

Themen von Heute:

> Teil 1: Fragen zu Themen / Aufgaben von letzter Woche?

> Teil 2: Recap der Theorie von dieser Woche:

1. Parallele Kräfte:

1.1 Dipolmoment & Kräftemittelpunkt

2. Schwerpunkt

2.1 allgemeine Formel für die Schwerpunktberechnung

2.2 Schwerpunkt & Flächen einiger simplen Körper

3. Statik:

3.1 Hauptsatz der Statik

3.2 Freischneiden

3.3 Lagerkräfte

3.4 Seilkräfte

auch: Kochrezept Statikaufgaben !

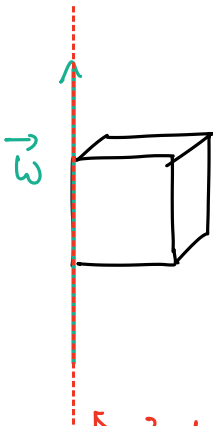
heute hauptsächlich
zusammen mit Teil 2

> Teil 3: Übungsaufgaben lösen (Seite 6)

Teil 1: Fragen zu Themen von letzter Woche?

Bem: Serie 5, letzte Aufgabe:

Zentralachse = die Rotationsachse bei der Schraubung. Sie bewegt sich in Richtung von $\vec{\omega}$.

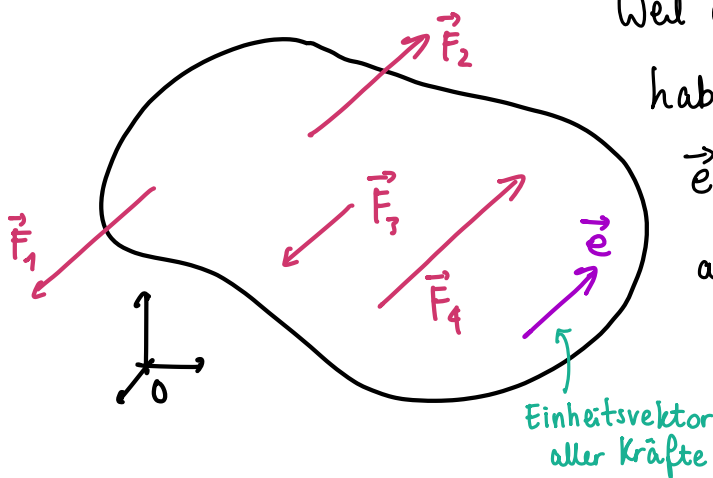


← Zentralachse → alle Pkte auf der Zentralachse haben die gleiche Geschwindigkeit (in $\vec{\omega}$ -Richtung)!

Teil 2: Recap der Theorie von dieser Woche

1. Parallele Kräfte: $\leftarrow$ kommt nicht in der Serie, ich möchte es jedoch trotzdem kurz besprechen.

Hier betrachten wir Kräftegruppen $\{\vec{F}_i\} = \{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N\}$, wobei alle Kräfte parallel aufeinander sind:



Weil alle Kräfte parallel aufeinander sind, haben alle den gleichen Richtungsvektor $\vec{e}$. Somit können wir die Kräfte aufschreiben als: $\vec{F}_i = F_i \vec{e}$

Die Resultante ist dann $\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n F_i \vec{e} = R \vec{e}$ und

das Moment bezüglich 0: $\vec{M}_0 = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n F_i \vec{r}_i \times \vec{e} = \vec{N} \times \vec{e}$
 $\vec{F}_i = F_i \vec{e}$

wobei $\vec{N} = \sum_{i=1}^n F_i \vec{r}_i$ Das Dipolmoment der Kräftegruppe ist. SP von 2 Vektoren

Bem: Bei parallelen Kräften ist die 2. Invariante null: $I_2 = \vec{R} \cdot \vec{M}_0 = R \vec{e} \cdot (\vec{N} \times \vec{e}) \stackrel{\text{Drehp.}}{=} 0$

1.1 Dipolmoment & Kräftemittelpunkt

Das Dipolmoment einer Kräftegruppe ($\exists$ nur wenn alle Kräfte parallel aufeinander)

ist definiert als: $\vec{N} = \sum_{i=1}^n F_i \vec{r}_i$

wobei: F_i : Richtungsbehafteter Betrag der einzelnen Kräfte
 $\uparrow$
d.h. es kann auch negativ sein je nach Richtung von $\vec{e}$

$\vec{r}_i$: Ortsvektor des Angriffspkts. der jeweiligen Kraft

Fallunterscheidung:

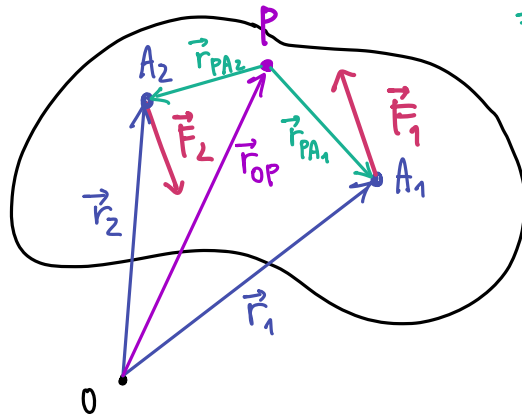
$\vec{R}=0$: Dann ist das Dipolmoment unabhängig vom Punkt O.

Why? $\vec{N} = \sum_{i=1}^n F_i \vec{r}_i = \sum_i F_i (\vec{r}_{OP} + \vec{r}_{PA_i}) = \underbrace{\sum_i F_i \vec{r}_{OP}}_{=0} + \sum_i F_i \vec{r}_{PA_i} = \sum_i F_i \vec{r}_{PA_i}$

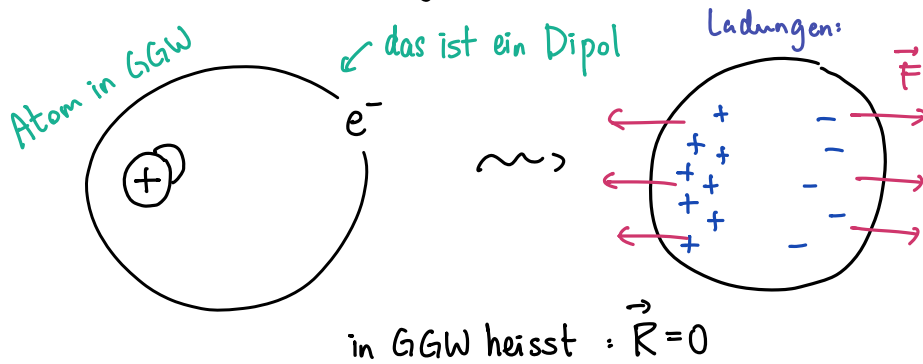
Ortsvektor
(von O aus)

Weil: $\sum_i F_i \vec{r}_{OP} = \vec{r}_{OP} \cdot \sum_i F_i = \vec{r}_{OP} \cdot \vec{R} = 0$

unabhängig von
wo aus die "Ortsvektoren"
kommen → unabhängig vom
Bezugssystem

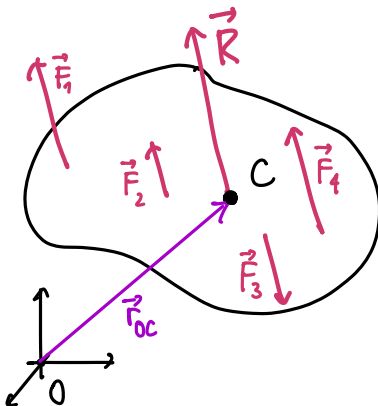


Warum ist das wichtig für uns? → in Elektrostatik passiert genau das!



Dipolmoment
ist unabhängig
vom Bezugssystem

$\vec{R} \neq 0$: Dann ist das Dipolmoment abhängig vom Bezugspunkt & es interessiert uns auch, wo der Kräftemittelpunkt C ($\hat{=}$ dort wo $\vec{R}$ angreift) ist:



Kräftemittelpunkt:

$$\vec{r}_{oc} = \frac{\sum F_i \vec{r}_i}{\sum F_i}$$

↳ Herleitung in den VL-Slides (nicht wichtig)

2. Schwerpunkt (auch: Massenmittelpunkt) ← in TechMech nur in 2D :)

⇒ hier greift die Gewichtskraft eines Körpers an.

2.1 allgemeine Formel für die Schwerpunktberechnung:

Die x - und y -Koordinate des Schwerpunkts werden so berechnet:

$$x_s = \frac{\int_{\Delta A} x dA}{A} \quad \textcircled{*} = \frac{\sum_i x_i A_i}{\sum_i A_i}$$

$$y_s = \frac{\int_{\Delta A} y dA}{A} \quad \textcircled{*} = \frac{\sum_i y_i A_i}{\sum_i A_i}$$

Der Schwerpunkt ist dann:

$$\vec{r}_{os} = \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix}$$

↑
Ortsvektor vom Schwerpunkt

Wobei $\sum_i x_i A_i$ = "Summe der x -Komponenten der Schwerpunkts Ortsvektoren aller Teilkörper"
mal "Fläche der jeweiligen Teilkörper"

und $\sum_i A_i$ = Summe aller Flächen der Teilkörper ($\hat{=}$ Gesamtfläche)

↑
analog für y

⊗ Wenn der Körper homogen ist & wir einfache Geometrien haben

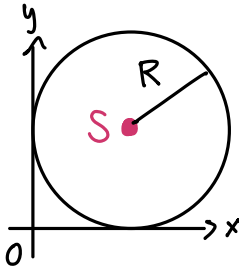
→ in TechMech immer der Fall. d.h. Integral-formel ist für uns nicht wichtig :)

Doch um diese Formel anwenden zu können, brauchen wir die Schwerpunkte einiger simplen Körper!

2.2 Schwerpunkte & Flächen einiger simplen Körper:

! Achte wo das Koordinatensystem ist!

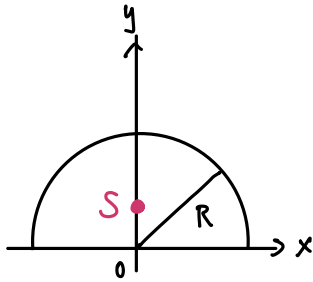
Kreis:



$$\vec{r}_{os} = \begin{pmatrix} R \\ R \end{pmatrix}$$

$$A = \pi r^2$$

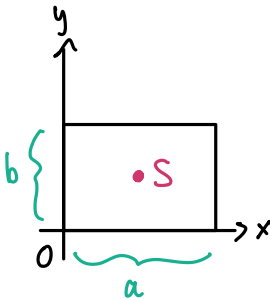
Halbkreis:



$$\vec{r}_{os} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4R}{3\pi} \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2} \pi r^2$$

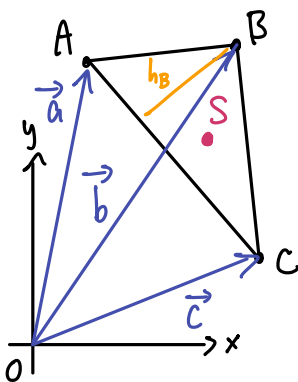
Rechteck:



$$\vec{r}_{os} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{b}{2} \end{pmatrix}$$

$$A = a \cdot b$$

Dreieck:



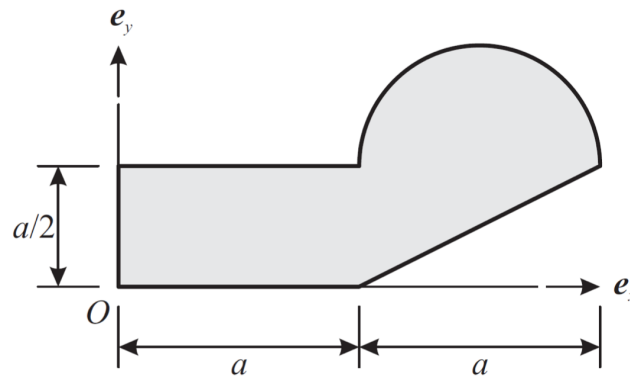
$$\vec{r}_{os} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$

$$A = \frac{1}{2} AC \underline{h_B}$$

↳ hier sind alle Körper homogen.

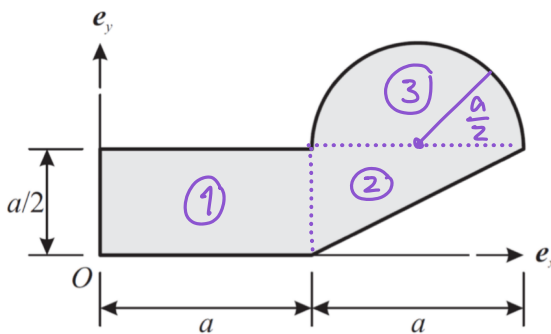
Beispiel: Serie 6, Aufgabe 4

4. ⁴ Finden Sie den Schwerpunkt des unten skizzierten, homogenen, ebenen Körpers.

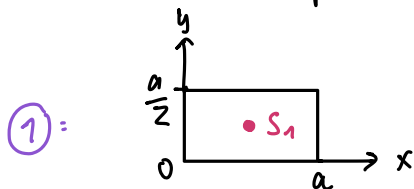


Annahme: Der Körper ist eben und hat eine homogene Massenverteilung.

Schritt 1: Körper in einfachere Körper zerteilen:



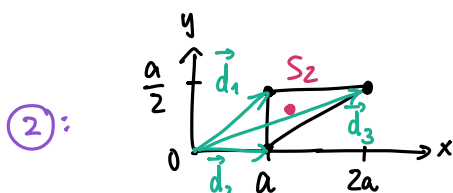
Schritt 2: Schwerpunkte und Flächen der einzelnen Körper bestimmen:



$$\vec{r}_{OS_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a \\ \frac{1}{4}a \end{pmatrix} \leftarrow \begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix}$$

rosa: später für Formel

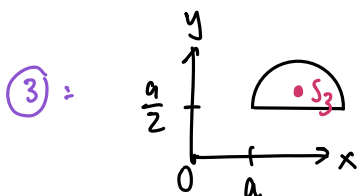
$$A_1 = \frac{a}{2} \cdot a = \frac{a^2}{2}$$



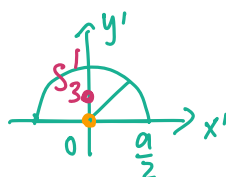
$$\vec{r}_{OS_2} = \frac{\vec{d}_1 + \vec{d}_2 + \vec{d}_3}{3} = \frac{\begin{pmatrix} a \\ \frac{1}{2}a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a \\ \frac{1}{2}a \end{pmatrix}}{3} = \frac{\begin{pmatrix} 4a \\ a \end{pmatrix}}{3}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{4}{3}a \\ \frac{1}{3}a \end{pmatrix} \leftarrow \begin{matrix} x_2 \\ y_2 \end{matrix}$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot a = \frac{a^2}{4}$$



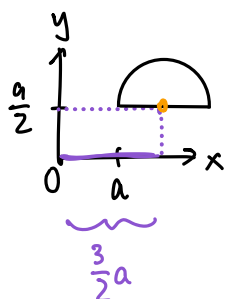
Zwischenschritt machen:



$$\vec{r}_{OS_3}' = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3\pi} a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3\pi} a \end{pmatrix}$$

↑ Koordinaten so setzen

Dann verschieben s.d. wir die richtigen Koordinaten haben:



$$\rightarrow \vec{r}_{OS_3} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3\pi} a \end{pmatrix}}_{\vec{r}_{OS_3}'} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{3}{2} a \\ \frac{1}{2} a \end{pmatrix}}_{\text{Verschiebung der Koordinatenachse}} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} a \\ (\frac{2}{3\pi} + \frac{1}{2}) a \end{pmatrix} \leftarrow \begin{matrix} x_3 \\ y_3 \end{matrix}$$

$$A_3 = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi}{2} = \frac{a^2}{8} \pi$$

Gesamtfläche: $A = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{8} \pi = \left(\frac{3}{4} + \frac{\pi}{8}\right) a^2$

Ortsvektor vom Schwerpunkt

$\Rightarrow \vec{r}_{OS}$ bestimmen:

x-Koordinate von $\vec{r}_{OS}$

$$x_s = \frac{\sum_i x_i A_i}{\sum_i A_i} = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3}{A} = \frac{\frac{1}{2} a \cdot \frac{a^2}{2} + \frac{4}{3} \cdot \frac{a^2}{4} + \frac{3}{2} a \cdot \frac{a^2}{8} \pi}{\left(\frac{3}{4} + \frac{\pi}{8}\right) a^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{4} a + \frac{1}{3} a + \frac{3}{16} \pi a}{\frac{3}{4} + \frac{\pi}{8}} = \frac{\frac{7}{12} a + \frac{3}{16} \pi a}{\frac{b + \pi}{8}} \cdot \frac{48}{48} = \frac{(28 + 9\pi) a}{b \cdot (b + \pi)}$$

y-Koordinate von $\vec{r}_{OS}$

$$y_s = \frac{\sum_i y_i A_i}{\sum_i A_i} = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2 + y_3 A_3}{A} = \frac{\frac{1}{4} a \cdot \frac{a^2}{2} + \frac{1}{3} a \cdot \frac{a^2}{4} + \left(\frac{2}{3\pi} + \frac{1}{2}\right) a \cdot \frac{a^2}{8} \pi}{\left(\frac{3}{4} + \frac{\pi}{8}\right) a^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{8} a + \frac{1}{12} a + \frac{1}{12} a + \frac{1}{16} \pi a}{\frac{3}{4} + \frac{\pi}{8}} = \frac{\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{6} + \frac{1}{16} \pi\right) a}{\frac{b + \pi}{8}} \cdot \frac{48}{48} = \frac{(b + 8 + 3\pi) a}{b \cdot (b + \pi)}$$

$$= \frac{(14+3\pi)a}{b \cdot (b+\pi)}$$

$$\text{Somit ist } \vec{r}_{OS} = \begin{pmatrix} \frac{(28+9\pi)a}{b \cdot (b+\pi)} \\ \frac{(14+3\pi)a}{b \cdot (b+\pi)} \end{pmatrix} = \frac{a}{b \cdot (b+\pi)} \cdot \begin{pmatrix} 28+9\pi \\ 14+3\pi \end{pmatrix}$$

3. Statik: - Ziel: Bindungskräfte eines Systems bestimmen:

3.1 Hauptsatz der Statik:

Damit ein System in Ruhe ist, gilt $\vec{R} = 0$ & $\vec{M} = 0$

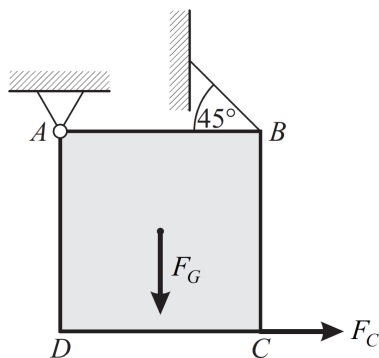
Bem: Moment ist unabhängig vom Bezugspunkt wegen $\vec{R} = 0$

Good to know: der Hauptsatz der Statik wird vom Prinzip der virtuellen Leistungen impliziert
↳ werden wir uns nächste Woche genauer anschauen.

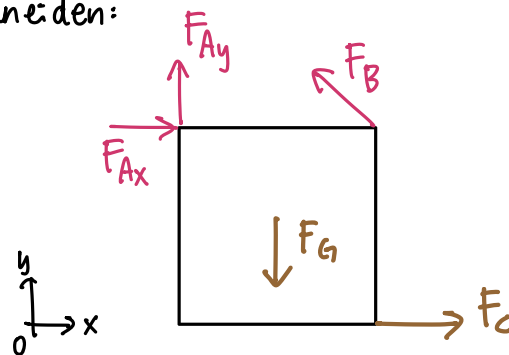
3.2 Freischneiden:

Beim analysieren eines Systems (d.h. Bindungskräfte bestimmen usw.) muss man immer als allererster Schritt alle Starrkörper freischneiden. Dabei zeichnet man alle Kräfte (auch Bindungskräfte!) ein, die auf das System wirken.

Bsp: (aus Serie 6, A1)



freischneiden:



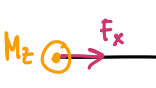
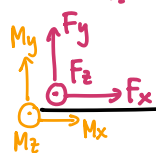
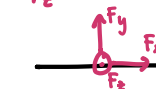
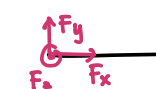
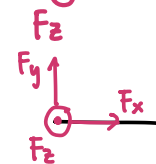
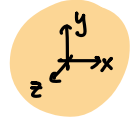
3.3 Lagerkräfte: Beim freischnitten muss man die Lagerkräfte so einzeichnen:

Lager vor dem Freischnitt

nach Freischnitt

Auflager (einseitig)		
Auflager (einseitig) <i>Loslager</i>		
Auflager (beidseitig) <i>Loslager</i>		
Auflager (beidseitig) <i>Kurzes Querlager</i> <i>Loslager</i>		
Gelenk <i>Festlager</i>		
Gelenk		
Gelenk (zwei gelenkig verbundene Balken)		
Einspannung		
Faden / Seil		
Pendelstütze (Modellannahme: äussere Kräfte nur in den Gelenken)		
Parallelführung		
Langes Querlager, Schiebehülse		
Längs- und kurzes Querlager		

3D:

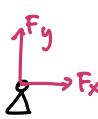


Seilkraft

↳ aus Skript S.54~55

Good to know: Man zeichnet die Kräfte / Momente dort ein, wo die Bewegung / Rotation in diese Richtung vom Lager aufgehalten wird. D.h. dort wo die Bewegung wegen dem Lager nicht zugelassen ist.

Wichtig: Es ist egal, ob ihr die Kräfte / Momente in plus oder minus

Richtung einzeichnet (d.h. z.B.  oder  egal)

⇒ Bei den Aufgaben / an der Prüfung wird die **Skizze berücksichtigt!**
(Deswegen auch: zeichnet die Kräfte sauber ein beim freischneiden)



Seilkräfte: Seile können nur auf Zug belastet werden. Das heisst:

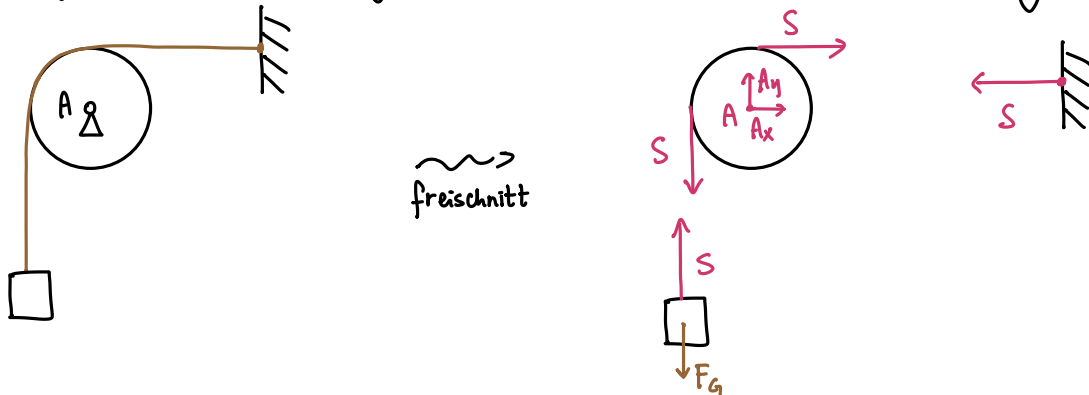
- Seilkräfte immer auf Zug (weg vom Körper) & in Seilrichtung zeichnen
- Bedingung: $S \geq 0$ s : Seilkraft

Bsp:



Wichtig: Reibungsfreie Umlenkungen: Seilkraft ist an beiden Enden gleich gross

Bsp:



So weit so gut, aber wofür brauchen wir das Ganze jetzt?

Kochrezept für Statikaufgaben:

1) Koordinatensystem einführen & Freischnittskizze erstellen.

wie ihr wollt! aber macht euer
Leben nicht unnötig schwer...

- Lager ersetzen durch Lagerkräfte gemäss Tabelle (Seile auch)
- Alle äusseren Kräfte & Momente eintragen
- Falls nicht masselos $\rightarrow$ Gewichtskräfte eintragen

2) Gleichgewichtsbedingungen formulieren:

$$3D: \quad R = R_x = R_y = R_z = 0 \quad M = M_x = M_y = M_z = 0 \quad 6 \text{ Gleichungen pro SK}$$

$$2D: \quad R = R_x = R_y = 0 \quad M = M_z = 0 \quad 3 \text{ Gleichungen pro SK}$$

& nach gesuchten Kräften / Momenten auflösen

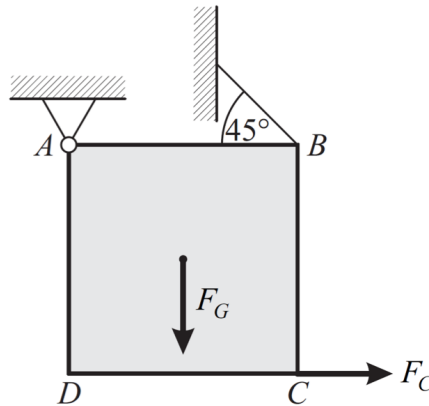
3) Diskussion über Ruhe:

- Seilkräfte nur auf Zug belastet $\rightarrow S > 0$
- Auflager hebt nicht ab $\rightarrow F_y > 0 \quad \forall \text{ Auflager}$

$\hookrightarrow$ Schauen wir uns das ganze anhand eines Beispiels an!

Seite 6, Aufgabe 1:

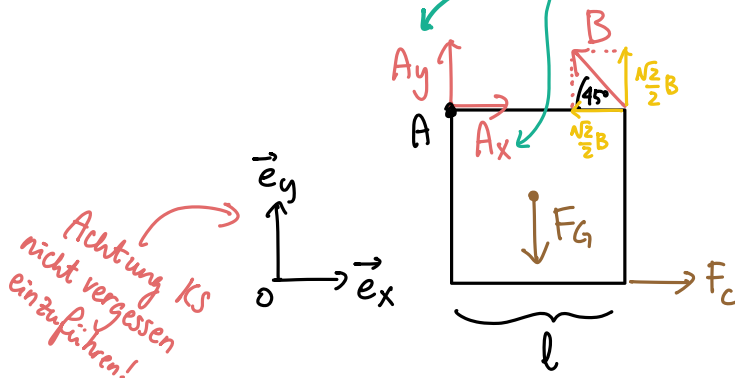
1. Eine homogene Quadratplatte ist durch ihr Eigengewicht F_G sowie durch eine horizontale Kraft vom Betrag F_C belastet. Die Platte ist in der Ecke A gelenkig reibungsfrei gelagert sowie mit einem gewichtslosen Faden an der Ecke B gestützt.



1. Ermitteln Sie alle an der Platte angreifenden Bindungskräfte.
2. Wie gross darf F_C höchstens sein, damit die Platte noch ruht?

1) Schritt 1: Freischnitt:

ich benenne meine Kräfte gerne so, damit ich nicht unnötig oft "F" schreiben muss.



Achtung KS nicht vergessen einzuführen!

Schritt 2: Gleichungen aufstellen:

Merke: - Statikaufgabe! $\rightarrow \vec{R} = 0, \vec{M} = 0$
 - 2D $\rightarrow$ 3 Gleichungen pro SK

$$\text{KB}(x): 0 = A_x + F_C - \frac{\sqrt{2}}{2} B \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{KB}(y): 0 = A_y - F_G + \frac{\sqrt{2}}{2} B \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\text{M}(A, z): 0 = l \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} B - \frac{l}{2} F_G + l F_C \quad \dots \textcircled{3}$$

lineares Gleichungssystem!

Tipp: nummeriert eure Gleichungen, um den Überblick zu erhalten

Bezugspkt. beliebig!
 (Moment ist unabhängig vom Bezugspkt. wegen $\vec{R} = 0$)
 Moment hat in 2D nur 1 Komponente (hier z weil Körper auf xy-Ebene)

Schritt 3: Gleichungen auflösen:

Tipp: schreibt am Anfang auf, welche Kräfte gesucht sind, um den Überblick zu erhalten!

$$\textcircled{3} \Rightarrow l \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} B - \frac{l}{2} F_G + l F_C = 0 \quad | :l, \cdot 2 \quad \Rightarrow \textcircled{?}: A_x, A_y, B$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} B - F_G + 2 F_C = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} B = F_G - 2 F_C$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{\sqrt{2}}{2} F_G - \sqrt{2} F_C \quad \dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{2} \Rightarrow A_y - F_G + \frac{\sqrt{2}}{2} B = 0 \quad / \quad \textcircled{4} \Rightarrow B = \frac{\sqrt{2}}{2} F_G - \sqrt{2} F_C$$

$$\Leftrightarrow A_y = F_G - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} F_G - \sqrt{2} F_C \right) = F_G - \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} F_G}_{\frac{1}{2} F_G} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} F_C$$

$$\Rightarrow A_y = \frac{1}{2} F_G + F_C \quad \dots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow A_x + F_C - \frac{\sqrt{2}}{2} B = 0 \quad / \quad \textcircled{4} \Rightarrow B = \frac{\sqrt{2}}{2} F_G - \sqrt{2} F_C$$

$$\Leftrightarrow A_x = -F_C + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} F_G - \sqrt{2} F_C \right) = -F_C + \frac{1}{2} F_G - F_C$$

$$\Rightarrow A_x = \frac{1}{2} F_G - 2 F_C //$$

2) F_C max., s.d. Platte ruht?

$\Rightarrow$ Platte ruht, solange das Seil gespannt ist $\Rightarrow B \geq 0$

$$\textcircled{4} \Rightarrow B = \frac{\sqrt{2}}{2} F_G - \sqrt{2} F_C \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} F_C \leq \frac{\sqrt{2}}{2} F_G \quad | : \sqrt{2}$$

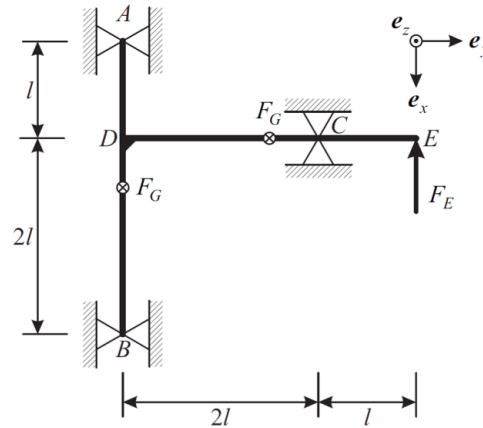
$$F_C \leq \frac{1}{2} F_G$$

Teil 3: Übungsaufgaben - Serie 6

→ A1 & A4 schon gemacht :)

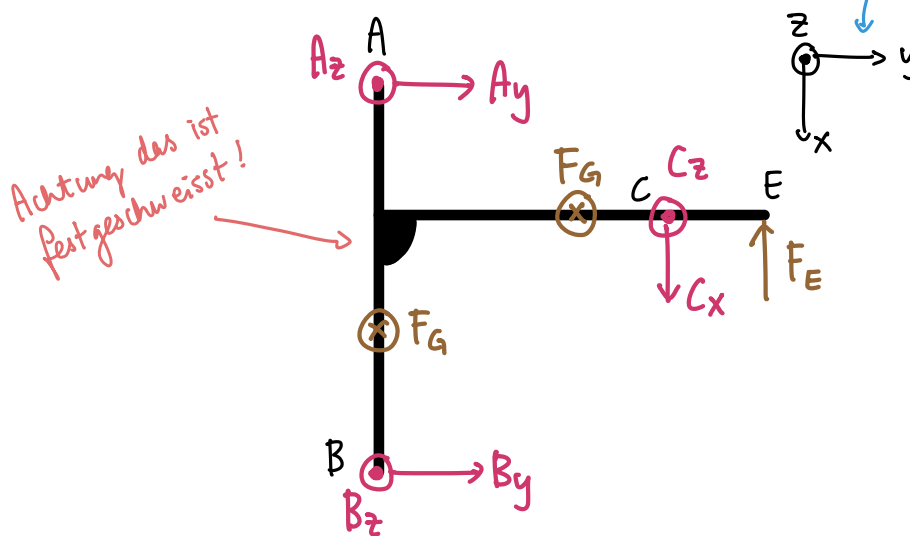
2. ² Zwei gleichlange Stäbe der Länge $3l$ sind in D gemäss Skizze rechtwinklig zusammengeschweisst. Sie haben jeweils das Gewicht F_G . Das System liegt in einer Horizontalebene. Es ist in A , B und C durch kurze räumliche Querlager gelagert. In E wirkt eine horizontale Kraft vom Betrag F_E . Bestimmen Sie die Lagerkräfte in A , B und C .

Achtung 3D-Aufgabe!



Tipp: Führen Sie in A und B Lagerkräfte in y - und z -Richtung ein, in C Lagerkräfte in x - und z -Richtung.

Schritt 1: freischneiden:



Schritt 2: Gleichgewichtsbedingungen aufstellen:

3D → 6 Gleichungen pro SK

$$KB(x): 0 = C_x - F_E$$

$$KB(y): 0 = A_y + B_y$$

$$KB(z): 0 = A_z + B_z + C_z - 2F_G$$

$$MB(A, x): 0 = 2LC_z - \frac{3}{2}LF_G$$

$$MB(A, y): 0 = -3LB_z - LC_z + LF_G + \frac{3}{2}LF_G$$

$$MB(A, z): 0 = 3LB_y - 2LC_x + 3LF_E$$

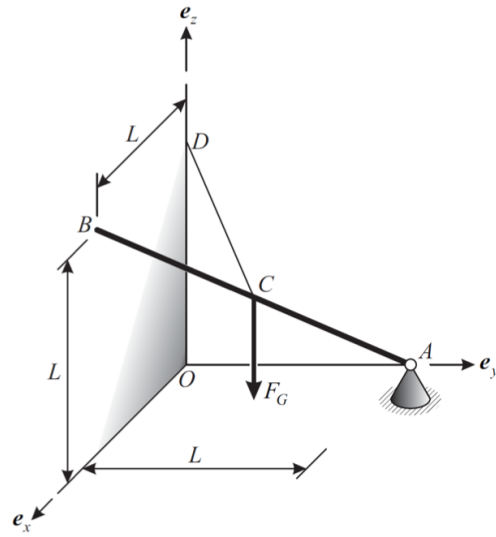


Wählt einen geeigneten Pkt.!

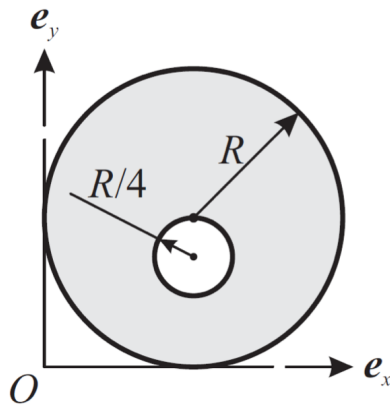
Schritt 3: Gleichungen auflösen nach: $\textcircled{?}: A_y, A_z, B_y, B_z, C_y, C_z$

→ siehe Multio

3. ³ Wir betrachten einen starren Balken (Länge $\sqrt{3}L$) im Raum. Er ist im Punkt A reibungsfrei gelenkig gelagert und wird im Punkt B reibungsfrei von der Wand (xz-Ebene) abgestützt. Zwischen den Punkten C (Mittelpunkt des Balkens) und D ist ein gewichtsloses Seil gespannt. Auf den Balken wirkt sein Eigengewicht F_G im Massenmittelpunkt C . Berechnen Sie die Bindungskräfte in den Punkten A , B und C .

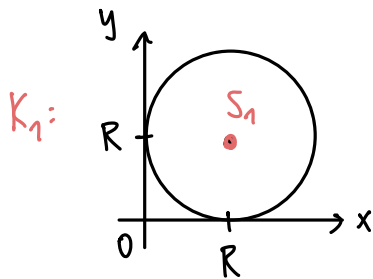
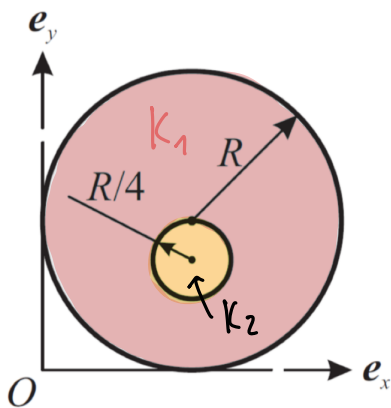


5. ⁵ Finden Sie den Schwerpunkt des unten skizzierten, homogenen, ebenen Körpers.



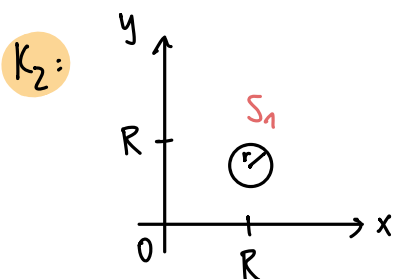
Annahme: Der Körper ist eben und hat eine homogene Massenverteilung.

Schritt 1: Körper in einfachere Körper zerteilen:



$$\vec{r}_{OS_1} = \begin{pmatrix} R \\ R \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow x_1 \\ \leftarrow y_1 \end{matrix}$$

$$A_1 = \pi R^2$$



Wie vorher: Zwischenschritt: $\vec{r}'_{OS_2} = \begin{pmatrix} R/4 \\ R/4 \end{pmatrix}$

dann Koordinatenverschiebung: $\vec{r}_{OS_2} = \begin{pmatrix} R/4 \\ R/4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/4 R \\ 2/4 R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \\ 3/4 R \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \vec{r}_{OS_2} = \begin{pmatrix} R/4 \\ R/4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/4 R \\ 2/4 R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \\ 3/4 R \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow x_2 \\ \leftarrow y_2 \end{matrix}$$

$$A_2 = \frac{R^2}{16} \pi$$

$\hookrightarrow + \frac{3}{4} R$ in x-Richtung
 $+ \frac{2}{4} R$ in y-Richtung

Bem: Diese 2 Schwerpunkte hätte man auch einfach aus der Skizze ablesen können.

Schritt 2: Formel anwenden um $\vec{r}_{os} = \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix}$ herauszufinden:

Minus weil wir die 2. Fläche abziehen müssen!

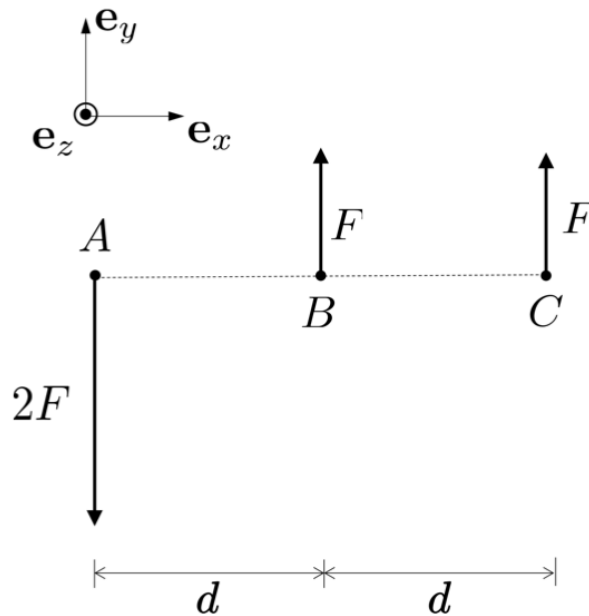
$$x_s = \frac{\sum_i x_i A_i}{\sum_i A_i} = \frac{x_1 A_1 - x_2 A_2}{A_1 - A_2} = \frac{R \cdot \pi R^2 - R \cdot \frac{\pi}{16} R^2}{\left(1 - \frac{1}{16}\right) \pi R^2} =$$
$$= \frac{R \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right)}{1 - \frac{1}{16}} = R$$

$$y_s = \frac{\sum_i y_i A_i}{\sum_i A_i} = \frac{y_1 A_1 - y_2 A_2}{A_1 - A_2} = \frac{R \cdot \pi R^2 - \frac{3}{4} R \cdot \frac{1}{16} \pi R^2}{\left(1 - \frac{1}{16}\right) \pi R^2}$$
$$= \frac{R \cdot \left(1 - \frac{3}{64}\right)}{1 - \frac{1}{16}} \cdot \frac{64}{64} = \frac{R \cdot (64 - 3)}{64 - 4} = \frac{61}{60} R$$

$\frac{64}{64} = 1$

$$\text{Somit ist } \vec{r}_{os} = \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{61}{60} \end{pmatrix} \cdot R$$

6. Betrachten Sie die skizzierte, aus den drei Kräften bestehende Kräftegruppe, mit Betrag und Richtung gemäss Skizze. Wozu ist die dargestellte Kräftegruppe äquivalent?



- (a) Ein Kräftepaar $\mathbf{M}_A = 3F d \mathbf{e}_z$
 (b) Eine Dynami $\mathbf{R} = 2F \mathbf{e}_y$, $\mathbf{M}_A = 2F d \mathbf{e}_z$
 (c) Eine Resultante $\mathbf{R} = 4F \mathbf{e}_y$
 (d) Ein Kräftepaar $\mathbf{M}_A = 2F d \mathbf{e}_z$
 (e) Ein Nullsystem

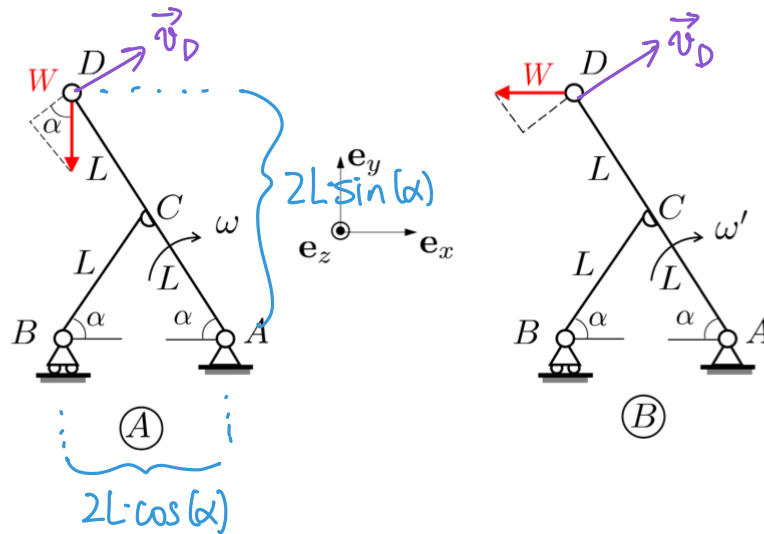
$$\vec{R} = -2F + F + F = 0$$

$$\vec{M}_A = dF \vec{e}_z + 2dF \vec{e}_z = 3dF \vec{e}_z \quad \rightarrow \underline{\underline{a)}}$$

↑ Pkt. egal weil $\vec{R} = 0$ ↑ $\vec{e}_z$ weil Moment ist nur in z-Richtung bei 2D-Aufgaben auf xy-Ebene

Bem: Kräftepaar ($\hat{=}$ Moment) wenn: $\begin{cases} \vec{R} = 0 \\ \vec{M} \neq 0 \end{cases}$

7. Betrachten Sie die zwei dargestellten Systeme, auf denen eine Kraft vom Betrag W aber unterschiedliche Richtung im Punkt D wirkt. Die Grössen L, α, W und ω sind gegeben. Wie gross muss die Rotationsschnelligkeit ω' sein, sodass die Leistung im Punkt D für beide Systeme gleich ist?



- (a) $\omega' = -\omega$
 (b) $\omega' = \omega \tan \alpha$
 (c) $\omega' = \omega$
 (d) $\omega' = \omega \cos \alpha$
 (e) $\omega' = \omega \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$

Leistung im Punkt D: $P = \vec{W} \cdot \vec{v}_D$

$$\textcircled{A}: P_D = \vec{W} \cdot \vec{v}_D \quad \text{mit} \quad \vec{W} = \begin{pmatrix} 0 \\ -W \end{pmatrix} \quad \vec{v}_D = \begin{pmatrix} 2L \sin(\alpha) \omega \\ 2L \cos(\alpha) \omega \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P_{D,\textcircled{A}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -W \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2L \sin(\alpha) \omega \\ 2L \cos(\alpha) \omega \end{pmatrix} = -2WL \cos(\alpha) \omega$$

$$\textcircled{B}: P_D = \vec{W} \cdot \vec{v}_D \quad \text{mit} \quad \vec{W} = \begin{pmatrix} -W \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}_D = \begin{pmatrix} 2L \sin(\alpha) \omega' \\ 2L \cos(\alpha) \omega' \end{pmatrix}$$

$$P_{D,\textcircled{B}} = \begin{pmatrix} -W \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2L \sin(\alpha) \omega' \\ 2L \cos(\alpha) \omega' \end{pmatrix} = -2WL \sin(\alpha) \omega'$$

$$\Rightarrow P_{D, \textcircled{A}} = -2WL \cos(\alpha) \omega \stackrel{!}{=} -2WL \sin(\alpha) \omega' = P_{D, \textcircled{B}} \quad /$$

$$\Rightarrow 2WL \cos(\alpha) \omega \stackrel{!}{=} 2WL \sin(\alpha) \omega' \quad / \div 2WL \sin(\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{\omega' = \omega \cdot \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}}}$$