

Technische Mechanik

Lösung

Prof. Dual / Prof. Glocker

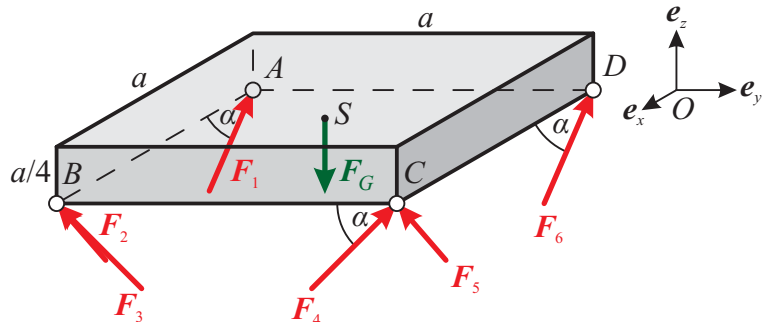
Serie 8

HS 2020/FS 2021

Aufgabe 2 (10-007)

Freischnittsskizze

- Eingeprägte Kraft F_G
- Reaktionen $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6$
- Koordinatensystem (e_x, e_y, e_z)



Kräfte

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_1 &= \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} F_1, & \mathbf{F}_2 &= \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} F_2, & \mathbf{F}_3 &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} F_3, & \mathbf{F}_4 &= \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} F_4, \\
 \mathbf{F}_5 &= \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} F_5, & \mathbf{F}_6 &= \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} F_6, & \mathbf{F}_G &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} F_G
 \end{aligned}$$

- a) Nein, der Quader ist *nicht* statisch unbestimmt gelagert. Die Anzahl der Gleichgewichtsbedingungen (6 linear unabhängige Gleichungen) ist *nicht* kleiner als die Anzahl der Zwangskräfte (6 Unbekannte).
- b) Nein, der Quader ist *nicht* kinematisch unbestimmt gelagert. Mit der Lagerung über die 6 Stäbe lässt sich der Quader nicht bewegen.

c) Kräftegleichgewicht

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} &\stackrel{!}{=} \mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4 + \mathbf{F}_5 + \mathbf{F}_6 + \mathbf{F}_G \\
&= \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} F_1 + \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} F_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} F_3 + \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} F_4 \\
&\quad + \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} F_5 + \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} F_6 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} F_G \\
&= \begin{bmatrix} -F_1 + F_2 + F_5 - F_6 \\ -F_3 + F_4 \\ F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_6 - \sqrt{2}F_G \end{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned} \tag{1}$$

Momentengleichgewicht bezüglich B

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} &\stackrel{!}{=} \mathbf{M}_B = \mathbf{r}_{BA} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_{BC} \times \mathbf{F}_4 + \mathbf{r}_{BC} \times \mathbf{F}_5 + \mathbf{r}_{BD} \times \mathbf{F}_6 + \mathbf{r}_{BS} \times \mathbf{F}_G \\
&= \begin{bmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} F_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} F_4 + \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} F_5 \\
&\quad + \begin{bmatrix} -a \\ a \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} F_6 + \begin{bmatrix} -a/2 \\ a/2 \\ a/8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} F_G \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\sqrt{2}a}{2} F_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\sqrt{2}a}{2} F_4 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \frac{\sqrt{2}a}{2} F_5 + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{\sqrt{2}a}{2} F_6 + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{a}{2} F_G \\
&= \begin{bmatrix} F_4 + F_5 + F_6 - \sqrt{2}F_G/2 \\ F_1 + F_6 - \sqrt{2}F_G/2 \\ -F_5 + F_6 \end{bmatrix} \frac{\sqrt{2}a}{2}
\end{aligned} \tag{2}$$

Elimination

$$\begin{array}{lcl}
 & F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 \\
 \sqrt{2} \cdot (1)_3 \Rightarrow & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \sqrt{2}F_G \\
 \sqrt{2} \cdot (1)_1 \Rightarrow & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
 \sqrt{2} \cdot (1)_2 \Rightarrow & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 \sqrt{2}/a \cdot (2)_1 \Rightarrow & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \sqrt{2}F_G/2 \\
 \sqrt{2}/a \cdot (2)_3 \Rightarrow & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
 \sqrt{2}/a \cdot (2)_2 \Rightarrow & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \sqrt{2}F_G/2
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{lcl}
 & F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 \\
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \sqrt{2}F_G \\
 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & \sqrt{2}F_G \\
 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \sqrt{2}F_G/2 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & \sqrt{2}F_G/2
 \end{array}$$

Rückwärtseinsetzen

$$F_6 = \frac{\sqrt{2}}{4}F_G \quad (3)$$

$$F_5 = F_6 \stackrel{(3)}{=} \frac{\sqrt{2}}{4}F_G \quad (4)$$

$$F_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}F_G - F_5 - F_6 \stackrel{(3,4)}{=} 0 \quad (5)$$

$$F_3 = F_4 \stackrel{(5)}{=} 0 \quad (6)$$

$$F_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{2}F_G - F_3 - F_4 - 2F_5) \stackrel{(4-6)}{=} \frac{\sqrt{2}}{4}F_G \quad (7)$$

$$F_1 = \sqrt{2}F_G - F_2 - F_3 - F_4 - F_5 - F_6 \stackrel{(3-7)}{=} \frac{\sqrt{2}}{4}F_G \quad (8)$$