

Themen von Heute:

> Teil 1: Fragen zu Themen / Aufgaben von letzter Woche?

> Teil 2: Recap der Theorie von dieser Woche:

1. Prinzip der virtuellen Leistungen (PdvL)

1.1 PdvL (Satz)

1.2 Virtuelle Bewegungszustände

1.3 Recap Leistung

1.4 Stabkräfte

1.5 Kochrezept PdvL

1.6 Beispielaufgabe PdvL

→ Kahoot! :)

> Teil 3: Übungsaufgaben lösen (Seite 7)

Teil 1: Fragen zu Themen von letzter Woche?

Teil 2: Recap der Theorie von dieser Woche

1. Prinzip der virtuellen Leistungen (PdvL)

1.1 PdvL (Satz):

→ Skript S.48

Prinzip der virtuellen Leistungen (PdvL):

Ein System befindet sich genau dann in einer Ruhelage, wenn die virtuelle Gesamtleistung der inneren und äusseren Kräfte bei jedem virtuellen Bewegungszustand verschwindet (und die Eigenschaften des Systems und seiner Lagerung diese Kräfte zulassen).

$$\text{d.h. } \boxed{\tilde{P} = \tilde{P}^{(i)} + \tilde{P}^{(a)} = 0} \quad \forall \{\tilde{v}\}$$

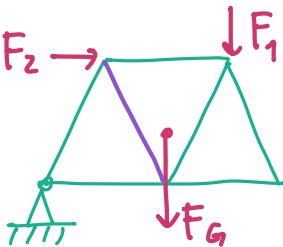
~ heisst virtuell.

Wir benutzen den PdvL, um Bewegungsgleichungen von mechanischen Systemen mit Zwangsbedingungen (z.B. Bindungen) aufzustellen.

Doch was nützt uns eigentlich der PdvL? → 2 Sachen:

Wir werden es hauptsächlich benutzen um Stabkräfte zu bestimmen.

Bsp:



Wir wollen wissen, mit welcher Kraft der violette Stab gedrückt bzw. gezogen wird. Bei einer solchen Aufgabe wird uns der PdvL sehr nützlich sein!

Ausserdem impliziert der PdvL den Hauptsatz der Statik

(System ist in Ruhe wenn $\vec{R}=0$ und $\vec{M}=0$) → haben wir letzte Woche gesehen :)

Und! Bisher kam an der Prüfung zu 100% eine PdvL-Aufgabe

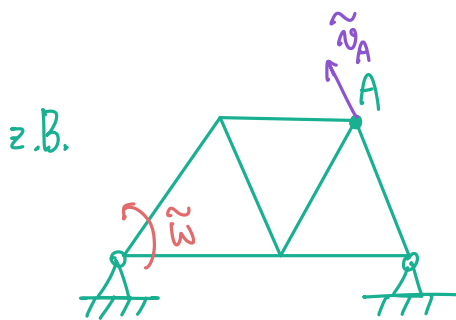
Wir sehen, dass der PdvL recht nützlich ist :)

Doch was bedeutet eigentlich "virtuell"?

1.2 Virtuelle Bewegungszustände:

Ein virtueller Bewegungszustand ist irgendein gedachter Bewegungszustand, der keinen Bezug zu wirklich möglichen Bewegungszuständen haben muss.

Virtuell heißt also, dass wir uns diese Bewegungen einfach nur vorstellen!



Dieses System kann sich eigentlich gar nicht bewegen. Aber wir könnten z.B. eine virtuelle Rotationsgeschwindigkeit $\tilde{\omega}$ einführen um zu schauen was dann die Geschwindigkeit im Punkt A wäre, wenn sich das System tatsächlich ein solches $\tilde{\omega}$ hätte.

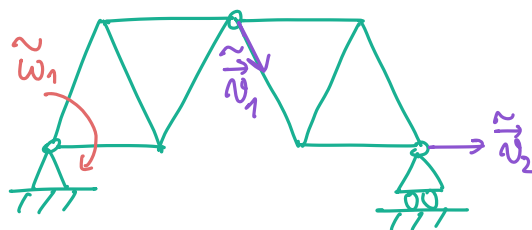
Um virtuelle Bewegungen von wirklichen Bewegungen zu unterscheiden, bezeichnen wir sie mit einer Tilde " $\sim$ ".

Die Kinate $\{\tilde{v}, \tilde{\omega}\}$ ist dann ein virtueller SK-Zustand.

Wir unterscheiden zwischen zulässigen und unzulässigen Bewegungszuständen:

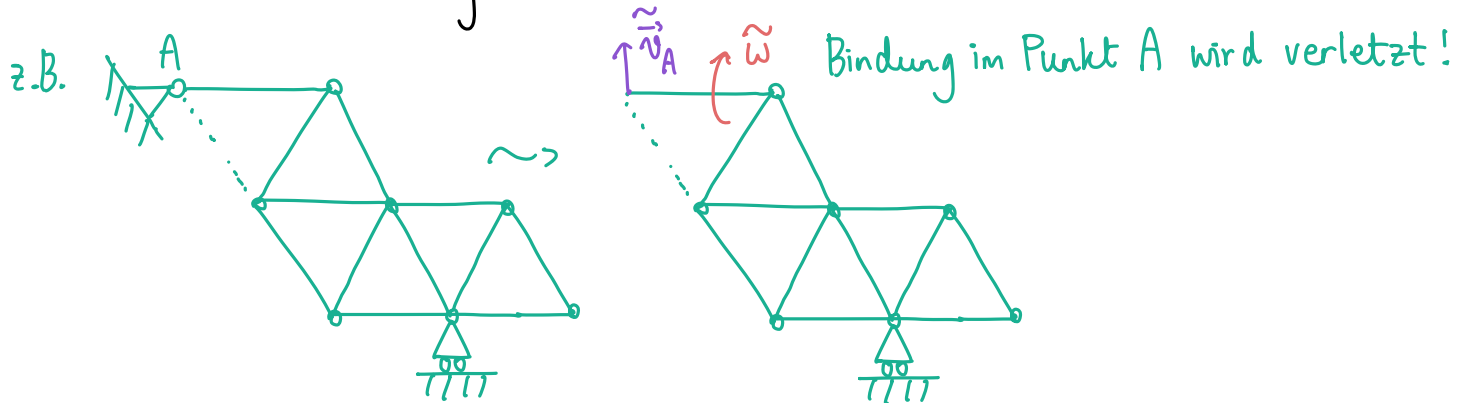
Zulässiger Bewegungszustand: Wenn der virtuelle Bewegungszustand keine Bindungen verletzt.

z.B.



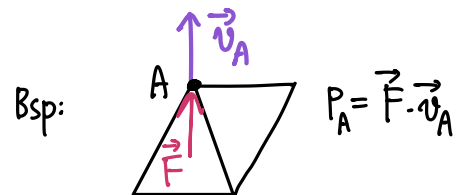
! Wir werden uns v.a. mit zulässigen Bewegungszuständen beschäftigen!

Unzulässiger Bewegungszustand: Wenn der virtuelle Bewegungszustand mindestens 1 Bindung verletzt.

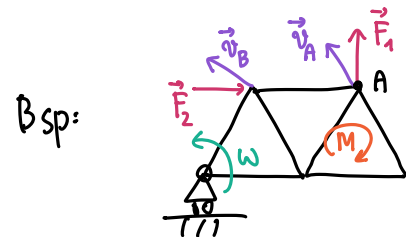


1.3 Recap Leistung:

$$P_{\text{Einzelkraft}} = \vec{F} \cdot \vec{v} = F \cdot v \cdot \cos(\alpha)$$

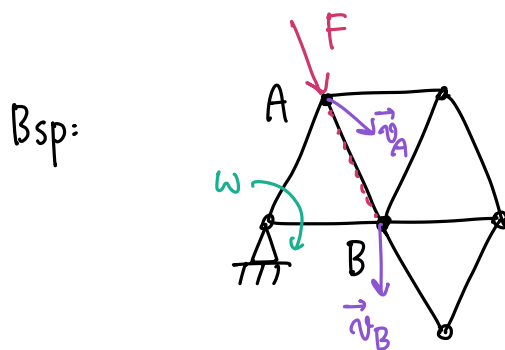


Gesamtleistung: $P = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i + \sum_i \vec{M}_i \cdot \vec{\omega}_i$



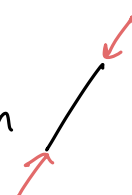
$$P = \vec{F}_1 \cdot \vec{v}_A + \vec{F}_2 \cdot \vec{v}_B + M \cdot \omega$$

don't forget: Bei der Berechnung der Leistung dürfen die Kräfte entlang ihrer Wirkungsline verschoben werden.



$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}_A = \vec{F} \cdot \vec{v}_B$$

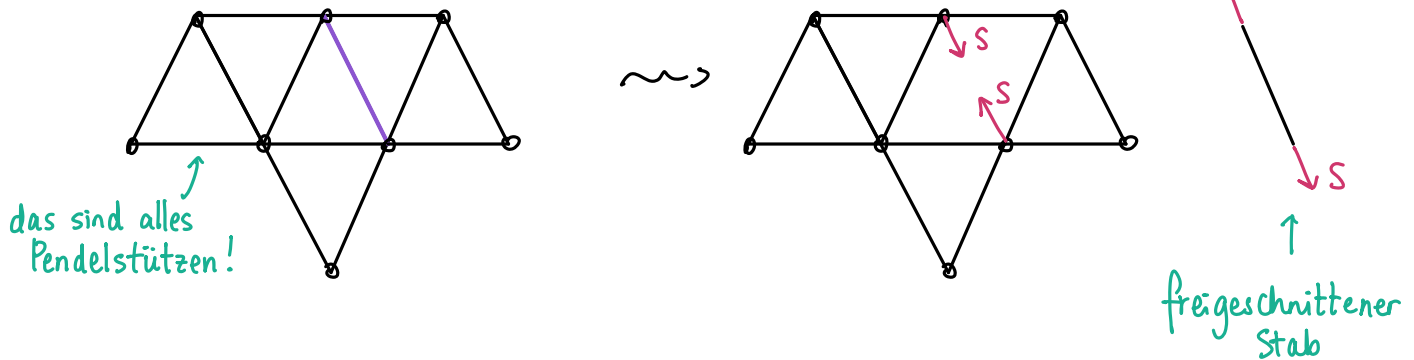
1.4 Stabkräfte (bzw. Pendelstäbe):

- Pendelstab:
- ist an beiden Enden gelenkig gelagert
 - kann nur Kräfte in Stabrichtung aufnehmen
 - ↳ Zug- / Druckkräfte
 - ↳ keine Querkräfte & Biegemomente!
 - externe Kräfte greifen nur an Knotenpunkten an.
- Wir werden uns nur mit solchen Stäben beschäftigen!
- 
- 

⚠ Ein Fachwerk besteht aus lauter Pendelstäben!

d.h. der Freischnitt ist recht einfach!

Bsp: Wir wollen den **violetten Stab** wegnehmen & mit den entsprechenden Stabkräften ersetzen:

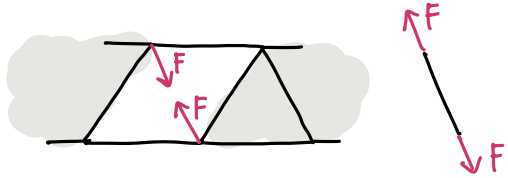


Bem: Wegen dem Reaktionsprinzip (Newton) ist:

- Beim Stab die Kraft "oben" gleich gross, aber entgegengesetzt gerichtet zu der Kraft "unten", da der Stab ein SK ist und sich somit nicht verformen darf. → gilt $\forall$ Stäbe in TechMech!
- Die Stabkräfte, die wir im Fachwerk einzeichnen, sind gleich gross & entgegengesetzt gerichtet zu den Kräften, die wir beim Stab einzeichnen.

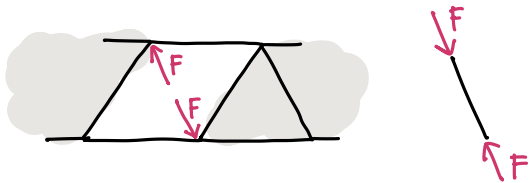
Zug- / Druckstab: Beim bestimmen ob ein Stab ein Zug- oder Druckstab ist, muss man aufpassen denn je nach dem, wie man die Stabkraft beim freischnitt einzeichnet sind die Vorzeichen anders:

Wenn man die Stabkraft so eingezeichnet hat:



falls $F \geq 0 \Rightarrow$ Zugstab
falls $F < 0 \Rightarrow$ Druckstab

Wenn man sie so eingezeichnet hat:



falls $F \geq 0 \Rightarrow$ Druckstab
falls $F < 0 \Rightarrow$ Zugstab

So merke ich es mir: Die Kräfte, die wir einzeichnen, sind die Kräfte, welche auf das System wirken. D.h. ich sage mir im Kopf:

"Der Stab / das Fachwerk wird": $\begin{cases} \text{gezogen} \rightarrow \text{Zugstab} \\ \text{gedrückt} \rightarrow \text{Druckstab} \end{cases}$

Wenn Vorzeichen negativ ist, einfach sich vorstellen, dass die Pfeile in die andere Richtung wie eingezeichnet zeigen & genau dasselbe Gedankenexperiment machen.

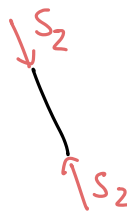
Bsp:



$$S_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} F \rightsquigarrow \text{Zugstab}$$

$$S_2 = -\frac{1}{2} F$$

$\rightsquigarrow$



$$S_2 = \frac{1}{2} F$$

$\rightsquigarrow$ Druckstab

↑ So muss man nicht immer überlegen mit den Vorzeichen :)

1.5 Kochrezept PdvL :

1.3 Prinzip der virtuellen Leistung (PdvL)

1. Stab mit der gesuchten Stabkraft entfernen und an seiner Stelle Stabkraft einführen. Externe Kräfte und Momente in Skizze übernehmen.
2. Bewegung einführen, die möglich ist. In der Regel eine Rotation um ein Festlager
3. Starre Körper identifizieren, Momentanzentren und Winkelgeschwindigkeiten bestimmen, Geschwindigkeit an den Knoten berechnen, an denen Kräfte angreifen
4. Gesamtleistung der Bewegung berechnen und gleich null setzen.

$$P_{tot} = \sum_i \underline{F}_i \cdot \underline{\tilde{v}}_i + \sum_i \underline{M}_i \cdot \underline{\tilde{\omega}}_i = 0$$

Beachte: $\underline{F}_i \cdot \underline{v}_i = F_i \cdot v_i \cdot \cos(\alpha)$

5. Nach gesuchter Stabkraft auflösen. Das eingeführte w kürzt sich heraus.



Beachte: Lager nicht durch Lagerkräfte ersetzen sondern als Lager lassen.

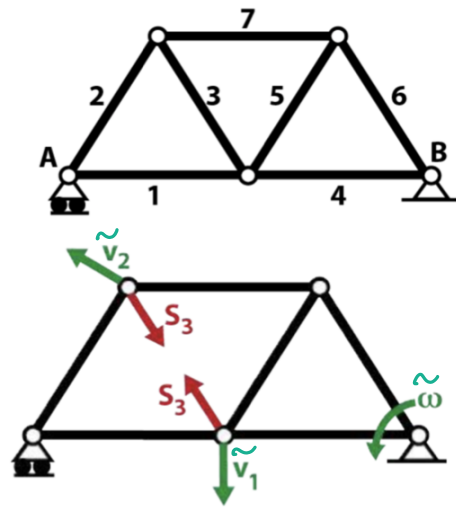


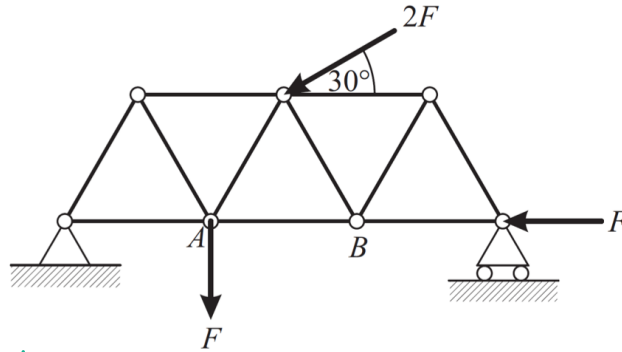
Abbildung 2: PdvL

Notation: $\sim$: $\tilde{P}, \tilde{\omega}, \tilde{v}$: steht für virtuell

↳ Schauen wir uns das anhand eines Beispiels an!

Beispielaufgabe: Serie 7, Aufgabe 1, Teilaufgabe 2 & 3

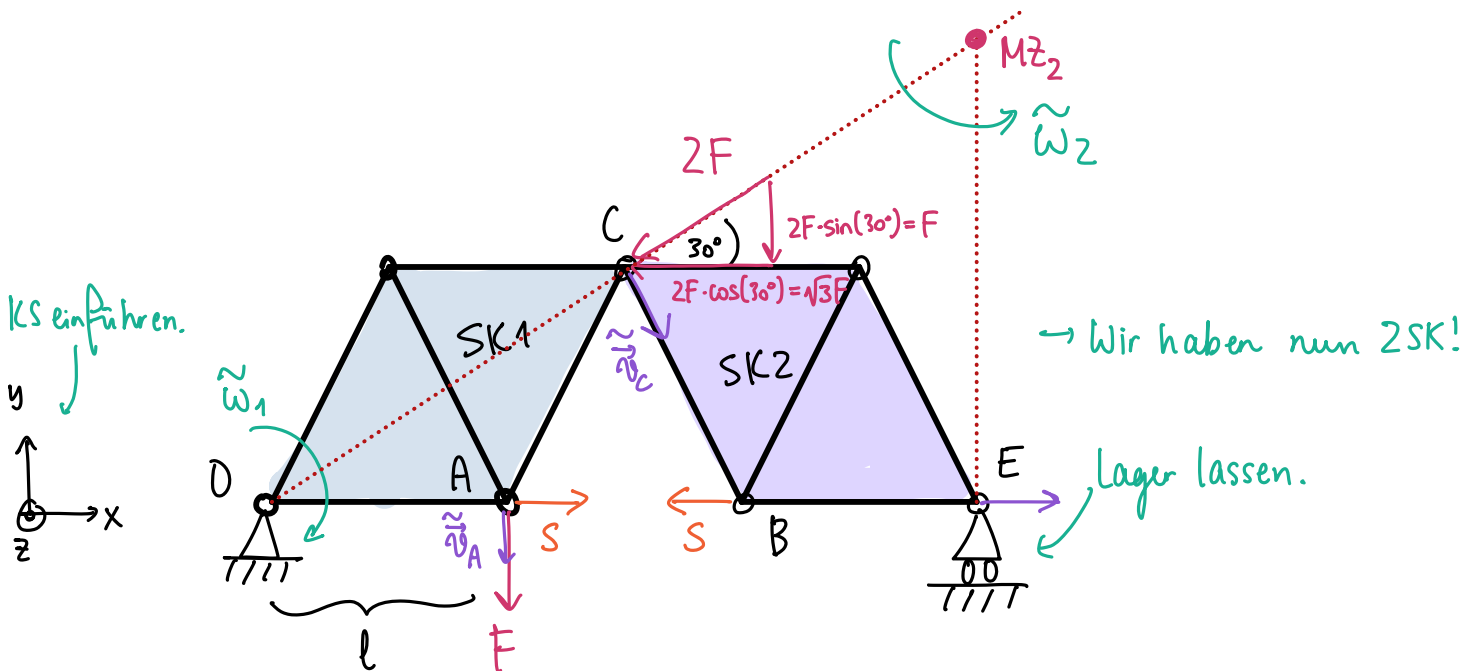
1. ¹Das skizzierte ideale Fachwerk ist durch die drei eingezeichneten Kräfte belastet. Alle Stäbe haben die Länge l .



Statikaufgabe

1. Bestimmen Sie die Bindungskräfte in den Lagern.
- PdVL { 2. Berechnen Sie mit dem Prinzip der virtuellen Leistungen (PdVL) die Stabkraft im Stab AB.
3. Ist es ein Zug- oder Druckstab?

2) Wir müssen die Stabkraft im Stab AB bestimmen
→ Stab entfernen & durch Stabkräfte ersetzen:



SK identifizieren: SK1 und SK2

Mz von SK1 ist sofort ersichtlich: Pkt. D → hier eine Virtuelle Rotationsgeschwindigkeit $\tilde{\omega}_1$ einführen.

Dann alle Geschwindigkeiten von den Pkten, an welche eine Kraft angreift, bestimmen $\rightarrow$ why? Weil wir sie für die Leistungsberechnung brauchen! ($P = \vec{F} \cdot \vec{v}$, dort wo $\vec{F} = 0$ ist brauchen wir deswegen keine $\vec{v}$.)

$$\vec{v}_A = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\tilde{\omega}_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\tilde{\omega}_1 l \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \tilde{\omega}_1 l$$

2D-Aufgabe

$\rightarrow$ in Skizze*

$$\vec{v}_C = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\tilde{\omega}_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{3}{2}l \\ \frac{\sqrt{3}}{2}l \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}l\tilde{\omega}_1 \\ -\frac{3}{2}l\tilde{\omega}_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} l\tilde{\omega}_1$$

*Tipp: zeichnet alles sofort in die Skizze rein, damit ihr den Überblick nicht verliert.

MZ von SK2 finden über senkrechten zu $\vec{v}_C$ und $\vec{v}_E \rightarrow$ in Skizze

aus Symmetrie können wir sofort sehen, dass $|\vec{\omega}_1| = \tilde{\omega}_1 = |\vec{\omega}_2| = \tilde{\omega}_2$

$$\vec{v}_B = \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{MZ_2B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{\omega}_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -l \\ -\sqrt{3}l \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}l\tilde{\omega}_2 \\ -l\tilde{\omega}_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} l\tilde{\omega}_2$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} l\tilde{\omega}_1$$

$\tilde{\omega}_2 = \tilde{\omega}_1$

2D-Aufgabe & $\tilde{\omega}_1 = \tilde{\omega}_2$

$$\vec{v}_D = \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{MZ_2D} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{\omega}_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{3}l \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}l\tilde{\omega}_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} l\tilde{\omega}_1$$

PdVl anwenden: $\vec{P}_{\text{tot}} = \sum_i \vec{P}_i \stackrel{!}{=} 0$

erinnerung: $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$

$$\Rightarrow \vec{P}_{\text{tot}} = \vec{v}_A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -F \end{pmatrix} + \vec{v}_A \cdot \begin{pmatrix} S \\ 0 \end{pmatrix} + \vec{v}_B \cdot \begin{pmatrix} -S \\ 0 \end{pmatrix} + \vec{v}_C \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{3}F \\ -F \end{pmatrix} + \vec{v}_D \cdot \begin{pmatrix} -F \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} l\tilde{\omega}_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} l\tilde{\omega}_1 \cdot \begin{pmatrix} S \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} l\tilde{\omega}_1 \cdot \begin{pmatrix} -S \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -3/2 \end{pmatrix} l\tilde{\omega}_1 \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{3}F \\ -F \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \tilde{\omega}_1 \cdot \begin{pmatrix} -F \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0 \quad / : \tilde{\omega}_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -S \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -3/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{3}F \\ -F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -F \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow F - \sqrt{3}S - \cancel{\frac{3}{2}F} + \cancel{\frac{3}{2}F} - \sqrt{3}F = 0$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{3}S + (1 - \sqrt{3})F = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}S = (1 - \sqrt{3})F$$

$$\Leftrightarrow S = \frac{(1 - \sqrt{3})F}{\sqrt{3}}$$

virtuelle Rotations-
geschwindigkeit, willkürlich
eingeführt!

Merke, dass sich l und $\tilde{\omega}_1$
rausgekürzt haben! :)
 ↓

3) Druck- oder Zugstab?

Wir haben die Stabkräfte so eingeführt:



und haben berechnet, dass $S = \frac{1 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} \cdot F$.

Wir sehen, dass $\frac{1 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} \cdot F < 0$

d.h. der Stab AB ist ein Druckstab.

Bem: Wenn eine Kraft negativ ist, heißt es einfach dass sie eigentlich in die andere Richtung wie eingezeichnet wirkt. D.h. in diesem Fall:

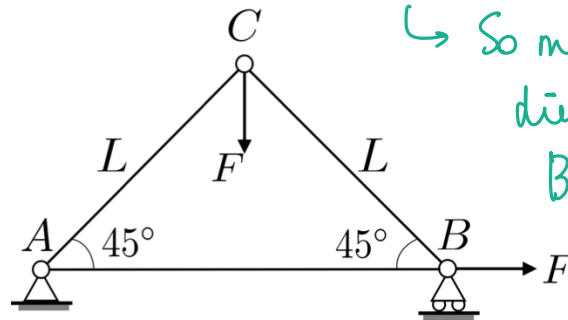
also eigentlich sind die Kräfte so gerichtet:



Teil 3: Übungsaufgaben - Serie 7

5. Das skizzierte ideale Fachwerk ist durch die zwei eingezeichneten Kräfte belastet. Die Stäbe AC und BC haben die Länge L . Was ist der Betrag der Stabkraft im Stab BC ?

$PdvL$

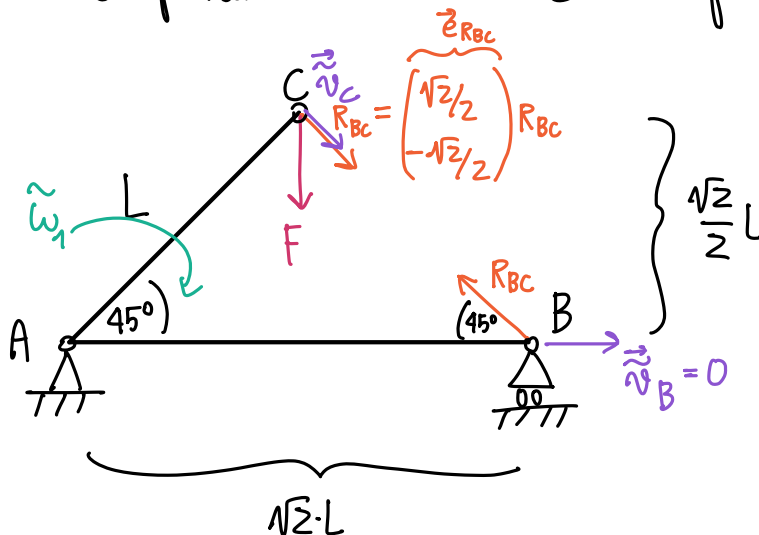


↳ So machen, s.d. die virtuelle Bewegung zulässig ist!

- (a) $R_{BC} = F$
- (b) $R_{BC} = -\frac{F}{\sqrt{2}}$
- (c) $R_{BC} = \sqrt{2}F$
- (d) $R_{BC} = 0$
- (e) $R_{BC} = -\frac{F}{2}$

Stabkraft BC bestimmen:

Stab BC entfernen und durch Stabkräfte ersetzen:



Virtueller Bewegungszustand einführen: $\tilde{w}_1$

$$\tilde{v}_C = \tilde{w}_1 \times \vec{r}_{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\tilde{w}_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 L \\ \sqrt{2}/2 L \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 L \tilde{w}_1 \\ -\sqrt{2}/2 L \tilde{w}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\tilde{v}_B = 0$, da die Bindung sonst verletzt wäre.

$$p_{dvL} \Rightarrow \hat{p}_{tot} = \hat{u}_c \cdot \vec{F} + \hat{u}_c \cdot \vec{R}_{Bc} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} L_{\tilde{w}_1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} L_{\tilde{w}_1} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} R_{Bc} = 0 \quad / \cdot L_{\tilde{w}_1}$$

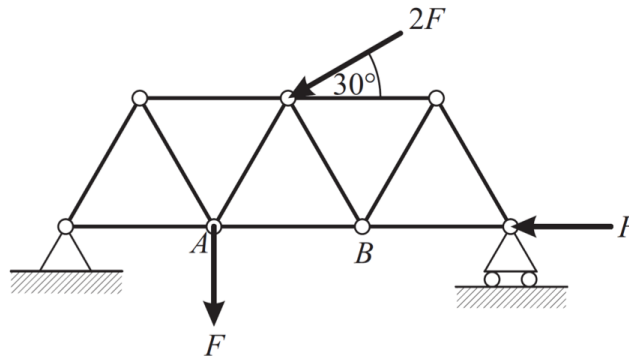
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} R_{Bc} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} F + \frac{1}{2} R_{Bc} + \frac{1}{2} R_{Bc} = 0$$

$$\Leftrightarrow S = -\frac{\sqrt{2}}{2} F = -\frac{1}{\sqrt{2}} F \quad \rightarrow \text{b) ist korrekt.}$$

$\uparrow$
 $\cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

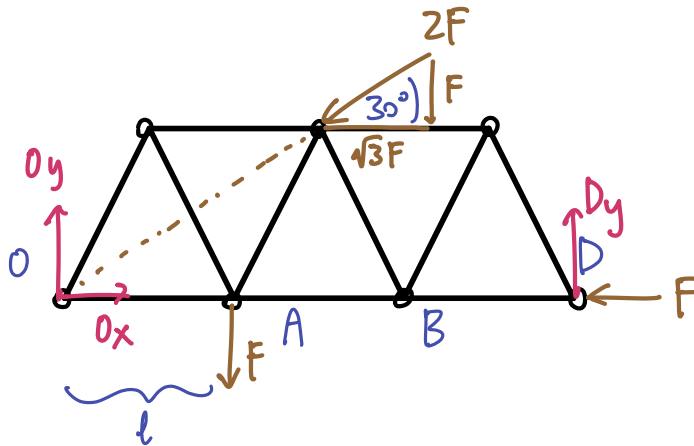
1. ¹Das skizzierte ideale Fachwerk ist durch die drei eingezeichneten Kräfte belastet. Alle Stäbe haben die Länge l .



- Im Bsp. gemacht. {
1. Bestimmen Sie die Bindungskräfte in den Lagern.
 2. Berechnen Sie mit dem Prinzip der virtuellen Leistungen (PdvL) die Stabkraft im Stab AB .
 3. Ist es ein Zug- oder Druckstab?

1) Statikaufgabe :

Schritt 1: Freischnitt:



Schritt 2: Gleichgewichtsgleichungen aufstellen:

$$\text{KB}(x): 0 = O_x - F - \sqrt{3}F \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{KB}(y): 0 = O_y - F - F + D_y \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\text{MB}(O, z): 0 = -lF + 3lD_y \quad \dots \textcircled{3}$$

Schritt 3: Gleichungen auflösen: Unbekannte: O_x , O_y , D_y

$$\textcircled{3} \Rightarrow 3lD_y = lF \quad / \div 3l$$

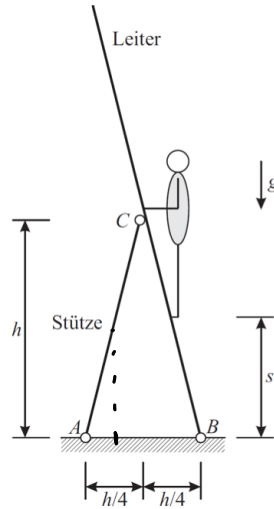
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{D_y = \frac{1}{3}F}}$$

$$\textcircled{2} \Rightarrow O_y = 2F - D_y = 2F - \frac{1}{3}F = \underline{\underline{\frac{5}{3}F}}$$

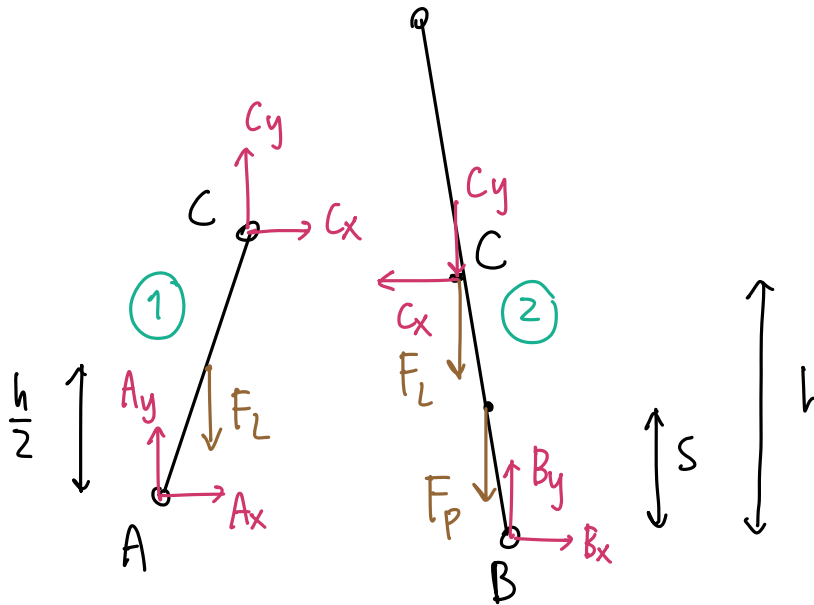
$$\textcircled{1} \Rightarrow O_x = F + \sqrt{3}F = \underline{\underline{(1+\sqrt{3})F}}$$

2. ² Eine Leiter und ihre mit einem reibungsfreien Gelenk verbundene Stütze stehen auf einem rauen Boden. Der Kontakt mit dem Boden kann durch reibungsfreie Gelenke modelliert werden. Die Leiter ist doppelt so lang wie die Stütze. Das Gewicht der Leiter und das der Stütze sei je F_L . Eine Person steht auf der Leiter. Das Gewicht F_P der Person wirkt nur über die Füße. Bestimmen Sie die Bindungskräfte in den drei Gelenken.

Statikaufgabe.



1. Schritt: Freischnitt: → Wir haben 2 SK:



2. Schritt: GGW-Bedingungen aufstellen: → 2SK, 3 Gleichungen pro SK

①: $\sum \vec{K}(x): 0 = A_x + C_x$... ①

$\sum \vec{K}(y): 0 = A_y + C_y - F_L$... ②

$\sum \vec{M}(A, z): 0 = -\frac{h}{8} F_L + \frac{h}{4} C_y - h \cdot C_x$... ③

$$\textcircled{2}: KB(x): 0 = B_x - C_x \quad \dots \textcircled{4}$$

$$KB(y): 0 = B_y - C_y - F_L - F_P \quad \dots \textcircled{5}$$

$$MB(B, z): 0 = h \cdot C_x + \frac{h}{4} C_y + \frac{h}{4} F_L + \frac{s}{4} F_P \quad \dots \textcircled{6}$$

Schritt 3: Gleichungen auflösen: Gesucht : $A_x, A_y, B_x, B_y, C_x, C_y$

aus $\textcircled{1}$ haben wir, dass $C_x = -A_x$

$$\Rightarrow C_x = B_x = -A_x \quad \dots \textcircled{7}$$

und aus $\textcircled{4}$ haben wir, dass $C_x = B_x$

$$\textcircled{3} \rightarrow h \cdot C_x = \frac{h}{4} C_y - \frac{h}{8} F_L \quad / : h$$

$$\Leftrightarrow C_x = \frac{1}{4} C_y - \frac{1}{8} F_L \quad \dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{6} \rightarrow h \cdot C_x + \frac{h}{4} C_y + \frac{h}{4} F_L + \frac{s}{4} F_P = 0 \quad / \quad C_x = \frac{1}{4} C_y - \frac{1}{8} F_L \quad \text{einsetzen}$$

$$\Leftrightarrow h \left(\frac{1}{4} C_y - \frac{1}{8} F_L \right) + \frac{h}{4} C_y + \frac{h}{4} F_L + \frac{s}{4} F_P = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{h}{4} C_y} - \frac{h}{8} F_L + \underbrace{\frac{h}{4} C_y} + \frac{h}{4} F_L + \frac{s}{4} F_P = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{h}{2} C_y = \left(\frac{h}{8} - \frac{h}{4} \right) F_L - \frac{s}{4} F_P$$

$$\Leftrightarrow \frac{h}{2} C_y = -\frac{h}{8} F_L - \frac{s}{4} F_P \quad / \quad \cdot \frac{2}{h}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{C_y = -\frac{1}{4} F_L - \frac{s}{2h} F_P}}$$

$$\textcircled{8} \rightarrow C_x = \frac{1}{4} C_y - \frac{1}{8} F_L = \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{4} F_L - \frac{s}{2h} F_P \right) - \frac{1}{8} F_L =$$

$$= -\frac{1}{16} F_L - \frac{s}{8h} F_P - \frac{1}{8} F_L =$$

$$\underline{\underline{C_x = -\frac{3}{16} F_L - \frac{s}{8h} F_P}}$$

$$\textcircled{7} \rightarrow C_x = B_x = -A_x \quad \Rightarrow B_x = -\frac{3}{16} F_L - \frac{s}{8h} F_P //$$

$$A_x = \frac{3}{16} F_L + \frac{s}{8h} F_P //$$

$$\textcircled{2} \Rightarrow A_y + C_y - F_L = 0$$

$$\Leftrightarrow A_y = F_L - C_y = F_L - \left(-\frac{1}{4} F_L - \frac{s}{2h} F_P \right) =$$

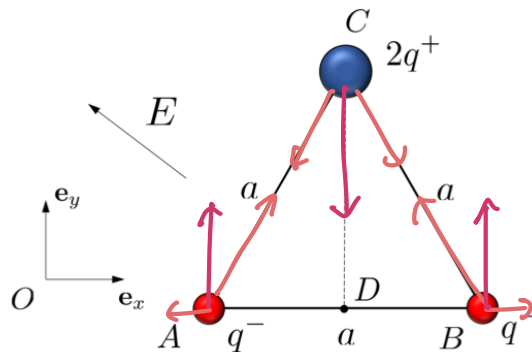
$$= F_L + \frac{1}{4} F_L + \frac{s}{2h} F_P = \underline{\underline{\frac{5}{4} F_L + \frac{s}{2h} F_P}}$$

$$\textcircled{5} \Rightarrow B_y - C_y - F_L - F_P = 0$$

$$\Leftrightarrow B_y = C_y + F_L + F_P = -\frac{1}{4} F_L - \frac{s}{2h} F_P + F_L + F_P =$$

$$B_y = \underline{\underline{\frac{3}{4} F_L + \left(1 - \frac{s}{2h} \right) F_P}}$$

3. In den Eckpunkten A, B, C eines gleichseitigen Dreiecks (Seitenlänge a) sitzen drei Ladungen. Im Punkt C sitzt eine positive Ladung vom Betrag $2q$, während im Punkt A bzw. B sitzt eine negative Ladung vom Betrag q . Die Ladungen befinden sich in einem homogenen elektrischen Feld $\mathbf{E} = E\mathbf{e}$. Was ist das Dipolmoment der Punktladungsgruppe?



- (a) $\mathbf{N} = E2q \frac{\sqrt{3}}{2} a \mathbf{e}_y$
 (b) $\mathbf{N} = -Eq \frac{\sqrt{3}}{2} a \mathbf{e}_y$
 (c) $\mathbf{N} = Eq \frac{\sqrt{3}}{2} a \mathbf{e}_x$
 (d) $\mathbf{N} = -Eq \frac{1}{2} a \mathbf{e}_y$
 (e) $\mathbf{N} = -E2q\sqrt{3}a \mathbf{e}_x$

Da $Q_{\text{ges}} = \sum_i q_i = 0$, kann die Kräftegruppe auf ein Moment $\vec{M}$ reduziert werden (Erinnerung: Moment: $\vec{M} \neq 0, \vec{R} = 0$)

Doch Warum folgt aus $Q_{\text{ges}} = 0$ $\vec{R} = 0$?

Kraft von E auf Ladung q_i

$\vec{R}$ ist $\sum_i \vec{F}_i$. Und in elektrostatik ist $\vec{F}_i = q_i \vec{E}$.

d.h. Wir haben hier:

elektrische Feldstärke

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = q^- E + q^- E + 2q^+ E = (q^- + q^- + 2q^+) \cdot E = 0$$

Das heißt wir können das Dipolmoment so berechnen:

$$\vec{N} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \vec{r}_i \quad (\text{unabhängig vom Nullpkt., da } \vec{R} = 0).$$

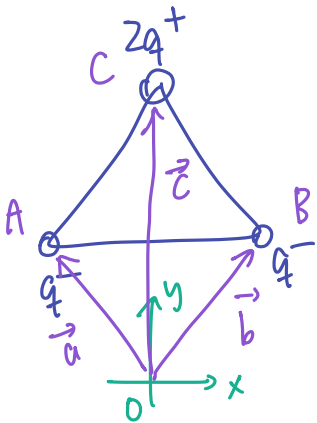
und es gilt $\vec{M} = \sum_i \vec{F}_i \vec{r}_i \times \vec{e} = \vec{N} \cdot \vec{e} \rightarrow$ d.h. $\vec{N}$ ist auch unabhängig vom Bezugspunkt!

Warum? $\vec{M}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{r}_i \times F_i \vec{e} = F_i \cdot \vec{r}_i \times \vec{e}$

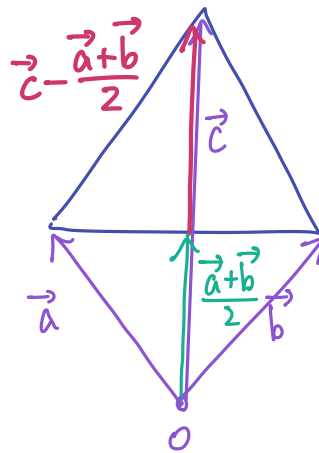
da wir parallele Kräfte haben

Weiter gilt für el. Ladungen: $\vec{N} = \sum_i q_i E \vec{r}_i = E \cdot \sum_i q_i \vec{r}_i = E \cdot \vec{P}$

mit $\vec{P} = \sum_i q_i \vec{r}_i = q^- \vec{a} + q^- \vec{b} + 2q^+ \vec{c} = 2q^+ \vec{c} - q^+ \vec{a} - q^+ \vec{b} =$
 $= 2q^+ \cdot \left(\vec{c} - \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} \right) = 2q^+ \cdot \vec{h}$

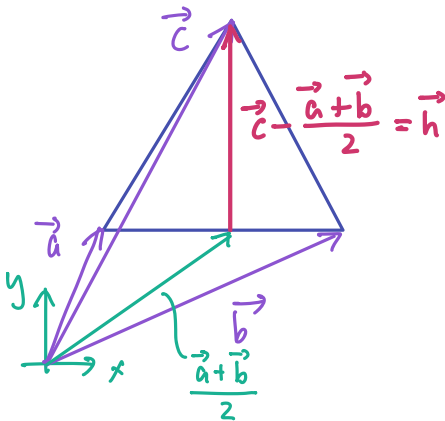


irgendein Bezugssystem wählen!



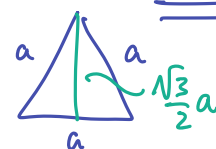
Höhe vom Dreieck

* das funktioniert mit einem beliebigen Bezugssystem!
 z.B. wenn wir es so gewählt hätten:



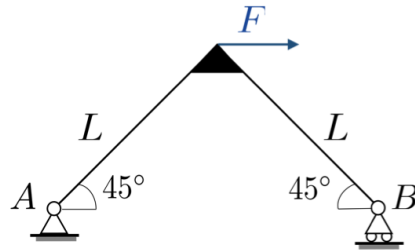
Somit ist:

$$\vec{N} = E \vec{P} = E \cdot 2q^+ \cdot \vec{h} = E \cdot 2q^+ \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a \vec{e}_y$$



4. Betrachten Sie das abgebildete System, die aus zwei zusammengeschweisste Stäbe besteht, und reibungsfrei gemäss Skizze gelagert ist. Beide Stäbe haben die Länge L . Was sind die Bindungskräfte in A und B ?

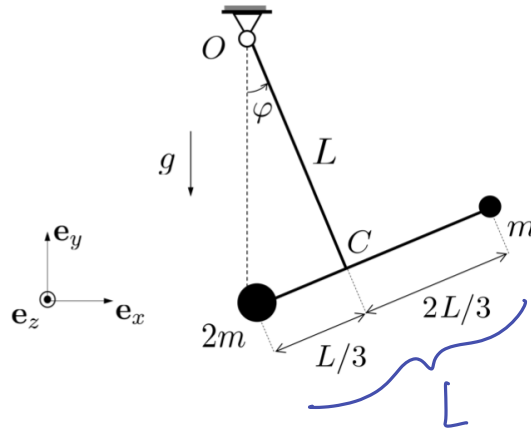
Statikaufgabe



- (a) $A_x = -F$; $A_y = -\frac{F}{\sqrt{2}}$; $B_y = \frac{F}{\sqrt{2}}$
(b) $A_x = -F$; $A_y = 2F$; $B_y = -2F$
(c) $A_x = F$; $A_y = -F$; $B_y = F$
(d) $A_x = 2F$; $A_y = \sqrt{2}F$; $B_y = -\sqrt{2}F$
(e) $A_x = -F$; $A_y = -\frac{F}{2}$; $B_y = \frac{F}{2}$

6. Das dargestellte System besteht aus 2 Punktmassen der Masse $2m$ bzw. m , die durch masslose Stäbe verbunden sind und im Punkt O gelenkig gelagert. Unter welchem Winkel φ befindet sich das System in Ruhe?

Kräftemittelpunkt



- (a) $\varphi = 0$
- (b) $\varphi = \pi$
- (c) $\varphi = \frac{\pi}{4}$
- (d) $\varphi = \frac{\pi}{3}$
- (e) $\varphi = \frac{\pi}{2}$

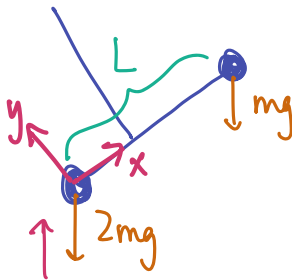
Kräftemittelpunkt bestimmen:

$$\vec{F}_1 = -2mg\vec{e}_y, \quad \vec{F}_2 = -mg\vec{e}_y$$

$$\vec{r}_{\text{Kräftemittelpunkt}} = \frac{\sum F_i \vec{r}_i}{\sum F_i} = \frac{\cancel{-2mg \cdot \vec{r}_1}^{r_1=0} - mg \cdot \vec{r}_2}{-2mg - mg} =$$

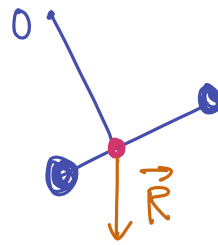
$$= \frac{\vec{r}_2}{3} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} r_{2x} \\ r_{2y} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} L \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_c = \frac{L}{3}$$



Wir setzen unser Koordinatensystem hier, und bestimmen die Distanz vom Schwerpunkt von hier aus.

d.h. Kräftemittelpunkt ist hier:



Da $\vec{R} = -3mg\vec{e}_y$ nach unten zeigt, kann das System nur in Ruhe sein,
wenn $\varphi = 0$ (sonst erzeugt $\vec{R}$ ein Moment bezüglich $O \rightarrow$ das System
bewegt sich $\nrightarrow$) remember: in Ruhe $\Leftrightarrow \vec{R} = 0$ und $\vec{M} = 0$