

Themen von Heute: Heute ist wenig Theorie, wir werden viele Aufgaben lösen 😊

> **Teil 1:** Fragen zu Themen / Aufgaben von letzter Woche?

> **Teil 2:** Recap der Theorie von dieser Woche:

> letztes Thema in Kinematik:

- 1. Räumliche Bewegungen:
 - 1.1 Kreiselung
 - 1.2 Starrkörperformel
 - 1.3 Die Kinematik (& deren Invarianten)

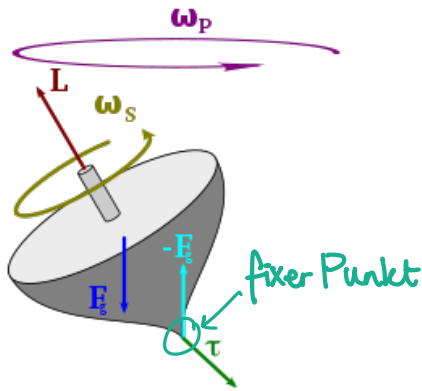
> **Teil 3:** Übungsaufgaben lösen (Serie 3)

Teil 1: Fragen zu Themen von letzter Woche?

Teil 2: Recap der Theorie von dieser Woche

1. Räumliche Bewegungen:

Kreiselung: Ist nichts anderes als eine Rotation, aber $\vec{\omega}$ "rotiert" auch. Dabei



bleibt nur ein Punkt des SK fixiert.

Eine Kreiselung ist momentan eine Rotation! dh. $\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{r}_P$ (svM) gilt immernoch.

1.1 Die Starrkörperformel (SK-Formel, a.k.a. ABBA-Formel):

ist die allgemeine Formel für eine SK-Bewegung:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}$$

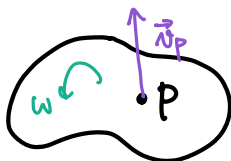
Translationskomponente Rotationskomponente

Translation: $\vec{\omega} = 0 \Rightarrow \vec{v}_A = \vec{v}_B \quad \forall \text{ Punkte } \in \text{SK}$

reine Rotation (um den Pkt. B): $\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_{BA} \quad \leftarrow \text{svM!}$

1.2 Die Kinematik: beschreibt die Bewegung eines SK komplett! *

Sie ist immer bezogen auf einem ausgewählten Punkt eines SK.



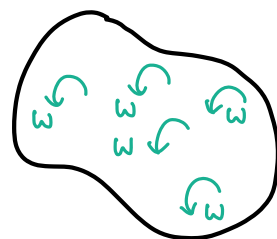
Kinematik von Punkt P = $\{\vec{v}_P, \vec{\omega}\}$

1.3 Invarianten der Kinematik:

"ändern sich nicht" → d.h. für alle Punkte auf einem SK gleich.

1) $I_1 = \vec{\omega}$ (Rotationsgeschwindigkeit)

2) $I_2 = \vec{\omega} \cdot \vec{v}_p$ $\forall$ Punkte $\in$ Starrkörper



egal wo ihr euch auf dem SK befindet, ω ist gleich!

Übersicht der Invarianten der Kinematik & entsprechender Bewegungszustand:

	$I_2 = 0$	$I_2 \neq 0$
$I_1 = 0$	Translation / Stillstand	—
$I_1 \neq 0$	Rotation	Schraubung

Zusatz: nützliche Rechenregeln für die Serie:

Good to know: die Grassmann-Identität für das Kreuzprodukt:

$$\begin{aligned}\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} \\ (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} &= (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{a}\end{aligned}$$

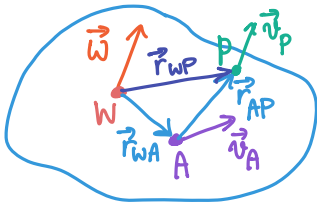
evtl. werdet ihr das in der Serie benutzen

Good to know: $\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2$ Why? $\rightarrow \vec{a} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = a^2$

Erinnerung: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

Für Interessierte:

* Warum beschreibt die Kinematik die Bewegung eines SKs komplett?



Wenn wir $\vec{\omega}$ und die Geschwindigkeit eines Punktes auf dem SK kennen, können wir daraus die Geschwindigkeiten aller Pkte auf dem SK bestimmen!

Bsp: Seien $\vec{\omega}$ und $\vec{v}_A$ bekannt. Dann: $\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_{WA}$

Was ist $\vec{v}_P$ für P beliebig, $P \in SK$? $\rightarrow \vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{r}_{WP}$

$$\text{nun ist } \vec{r}_{WP} = \vec{r}_{WA} + \vec{r}_{AP} \rightarrow \vec{v}_P = \vec{\omega} \times (\vec{r}_{WA} + \vec{r}_{AP}) = \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{r}_{WA}}_{\vec{v}_A} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AP} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AP}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AP}$$

und das ist nichts anderes als die SK-Formel! 😊

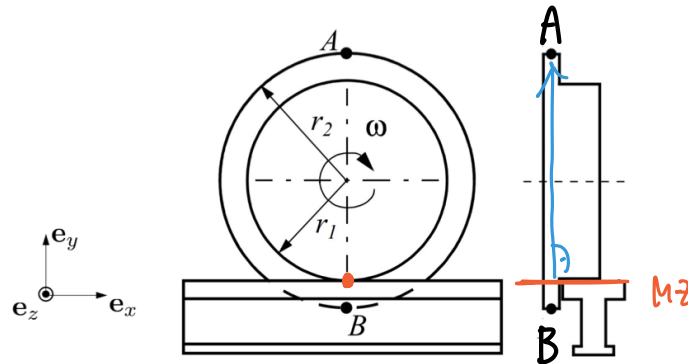
Fragen zur Theorie?

$\rightarrow$ nächste Woche: neues Kapitel **Dynamik** 😊

Teil 3: Übungsaufgaben - Serie 3

5. Ein Eisenbahnrad rollt mit der Rotationsschnelligkeit ω . Die Radien r_1 und r_2 sind gemäss Abbildung gegeben. Was ist die Geschwindigkeit des obersten Punktes A bzw. des untersten Punktes B des Radkranzes?

Aufwärm-Aufgabe :)



- (a) $\mathbf{v}_A = (r_2 + r_1)\omega \mathbf{e}_x$; $\mathbf{v}_B = -(r_2 - r_1)\omega \mathbf{e}_x$
 (b) $\mathbf{v}_A = (r_2 + r_1)\omega \mathbf{e}_x$; $\mathbf{v}_B = (r_2 + r_1)\omega \mathbf{e}_x$
 (c) $\mathbf{v}_A = r_2\omega \mathbf{e}_x + r_2\omega \mathbf{e}_y$; $\mathbf{v}_B = -r_1\omega \mathbf{e}_x + r_1\omega \mathbf{e}_y$
 (d) $\mathbf{v}_A = 2r_2\omega \mathbf{e}_x$; $\mathbf{v}_B = -2r_2\omega \mathbf{e}_x$
 (e) $\mathbf{v}_A = 2r_2\omega \mathbf{e}_x$; $\mathbf{v}_B = -r_1\omega \mathbf{e}_x$

Schritt 1: Wo ist das MZ? $\rightarrow$ die gesamte Kontaktlinie ist MZ!

Schritt 2: Geschwindigkeiten bestimmen: Abstände!

$\rightarrow$ immer $\vec{r} \perp \vec{\omega}$ nehmen wenn möglich $\rightarrow$ einfacher!

$$\vec{r}_B = (r_2 - r_1) \vec{e}_y$$

$$\vec{r}_A = (r_1 + r_2) \vec{e}_y$$

$\vec{\omega}$ hat nur eine z-Komponente!

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times (r_1 + r_2) \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ r_1 + r_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(r_1 + r_2)\omega_z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -(r_1 + r_2)\omega_z \vec{e}_x$$

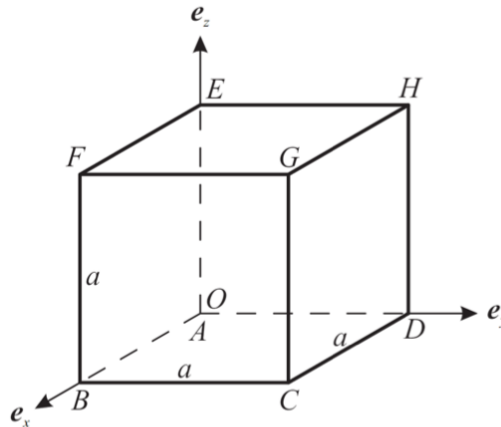
$$\begin{aligned} \vec{v}_B &= \vec{\omega} \times (-(r_2 - r_1)) \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ r_1 - r_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(r_1 - r_2)\omega_z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -(r_1 - r_2)\omega_z \vec{e}_x \\ &= (r_2 - r_1)\omega_z \vec{e}_x \end{aligned}$$

$\hookrightarrow$ Wir wissen ω_z nicht, aber wir können unsere Ergebnisse mit den Lösungen vergleichen & wir sehen, dass wir nur 1 Möglichkeit haben: **a)** (mit $\omega_z = \omega$)

1. ¹ Ein Würfel führt eine reine Rotation bezüglich des gegebenen Bezugssystems $\{O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ aus. In der gezeichneten speziellen Lage des Würfels fallen die Kanten AB , AD und AE mit den Achsen $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, bzw. $\mathbf{e}_z$ des Bezugssystems zusammen. In dieser speziellen Lage sind die Geschwindigkeiten der Punkte G bzw. H in kartesischen Komponenten gegeben:

$$\mathbf{v}_G = \begin{pmatrix} -v \\ v \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{v}_H = \begin{pmatrix} v_{Hx} \\ 0 \\ -v \end{pmatrix}$$

wobei die x-Komponente von $\mathbf{v}_H$ unbekannt ist.



- Bestimmen Sie die x-Komponente von $\mathbf{v}_H$.
- Bestimmen Sie die Rotationsgeschwindigkeit ω und die Geschwindigkeit $\mathbf{v}_A$ des Punktes A.

$$1) \quad \vec{v}_G = \begin{pmatrix} -v \\ v \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_H = \begin{pmatrix} v_{Hx} \\ 0 \\ -v \end{pmatrix}$$

$$\text{Skp G: } \vec{v}_G \cdot \vec{GH} \stackrel{!}{=} \vec{v}_H \cdot \vec{GH}$$

$$\Leftrightarrow (\vec{v}_G - \vec{v}_H) \cdot \vec{GH} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix} -v \\ v \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_{Hx} \\ 0 \\ -v \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (-v - v_{Hx}) \cdot (-a) = 0$$

$$v + v_{Hx} = 0$$

$$\underline{\underline{v_{Hx} = -v}}$$

2) $\vec{\omega}$ und $\vec{v}_A$ bestimmen:

Starrkörperformel: $\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}$

$$\vec{v}_H = \vec{v}_G + \vec{\omega} \times \vec{r}_{GH}$$

$$\begin{pmatrix} -v \\ 0 \\ -v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ v \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -v \\ 0 \\ -v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ v \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -a\omega_z \\ a\omega_y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow -v = a\omega_y \rightarrow \omega_y = -\frac{v}{a}$$

$$v - a\omega_z = 0 \rightarrow \omega_z = \frac{v}{a}$$

Reine Rotation: d.h. $I_2 = \vec{\omega} \cdot \vec{v}_G \stackrel{!}{=} 0$

$$\begin{pmatrix} \omega_x \\ -\frac{v}{a} \\ \frac{v}{a} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -v \\ v \\ 0 \end{pmatrix} = -v\omega_x - \frac{v^2}{a} = 0$$

$$\Rightarrow \omega_x v = -\frac{v^2}{a}$$

$$\omega_x = -\frac{v}{a}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{\omega} = \frac{v}{a} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

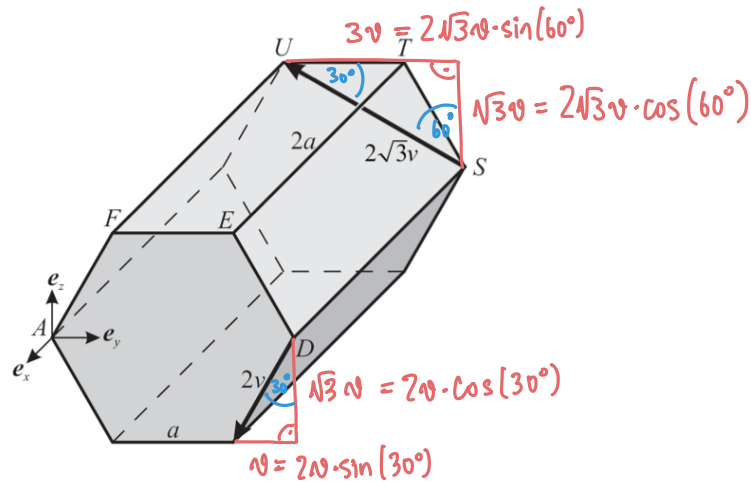
Geschwindigkeit $\vec{v}_A$: SK-Formel: $\vec{v}_A = \vec{v}_G + \vec{\omega} \times \vec{r}_{GA}$

$$= \begin{pmatrix} -v \\ v \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{v}{a} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times a \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1+1 \\ -1-1 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. ² Es sei ein gerades, hexagonales Prisma gegeben. Die Länge des Prismas beträgt $2a$ und die Seitenlängen der hexagonalen Grundfläche betragen a . Zu einem gewissen Zeitpunkt hat die Geschwindigkeit des Punktes S den Betrag $2\sqrt{3}v$ und zeigt in Richtung $\mathbf{r}_{SU}$, und die Geschwindigkeit im Punkt D hat den Betrag $2v$ und zeigt in Richtung $\mathbf{r}_{DC}$. Zusätzlich ist zu diesem Zeitpunkt bekannt, dass in E die Geschwindigkeitskomponente in z -Richtung verschwindet und die Ebene $FETU$ parallel zur $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ -Ebene liegt.



- Bestimmen Sie mit Hilfe des Satzes der projizierten Geschwindigkeiten für diesen momentanen Bewegungszustand die Geschwindigkeit im Punkt E .
- Bestimmen Sie die Kinematik im Punkt E .
- Von welchem Typ ist dieser momentane Bewegungszustand? Geben Sie eine mathematische Begründung an.

$$v_{Dy} = -\sqrt{3}v$$

$$v_{Dz} = -v$$

$$v_D = 2v$$

$$1) \vec{v}_E? \quad \vec{v}_E = \begin{pmatrix} v_{Ex} \\ v_{Ey} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_D = \begin{pmatrix} 0 \\ -v \\ -\sqrt{3}v \end{pmatrix}$$

$$\text{Satz G: } \vec{v}_D \cdot \vec{DE} = \vec{v}_E \cdot \vec{DE} \\ (\vec{v}_D - \vec{v}_E) \cdot \vec{DE} = 0$$

$$\vec{DE} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}a \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -v \\ -\sqrt{3}v \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_{Ex} \\ v_{Ey} \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}a \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} v_{Ex} \\ -v - v_{Ey} \\ -\sqrt{3}v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}a \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}a(-v - v_{Ey}) - \sqrt{3}v \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}v_{Ey} - \frac{3}{2}v = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}v_{Ey} = \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)v = v$$

$$v_{Ey} = 2v$$

SdpG: $\vec{v}_S \rightarrow \vec{v}_E$

$$\vec{v}_S \cdot \vec{SE} = \vec{v}_E \cdot \vec{SE}$$

$$(\vec{v}_S - \vec{v}_E) \cdot \vec{SE} = 0$$

$$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -3v \\ \sqrt{3}v \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_{Ex} \\ 2v \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 2a \\ -\frac{1}{2}a \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a \end{pmatrix} = 0$$

$$\vec{v}_S = \begin{pmatrix} 0 \\ -3v \\ \sqrt{3}v \end{pmatrix}$$

$$\vec{SE} = \begin{pmatrix} 2a \\ -\frac{1}{2}a \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -v_{Ex} \\ -5v \\ \sqrt{3}v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = -2v_{Ex} + \frac{5}{2}v + \frac{3}{2}v = 0$$

$$2v_{Ex} = 4v$$

$$v_{Ex} = 2v$$

$$\Rightarrow \vec{v}_E = \begin{pmatrix} -2v \\ 2v \\ 0 \end{pmatrix} = v \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2) Kinematik: $\{\vec{\omega}, \vec{v}_E\} \rightarrow \vec{\omega}$ bestimmen:

geg. $\vec{v}_E, \vec{v}_S$ und $\vec{v}_D$

SK-Formel: $\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BA} \Leftrightarrow$

$$\vec{v}_A - \vec{v}_B = \vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}$$

verwenden:

S und D: $\vec{v}_S - \vec{v}_D = \vec{\omega} \times \vec{r}_{DS}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot v - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot v = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ -2a\omega_z \\ 2a\omega_y \end{pmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} \leftarrow -2v = -2a\omega_z \Rightarrow \omega_z = \frac{v}{a} \\ \leftarrow 2\sqrt{3}v = 2a\omega_y \Rightarrow \omega_y = \sqrt{3} \frac{v}{a} \end{array} \right\}$$

schon einsetzen

D und E: $\vec{v}_D - \vec{v}_E = \vec{\omega} \times \vec{r}_{ED}$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} v - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \sqrt{3} \frac{v}{a} \\ \frac{v}{a} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} a$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \frac{v}{a} - \frac{1}{2} \frac{v}{a} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \omega_x \\ \frac{1}{2} \omega_x \end{pmatrix} a \quad \leftarrow \begin{array}{l} \frac{\sqrt{3}}{2} \omega_x a = -3v \\ \Leftrightarrow \omega_x = -\frac{6}{\sqrt{3}} \frac{v}{a} \quad \left| \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \right. \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \omega_x = -2\sqrt{3} \frac{v}{a}$$

Somit ist $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{v}{a}$

und die Kinetik in E ist $\{\vec{v}_E, \vec{\omega}\} =$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} v, \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \frac{v}{a} \right\} //$$

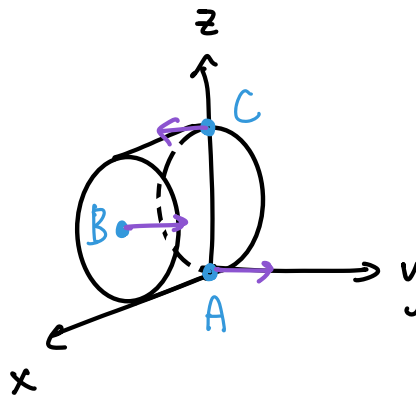
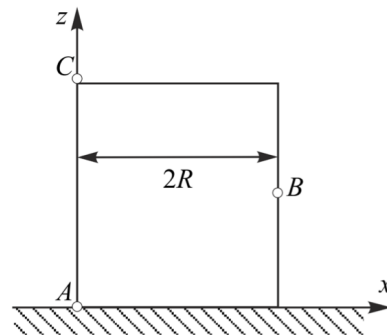
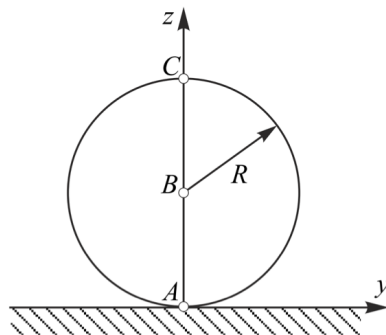
3)

da $I_1 = \vec{\omega} \neq 0$, können wir bereits sagen, dass die Bewegung keine Translation ist.

Berechne $I_2 = \vec{v}_E \cdot \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} v \cdot \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \frac{v}{a} = -4\sqrt{3} \frac{v^2}{a} + 2\sqrt{3} \frac{v^2}{a} = -2\sqrt{3} \frac{v^2}{a} \neq 0$

Somit ist die Bewegung eine Schraubung.

3. Auf der Ebene $z = 0$ (kartesisches Koordinatensystem) gleitet ein starrer Drehzylinder (Radius R , Länge $2R$) so, dass der Zylinder stets auf seiner Mantelfläche aufliegt. Der Bewegungszustand wird durch die Geschwindigkeiten $\mathbf{v}_A = v\mathbf{e}_y$, $\mathbf{v}_B = 2v\mathbf{e}_y$, $\mathbf{v}_C = -v\mathbf{e}_y$ der Punkte A, B und C beschrieben. Begründen Sie, dass die Rotationsgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ keine y-Komponente haben kann und dass daher die Bewegung eine momentane Rotation ist. Welches $\boldsymbol{\omega}$ und welche momentane Rotationsachse hat der Zylinder? ② ③ ④



① zeigen, dass $\vec{\omega}$ keine y-Komponente hat:

A und C : $\vec{v}_A = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{r}_{CA}$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -v \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2R \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -v \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2R\omega_y \\ 2R\omega_x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2R\omega_y \\ -v + 2R\omega_x \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \quad 0 = -2R\omega_y \Rightarrow \underline{\underline{\omega_y = 0}}$$

② zeigen, dass die Bewegung eine momentane Rotation ist

Kinematik: $\{\vec{\omega}, \vec{v}_P\}$

$$\begin{cases} I_1 = \vec{\omega} \\ I_2 = \vec{\omega} \cdot \vec{v}_P = 0 \Rightarrow \text{Rotation} \end{cases}$$

$$\omega_y = 0$$

$$v = -v + 2R\omega_x \Leftrightarrow 2R\omega_x = 2v$$

$$\omega_x = \frac{v}{R}$$

A und B: $\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2v \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{v}{R} \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2R \\ 0 \\ -R \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2v \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2R\omega_z + v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2R\omega_z + 3v \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$$

$$v = -2R\omega_z + 3v \Leftrightarrow 2R\omega_z = 2v$$

$$\omega_z = \frac{v}{R}$$

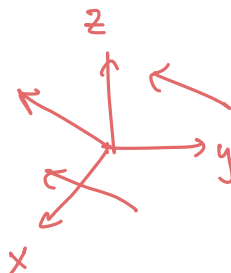
$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{v}{R} \\ 0 \\ \frac{v}{R} \end{pmatrix} = \frac{v}{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$I_2 = \vec{\omega} \cdot \vec{v}_A = \frac{v}{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix} = 0 + 0 + 0 = 0$$

$\Rightarrow$ Rotation da $I_2 = \vec{\omega} \cdot \vec{v}_A = 0$

③ $\vec{\omega}$ bestimmen

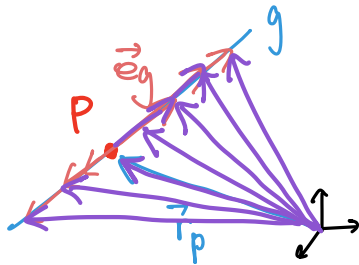
$$\underline{\underline{\vec{\omega} = \frac{v}{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$



④ momentane Rotationsachse bestimmen:

Crashcourse Geradenbestimmung:

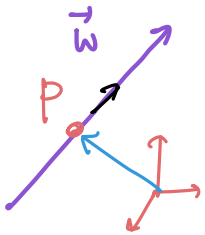
Eine Gerade wird mathematisch so beschrieben:



$$g: \vec{r}(\alpha) = \vec{r}_p + \alpha \cdot \vec{e}_g \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

In unserem Fall ... Wir suchen die Rotationsachse:

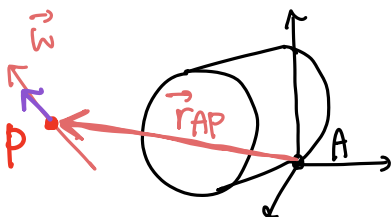
$$\vec{r}(\alpha) = \vec{r}_p + \alpha \cdot \vec{e}_w$$



Was ist $\vec{e}_w$? $\vec{w} = \frac{v}{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{e}_w = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Was ist $\vec{r}_p$?

Wir definieren einen neuen Punkt $\vec{P} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix}$ und nehmen an, dass dieser Punkt sich auf die Rotationsachse befindet.



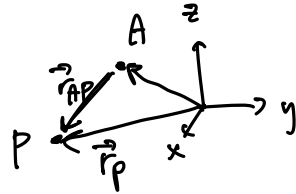
$$\vec{w}_p = \vec{w}_A + \vec{w} \times \vec{r}_{AP}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{v}{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{v}{R} \cdot \begin{pmatrix} -r_y \\ r_x - r_z \\ r_y \end{pmatrix} \quad \leftarrow \begin{matrix} -\frac{v}{R} \cdot r_y = 0 \Rightarrow r_y = 0 \\ 0 = 0 + \frac{v}{R} \cdot (r_x - r_z) \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow -0 = \frac{v}{R} \cdot (r_x - r_z) \Leftrightarrow r_x - r_z = -R \Leftrightarrow r_z = R + r_x$$

$$\vec{r}_{AP} = \begin{pmatrix} r_x \\ 0 \\ R+r_x \end{pmatrix}$$



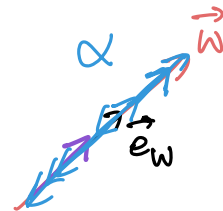
$$\vec{r}(\alpha) = \vec{r}_p + \alpha \cdot \vec{e}_w$$

$$\vec{r}(\alpha) = \vec{r}_p + \alpha \cdot \vec{e}_w = \vec{r}_A + \vec{r}_{AP} + \alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}(\alpha) = \vec{r}_{AP} + \alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}(\alpha) = \underbrace{\begin{pmatrix} r_x \\ 0 \\ R+r_x \end{pmatrix}} + \alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_x \\ 0 \\ r_x \end{pmatrix} + \alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$\vec{r}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{pmatrix} + r_x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{pmatrix} + \left(\underline{r_x} + \alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Laufvariable $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\underline{\underline{\vec{r}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

2. Möglichkeit (meiner Meinung nach komplizierter)

Wie vorher: wir definieren einen neuen Punkt $\vec{P} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix}$ und nehmen an, dass dieser Punkt sich auf die Rotationsachse befindet.

Dann gilt: $\vec{\omega} \times \vec{v}_P = 0$

$$\boxed{\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AP}}$$

$$\vec{\omega} \times (\vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AP}) = 0$$

$$\vec{\omega} \times \vec{v}_A + \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{AP})}_{=0} = 0$$

$$\vec{\omega} \times \vec{v}_A + (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_{AP}) \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) \vec{r}_{AP} = 0$$

$$\vec{\omega} \times \vec{v}_A + \underbrace{(\vec{\omega} \cdot \vec{r}_{AP}) \vec{\omega}}_0 - \omega^2 \vec{r}_{AP} = 0$$

$$\vec{r}_{AP} \perp \vec{\omega}$$

$$\vec{\omega} \times \vec{v}_A - \omega^2 \vec{r}_{AP} = 0$$

$$\omega^2 \vec{r}_{AP} = \vec{\omega} \times \vec{v}_A$$

$$\vec{r}_{AP} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_A}{\omega^2}$$

$$\vec{r}_{AP} = \frac{\frac{v}{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix}}{\frac{v^2}{R^2} \cdot 2} = \frac{\frac{v}{R} \cdot \begin{pmatrix} -v \\ 0 \\ v \end{pmatrix}}{\frac{v^2}{R^2} \cdot 2} = \frac{R}{2v} \cdot \begin{pmatrix} -v \\ 0 \\ v \end{pmatrix}$$

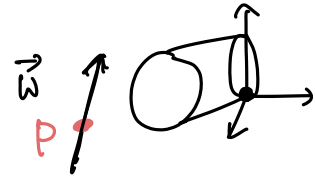
$$\vec{\omega} = \frac{v}{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \omega = \frac{v}{R} \cdot \sqrt{2}$$

$$\vec{v}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{R}{2v} \cdot \begin{pmatrix} -v \\ 0 \\ v \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}(x) = \vec{r}_P + \alpha \cdot \vec{e}_\omega = \vec{r}_A + \vec{r}_{AP} + \alpha \cdot \vec{e}_\omega = \vec{r}_{AP} + \alpha \cdot \vec{e}_\omega$$

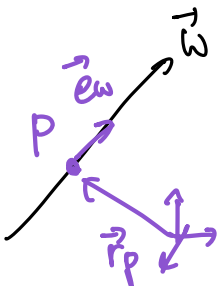
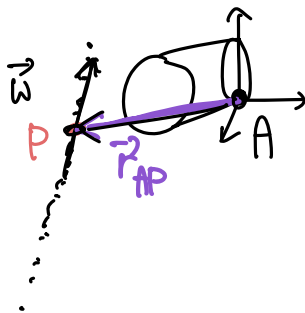
↑



Grossmann Identität

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{a} &= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \\ &= a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = a^2 \end{aligned}$$



$$\vec{r}(\alpha) = \frac{R}{2\alpha} \cdot \begin{pmatrix} -\alpha \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} + \alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

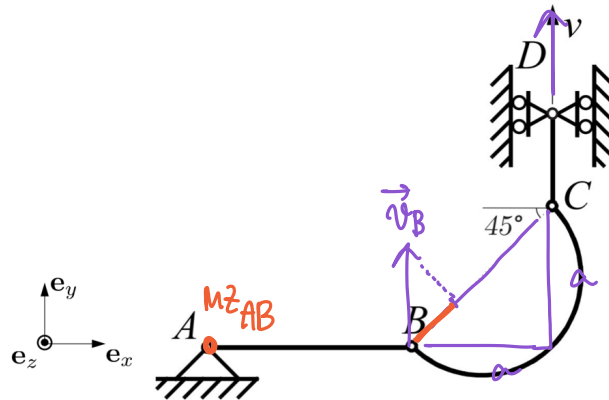
$$\vec{r}(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot R \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}(\alpha) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}R \\ 0 \\ \frac{1}{2}R \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}R \\ 0 \\ -\frac{1}{2}R \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{2}R\right) + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

4. Die drei starren Stäbe AB , BC und CD sind reibungsfrei gelenkig miteinander verbunden und entsprechend der Skizze gelagert. Stab BC ist ein Halbkreis mit Radius R . Die Schnelligkeit vom Punkt B beträgt $|\vec{v}_B| = v$. Vom Punkt D weiss man, dass er sich mit der Geschwindigkeit v nach oben bewegt. Alle Stäbe bleiben in der gezeichneten Ebene. Was für eine Bewegung beschreibt der Stab BC momentan?



$$|\vec{v}_B| = v$$

Schritt 1: $\vec{e}_{BC}$ und $\vec{e}_{CD}$ bestimmen:

$$\vec{e}_{BC} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \quad \vec{e}_{CD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Schritt 2: SdpG auf CD und BC anwenden:

$$\begin{aligned} CD: \quad \vec{v}_C \cdot \vec{e}_{CD} &= \vec{v}_D \cdot \vec{e}_{CD} \\ \begin{pmatrix} v_{Cx} \\ v_{Cy} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow v_{Cy} = v \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} BC: \quad \vec{v}_B \cdot \vec{e}_{BC} &= \vec{v}_C \cdot \vec{e}_{BC} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ v_B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} v_{Cx} \\ v_{Cy} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\vec{v}_B$ hat keine x-Komponente $\rightarrow$ Skizze!

$(=)$

$$v_B = v_{Cx} + v_{Cy} \quad / \quad v_{Cy} = v$$

$$v_B = v_{CX} + v \quad \dots (2)$$

$$\vec{v}_C = \begin{pmatrix} v_{Cx} \\ v_{Cy} \end{pmatrix}$$

$$\uparrow$$

$$= v_{By} - v_{Cx}$$

$$= v_{By} - v_{Cx}$$

v_B ist abhängig von v_{Cx}

Fallunterscheidung: *

$$\Rightarrow v_{cy} = v_c \quad \textcircled{2} \text{ mit } v_{cx} = 0$$

① Fall $v_{Cx} = 0$: ①: $v_C = v_D = v_B \Rightarrow$ Translation

② Fall $v_{cx} = -2v$: ②: $v_B = -v$

⇒ Rotation um z (siehe Skizze unten)

Warum -20? → Der Betrag von

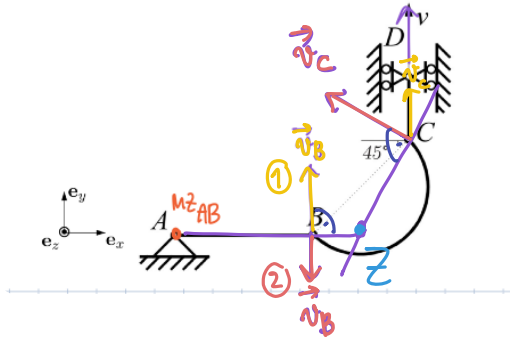
$\vec{v}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ v_B \end{pmatrix}$ ist laut Aufgabe v.

D.h. $|v_B| = |v_{Cx} + v| \stackrel{!}{=} v \Rightarrow v_{Cx} = 0$ oder $v_{Cx} = -2v$

$$\vec{v}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ v_{By} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_B \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_C = \begin{pmatrix} v_{Cx} \\ v_{Cy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \star \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_D = \begin{pmatrix} v_{Dx} \\ v_{Dy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$$



* Warum machen wir eig. eine Fallunterscheidung (nur) mit v_c ?

$\rightarrow v_B$ ist bestimmt (Richtung & Länge) } aus Aufgabe
 $\rightarrow v_D$ ist auch gegeben

v_c ist die einzige Geschwindigkeit, mit der wir "spielen" können

