Technische Mechanik

Übung 4

19.10.2021
Lina De Windt

Themen von Heute:

> Updates zur Zwischenprüfung: am 30.11.21, neu 10:00~12:00 in VL-Räumen

> Teil 1: Fragen zu Themen / Aufgaben von letzter Woche?

> Teil 2: Recap der Theorie von dieser Woche: Dynamik:

1. Kraft
2. Moment
3. Leistung

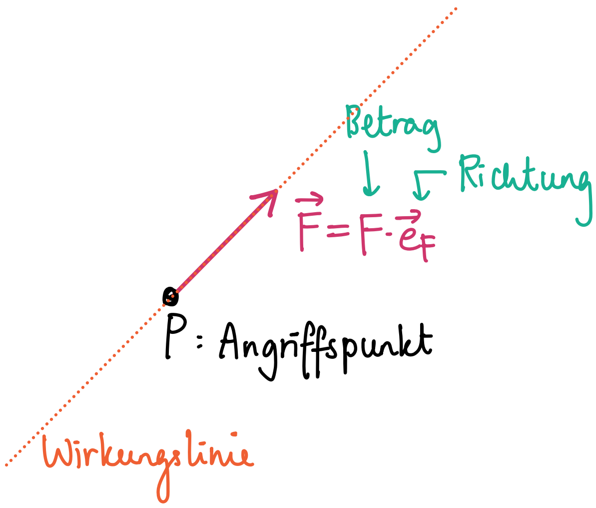
> Teil 3: Übungsaufgaben lösen (Serie 3)

Teil 1: Fragen zu Themen von letzter Woche?

Teil 2: Recap der Theorie von dieser Woche

1. Kraft:

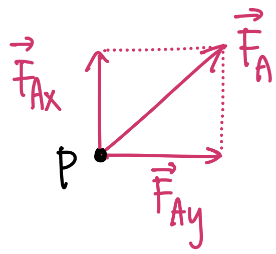
Kräfte machen sich durch ihre Wirkung auf Objekte bemerkbar. Sie hat immer einen Betrag, eine Richtung und einen Angriffspunkt. Man stellt sie als Vektoren dar:

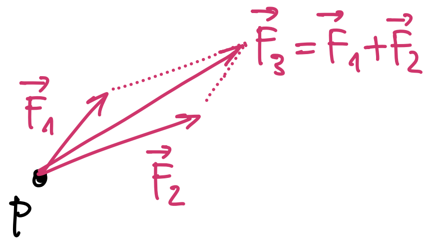


Bem: $[F] = N = \frac{m \cdot kg}{s^2}$

Kräfte dürfen vektoriell addiert werden, wenn sie denselben Angriffspkt. haben:

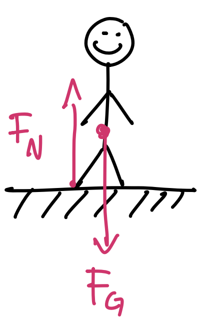
z.B.

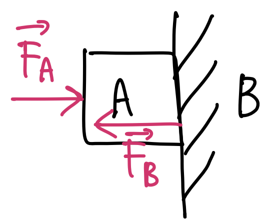




Reaktionsprinzip: ← sehr wichtig

Kräfte wirken immer wechselseitig. Übt A eine Kraft F_A auf B aus, so übt B eine gleich grosse, entgegengesetzt gerichtete Kraft auf A aus:





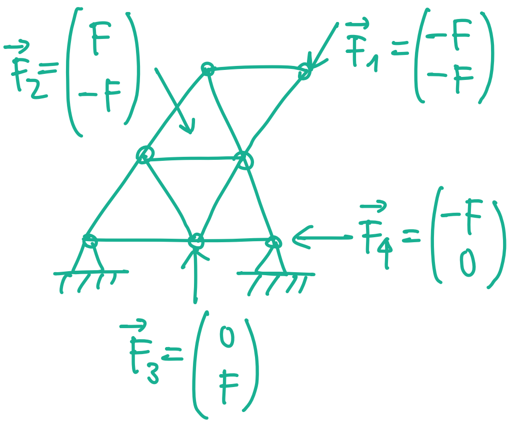
$\vec{F}_G = -\vec{F}_N$, $|\vec{F}_N| = |\vec{F}_G|$

$\vec{F}_A = -\vec{F}_B$, $|\vec{F}_A| = |\vec{F}_B|$

Die Resultierende eines Systems: $\boxed{\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i}$

Ist die Summe aller Kräfte, die auf das System wirken.

Bsp:



$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 =$$

$$= \begin{pmatrix} -F \\ -F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F \\ -F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} -F \\ -F \end{pmatrix}}}$$

2. Das Moment:

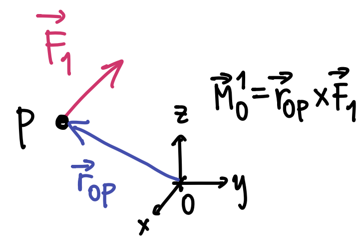
Beschreibt die Drehwirkung einer Kraft auf einen Körper. Sie ist ein Vektor & ist vom Bezugspunkt abhängig.

Index der betrachteten Kraft

Moment von $\vec{F}_i$ bezüglich Punkt 0: $\boxed{\vec{M}_0^i = \vec{r}_{0P} \times \vec{F}_i}$

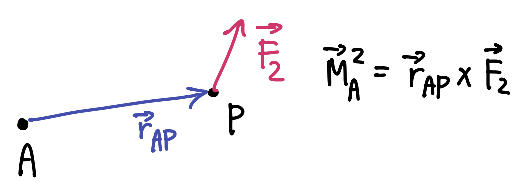
Angriffspunkt der Kraft

Bezugspunkt



Moment von $\vec{F}_i$ bezüglich Punkt A: $\boxed{\vec{M}_A^i = \vec{r}_{AP} \times \vec{F}_i}$

!



das resultierende Moment: Ist die Summe aller Momente auf einem Körper. Diese ist auch bezogen auf einen Punkt des Körpers!

wird leider oft nicht geschrieben

$$\boxed{\vec{M}_0^{tot} = \sum_i \vec{M}_0^i} \qquad \boxed{\vec{M}_A^{tot} = \sum_i \vec{M}_A^i}$$

anderer Bezugspunkt

Die Transformationsregel: Wenn das resultierende Moment bez. eines Punktes & die Resultierende bekannt ist, kann das resultierende Moment bez. ein anderer Pkt. folgendermassen bestimmt werden:

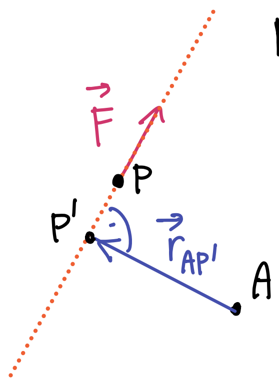
$$\boxed{\vec{M}_A = \vec{M}_0 + \vec{r}_{A0} \times \vec{R}}$$

(analog zur SK-Formel in Kinematik)

Good to know: Wenn $\vec{R}=0$, ist das Moment unabhängig vom Bezugspunkt.

Warum? → Traforegel: $\vec{M}_P = \vec{M}_Q + \underbrace{\vec{r}_{PQ} \times \vec{R}}_{=0} = \vec{M}_Q \Leftrightarrow \vec{M}_P = \vec{M}_Q \ \forall P, Q$

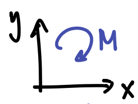
Good to know: Wenn $\vec{r} \perp$ Wirkungslinie von $\vec{F}$, kann der Betrag des Moments folgendermassen berechnet werden:



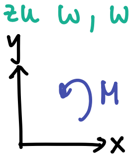
$$\boxed{M_A = r_{AP'} F}$$

$\vec{r}_{AP'} \perp$ Wirkungslinie von $\vec{F}$

Tipp: Wenn ihr das Moment einzeichnen müsst: die rechte-Hand-Regel benutzen: (analog zu $\vec{\omega}$, ω)



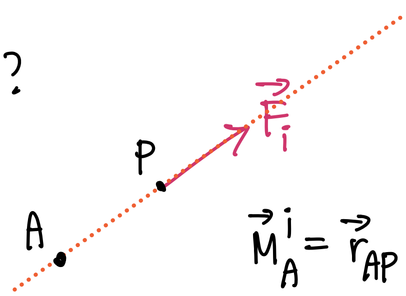
$$\vec{M} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -M \end{pmatrix}$$



$$\vec{M} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M \end{pmatrix}$$

Good to know: Wenn die Wirkungslinie einer Kraft durch einen Punkt geht, dann ist das Moment dieser Kraft bez. diesen Punkt 0.

Warum?



Kreuzprodukt von 2 parallelen Vektoren ist 0

$$\vec{M}_A^i = \vec{r}_{AP} \times \vec{F}_i = \vec{0}$$

ausserdem: Wenn man physikalisch überlegt kann man auch sehen, dass eine solche Kraft keine Drehwirkung auf diesen Punkt hat.

3. Leistung:

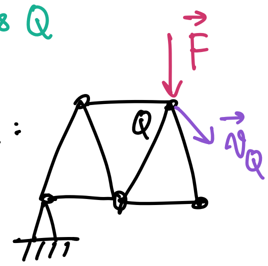
Geschwindigkeit des Angriffspunktes Q

$$\boxed{P = \vec{F}\cdot\vec{v}_Q}$$

angreifende Kraft

ist ein Skalar (d.h. $\in \mathbb{R}$) & kein Vektor!

z.B.:



Die Gesamtleistung:

$$\boxed{P_{tot} = \underbrace{\sum_i \vec{F}_i\cdot\vec{v}_i}_{\text{Summe der Leistungen der einzelnen Pkte}} + \underbrace{\sum_i \vec{M}_i\cdot\vec{\omega}_i}_{\text{"reine-Rotation-Komponenten"}}}$$

Good to know: Bei einer reinen Rotation gilt $\boxed{P = \vec{M}_0\cdot\vec{\omega}}$

Good to know:

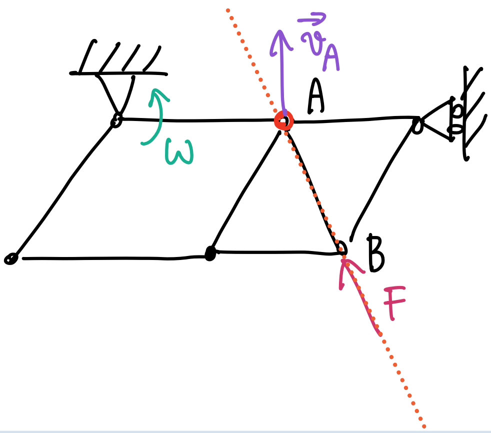
hier gleicher Punkt!

Wenn alle Kräfte & Momente nur an einem SK angreifen: $\boxed{P_{tot} = \vec{R}\cdot\vec{v}_A + \vec{M}_A\cdot\vec{\omega}}$

↳ nützlich wenn die Kinemate $\{\vec{v}_B, \vec{\omega}\}$ & das Moment $\vec{M}_B$ bez. eines Pktes bekannt ist.

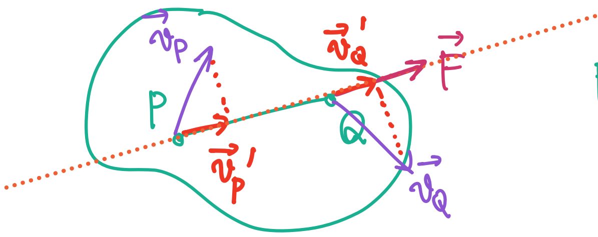
Wichtig: Für die Bestimmung von Momenten & Leistungen darf man die Kräfte entlang ihrer Wirkungslinie verschieben. Wählt deswegen einen Punkt aus, bei der die Geschwindigkeit einfach zu bestimmen ist.

Bsp:



$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}_B = \vec{F} \cdot \vec{v}_A$$

↳ Warum? → Wegen SdpG!



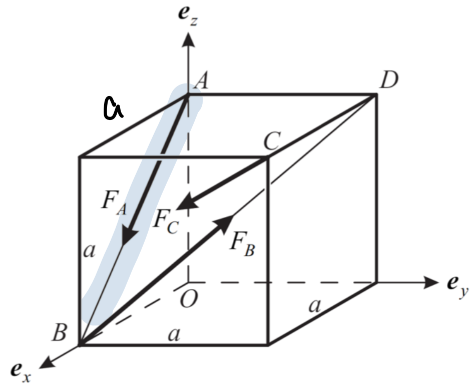
$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}_P = \vec{F} \cdot \vec{v}_Q \quad \text{weil} \quad \vec{v}_P' = \vec{v}_Q'$$

Fragen zur Theorie?

Teil 3: Übungsaufgaben - Serie 4

1

1. [1] An einem Würfel mit der Seitenlänge a greifen die gezeichneten Kräfte vom Betrag F_A, F_B und F_C an. Die Kraft $\mathbf{F}_C$ verläuft parallel zur $\mathbf{e}_x$-Achse.



1. Berechnen Sie die Momente dieser Kräfte bezüglich der Punkte O und A.
2. Bestimmen Sie die Abstände der drei Kraft-Wirkungslinien von O und A. Berechnen Sie daraus die Beträge der Momente und vergleichen Sie diese mit den Beträgen der oben berechneten Momente.

1) Schritt 1: alle Kräfte in Vektorform schreiben:

$$\vec{F}_A = F_A \vec{e}_{F_A} \quad , \quad \vec{F}_B = F_B \vec{e}_{F_B} \quad , \quad \vec{F}_C = F_C \vec{e}_{F_C}$$

wir brauchen die Einheitsvektoren in Richtung der Kräfte

Erinnerung: $\vec{e}_a = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

$$\vec{e}_{F_A} = \vec{e}_{AB} = \frac{\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}\right|} = \frac{1}{a\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_A = \frac{1}{\sqrt{2}} F_A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_{F_B} = \vec{e}_{BD} = \frac{\begin{pmatrix} -a \\ a \\ a \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} -a \\ a \\ a \end{pmatrix}\right|} = \frac{1}{a\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -a \\ a \\ a \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_B = \frac{1}{\sqrt{3}} F_B \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_{F_C} = \vec{e}_{DC} = \frac{\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \vec{F}_C = F_C \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Schritt 2: Momente berechnen:

Momente bezüglich Punkt 0:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

M. von Kraft F_A: $\vec{M}_0^A = \vec{r}_{0A} \times \vec{F}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{2}} F_A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} F_A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} a F_A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

M. von Kraft F_B: $\vec{M}_0^B = \vec{r}_{0B} \times \vec{F}_B = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{3}} F_B \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} F_B \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ a \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{3} a F_B \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

M. von Kraft F_C: $\vec{M}_0^C = \vec{r}_{0C} \times \vec{F}_C = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix} \times F_C \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = F_C \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ -a \end{pmatrix} = a F_C \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

entsprechende Beträge: $M_0^A = |\vec{M}_0^A| = \frac{\sqrt{2}}{2} a F_A$

$$M_0^B = |\vec{M}_0^B| = \frac{\sqrt{3}}{3} a F_B \sqrt{1+1} = \frac{\sqrt{6}}{3} a F_B$$

$$M_0^C = |\vec{M}_0^C| = \sqrt{2}\, a F_C$$

Momente bezüglich Punkt A:

$$\vec{M}_A^A = \vec{r}_{AA} \times \vec{F}_A = \vec{0} \times \vec{F}_A = \vec{0}$$

$$\vec{M}_A^B = \vec{r}_{AB} \times \vec{F}_B = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} \times \frac{\sqrt{3}}{3} F_B \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{3} F_B \cdot \begin{pmatrix} a \\ a-a \\ a \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{3} a F_B \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{M}_A^C = \vec{r}_{AC} \times \vec{F}_C = \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \times F_C \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = F_C \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} = a F_C \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Beträge der Momente:

$$M_A^A = |\vec{M}_A^A| = 0$$

$$M_A^B = |\vec{M}_A^B| = \left| \frac{\sqrt{3}}{3} a F_B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{\sqrt{6}}{3} a F_B$$

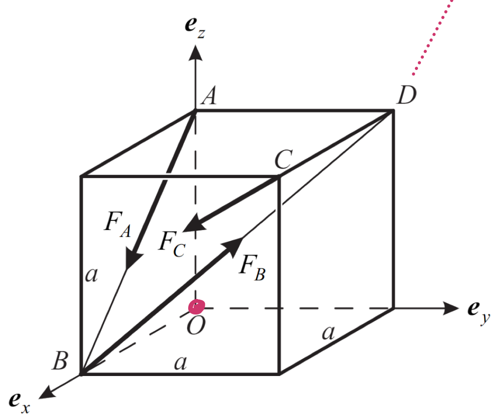
$$M_A^C = |\vec{M}_A^C| = \left| a F_C \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = a F_C$$

↖ Wirkungslinie

$\vec{F}$

2) Abstände der Kraft-Wirkungslinien von O und A

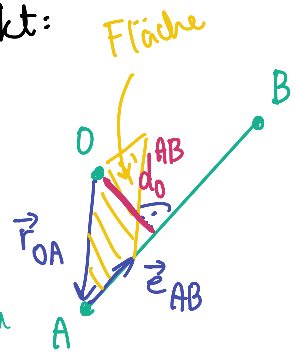
von O:



Formel für Abstand einer Geraden zu einem Punkt:

$$d_0^{AB} = |\vec{r}_{0A} \times \vec{e}_{AB}|$$

Why?



$|\vec{r}_{0A} \times \vec{e}_{AB}|$ ist die Fläche des Parallelogramms, welcher von $\vec{r}_{0A}$ und $\vec{e}_{AB}$ eingeschlossen wird. Die Fläche eines Parallelogramms ist i.A. aber auch Höhe × Seite

. Nun sehen wir aber, dass die Länge unserer Seite $|\vec{e}_{AB}| = 1$ ist. d.h. Wir finden: Fläche = Höhe × $\underbrace{\text{Seite}}_{}$ = Höhe (Seite = 1)

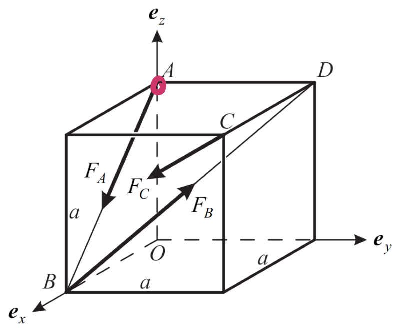
$\Leftrightarrow$ Höhe $= d_0^{AB} =$ Fläche $= |\vec{r}_{0A} \times \vec{e}_{AB}|$

$$d_0^{AB} = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} a$$

$$d_0^{BD} = |\vec{r}_{0B} \times \vec{e}_{BD}| = \left| \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ a \end{pmatrix} \right| = \frac{\sqrt{6}}{3} a$$

$$d_0^{DC} = |\vec{r}_{0D} \times \vec{e}_{DC}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ -a \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2} a$$

Von A:



$$d_A^{AB} = |\vec{r}_{AA} \times \vec{e}_{AB}| = |\vec{0} \times \vec{e}_{AB}| = 0$$

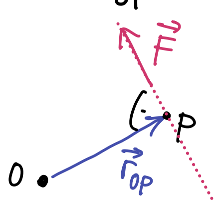
$$d_A^{BD} = |\vec{r}_{AB} \times \vec{e}_{BD}| = \left| \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} \times \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \begin{pmatrix} a \\ a-a \\ a \end{pmatrix} \right| = \frac{\sqrt{6}}{3} a$$

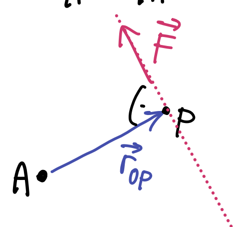
$$d_A^{DC} = |\vec{r}_{AD} \times \vec{e}_{DC}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} \right| = a$$

Daraus die Beträge der Momente berechnen:

⚠ Wenn $\vec{r}_{0P} \perp$ Wirkungslinie von $\vec{F}$ bzw. $\vec{r}_{AP} \perp$ Wirkungslinie von $\vec{F}$ dürfen wir diese Formel verwenden:

$M_0 = r_{0P} \cdot F$ bzw. $M_A = r_{AP} \cdot F$





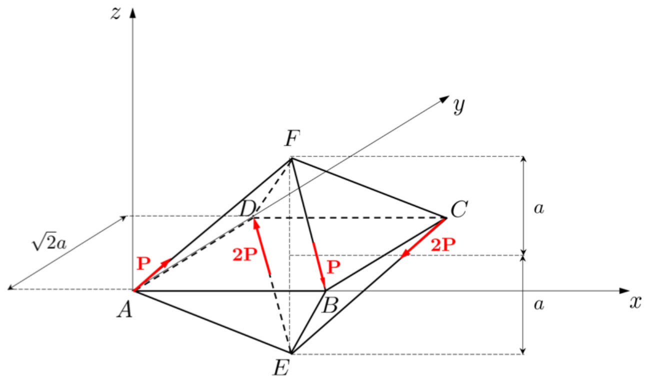
→ ist hier der Fall mit den d_0^{ij} bzw. d_A^{ij}, welche wir berechnet haben :)

$$\Rightarrow \begin{cases} M_0^A = d_0^{AB} \cdot F_A = \frac{\sqrt{2}}{2} a F_A \\ M_0^B = d_0^{BD} \cdot F_B = \frac{\sqrt{6}}{3} a F_B \\ M_0^C = d_0^{DC} F_C = \sqrt{2} a FC \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M_A^A = d_A^{AB} \cdot F_A = 0 \\ M_A^B = d_A^{BD} \cdot F_B = \frac{\sqrt{6}}{3} a F_B \\ M_A^C = d_A^{DC} F_C = a F_C \end{cases}$$

Im Vergleich zu den in Teilaufgabe 1 berechneten Momente: gleich :)

2. Auf ein Oktaeder (Seitenlänge $\sqrt{2}a$, Höhe $2a$) wirken in den Eckpunkten die in der Skizze eingezeichneten Kräfte.



1. Bestimmen Sie die Resultierende.
2. Bestimmen Sie das resultierende Moment bezüglich A und E.
3. Bestimmen Sie zwei zusätzliche, in E und in F wirkende Kräfte $\mathbf{F}_E$ und $\mathbf{F}_F$ so, dass sich die aus allen Kräften bestehende Kräftgruppe auf ein einzelnes Moment $\mathbf{M} = (2aP,\ 0,\ 0)^T$ in x-Richtung reduzieren lässt. Von der Kraft $\mathbf{F}_E$ wissen wir, dass sie *keine z-Komponente* hat.

1) $\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i$ → alle $\vec{F}_i$ in Vektorform bestimmen:

$$\vec{F}_A = P \cdot \vec{e}_{AF}$$

$$\vec{F}_B = P \cdot \vec{e}_{FB}$$

$$\vec{F}_C = 2P \cdot \vec{e}_{CE}$$

$$\vec{F}_D = 2P \cdot \vec{e}_{ED}$$

Einheitsvektoren bestimmen:

$$\vec{e}_{AF} = \frac{\vec{AF}}{|\vec{AF}|} = \frac{\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}a \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}a \\ a \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}a \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}a \\ a \end{pmatrix}\right|} = \frac{1}{\sqrt{2}a} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}a \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}a \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_A = \frac{1}{2} P \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_{FB} = \frac{\vec{FB}}{|\vec{FB}|} = \frac{\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}a \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}a \\ -a \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}a \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}a \\ -a \end{pmatrix}\right|} = \frac{1}{\sqrt{2}a} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}a \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}a \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_B = \frac{1}{2} P \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

analog zu $\vec{e}_{AF}$ und $\vec{e}_{FB}$

$$\vec{e}_{CE} = \frac{\vec{CE}}{|\vec{CE}|} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \vec{F}_C = P \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_{ED} = \frac{\vec{ED}}{|\vec{ED}|} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \vec{F}_D = P \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{F}_D =$$

$$= \frac{1}{2} P \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \cancel{1} \\ \cancel{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} P \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\cancel{1} \\ -\cancel{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + P \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -\cancel{1} \\ -\cancel{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + P \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \cancel{1} \\ \cancel{\sqrt{2}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}P - P - P \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -P \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

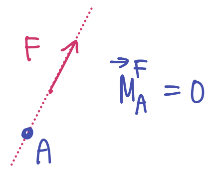
2) resultierendes Moment bezüglich A & E:

$$\vec{M}_A^{tot} = \sum_i M_A^i \quad \text{bzw.} \quad \vec{M}_E^{tot} = \sum_i M_E^i$$

bezüglich A:

M. von Kraft $\vec{F}_A$: $\vec{M}_A^A = \vec{r}_{AA} \times \vec{F}_A = \vec{0} \times \vec{F}_A = \vec{0}$

merke: wenn die Wirkungslinie einer Kraft durch einen Punkt geht, hat diese Kraft kein Moment bezüglich diesen Punkt.



M. von Kraft $\vec{F}_B$: $\vec{M}_A^B = \vec{r}_{AB} \times \vec{F}_B = \begin{pmatrix} \sqrt{2}a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2}P \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}P \begin{pmatrix} 0 \\ 2a \\ -\sqrt{2}a \end{pmatrix} = aP \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

M. von Kraft $\vec{F}_C$: $\vec{M}_A^C = \vec{r}_{AC} \times \vec{F}_C = \begin{pmatrix} \sqrt{2}a \\ \sqrt{2}a \\ 0 \end{pmatrix} \times P \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} -2a \\ 2a \\ -\sqrt{2}a + \sqrt{2}a \end{pmatrix} = 2aP \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

M. von Kraft $\vec{F}_D$: $\vec{M}_A^D = \vec{r}_{AD} \times \vec{F}_D = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}a \\ 0 \end{pmatrix} \times P \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ \sqrt{2}a \end{pmatrix} = aP \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

$$\vec{M}_A^{tot} = \sum_i \vec{M}_A^i = \vec{M}_A^A + \vec{M}_A^B + \vec{M}_A^C + \vec{M}_A^D =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + aP \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} + 2aP \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + aP \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \underline{\underline{aP \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}}}$$

bezüglich E: verwende die Transformationsregel:

$$\vec{M}_E^{tot} = \vec{M}_A^{tot} + \vec{r}_{EA} \times \vec{R}$$

Bem: Ihr dürft auch nochmal alle Teil-Momente bez. E berechnen & am Schluss zusammenaddieren, aber mit dieser Formel geht es deutlich schneller, vor allem wenn ihr $\vec{R}$ schon habt :)

$$= aP \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2}a \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}a \\ a \end{pmatrix} \times P \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = aP \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}a \end{pmatrix} P =$$

$$= aP \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3-1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \underline{\underline{aP \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

3) $\rightarrow$ sehr mühsam.

Laut Aufgabe sind die Bedingungen: $\vec{R}_{neu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{M}_{neu} = \begin{pmatrix} 2aP \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

gesucht: $\vec{F}_E = \begin{pmatrix} F_{Ex} \\ F_{Ey} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{F}_F = \begin{pmatrix} F_{Fx} \\ F_{Fy} \\ F_{Fz} \end{pmatrix}$

Gleichungen aufstellen:

$$\vec{R}_{neu} = \vec{R} + \vec{F}_E + \vec{F}_F = \begin{pmatrix} -P \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{Ex} \\ F_{Ey} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{Fx} \\ F_{Fy} \\ F_{Fz} \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_{Ex} + F_{Fx} = P \\ F_{Ey} = -F_{Fy} \\ F_{Fz} = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Da $\vec{R}_{neu} = 0$, ist der Moment unabhängig vom Bezugspunkt $\leftarrow$ Wichtig

Warum? $\rightarrow$ Traforegel: $\vec{M}_P = \vec{M}_Q + \vec{r}_{PQ} \times \underset{\overset{!}{=}0}{\vec{R}} = \vec{M}_Q \quad \forall P, Q \in SK$

wähle E als Bezugspkt.

$$\vec{M}_{neu} = \vec{M}_E^{tot} + \underbrace{\overbrace{\vec{r}_{EE} \times \vec{F}_E}^{=0} + \vec{r}_{EF} \times \vec{F}_F}_{\text{neu hinzugekommene Kräfte}} = aP \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_{Fx} \\ F_{Fy} \\ 0 \end{pmatrix} =$$

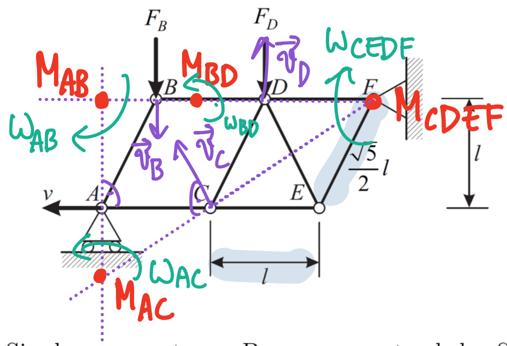
$$= aP \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2aF_{Fy} \\ 2aF_{Fx} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2aF_{Fy} \\ 2aP + 2aF_{Fx} \\ 0 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 2aP \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2aF_{Fy} = 2aP \Rightarrow F_{Fy} = -P \\ 2aP + 2aF_{Fx} = 0 \Rightarrow F_{Fx} = -P \end{cases}$$

Somit ist $\underline{\underline{\vec{F}_F = P \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}}$. Von oben $(*)$ haben wir, dass $\begin{cases} F_{Ex} = P - F_{Fx} \\ F_{Ey} = -F_{Fy} \end{cases}$ und somit ist $\underline{\underline{\vec{F}_E = P \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}}$

②

3. [2] Der abgebildete ebene Mechanismus besteht aus acht Stäben, welche miteinander gelenkig verbunden und in A sowie F gelagert sind. Die horizontalen Stäbe haben alle die Länge l, die schiefen Stäbe die Länge $\frac{\sqrt{5}l}{2}$. Das horizontal verschiebbare Auflager in A bewegt sich momentan mit der Schnelligkeit v nach links.



1. Bestimmen Sie den momentanen Bewegungszustand des Systems (Momentenzentren und Rotationsschnelligkeiten aller Starrkörper).
2. Berechnen Sie die Gesamtleistung der Lasten F_B und F_D.

1) 4 SK → 4 MZs und 4 ωs

Folgendermassen Bestimmen:

1. F ist "festgemacht" → $\vec{v}=0$ → F ist MZ von CDEF

2. Wende SdpG von A nach C an:

$$0=(\vec{v}_A-\vec{v}_C)\cdot\vec{r}_{AC}=\left(\begin{pmatrix}-v\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}v_{Cx}\\v_{Cy}\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}l\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-v-v_{Cx}\\-v_{Cy}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}l\\0\end{pmatrix}=$$

$$=-l\cdot(v+v_{Cx}) \quad /\div(-l) \text{ auf beiden Seiten}$$

$$0=v+v_{Cx} \quad\Rightarrow\quad v_{Cx}=-v$$

3. Wende SvM von C nach F an um ω_{CDEF} herauszufinden:

$$\vec{v}_C=\vec{\omega}\times\vec{r}_{FC}=\begin{pmatrix}0\\0\\-\omega_{CDEF}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}l\\-l\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-l\omega_{CDEF}\\\frac{3}{2}l\omega_{CDEF}\\0\end{pmatrix}\overset{!}{=}\begin{pmatrix}-v\\v_{Cy}\\0\end{pmatrix} \leftarrow$$

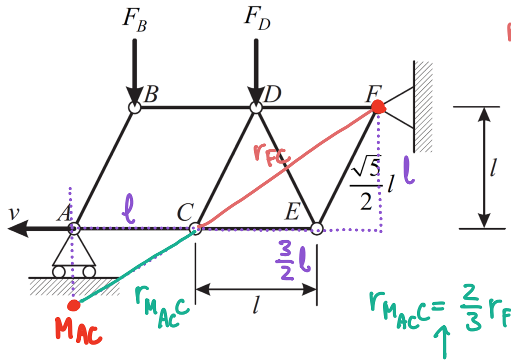
$$\rightarrow\ -l\omega_{CDEF}=-v \iff \underline{\underline{\omega_{CDEF}=\frac{v}{l}}}$$

4. M_{AC} geometrisch bestimmen (Schnittpkt. der Senkrechten zu $\vec{v}_A$ und $\vec{v}_C$).

w_{AC} bestimmen: $\dfrac{w_{AC}}{w_{CDEF}} = \dfrac{r_{FC}}{r_{M_{AC}C}} = \dfrac{\frac{\sqrt{13}}{2}\ell}{\frac{\sqrt{13}}{3}\ell} = \dfrac{3}{2} \quad \rightarrow w_{AC} = \dfrac{3}{2} w_{CDEF}$

$\Rightarrow w_{AC} = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{v}{\ell}$

$r_{FC} = \ell \cdot \sqrt{\frac{9}{4} + 1} = \ell \cdot \sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}\ell$



$r_{M_{AC}C} = \frac{2}{3} r_{FC} = \frac{\sqrt{13}}{3}\ell$

↑ Strahlensatz

5. $\vec{v}_D$ berechnen: $\vec{v}_D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{v}{\ell} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\ell \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix}$

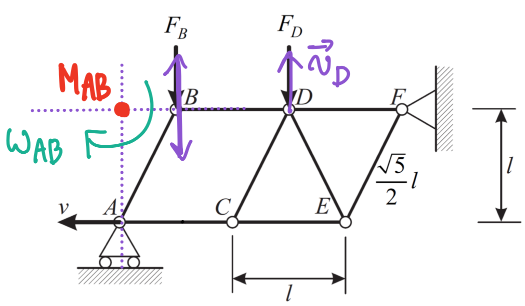
$\rightarrow \quad v_D = v$

6. SdpG auf D und B:

$$0 = (\vec{v}_B - \vec{v}_D) \cdot \vec{r}_{BD} = \left(\begin{pmatrix} v_{Bx} \\ v_{By} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} -\ell \\ 0 \end{pmatrix} = -\ell v_{Bx} = 0$$

$\Rightarrow v_{Bx} = 0$

d.h. $\vec{v}_B$ zeigt nur in die y-Richtung:



Bestimme M_{AB} mithilfe der Senkrechten zu $\vec{v}_A$ und $\vec{v}_B$

7. w_{AB} bestimmen: durch $\vec{v}_A$: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -w_{AB} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -\ell \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\ell w_{AB} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} -v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

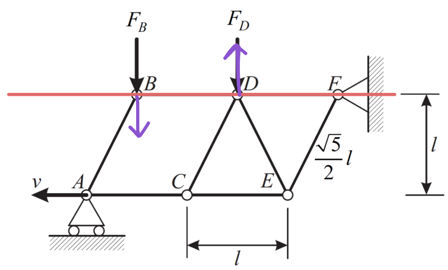
$$\Rightarrow \quad l\omega_{AB} = v \iff \underline{\underline{\omega_{AB} = \frac{v}{l}}}$$

8. $$\vec{v}_B = \begin{pmatrix}0\\0\\-\frac{v}{l}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\frac{1}{2}l\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}v\\0\end{pmatrix} \rightarrow v_B = \frac{1}{2}v$$

9. letztes MZ: M_{BD}: $\vec{v}_B$ und $\vec{v}_D$ haben beide nur eine y-Komponente.

D.h. M_{BD} liegt irgendwo auf der Geraden BD. Aber wo?

1) $\vec{v}_D$ und $\vec{v}_B$ zeigen in die entgegengesetzte Richtung
→ M_{BD} ist zwischen B und D



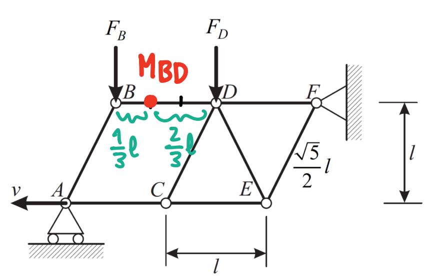
2) Aber wo genau? → Mittels Verhältnis von $\vec{v}_B$ und $\vec{v}_D$

bestimmen: $$\underbrace{\frac{v_B}{v_D} = \frac{r_B}{r_D}}_{\text{Warum?}}$$ ← Abstände vom MZ

Warum? → $v_B = \omega r_B$, $v_D = \omega r_D$ → $\frac{v_B}{v_D} = \frac{\cancel{\omega} r_B}{\cancel{\omega} r_D}$

$$\Rightarrow \frac{v_B}{v_D} = \frac{\frac{1}{2}v}{v} = \frac{1}{2} = \frac{r_B}{r_D}$$

⇒ M_{BD} ist in Verhältnis 1:2 von B und D entfernt:



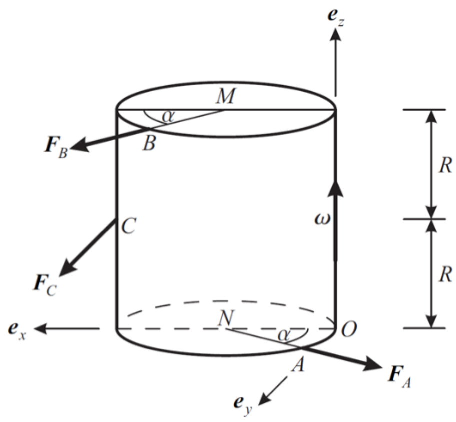
2) Gesamtleistung von $\vec{F}_B$ und $\vec{F}_D$:

$$P = \vec{F}_B \cdot \vec{v}_B + \vec{F}_D \cdot \vec{v}_D = \begin{pmatrix} 0 \\ -F_B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -F_D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} v F_B - v F_D = \underline{\underline{\left(\frac{1}{2} F_B - F_D \right) v}}$$

3

4. [3] Ein Kreiszylinder mit dem Radius R und der Höhe $2R$ dreht sich mit der Rotationsschnelligkeit ω um die z-Achse. Auf ihn wirken die drei Kräfte $\mathbf{F}_A$, $\mathbf{F}_B$, und $\mathbf{F}_C$ mit den Beträgen F, F bzw. $\sqrt{2}F$. Die beiden Kräfte $\mathbf{F}_A$ und $\mathbf{F}_B$ greifen radial unter einem Winkel von $\alpha = 45°$ an. Die Kraft $\mathbf{F}_C$ verläuft parallel zur $\mathbf{e}_y$-Achse.



Die Leistungen dieser Kräfte können auf zwei Arten bestimmt werden:

1. Zur Berechnung der Leistungen dürfen die Kräfte längs ihrer Wirkungslinien verschoben werden. Wählen Sie Punkte auf den Wirkungslinien, deren Geschwindigkeiten einfach zu berechnen sind. Ermitteln Sie daraus die Leistungen der drei Kräfte.
2. Berechnen Sie die Momente der Kräfte bezüglich O und daraus die Leistungen.