Übung 6

02.11.2021
Lina De Windt

Themen von Heute:

> Teil 1: Fragen zu Themen / Aufgaben von letzter Woche?

> Teil 2: Recap der Theorie von dieser Woche:

1. Parallele Kräfte:
   - 1.1 Dipolmoment & Kräftemittelpunkt
2. Schwerpunkt
   - 2.1 allgemeine Formel für die Schwerpunktberechnung
   - 2.2 Schwerpunkt & Flächen einiger simplen Körper
3. Statik:
   - 3.1 Hauptsatz der Statik
   - 3.2 Freischneiden
   - 3.3 Lagerkräfte
   - 3.4 Seilkräfte

auch: Kochrezept Statikaufgaben!

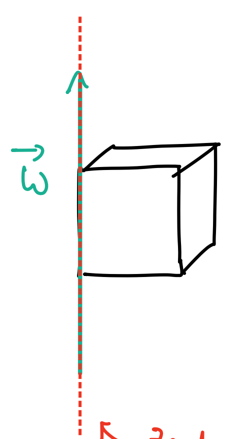
heute hauptsächlich zusammen mit Teil 2

> Teil 3: Übungsaufgaben lösen (Serie 6)

Teil 1: Fragen zu Themen von letzter Woche?

Bem: Serie 5, letzte Aufgabe:

Zentralachse = die Rotationsachse bei der Schraubung. Sie bewegt sich in Richtung von $\vec{\omega}$.



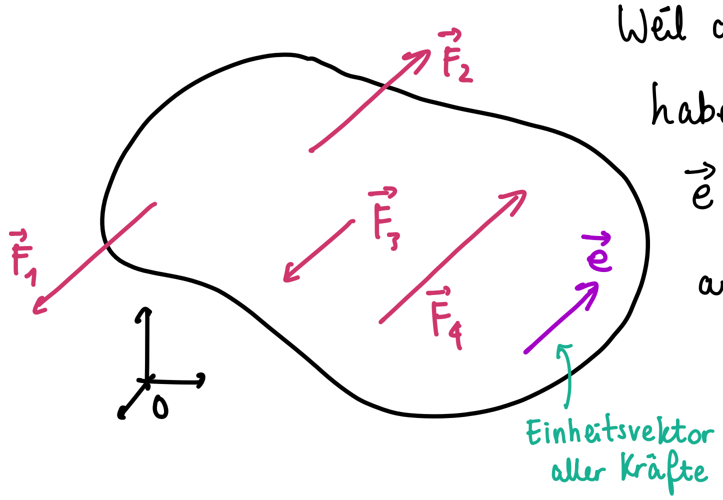
↖ Zentralachse → alle Pkte auf der Zentralachse haben die gleiche Geschwindigkeit (in $\vec{\omega}$-Richtung)!

Teil 2: Recap der Theorie von dieser Woche

1. Parallele Kräfte:

← kommt nicht in der Serie, ich möchte es jedoch trzdm kurz besprechen.

Hier betrachten wir Kräftegruppen $\{\vec{F}_i\} = \{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N\}$, wobei alle Kräfte parallel aufeinander sind:



Weil alle Kräfte parallel aufeinander sind, haben alle den gleichen Richtungsvektor $\vec{e}$. Somit können wir die Kräfte aufschreiben als: $\vec{F}_i = F_i \vec{e}$

Die Resultante ist dann $\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n} F_i \vec{e} = R\vec{e}$ und

das Moment bezüglich 0: $\vec{M}_0 = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i \underset{\vec{F}_i = F_i\vec{e}}{=} \sum_{i=1}^{n} F_i \vec{r}_i \times \vec{e} = \vec{N} \times \vec{e}$

wobei $\vec{N} = \sum_{i=1}^{n} F_i \vec{r}_i$ Das Dipolmoment der Kräftegruppe ist.

Bem: Bei parallelen Kräften ist die 2. Invariante null: $I_2 = \vec{R} \cdot \vec{M}_0 = R\vec{e} \cdot \underbrace{(\vec{N} \times \vec{e})}_{\perp \text{ auf } \vec{e}} \overset{\text{SP von 2 } \perp \text{ Vektoren}}{=} 0$

1.1 Dipolmoment & Kräftemittelpunkt

Das Dipolmoment einer Kräftegruppe (∃ nur wenn alle Kräfte parallel aufeinander)

ist definiert als: $\boxed{}$

Fallunterscheidung:

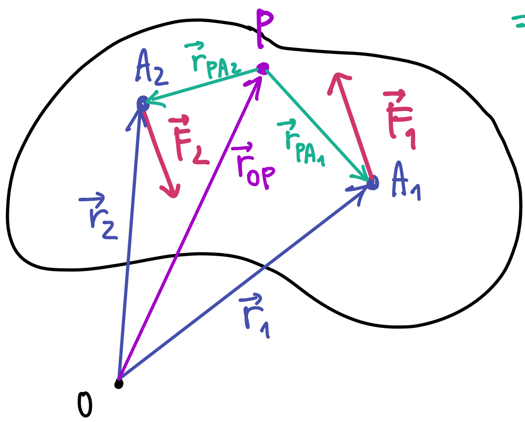
$\vec R = 0$: Dann ist das Dipolmoment unabhängig vom Punkt O.

Why? $\vec N = \sum_{i=1}^{n} F_i \vec r_i = \sum_i F_i (\vec r_{OP} + \vec r_{PA_i}) = \underbrace{\sum_i F_i \vec r_{OP}}_{=0} + \sum_i F_i \vec r_{PA_i} = \sum_i F_i \vec r_{PA_i}$

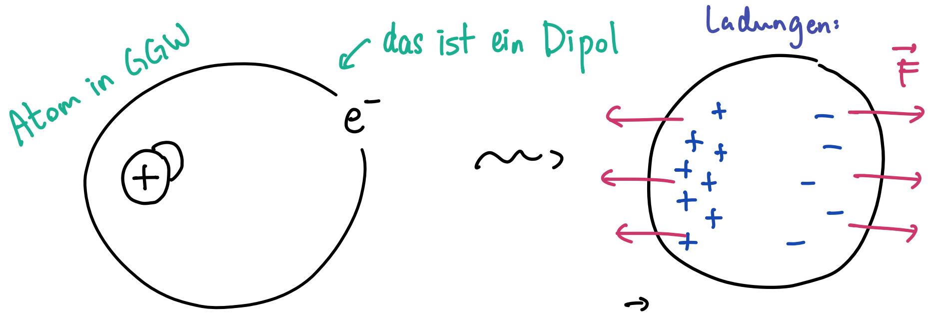
Ortsvektor (von O aus)

weil: $\sum_i F_i \vec r_{OP} = \vec r_{OP} \cdot \sum_i F_i = \vec r_{OP} \cdot \vec R = 0$

unabhängig von wo aus die "Ortsvektoren" kommen → unabhängig vom Bezugssystem



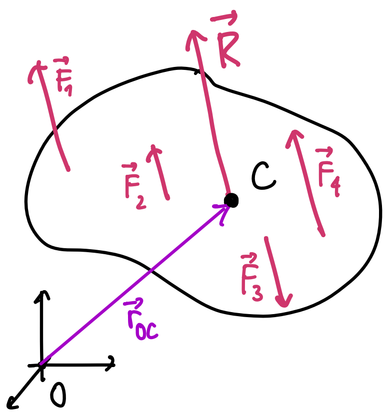
Warum ist das wichtig für uns? → in Elektrostatik passiert genau das!



Dipolmoment ist unabhängig vom Bezugssystem

in GGW heisst: $\vec R = 0$

$\vec R \neq 0$: Dann ist das Dipolmoment abhängig vom Bezugspunkt & es interessiert uns auch, wo der Kräftemittelpunkt C (≙ dort wo $\vec R$ angreift) ist:



Kräftemittelpunkt: $\boxed{}$

↳ Herleitung in den VL-Slides (nicht wichtig)

2. Schwerpunkt (auch: Massenmittelpunkt) ← in TechMech nur in 2D :)

⇒ hier greift die Gewichtskraft eines Körpers an.

2.1 allgemeine Formel für die Schwerpunktberechnung:

Die x- und y-Koordinate des Schwerpunkts werden so berechnet:

Der Schwerpunkt ist dann:

Ortsvektor vom Schwerpunkt

Wobei $\sum_i x_i A_i$ = "Summe der x-Komponenten der Schwerpunktsortsvektoren aller Teilkörper" mal "Fläche der jeweiligen Teilkörper"

und $\sum_i A_i$ = Summe aller Flächen der Teilkörper (≙ Gesamtfläche)

analog für y

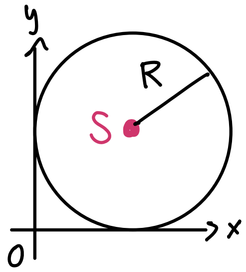
⊛ Wenn der Körper homogen ist & wir einfache Geometrien haben
→ in TechMech immer der Fall. d.h. Integral-formel ist für uns nicht wichtig :)

Doch um diese Formel anwenden zu können, brauchen wir die Schwerpunkte einiger simplen Körper!

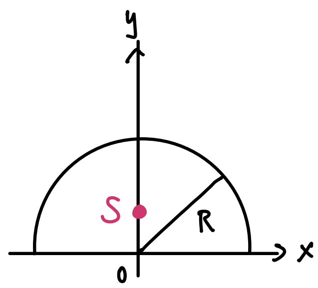
2.2 Schwerpunkte & Flächen einiger simplen Körper:

⚠ Achte wo das Koordinatensystem ist!

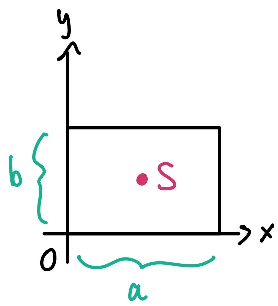
Kreis:



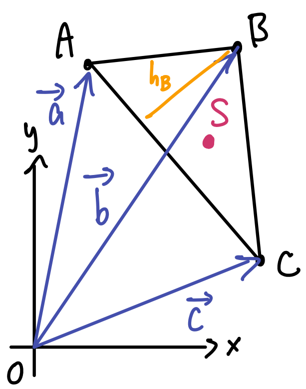
Halbkreis:



Rechteck:



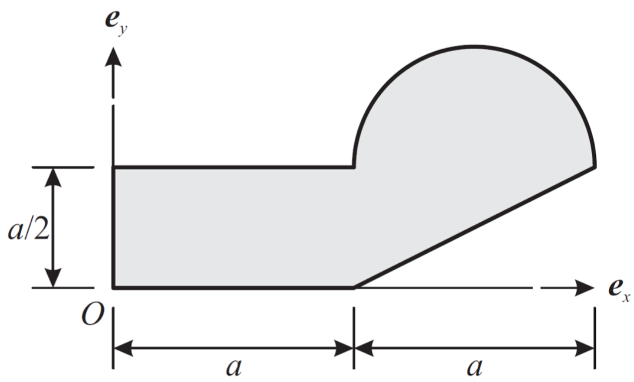
Dreieck:



↳ hier sind alle Körper homogen.

Beispiel: Serie 6, Aufgabe 4

4. [4] Finden Sie den Schwerpunkt des unten skizzierten, homogenen, ebenen Körpers.



Annahme: Der Körper ist eben und hat eine homogene Massenverteilung.

3. Statik:

– Ziel: Bindungskräfte eines Systems bestimmen:

3.1 Hauptsatz der Statik:

Damit ein System in Ruhe ist, gilt

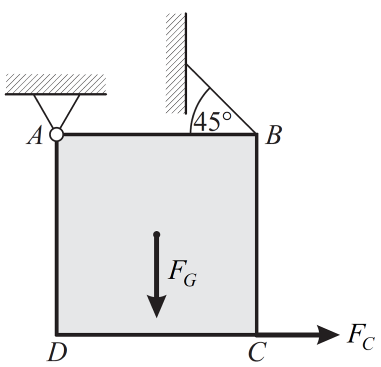
Bem: Moment ist unabhängig vom Bezugspunkt wegen $\vec{R}=0$

Good to know: der Hauptsatz der Statik wird vom Prinzip der virtuellen Leistungen impliziert → werden wir uns nächste Woche genauer anschauen.

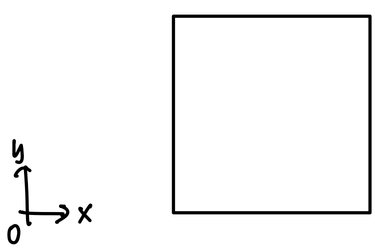
3.2 Freischneiden:

Beim analysieren eines Systems (d.h. Bindungskräfte bestimmen usw.) muss man immer als allererster Schritt alle Starrkörper freischneiden. Dabei zeichnet man alle Kräfte (auch Bindungskräfte!) ein, die auf das System wirken.

Bsp: (aus Serie 6, A1)

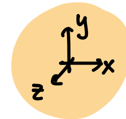


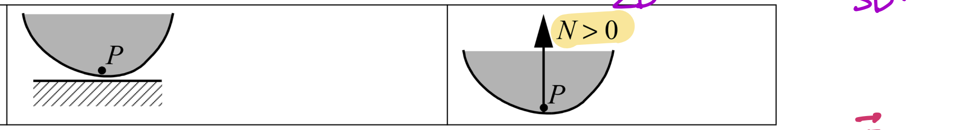
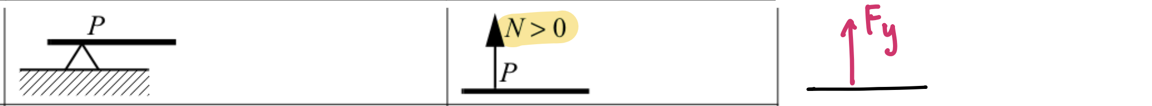
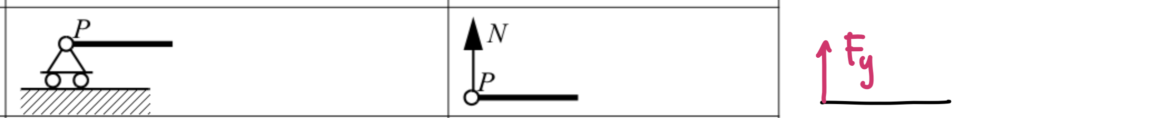
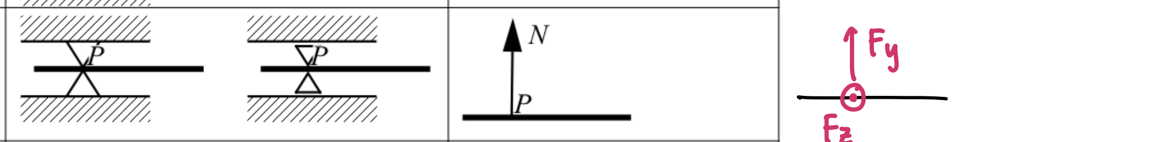
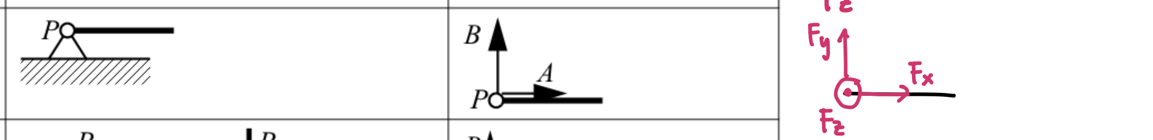
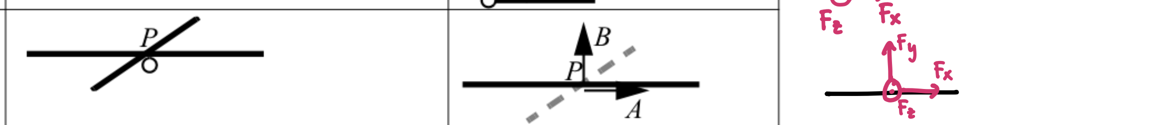
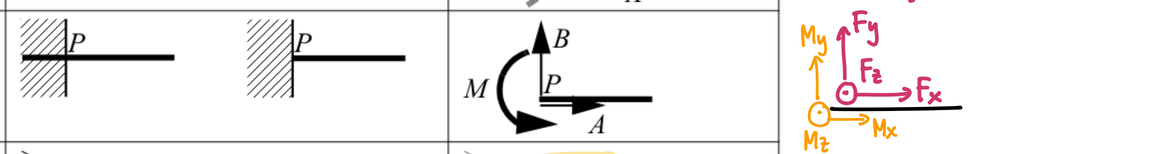
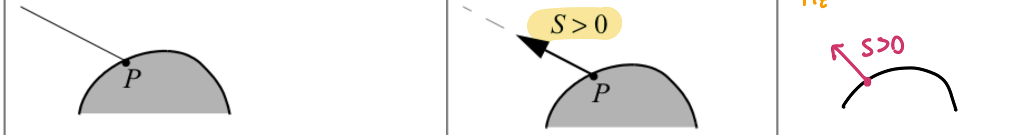
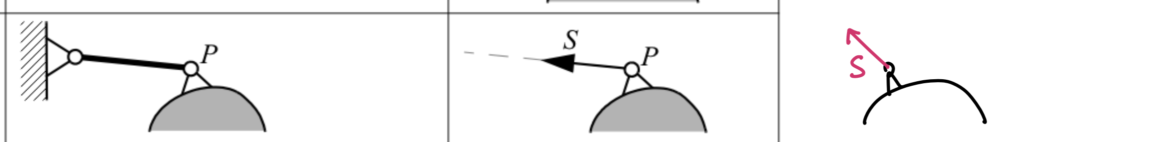
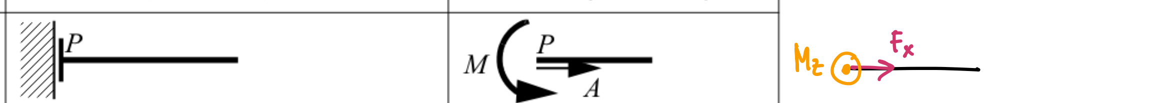
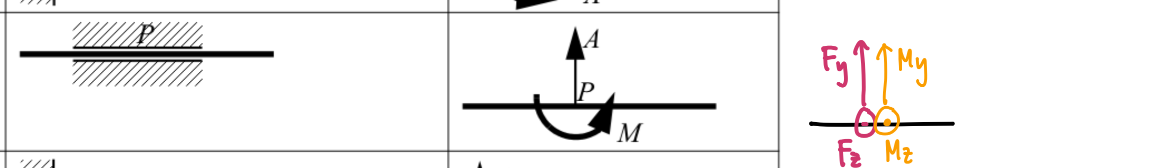
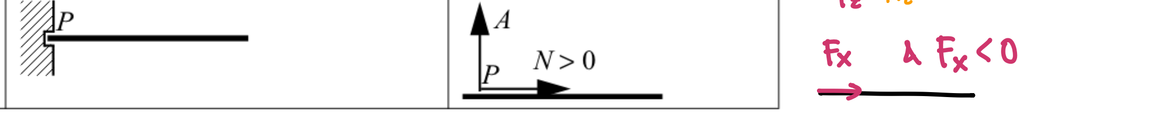
freischneiden:



3.3 Lagerkräfte: Beim freischneiden muss man die Lagerkräfte so einzeichnen:

Lager vor dem Freischnitt — nach Freischnitt — 2D — 3D:

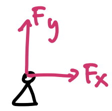
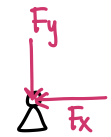


Auflager (einseitig)	
Auflager (einseitig) *Loslager*	
Auflager (beidseitig) *Loslager*	
Auflager (beidseitig) *Kurzes Querlager* *Loslager*	
Gelenk *Festlager*	
Gelenk	
Gelenk (zwei gelenkig verbundene Balken)	
Einspannung	
Faden / Seil	
Pendelstütze (Modellannahme: äussere Kräfte nur in den Gelenken)	
Parallelführung	
Langes Querlager, Schiebehülse	
Längs- und kurzes Querlager	

⊛ Seilkraft

↳ aus Skript S.54~55

Good to know: Man zeichnet die Kräfte / Momente dort ein, wo die Bewegung / Rotation in diese Richtung vom Lager aufgehalten wird. D.h. dort wo die Bewegung wegen dem Lager nicht zugelassen ist.

Wichtig: Es ist egal, ob ihr die Kräfte / Momente in plus oder minus Richtung einzeichnet (d.h. z.B.  oder  egal)

⇒ Bei den Aufgaben / an der Prüfung wird die Skizze berücksichtigt!
(Deswegen auch: zeichnet die Kräfte sauber ein beim freischneiden)

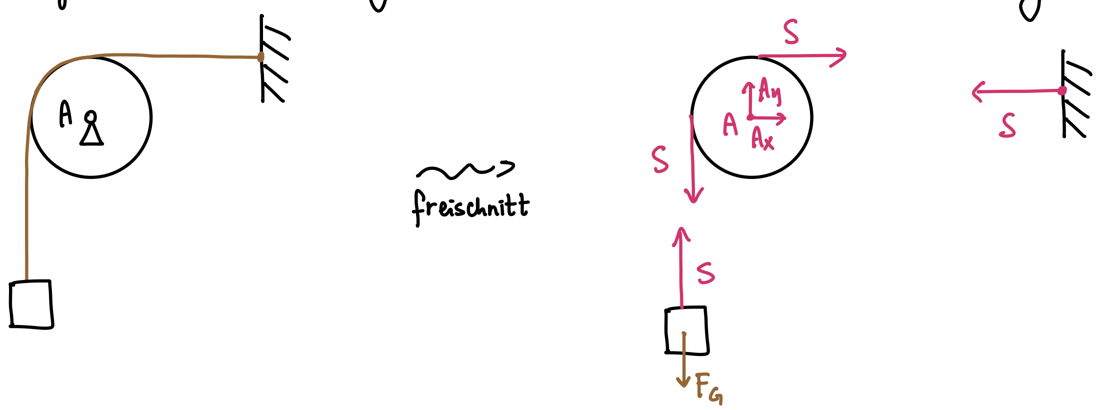
Seilkräfte: Seile können nur auf Zug belastet werden. Das heisst:

- Seilkräfte immer auf Zug (weg vom Körper) & in Seilrichtung zeichnen
- Bedingung: $\boxed{S \geq 0}$ S: Seilkraft

Bsp:

Wichtig: Reibungsfreie Umlenkungen: Seilkraft ist an beiden Enden gleich gross

Bsp:



So weit so gut, aber wofür brauchen wir das Ganze jetzt?

Kochrezept für Statikaufgaben:

1) Koordinatensystem einführen & Freischnittskizze erstellen.

wie ihr wollt! aber macht euer leben nicht unnötig schwer ...

- Lager ersetzen durch Lagerkräfte gemäss Tabelle (Seile auch)
- Alle äusseren Kräfte & Momente eintragen
- Falls nicht masselos → Gewichtskräfte eintragen

2) Gleichgewichtsbedingungen formulieren:

3D: $R = R_x = R_y = R_z = 0$ $\quad M = M_x = M_y = M_z = 0$ $\quad$ 6 Gleichungen pro SK

2D: $R = R_x = R_y = 0$ $\quad M = M_z = 0$ $\quad$ 3 Gleichungen pro SK

& nach gesuchten Kräften / Momenten auflösen

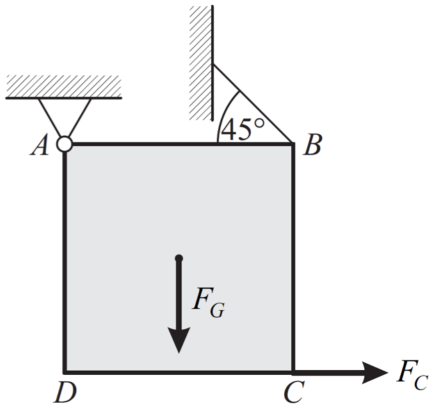
3) Diskussion über Ruhe:

- Seilkräfte nur auf Zug belastet → $S > 0$
- Auflager hebt nicht ab → $F_y > 0$ $\forall$ Auflager

↳ Schauen wir uns das ganze anhand eines Beispiels an!

Serie 6, Aufgabe 1:

1. [1] Eine homogene Quadratplatte ist durch ihr Eigengewicht F_G sowie durch eine horizontale Kraft vom Betrag F_C belastet. Die Platte ist in der Ecke A gelenkig reibungsfrei gelagert sowie mit einem gewichtslosen Faden an der Ecke B gestützt.

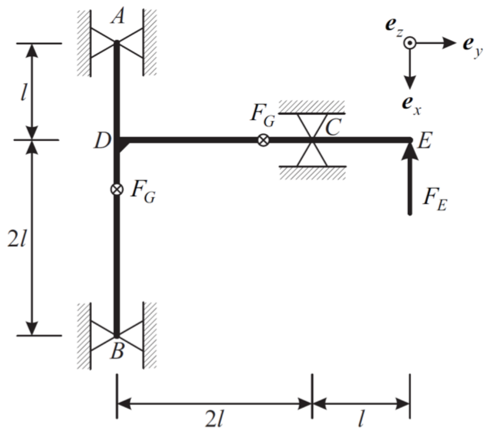


1. Ermitteln Sie alle an der Platte angreifenden Bindungskräfte.
2. Wie gross darf F_C höchstens sein, damit die Platte noch ruht?

Teil 3: Übungsaufgaben - Serie 6

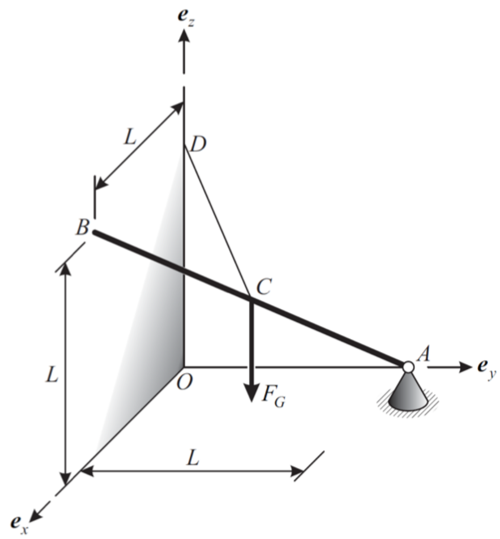
↪ A1 & A4 schon gemacht :)

2. [2] Zwei gleichlange Stäbe der Länge $3l$ sind in D gemäss Skizze rechtwinklig zusammengeschweisst. Sie haben jeweils das Gewicht F_G. Das System liegt in einer Horizontalebene. Es ist in A, B und C durch kurze räumliche Querlager gelagert. In E wirkt eine horizontale Kraft vom Betrag F_E.
Bestimmen Sie die Lagerkräfte in A, B und C.

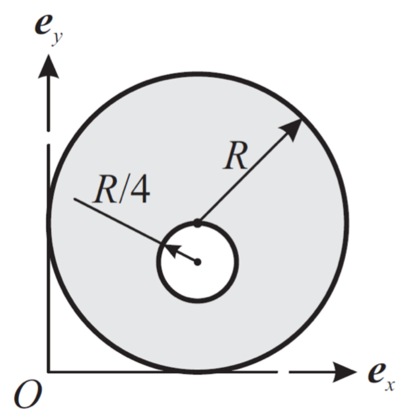


Tipp: Führen Sie in A und B Lagerkräfte in y- und z-Richtung ein, in C Lagerkräfte in x- und z-Richtung.

3. [3] Wir betrachten einen starren Balken (Länge $\sqrt{3}L$) im Raum. Er ist im Punkt A reibungsfrei gelenkig gelagert und wird im Punkt B reibungsfrei von der Wand (xz-Ebene) abgestützt. Zwischen den Punkten C (Mittelpunkt des Balkens) und D ist ein gewichtsloses Seil gespannt. Auf den Balken wirkt sein Eigengewicht F_G im Massenmittelpunkt C.
Berechnen Sie die Bindungskräfte in den Punkten A, B und C.

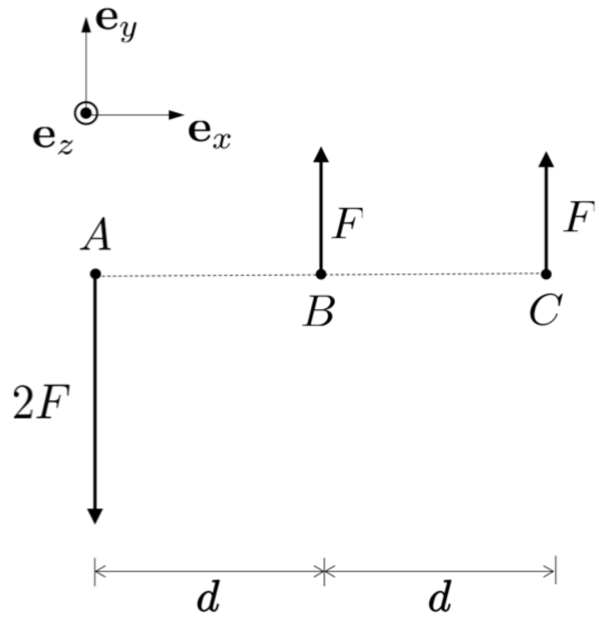


5. [5] Finden Sie den Schwerpunkt des unten skizzierten, homogenen, ebenen Körpers.



Annahme: Der Körper ist eben und hat eine homogene Massenverteilung.

6. Betrachten Sie die skizzierte, aus den drei Kräften bestehende Kräftegruppe, mit Betrag und Richtung gemäss Skizze. Wozu ist die dargestellte Kräftegruppe äquivalent?



(a) Ein Kräftepaar $\mathbf{M}_A = 3Fd\mathbf{e}_z$

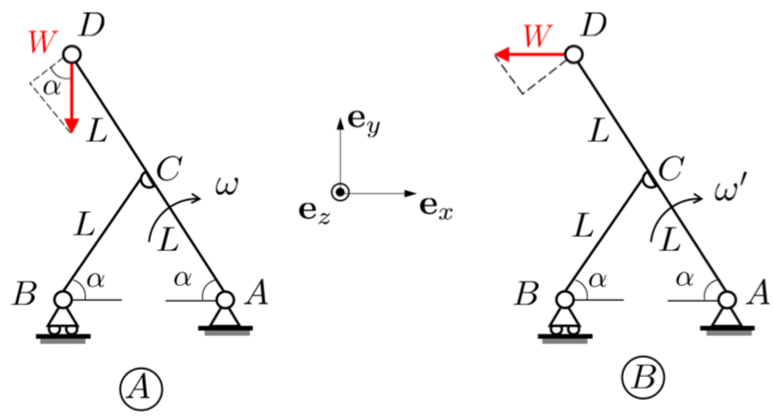
(b) Eine Dyname $\mathbf{R} = 2F\mathbf{e}_y$, $\mathbf{M}_A = 2Fd\mathbf{e}_z$

(c) Eine Risultante $\mathbf{R} = 4F\mathbf{e}_y$

(d) Ein Kräftepaar $\mathbf{M}_A = 2Fd\mathbf{e}_z$

(e) Ein Nullsystem

7. Betrachten Sie die zwei dargestellten Systeme, auf denen eine Kraft vom Betrag W aber unterschiedliche Richtung im Punkt D wirkt. Die Grössen L, α, W und ω sind gegeben. Wie gross muss die Rotationsschnelligkeit ω' sein, sodass die Leistung im Punkt D für beide Systeme gleich ist ?



(a) $\omega' = -\omega$

(b) $\omega' = \omega \tan\alpha$

(c) $\omega' = \omega$

(d) $\omega' = \omega\cos\alpha$

(e) $\omega' = \omega\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

Leistung im Punkt D: P =