Übung 7

09.11.2021
Lina De Windt

Themen von Heute:

> Teil 1: Fragen zu Themen / Aufgaben von letzter Woche?

> Teil 2: Recap der Theorie von dieser Woche:

1. Prinzip der virtuellen Leistungen (PdvL)
   - 1.1 PdvL (Satz)
   - 1.2 Virtuelle Bewegungszustände
   - 1.3 Recap Leistung
   - 1.4 Stabkräfte
   - 1.5 Kochrezept PdvL
   - 1.6 Beispielaufgabe PdvL

→ Kahoot! :)

> Teil 3: Übungsaufgaben lösen (Serie 7)

Teil 1: Fragen zu Themen von letzter Woche?

Teil 2: Recap der Theorie von dieser Woche

1. Prinzip der virtuellen Leistungen (PdvL)

1.1 PdvL (Satz):

→ Skript S.48

Prinzip der virtuellen Leistungen (PdvL):

Ein System befindet sich genau dann in einer Ruhelage, wenn die virtuelle Gesamtleistung der inneren und äusseren Kräfte bei jedem virtuellen Bewegungszustand verschwindet (und die Eigenschaften des Systems und seiner Lagerung diese Kräfte zulassen).

d.h. $\boxed{\tilde{\mathcal{P}} = \tilde{\mathcal{P}}^{(i)} + \tilde{\mathcal{P}}^{(a)} = 0}$ $\forall \{\tilde{v}\}$

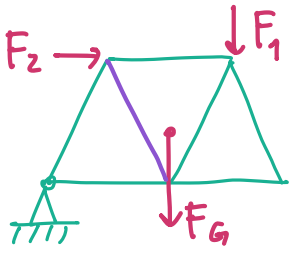
$\sim$ heisst virtuell.

Wir benutzen den PdvL, um Bewegungsgleichungen von mechanischen Systemen mit Zwangsbedingungen (z.B. Bindungen) aufzustellen.

Doch was nützt uns eigentlich der PdvL? → 2 Sachen:

Wir werden es hauptsächlich benutzen um Stabkräfte zu bestimmen.

Bsp:



Wir wollen wissen, mit welcher Kraft der violette Stab gedrückt bzw. gezogen wird. Bei einer solchen Aufgabe wird uns der PdvL sehr nützlich sein!

Ausserdem impliziert der PdvL den Hauptsatz der Statik (System ist in Ruhe wenn $\vec{R}=0$ und $\vec{M}=0$) → haben wir letzte Woche gesehen :)

Und! Bisher kam an der Prüfung zu 100% eine PdvL-Aufgabe

Wir sehen, dass der PdvL recht nützlich ist :)

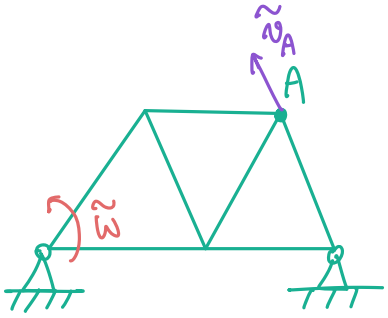
Doch was bedeutet eigentlich "virtuell"?

1.2 Virtuelle Bewegungszustände:

Ein virtueller Bewegungszustand ist irgendein gedachter Bewegungszustand, der keinen Bezug zu wirklich möglichen Bewegungszuständen haben muss.

Virtuell heisst also, dass wir uns diese Bewegungen einfach nur vorstellen!

z.B.



Dieses System kann sich eigentlich gar nicht bewegen. Aber wir könnten z.B. eine virtuelle Rotationsgeschwindigkeit $\tilde{\omega}$ einführen um zu schauen was dann die Geschwindigkeit im Punkt A wäre, wenn sich das System tatsächlich ein solches $\tilde{\omega}$ hätte.

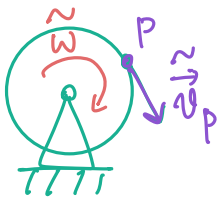
Um virtuelle Bewegungen von wirklichen Bewegungen zu unterscheiden, bezeichnen wir sie mit einer Tilde "~".

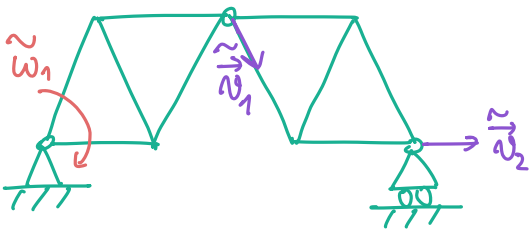
Die Kinemate $\{\tilde{\vec{v}}, \tilde{\vec{\omega}}\}$ ist dann ein virtueller SK-Zustand.

Wir unterscheiden zwischen zulässigen und unzulässigen Bewegungszuständen:

Zulässiger Bewegungszustand: Wenn der virtuelle Bewegungszustand keine Bindungen verletzt.

z.B.

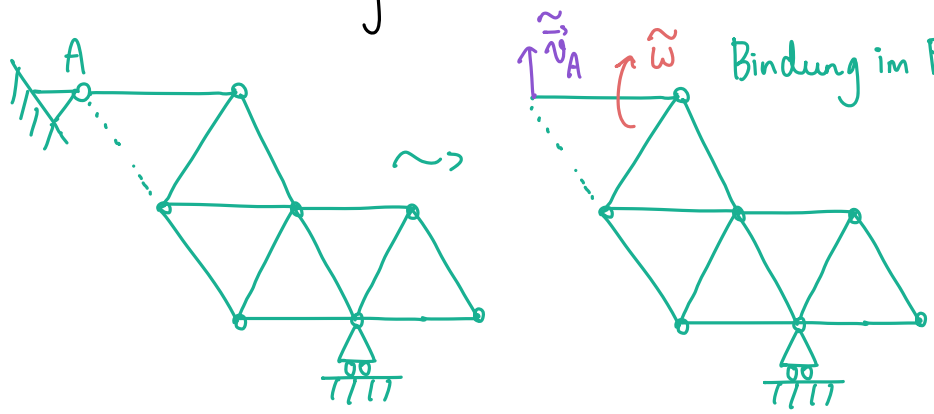




⚠ Wir werden uns v.a. mit zulässigen Bewegungszuständen beschäftigen!

Unzulässiger Bewegungszustand: Wenn der virtuelle Bewegungszustand mindestens 1 Bindung verletzt.

z.B.

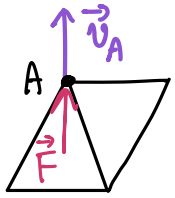


Bindung im Punkt A wird verletzt!

1.3 Recap Leistung:

$$\boxed{P_{einzelkraft} = \vec{F} \cdot \vec{v} = F \cdot v \cdot \cos(\alpha)}$$

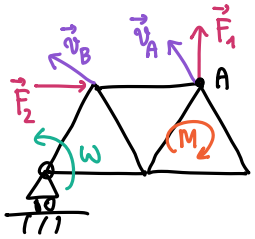
Bsp:



$P_A = \vec{F} \cdot \vec{v}_A$

Gesamtleistung: $\boxed{P = \sum_i \vec{F}_i \vec{v}_i + \sum_i \vec{M}_i \vec{\omega}_i}$

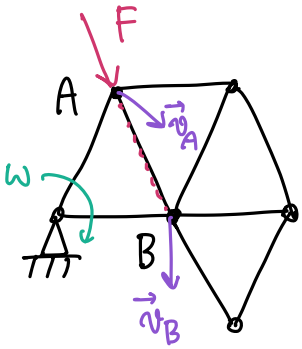
Bsp:



$P = \vec{F}_1 \vec{v}_A + \vec{F}_2 \vec{v}_B + M \cdot \omega$

don't forget: Bei der Berechnung der Leistung dürfen die Kräfte entlang ihrer Wirkungslinie verschoben werden.

Bsp:



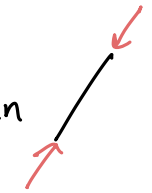
$$\boxed{P = \vec{F} \cdot \vec{v}_A = \vec{F} \cdot \vec{v}_B}$$

1.4 Stabkräfte (bzw. Pendelstäbe):

Pendelstab:

Wir werden uns nur mit solchen Stäben beschäftigen

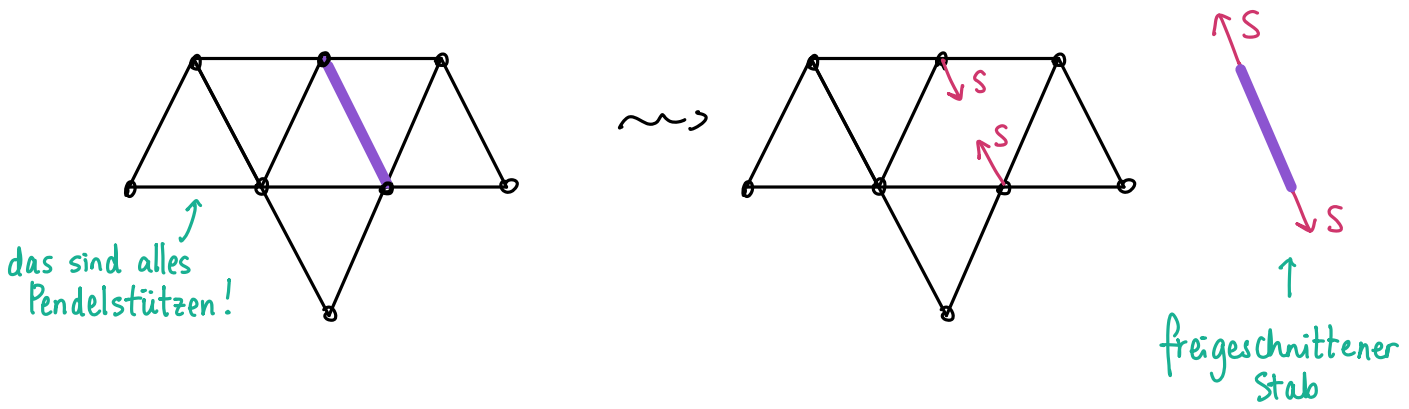
- ist an beiden Enden gelenkig gelagert
- kann nur Kräfte in Stabrichtung aufnehmen
  - ↪ Zug- / Druckkräfte
  - ↪ keine Querkräfte V Biegemomente!
- externe Kräfte greifen nur an Knotenpunkten an.



⚠ Ein Fachwerk besteht aus lauter Pendelstäben!

d.h. der Freischnitt ist recht einfach!

Bsp: Wir wollen den violetten Stab wegnehmen & mit den entsprechenden Stabkräften ersetzen:



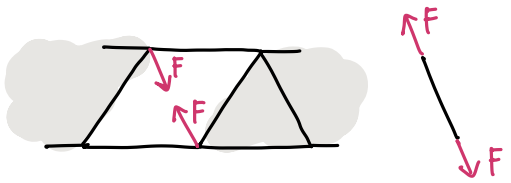
Bem: Wegen dem Reaktionsprinzip (Newton) ist:

- Beim Stab die Kraft "oben" gleich gross, aber entgegengesetzt gerichtet zu der Kraft "unten", da der Stab ein SK ist und sich somit nicht verformen darf. → gilt ∀ Stäbe in TechMech!

- Die Stabkräfte, die wir im Fachwerk einzeichnen, sind gleich gross & entgegengesetzt gerichtet zu den Kräften, die wir beim Stab einzeichnen.

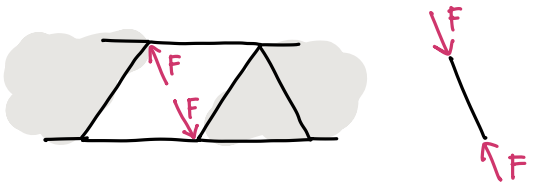
Zug- / Druckstab: Beim bestimmen ob ein Stab ein Zug- oder Druckstab ist, muss man aufpassen denn je nach dem, wie man die Stabkraft beim Freischnitt einzeichnet sind die Vorzeichen anders:

Wenn man die Stabkraft so eingezeichnet hat:



falls $F \geq 0 \Rightarrow$ Zugstab
falls $F < 0 \Rightarrow$ Druckstab

Wenn man sie so eingezeichnet hat:



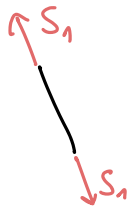
falls $F \geq 0 \Rightarrow$ Druckstab
falls $F < 0 \Rightarrow$ Zugstab

So merke ich es mir: Die Kräfte, die wir einzeichnen, sind die Kräfte, welche auf das System wirken. D.h. ich sage mir im Kopf:

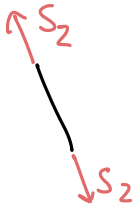
"Der Stab / das Fachwerk wird": $\begin{cases} \text{gezogen} \rightarrow \text{Zugstab} \\ \text{gedrückt} \rightarrow \text{Druckstab} \end{cases}$

Wenn Vorzeichen negativ ist, einfach sich vorstellen, dass die Pfeile in die andere Richtung wie eingezeichnet zeigen & genau dasselbe Gedankenexperiment machen.

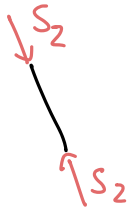
Bsp:



$S_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} F \rightsquigarrow$ Zugstab



$S_2 = -\frac{1}{2} F \rightsquigarrow$



$S_2 = \frac{1}{2} F \rightsquigarrow$ Druckstab

↑ So muss man nicht immer überlegen mit den Vorzeichen :)

1.5 Kochrezept PdvL :

1.3 Prinzip der virtuellen Leistung (PdvL)

1. Stab mit der gesuchten Stabkraft entfernen und an seiner Stelle Stabkraft einführen. Externe Kräfte und Momente in Skizze übernehmen.
2. Bewegung einführen, die möglich ist. In der Regel eine Rotation um ein Festlager
3. Starre Körper identifizieren, Momentanzentren und Winkelgeschwindigkeiten bestimmen, Geschwindigkeit an den Knoten berechen, an denen Kräfte angreifen
4. Gesamtleistung der Bewegung berechen und gleich null setzen.

$$\boxed{P_{tot} = \sum_i \underline{F}_i \cdot \tilde{\underline{v}}_i + \sum_i \underline{M}_i \cdot \tilde{\underline{w}}_i = 0}$$

   Beachte: $\underline{F}_i \cdot \underline{v}_i = F_i \cdot v_i \cdot cos(\alpha)$

5. Nach gesuchter Stabkraft auflösen. Das eingeführte w kürzt sich heraus. ☺

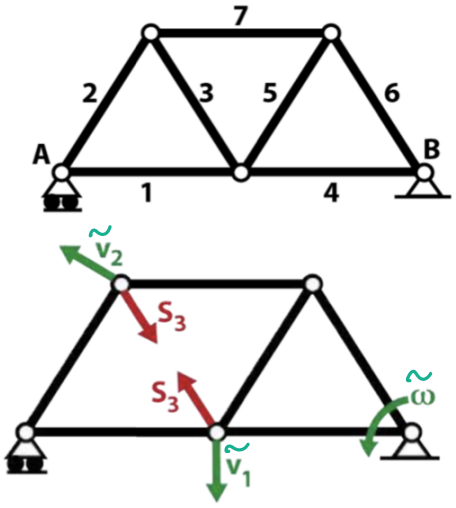


Abbildung 2: PdvL

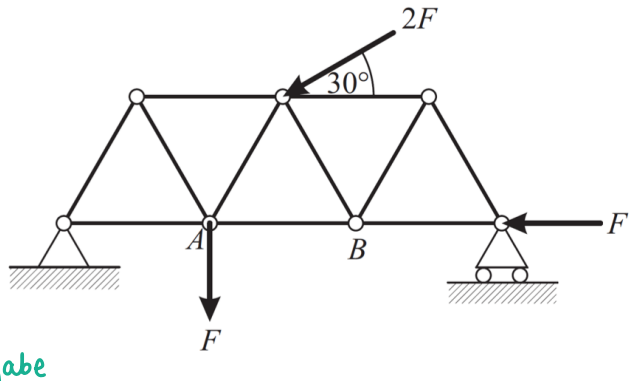
Beachte: Lager nicht durch Lagerkräfte ersezten sondern als Lager lassen.

Notation: $\sim$: $\tilde{P}, \tilde{\omega}, \tilde{v}$: steht für virtuell

↳ Schauen wir uns das anhand eines Beispiels an!

Beispielaufgabe: Serie 7, Aufgabe 1, Teilaufgabe 2 & 3

1. [1]Das skizzierte ideale Fachwerk ist durch die drei eingezeichneten Kräfte belastet. Alle Stäbe haben die Länge l.



Statikaufgabe

1. Bestimmen Sie die Bindungskräfte in den Lagern.

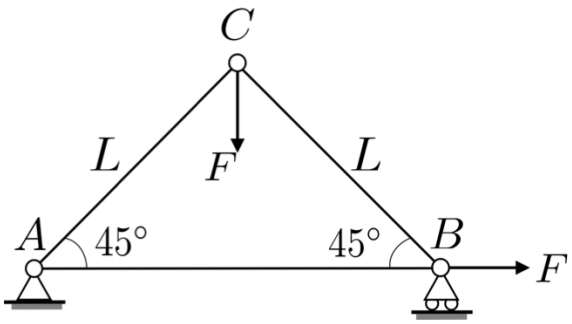
PdvL

2. Berechnen Sie mit dem Prinzip der virtuellen Leistungen (PdvL) die Stabkraft im Stab AB.
3. Ist es ein Zug- oder Druckstab?

Teil 3: Übungsaufgaben - Serie 7

PdvL

5. Das skizzierte ideale Fachwerk ist durch die zwei eingezeichneten Kräfte belastet. Die Stäbe AC und BC haben die Länge L. Was ist der Betrag der Stabkraft im Stab BC?



(a) $R_{BC} = F$

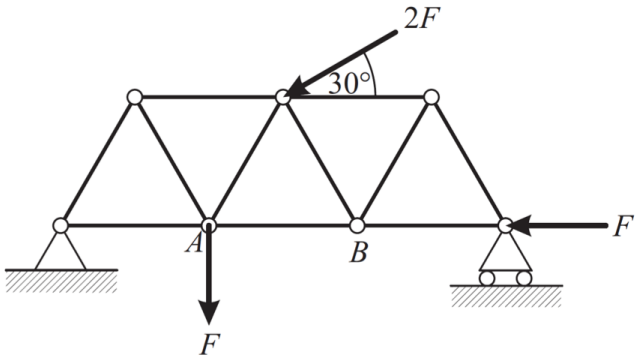
(b) $R_{BC} = -\frac{F}{\sqrt{2}}$

(c) $R_{BC} = \sqrt{2}F$

(d) $R_{BC} = 0$

(e) $R_{BC} = -\frac{F}{2}$

1. [1]Das skizzierte ideale Fachwerk ist durch die drei eingezeichneten Kräfte belastet. Alle Stäbe haben die Länge l.



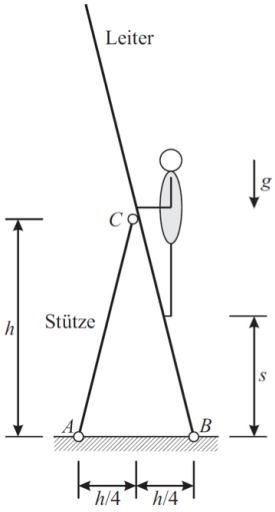
1. Bestimmen Sie die Bindungskräfte in den Lagern.
2. Berechnen Sie mit dem Prinzip der virtuellen Leistungen (PdvL) die Stabkraft im Stab AB.
3. Ist es ein Zug- oder Druckstab?

Im Bsp. gemacht.

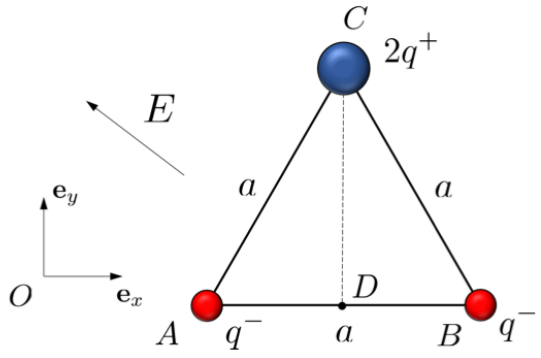
1)

2. [2] Eine Leiter und ihre mit einem reibungsfreien Gelenk verbundene Stütze stehen auf einem rauen Boden. Der Kontakt mit dem Boden kann durch reibungsfreie Gelenke modelliert werden. Die Leiter ist doppelt so lang wie die Stütze. Das Gewicht der Leiter und das der Stütze sei je F_L. Eine Person steht auf der Leiter. Das Gewicht F_P der Person wirkt nur über die Füsse. Bestimmen Sie die Bindungskräfte in den drei Gelenken.

Statikaufgabe.



3. In den Eckpunkten A, B, C eines gleichseitigen Dreiecks (Seitenlänge a) sitzen drei Ladungen. Im Punkt C sitzt eine positive Ladung vom Betrag $2q$, während im Punkt A bzw. B sitzt eine negative Ladung vom Betrag q. Die Ladungen befinden sich in einem homogenen elektrischen Feld $\mathbf{E} = E\mathbf{e}$. Was ist das Dipolmoment der Punktladungsgruppe?



(a) $\mathbf{N} = E2q\frac{\sqrt{3}}{2}a\mathbf{e}_y$

(b) $\mathbf{N} = -Eq\frac{\sqrt{3}}{2}a\mathbf{e}_y$

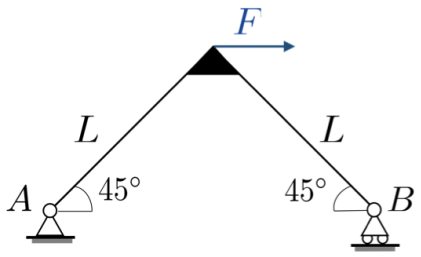
(c) $\mathbf{N} = Eq\frac{\sqrt{3}}{2}a\mathbf{e}_x$

(d) $\mathbf{N} = -Eq\frac{1}{2}a\mathbf{e}_y$

(e) $\mathbf{N} = -E2q\sqrt{3}a\mathbf{e}_x$

4. Betrachten Sie das abgebildete System, die aus zwei zusammengeschweisste Stäbe besteht, und reibungsfrei gemäss Skizze gelagert ist. Beide Stäbe haben die Länge L. Was sind die Bindungskräfte in A und B ?

Statikaufgabe



(a) $A_x = -F$; $\quad A_y = -\dfrac{F}{\sqrt{2}}$; $\quad B_y = \dfrac{F}{\sqrt{2}}$

(b) $A_x = -F$; $\quad A_y = 2F$; $\quad B_y = -2F$

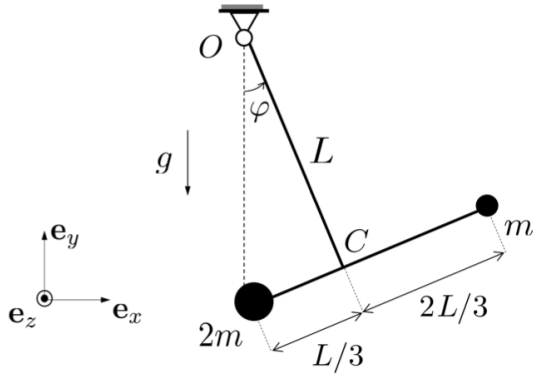
(c) $A_x = F$; $\quad A_y = -F$; $\quad B_y = F$

(d) $A_x = 2F$; $\quad A_y = \sqrt{2}F$; $\quad B_y = -\sqrt{2}F$

(e) $A_x = -F$; $\quad A_y = -\dfrac{F}{2}$; $\quad B_y = \dfrac{F}{2}$

6. Das dargestellte System besteht aus 2 Punktmassen der Masse $2m$ bzw. m, die durch masslose Stäbe verbunden sind und im Punkt O gelenkig gelagert. Unter welchem Winkel φ befindet sich das System in Ruhe?

Kräftemittelpunkt



(a) $\varphi = 0$

(b) $\varphi = \pi$

(c) $\varphi = \frac{\pi}{4}$

(d) $\varphi = \frac{\pi}{3}$

(e) $\varphi = \frac{\pi}{2}$