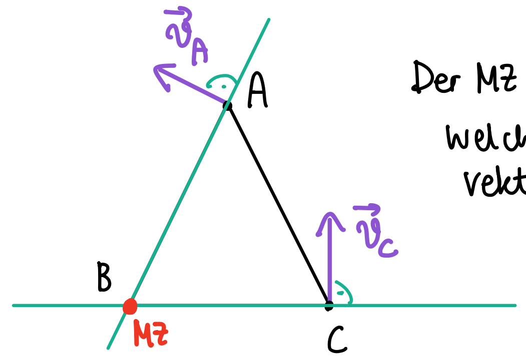
↳ Ein Momentanzentrum ist ein Punkt, der momentan in Ruhe (d.h. $\vec{v} = 0$) ist.

Beispiel Rad:
(gleitet nicht)



So weit so gut, aber wie bestimmt man Momentanzentren?

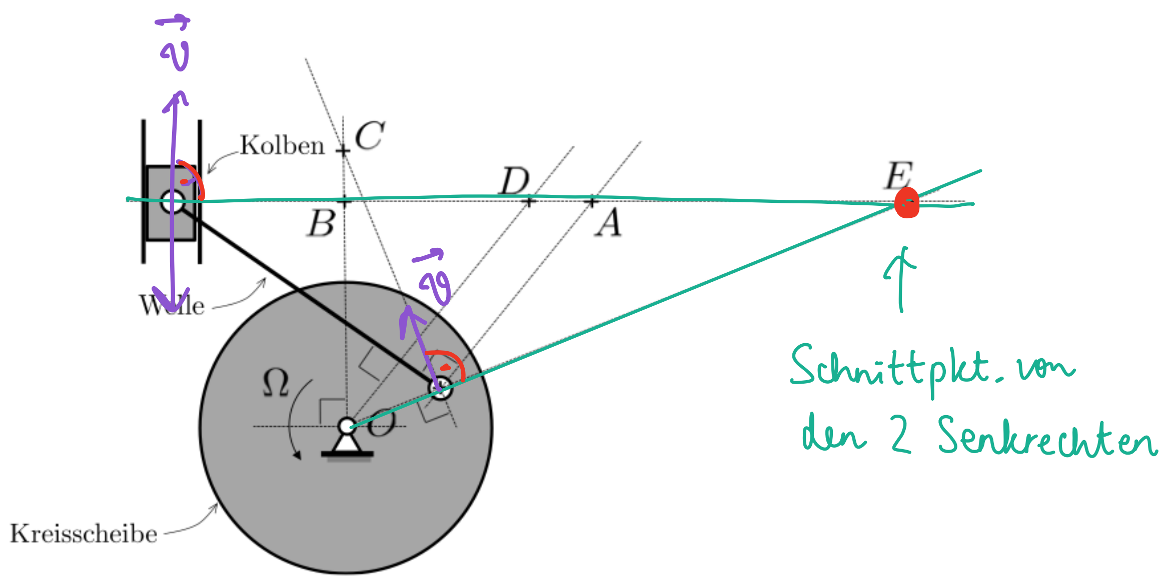
↳ Wir nutzen den Fakt aus, dass $\vec{v}_P \perp \vec{r}_{MP}$! → Konstruktion :)



Der MZ liegt auf dem Schnittpunkt der Geraden, welche senkrecht auf den Geschwindigkeits-vektoren stehen.

Bsp: Serie 2 Aufgabe 7:

7. Betrachten Sie den in der Abbildung dargestellten Kurbelwellenmechanismus. Die Kreisscheibe dreht sich um den Fixpunkt O mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω. Die Welle verbindet den Kolben mit der Scheibe über zwei Drehgelenke an ihren Spitzen . Der Kolben kann sich nur in vertikaler Richtung bewegen, wie in der Abbildung gezeigt. Alle Teile des Systems können als starr angenommen werden. Welcher Punkt ist das Momentanzentrum der Welle?



(a) A

(b) B

(c) C

(d) D

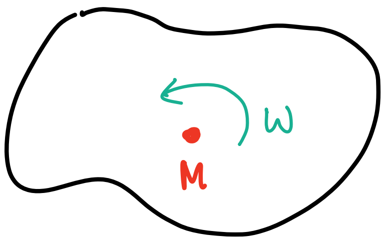
(e) E

Good to know: $\vec{\omega}$ und ω:

$\vec{\omega}$ ist der Rotationsvektor. Aber warte mal ... Was heisst überhaupt Rotationsvektor?

$\Rightarrow$ Dieser ist folgendermassen definiert:

Sagen wir wir haben einen SK, der um M dreht:

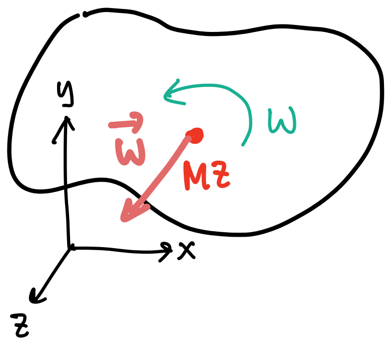


Dann zeichnen wir auch immer direkt ω ein.
ω ist der Betrag von $\vec{\omega}$, sprich

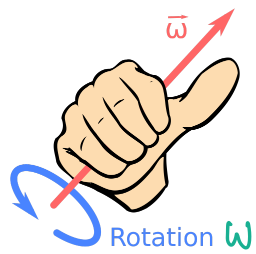
$$\omega = |\vec{\omega}| = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}.$$

Doch wo ist $\vec{\omega}$?

$\Rightarrow$

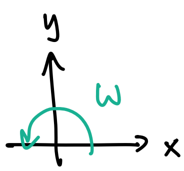


$\vec{\omega}$ ist nach der rechten-Hand-Regel mit ω verwandt. In diesem Bsp. ist $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$

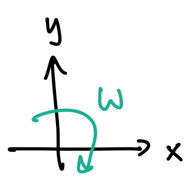


$\vec{\omega}$ zeichnen wir in 2D - Aufgaben schlicht nicht ein, weil dieser irrelevant ist (wenn $\vec{\omega}$ nur 1 Komponente hat brauchen wir nur ω für unsere Berechnungen) & weil es nicht einfach ist ihn einzuzeichnen (kommt aus dem Blatt raus / geht in das Blatt hinein)

Merkt euch einfach:

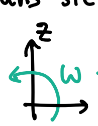


$\rightarrow \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$

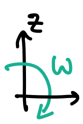


$\rightarrow \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega \end{pmatrix}$

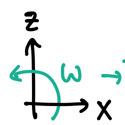
Falls sie gemein sind:



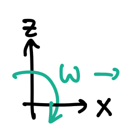
$\rightarrow \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$



$\rightarrow \vec{\omega} = \begin{pmatrix} -\omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$



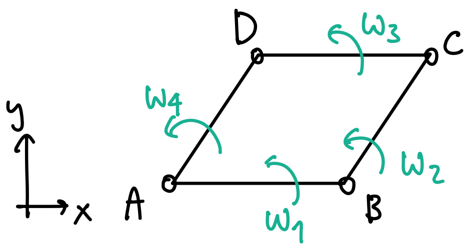
$\rightarrow \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega \\ 0 \end{pmatrix}$



$\rightarrow \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{pmatrix}$

usw.

Good to know: Die Parallelogrammregel:



$\boxed{\omega_1 = \omega_3}$ und $\boxed{\omega_2 = \omega_2}$

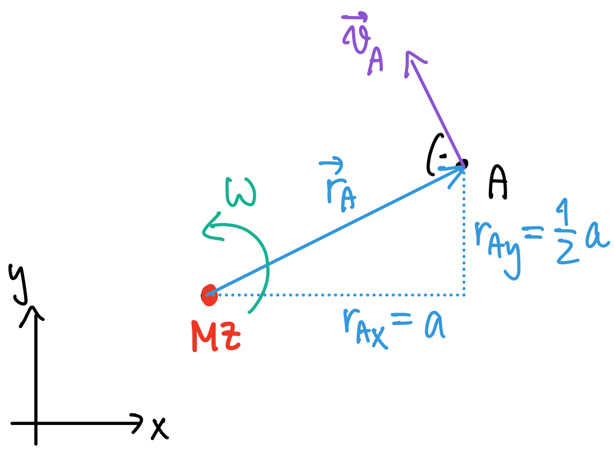
(für Betrag & Richtung)

Good to know: SvM in 2D:

$$\vec{v}_P = \begin{pmatrix} \pm r_{P_y} \omega \\ \pm r_{P_x} \omega \end{pmatrix}$$

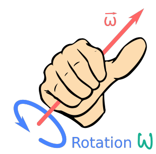
↑ Vorzeichen bestimmen mittels rechte-Hand-Regel.

Beispiel:



Vorgehen:

1. Geschwingkeitsvektor einzeichnen
   ↪ Rechte-Hand-Regel!



$$\Rightarrow \vec{v}_A = \begin{pmatrix} - \\ + \end{pmatrix}$$

Vorzeichen bestimmt :)

2. $r_{Ax} \cdot \omega$ in y- und $r_{Ay} \cdot \omega$ in x-Komponente von $\vec{v}_A$ einsetzen

$$\Rightarrow \vec{v}_A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} a\omega \\ a\omega \end{pmatrix}$$

Herleitung: über Kreuzprodukt:

$\vec{v}$ in 2D:

nur z-Komponente →

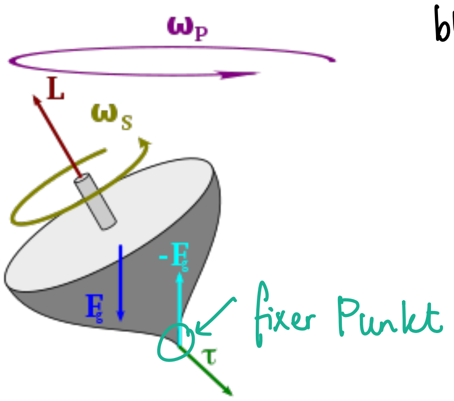
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r_{Ax} \\ r_{Ay} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r_{Ay}\omega \\ r_{Ax}\omega \\ 0 \end{pmatrix}$$

↑ keine z-Komponente

ist genau diese Formel

3. Räumliche Bewegungen:

Kreiselung: Ist nichts anderes als eine Rotation, aber $\vec{\omega}$ "rotiert" auch. Dabei bleibt nur ein Punkt des SK fixiert.



Eine Kreiselung ist momentan eine Rotation! d.h. $\boxed{\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{r}_P}$ (SvM) gilt immernoch.

3.1 Die Starrkörperformel (ABBA-Formel):

ist die allgemeine Formel für eine SK-Bewegung:

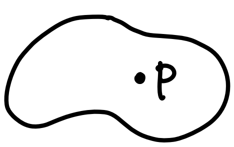
$$\boxed{\vec{v}_A = \underbrace{\vec{v}_B}_{\text{Translationskomponente}} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}}_{\text{Rotationskomponente}}}$$

Translation:

Rotation:

Die Kinemate: beschreibt die Bewegung eines SK komplett!

Sie ist immer bezogen auf einen ausgewählten Punkt eines SK.



Kinemate von Punkt P $= \boxed{\{\vec{v}_P, \vec{\omega}\}}$

Invarianten der Kinemate: → Thema von nächster Woche

"ändern sich nicht" → d.h. für alle Punkte des SK gleich.

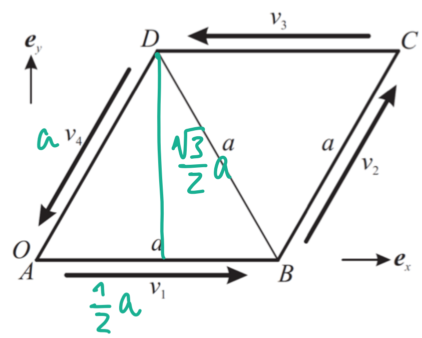
1) $\boxed{I_1 = \vec{\omega}}$ (Rotationsgeschwindigkeit)

2) $\boxed{I_2 = \vec{v}_P \cdot \vec{\omega}}$

Teil 3: Übungsaufgaben - Serie 2

1. [1] Der momentane Bewegungszustand einer Rhombusplatte (Geometrie siehe Skizze) ist durch die vier skizzierten Komponenten v_1 , v_2 , v_3, v_4 der Geschwindigkeiten in Richtung der Seiten gegeben.

Beispiel: Die Geschwindigkeit v_1 ist also die Projektion der Geschwindigkeit des Punktes A entlang der Seite AB.



1. Finden Sie die Geschwindigkeiten der Eckpunkte.
2. Welche Beziehung muss zwischen v_1, v_2, v_3 und v_4 bestehen, damit der Satz der projizierten Geschwindigkeiten erfüllt ist?
3. Unter welchen Bedingungen ist die Bewegung eine Translation?

1) $v_1 = \vec{v}_A \cdot \vec{e}_{AB} = \begin{pmatrix} v_{Ax} \\ v_{Ay} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v_{Ax} \Rightarrow v_{Ax} = v_1$

$$v_4 = \vec{v}_A \cdot \vec{e}_{DA} = \begin{pmatrix} v_{Ax} \\ v_{Ay} \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}}_{\text{kein a weil Einheitsvektor!}} = -\frac{1}{2} v_{Ax} - \frac{\sqrt{3}}{2} v_{Ay} =$$

$$\Leftrightarrow v_4 \underset{v_{Ax} = v_1}{=} -\frac{1}{2} v_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} v_{Ay}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} v_{Ay} = -\frac{1}{2} v_1 - v_4$$

$$v_{Ay} = -\frac{1}{\cancel{2}} v_1 \cdot \frac{\cancel{2}}{\sqrt{3}} - v_4 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{-v_1 - 2v_4}{\sqrt{3}} = -\frac{v_1 + 2v_4}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_A = \begin{pmatrix} v_{Ax} \\ v_{Ay} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ -\frac{v_1 + 2v_4}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

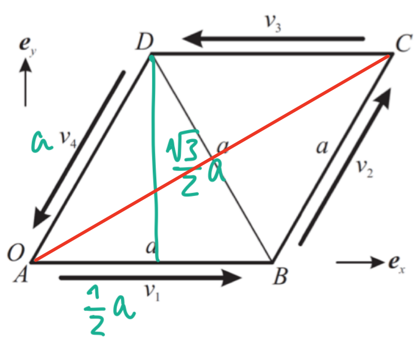
→ analog für $\vec{v}_B, \vec{v}_C, \vec{v}_D$

dann erhaltet man: $\vec{v}_B = \begin{pmatrix} v_1 \\ \frac{2v_2 - v_1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

$$\vec{v}_C = \begin{pmatrix} -v_3 \\ \frac{2v_2 + v_3}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_D = \begin{pmatrix} -v_3 \\ -\frac{2v_4 - v_3}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

2) SdpG:



hier anwenden

SdpG auf Diagonale AC anwenden: $\boxed{(\vec{v}_C - \vec{v}_A) \cdot \vec{r}_{AC} \overset{!}{=} 0}$

Warum?

→ auf den Seiten gilt sie schon! → keine neuen Informationen.

z.B. AB: $(\vec{v}_A - \vec{v}_B) \cdot \vec{r}_{BA} = 0$

$$\Rightarrow \left(\begin{pmatrix} v_1 \\ -\frac{2v_4 + v_1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_1 \\ \frac{2v_2 - v_1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \right) \cdot AB \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-2v_4 - v_1 - 2v_2 + v_1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot AB = 0$$

$$\Rightarrow (\vec{v}_C - \vec{v}_A)\cdot \vec{r}_{AC} = \left[\begin{pmatrix} -v_3 \\ \frac{2v_2+v_3}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_1 \\ -\frac{2v_4+v_1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{2}a \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -v_3 - v_1 \\ \frac{2v_2+v_3+2v_4+v_1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{2}a \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}a\cdot(-v_3 - v_1) + \frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\left(\frac{2v_2+v_3+2v_4+v_1}{\sqrt{3}}\right) = 0 \qquad /\div a$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{2}(v_1+v_3) + \frac{1}{2}\cdot(2v_2+v_3+2v_4+v_1) = 0$$

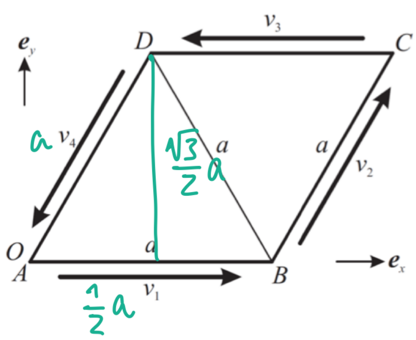
$$\Leftrightarrow -\frac{3}{2}v_1 - \frac{3}{2}v_3 + v_2 + \frac{1}{2}v_3 + v_4 + \frac{1}{2}v_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -v_1 - v_3 + v_2 + v_4 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{v_1 + v_3 = v_2 + v_4}}$$ Starrkörperbedingung.

3) Translation: alle Punkte auf dem SK haben die gleiche Geschwindigkeit.

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}_A = \vec{v}_B = \vec{v}_C = \vec{v}_D}$$



nehme wieder die Diagonale AC: $\vec{v}_A = \begin{pmatrix} v_{Ax} \\ v_{Ay} \end{pmatrix} \overset{!}{=} \vec{v}_C = \begin{pmatrix} \vec{v}_{Cx} \\ \vec{v}_{Cy} \end{pmatrix}$

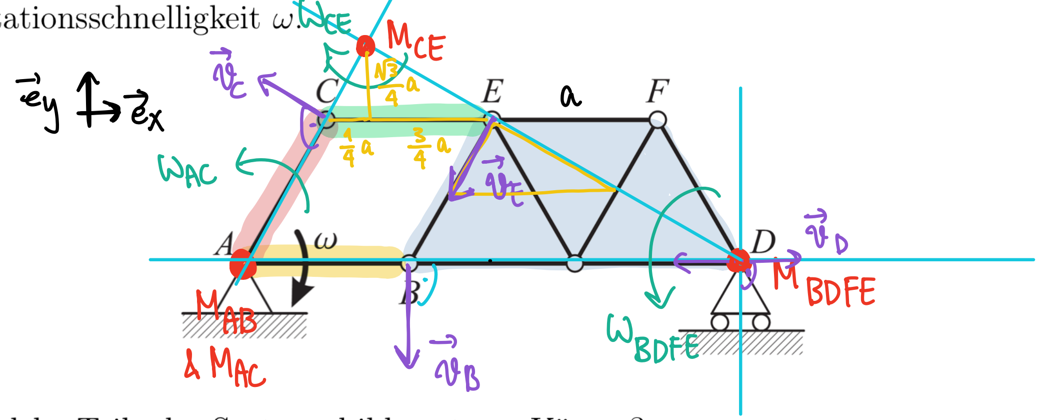
$$\Rightarrow \begin{cases} v_{Ax} \overset{!}{=} v_{Cx} \Rightarrow v_1 = -v_3 \Rightarrow \boxed{v_1 + v_3 = 0} \quad \text{und} \\ v_{Ay} \overset{!}{=} v_{Cy} \Rightarrow -\dfrac{2v_4 + v_1}{\sqrt{3}} = \dfrac{2v_2 + v_3}{\sqrt{3}} \quad \Big/ \cdot \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -2v_4 - v_1 = 2v_2 + v_3 \quad \Big/ \; v_1 = -v_3 \text{ einsetzen}$$

$$\Leftrightarrow 2v_2 + \cancel{v_3} - \cancel{v_3} + 2v_4 = 0 \quad \Big/ \div 2$$

$$\boxed{v_2 + v_4 = 0}$$

2. [2] Das in der Skizze dargestellte ebene System besteht aus zehn starren Stäben gleicher Länge, die gelenkig miteinander verbunden sind. Der Stab AB rotiert momentan mit der Rotationsschnelligkeit ω.



1. Welche Teile des Systems bilden starre Körper?
2. In welche Richtung rotiert der Stab AC? Wie gross ist seine Rotationsschnelligkeit?

1) siehe Farben

2) Schritt 1: alle Mz & Geschwindigkeiten einzeichnen

Schritt 2: ω_{AC} bestimmen, explizit: 3 Schritte:

① ω_{BDFE} über $\vec{v}_B$ finden:

$$\vec{v}_B = \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega a \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{!}{=} \vec{\omega}_{BDFE} \times \vec{r}_{DA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{BDFE} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2a\omega_{BDFE} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gleichsetzen mit 2. Gleichung für $\vec{v}_B$ (vom M_{BDFE})

$$\Rightarrow -\omega a = -2a\omega_{BDFE} \Rightarrow \omega_{BDFE} = \frac{1}{2}\omega$$

② ω_{CE} über $\vec{v}_E$ finden:

$$\vec{v}_E = \vec{\omega}_{BDFE} \times \vec{r}_{DE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2}\omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}a \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a\omega \\ -\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\omega a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{4}a\omega \\ -\frac{3}{4}a\omega \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{!}{=} \vec{\omega}_{CE} \times \vec{r}_{M_{CE}E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega_{CE} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{3}{4}a \\ -\frac{\sqrt{3}}{4}a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{4}a\omega_{CE} \\ -\frac{3}{4}a\omega_{CE} \\ 0 \end{pmatrix}$$

x-Komponente $\Rightarrow$ $-\frac{\sqrt{3}}{4}a\omega_{CE} = -\frac{\sqrt{3}}{4}a\omega \Rightarrow \omega_{CE} = \omega$

(funktioniert mit y-Komponente natürlich auch)

↳ guter Check-Point!

③ ω_{AC} über $\vec{v}_C$ bestimmen:

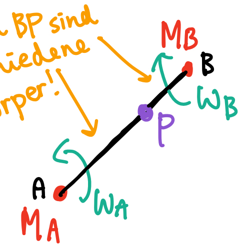
$$\vec{v}_C = \vec{\omega}_{CE} \times \vec{r}_{M_{CE}C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}a \\ -\frac{\sqrt{3}}{4}a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{4}a\omega \\ \frac{1}{4}a\omega \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{!}{=} \vec{\omega}_{AC} \times \vec{r}_{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{AC} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2}a\omega_{AC} \\ \frac{1}{2}a\omega_{AC} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{4}a\omega = -\frac{\sqrt{3}}{2}a\omega_{AC} \Rightarrow \underline{\underline{\omega_{AC} = \frac{1}{2}\omega}}$$

Tipp: Wenn MZ bekannt: ω über inverse Verhältnisse der Radien bestimmen:

Achtung: Die Stäbe AP und BP sind 2 verschiedene Starrkörper!



$$\boxed{\frac{\omega_A}{\omega_B} = \frac{r_{BP}}{r_{AP}}}$$

Herleitung: SvM: $\boxed{v_P = \omega \cdot r_P}$ (in 2D).

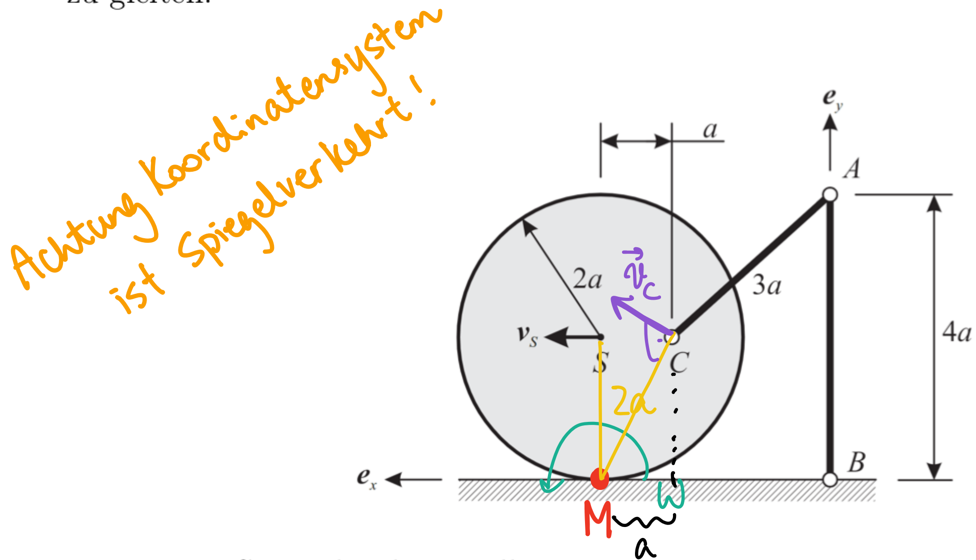
wir haben $v_P = \omega_A \cdot r_{AP} \stackrel{!}{=} \omega_B \cdot r_{BP}$

$\Leftrightarrow \frac{\omega_A r_{AP}}{\omega_B r_{BP}} = 1 \Leftrightarrow \frac{\omega_A}{\omega_B} = \frac{r_{BP}}{r_{AP}}$

$$\frac{\omega_{BDFE}}{\omega} = \frac{1}{2} \quad ; \quad \frac{\omega_{EC}}{\omega_{BDFE}} = \frac{2}{1} \quad ; \quad \frac{\omega_{AC}}{\omega_{EC}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\omega_{AC}}{\omega_{EC}} \cdot \frac{\omega_{EC}}{\omega_{BDFE}} \cdot \frac{\omega_{BDFE}}{\omega} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{\omega_{AC}}{\omega} \rightarrow \underline{\underline{\omega_{AC} = \frac{1}{2}\omega}}$$

3. [3] Das eben modellierte System besteht aus einer Walze und zwei Stangen. Die Walze rollt mit der konstanten (Mittelpunkts-) Geschwindigkeit $\mathbf{v}_s = v_s \mathbf{e}_x$ nach links, ohne zu gleiten.



Bestimmen Sie in der dargestellten Lage:

1. Das Momentanzentrum und die Rotationsschnelligkeit der Walze.
2. Die Geschwindigkeit und die Schnelligkeit des Punktes C.
3. Die Rotationsschnelligkeit ω_{AB} und das Momentanzentrum des Stabes AB.
4. Die Rotationsschnelligkeit ω_{AC} und das Momentanzentrum des Stabes AC.

1) MZ: siehe Skizze

$$\vec{v}_S = \vec{\omega} \times \vec{r}_{MS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a\omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \underbrace{\begin{pmatrix} v_s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{Aus Aufgabe}}$$

$$\Rightarrow \quad 2a\omega = v_s \quad \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{v_s}{2a}}$$

2) Punkt C liegt auf der Walze $\Rightarrow$ MZ gleich wie S (M)

Geschw.: $\vec{v}_C = \vec{\omega} \times \vec{r}_{MC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a \\ 2a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a\omega \\ a\omega \\ 0 \end{pmatrix} =$

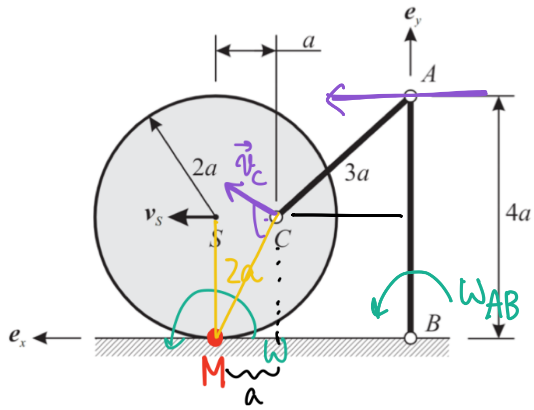
$$= \begin{pmatrix} 2a\omega \\ a\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot \frac{v_s}{2a} \\ a \cdot \frac{v_s}{2a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_s \\ \frac{1}{2} v_s \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{2} v_s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

2D-Aufgabe :) $\omega = \frac{v_s}{2a}$

$$\omega = \frac{v_s}{2a}$$

Schnelligkeit: $v_C = |\vec{v}_C| = \sqrt{4(a\omega)^2 + (a\omega^2)} = a\omega\sqrt{4+1} = \sqrt{5}\,a\omega = \sqrt{5}\cdot a\frac{v_s}{2a} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{5}}{2}v_s}}$

3) SdpG:



$$\vec{v}_C\cdot\vec{AC} = \vec{v}_A\cdot\vec{AC} \Rightarrow \vec{v}_C\cdot\vec{AC} - \vec{v}_A\cdot\vec{AC} \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{(\vec{v}_C - \vec{v}_A)\cdot\vec{AC} = 0}$$

Komponenten bestimmen:

$\vec{v}_C = \frac{1}{2}v_s\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ (Teilaufgabe 2)

Richtung von ω_{AB}: SdpG mit $\vec{v}_C$ <u>und</u> $\perp$ zu $\vec{r}_{AB}$ → nur 1 Möglichkeit → siehe Skizze

$$\vec{v}_A = \vec{\omega}_A\times\vec{r}_{BA} = \begin{pmatrix}0\\0\\-\omega_{AB}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\4a\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4a\omega_{AB}\\0\\0\end{pmatrix} = 4a\omega_{AB}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

vereinfachen (2D)

$\vec{AC} = \begin{pmatrix}-\sqrt{5}a\\2a\end{pmatrix}$ ← Pythagoras: $\sqrt{(3a)^2-(2a)^2} = a\cdot\sqrt{9-4} = \sqrt{5}a$

$$\Rightarrow (\vec{v}_C - \vec{v}_A)\cdot\vec{CA} = \left(\frac{1}{2}v_s\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} - 4a\omega_{AB}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}-\sqrt{5}a\\2a\end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}v_s - 4a\omega_{AB}\\\frac{1}{2}v_s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\sqrt{5}a\\2a\end{pmatrix} = -(v_s - 4a\omega_{AB})\cdot\sqrt{5}a + av_s = 0 \quad /\div a$$

$$\Leftrightarrow \; -(v_s - 4a\omega_{AB})\sqrt{5} + v_s = 0 \qquad \Big/ \text{ ausmultiplizieren}$$

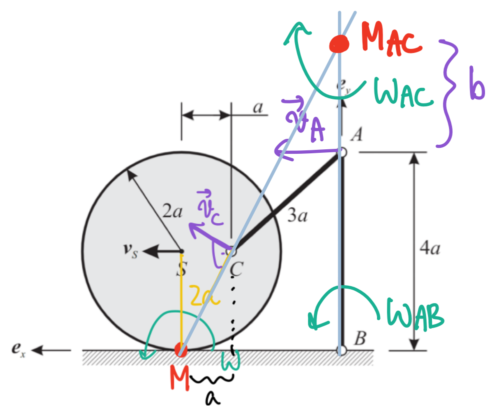
$$\Leftrightarrow \; -\sqrt{5}\,v_s + 4\sqrt{5}\,a\omega_{AB} + v_s = 0 \qquad \Big/ \text{ nach } \omega_{AB} \text{ auflösen}$$

$$\Leftrightarrow \; 4\sqrt{5}\,a\omega_{AB} = (\sqrt{5}-1)\,v_s \qquad \Big/ \div 4\sqrt{5}a$$

$$\Leftrightarrow \; \omega_{AB} = \frac{(\sqrt{5}-1)\,v_s}{4\sqrt{5}\,a} \qquad \Big/ \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \text{ (erweitern)}$$

$$\Rightarrow \; \boxed{\omega_{AB} = \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{5}\right)\frac{v_s}{4a}}$$

4)



M_{AC} wie in Skizze.

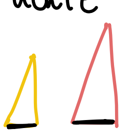
ω_{AC}: über $\vec{v}_A$ bestimmen:

$$\vec{v}_A = \vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{BA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega_{AB} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 4a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a\omega_{AB} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

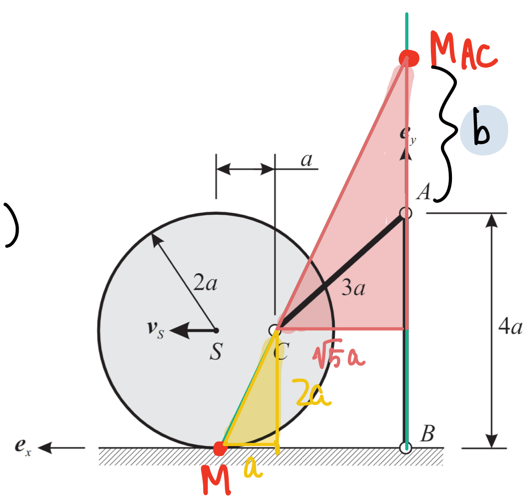
$$\overset{!}{=} \vec{\omega}_{AC} \times \vec{r}_{M_{AC}A}$$

$\vec{r}_{M_{AC}A}$ bestimmen: Ähnlichkeitssatz: (b unbekannt)

betrachte gelbes & rotes Dreieck:



← diese Längen sind bekannt.



$\triangle = \sqrt{5}\cdot\triangle$ → gilt für alle Seiten.

Somit haben wir, dass $\triangle = \sqrt{5}\cdot\triangle = 2\sqrt{5}a$

$$\Rightarrow b = 2\sqrt{5}a - 2a = 2a(\sqrt{5}-1)$$

in $\vec{v}_A = \vec{\omega}_{AC}\times\vec{r}_{M_{AC}A}$ einsetzen:

$$\vec{v}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{AC} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -2a(\sqrt{5}-1) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a\omega_{AC}(\sqrt{5}-1) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 4a\omega_{AB} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{\omega}_{AB}\times\vec{r}_{BA}$$

$$\Rightarrow 2a\omega_{AC}(\sqrt{5}-1) = 4a\omega_{AB}$$

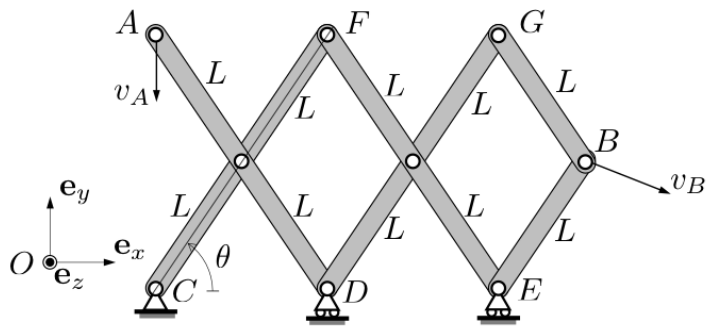
$$\Leftrightarrow \omega_{AC} = \frac{\cancel{4}\cancel{a}\omega_{AB}}{\cancel{2}\cancel{a}(\sqrt{5}-1)} = \frac{2\omega_{AB}}{(\sqrt{5}-1)}$$

$$\Rightarrow \omega_{AC} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{(\sqrt{5}-1)}}\cdot\frac{\cancel{(\sqrt{5}-1)}v_s}{\cancelto{2}{4}\sqrt{5}a} = \frac{v_s}{2\sqrt{5}a} = \boxed{\frac{\sqrt{5}}{10a}v_s}$$

$\omega_{AB} = \dfrac{(\sqrt{5}-1)}{4\sqrt{5}a}$ (aus Teilaufgabe 3)

$\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

4. Das gezeigte System besteht aus starren Stäben der Längen $2L$ und L, die an ihren Mittel- und Endpunkten gelenkig miteinander verbunden sind, wie auf der Skizze dargestellt. Der Punkt C ist am Boden angelenkt, während die Punkte D und E dürfen sich nur in der dargestellten horizontalen $\mathbf{e}_x$-Richtung bewegen. Die Geschwindigkeit $\mathbf{v}_A = -v_A\mathbf{e}_y$ des Punktes A ist bekannt. Bezeichnen Sie mit θ den Winkel, den der Stab CF mit der $\mathbf{e}_1$ -Richtung einschliesst.



(a) $\mathbf{v}_B = \frac{5}{2}v_A \tan\theta \mathbf{e}_x - \frac{1}{2}v_A\mathbf{e}_y$

(b) $\mathbf{v}_B = \frac{1}{2}v_A \tan\theta \mathbf{e}_x$

(c) $\mathbf{v}_B = \frac{3}{2}v_A \sin\theta \mathbf{e}_x - \frac{1}{5}v_A \cos\theta\mathbf{e}_y$

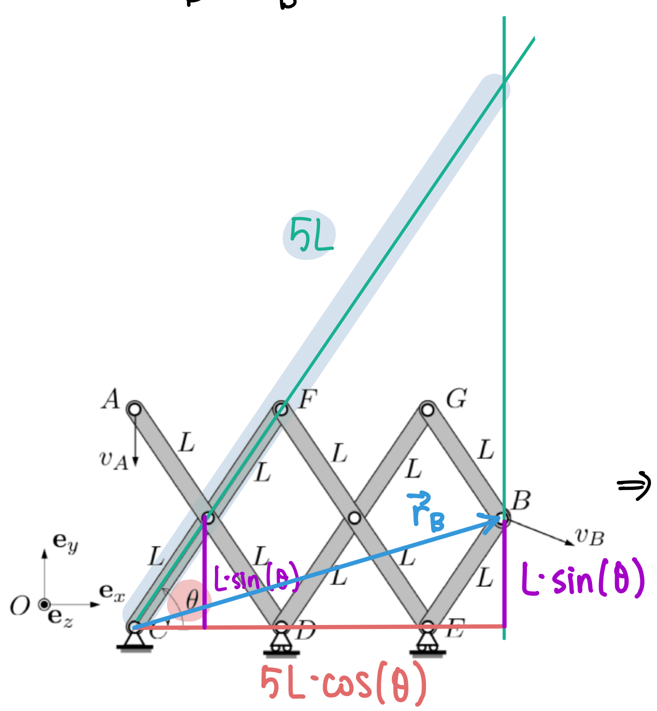
(d) $\mathbf{v}_B = \frac{3}{2}v_A \cos\theta \mathbf{e}_x - \frac{1}{2}v_A \sin\theta\mathbf{e}_y$

(e) $\mathbf{v}_B = \frac{5}{2}v_A \cos\theta \mathbf{e}_x$

Was ist die Geschwindigkeit $\mathbf{v}_B$ des Punktes B?

Achtung $\theta = \theta(t)$
(zeitabhängig)

$\Rightarrow$ $\vec{r}_B$ bestimmen & $\vec{v}_B = \dot{\vec{r}}_B$



das ist egal, weil zeitunabhängig.

$$\Rightarrow \vec{r}_B = \begin{pmatrix} 5L\cos(\theta(t)) \\ L\sin(\theta(t)) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \end{pmatrix}$$

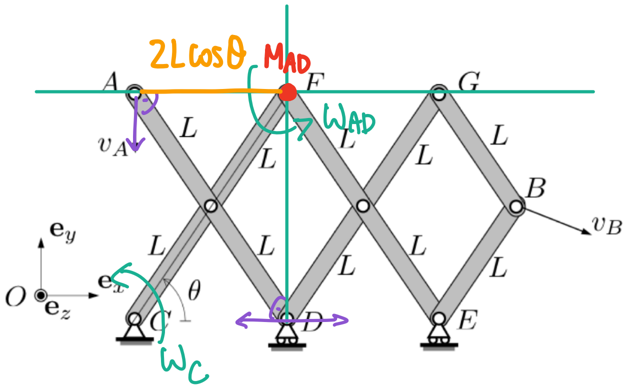
komponentenweise ableiten

Kettenregel

$$\vec{v}_B = \dot{\vec{r}}_B = \begin{pmatrix} 5L\dot{\cos}(\theta(t)) \\ L\dot{\sin}(\theta(t)) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{C}_x \\ \dot{C}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5L\dot{\theta}(t)\sin(\theta(t)) \\ L\dot{\theta}(t)\cos(\theta(t)) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_B = \begin{pmatrix} -5L\dot{\theta}(t)\sin(\theta(t)) \\ L\dot{\theta}(t)\cos(\theta(t)) \end{pmatrix}$$

aber was ist $\dot{\theta}(t)$? $\qquad \dot{\theta}(t) = \dfrac{d\theta(t)}{dt} = \omega$



$$\Rightarrow \vec{v}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{AD} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2L\cos\theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2L\omega_{AD}\cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ -v_A \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aus Aufgabe

$$\Rightarrow -2L\omega_{AD}\cos(\theta) = -v_A$$

$$\Leftrightarrow \omega_{AD} = \frac{v_A}{2L\cos(\theta)}$$

aus Symmetriegründen ist $\omega_C = \dot{\theta}(t) = -\omega_{AD}$

$$\Rightarrow \dot{\theta}(t) = -\frac{v_A}{2L\cos(\theta(t))}$$

→ $\dot{\theta}(t)$ in Gleichung für $\vec{v}_B$ einsetzen:

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

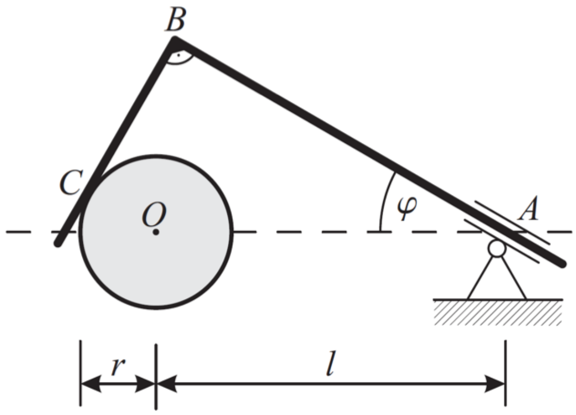
$$\vec{v}_B = \begin{pmatrix} -5L\dot{\theta}(t)\sin(\theta(t)) \\ L\dot{\theta}(t)\cos(\theta(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cancel{L}\dfrac{v_A}{2\cancel{L}\cos(\theta(t))}\cdot\sin(\theta(t)) \\ -\cancel{L}\cdot\dfrac{v_A}{2\cancel{L}\cancel{\cos(\theta(t))}}\cdot\cancel{\cos(\theta(t))} \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \dfrac{5v_A}{2}\tan(\theta) \\ -\dfrac{v_A}{2} \end{pmatrix}} \circledast$$

in Mulö : $\vec{v}_A = \frac{5}{2}v_A\tan(\theta)\vec{e}_x - \frac{1}{2}v_A\vec{e}_y$ (Schreibweise ist anders aber lö ist äquivalent)

(*) <u>Bem:</u> Zeitliche Abhängigkeiten $\theta(t)$, $x(t)$ usw. werden oft nicht ausführlich angegeben (d.h. sie schreiben einfach θ, x, usw.), anscheinend um Tinte zu sparen (hat mir mal ein Dozent gesagt)

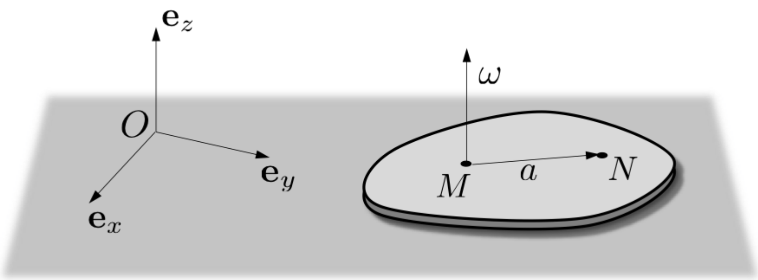
→ nicht verwirren lassen!

5. [4] Zwei starr im rechten Winkel verbundene Stäbe bewegen sich so, dass der eine Stab an einem Kreis vom Radius r gleitet und der andere durch den festen Punkt A (Abstand l vom Zentrum des Kreises) geht.



1. Zeichnen Sie in der gegebenen Lage die Richtungen der Geschwindigkeiten $\mathbf{v}_A$ und $\mathbf{v}_C$ der Stabpunkte A und C ein.
2. Bestimmen Sie geometrisch das Momentanzentrum.
3. Es sei die Schnelligkeit v_C gegeben. Bestimmen Sie die Rotationsschnelligkeit ω sowie die Schnelligkeiten der Stabpunkte A und B.

6. Betrachten Sie den Starrkörper auf der Skizze. Sei $\mathbf{a}$ der Abstandsvektor zwischen 2 beliebigen Punkten des Körpers M und N, und sei $|\mathbf{a}| = 2$. Der Körper rotiert um M in der Ebene $z = 0$ mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_z$.
Welche der folgenden Aussagen ist/sind zutreffend?



(a) $\dot{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{a} = 0$

(b) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 2$

(c) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) = 2$

(d) $\dot{\mathbf{a}} = \omega \dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$

(e) $\mathbf{a} \times \dot{\mathbf{a}} = \mathbf{0}$