

Stoffübersicht

Disclaimer: Diese Stoffübersicht kannst du als Leitfaden für die Vorbereitung der Zwischenprüfung in TechMech HS22 benutzen.

Aber bitte mit Vorsicht geniessen, denn es beinhaltet nicht den gesamten Stoff aus der Vorlesung und ich kann auch nicht für Richtigkeit garantieren.

Bei Fragen / Fehler bitte melden an ldewindt@ethz.ch -Danke!

Alle Dokumente auf die ich hier verweisen werde befinden sich auf meiner Webseite: n.ethz.ch/~ldewindt

Ausserdem findest du auf der AMIV-Webseite oder auch auf Moodle ganz viele alte (Zwischen-)prüfungen zum üben.

Überblick der Themen:

Grundlagen

- ↳ Trigonometrie, Vektorrechnung, Koordinatensysteme usw.
- ↳ Starrkörper
- ↳ Freiheitsgrad

Kinematik

≙ "Bewegungslehre", befasst sich mit der Bewegung von Körpern rein geometrisch (d.h. ohne Kräfte usw.)

- ↳ Geschwindigkeiten & Schnelligkeiten von materiellen Punkten berechnen
- ↳ Momentanzentren finden
- ↳ Rotationsgeschwindigkeit & Rotationsschnelligkeit
- ↳ Satz der projizierten Geschwindigkeiten (SdpG)
- ↳ Satz vom Momentanzentrum (SvM)
- ↳ Die Starrkörperformel
- ↳ Die Kinematik

Serien: 1~4

Weitere Aufgaben zum üben:

- In allen alten Basisprüfungen kommt eine Kinematik-Aufgabe.
- Sonst wurde Kinematik in den früheren Jahren an der 1. Zwischenklausur geprüft.

- ↳ Kräfte
- ↳ Reaktionsprinzip
- ↳ Die Resultierende
- ↳ Das Moment
- } Die Dynamik
- ↳ Die Transformationsregel
- ↳ Leistung
- ↳ Äquivalenz & Reduktion von Kräftegruppen
 - ↳ Kräftegruppen
 - ↳ statische Äquivalenz
- ↳ Parallele Kräfte: Dipolmoment & Kräftemittelpunkt
- ↳ Schwerpunkt

Serien: 4 ~ 5

Weitere Aufgaben zum üben:

- Sehr oft wurden die Basics zu Kraft/Leistung/Moment usw. in den früheren Jahren an der 1. Zwischenklausur geprüft.
- Eine simple Aufgabe zu diesen Themen kam fast nie an der Basisprüfung. (Ausser letztes Jahr als MC-Aufgaben). Es kommt oft in Kombination mit grösseren Themen (z.B. Statik, PdvL, Dynamik) deswegen ist es hier nicht geeignet mit den älteren Basisprüfungen zu üben.
 - ↳ noch nicht gehabt, kommt noch :)

Statik befasst sich mit unbewegten, ruhenden Körpern

↳ Hauptsatz der Statik

↳ Freischneiden

↳ Bindungs-, Lager- und Seilkräfte

↳ Prinzip der virtuellen Leistungen (PdvL)

↳ Stabkräfte: Druck- & Zugstab

Serien: 6 ~ 7

Weitere Aufgaben zum üben:

- In allen alten Basisprüfungen hat es mind. eine Statik- (Bindungskräfte bestimmen) und eine PdvL- (Stabkräfte bestimmen) Aufgabe.
- Sonst wurde Statik in den früheren Jahren an der 2. Zwischenklausur geprüft.

Die wichtigsten Konzepte / Formeln je nach Thema:

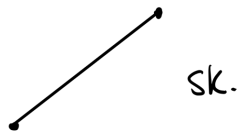
Grundlagen

Trigonometrie, Vektorrechnung, Koordinatensysteme usw.

In allen Themen benutzen wir Trigonometrie, Vektorrechnung, Koordinatensysteme usw. Falls du noch Mühe hast mit Basiswissen zu diesen Themen, unbedingt nachholen! → Das Dokument "Zusatzmaterialien 1" unter Woche 1 auf meiner Webseite könnte dir dabei helfen.

Starrkörper: Ü1 S.6

Starre Körper (SK) sind Körper, die sich nicht deformieren. z.B. ist ein Stab ein Starrkörper.



In TechMech sind alle Festkörper SK. (z.B. Würfel  in 3D oder  in 2D)

Bei Fachwerken bilden alle Dreiecke aus Stäben ein SK ( 

Freiheitsgrad: Ü3 S. 10~14 (viele Beispiele!)

Der Freiheitsgrad ist die Anzahl unabhängiger Bewegungen, welcher ein Körper oder System machen kann.

Ein einzelner SK hat in 3D den Freiheitsgrad 6, in 2D den Freiheitsgrad 3.

(Achtung ein Stab / hat in 3D nur $f=5$)

Wenn mehrere SK:

$$f = n - b$$



Gelenke: $b = (\# \text{verbundene SK} - 1) \cdot 2$

n = Summe der Freiheitsgrade der einzelnen Körper

b = Anzahl der linear unabhängigen Bindungsgleichungen

↳ Bindungen reduzieren den Freiheitsgrad eines Systems!

Kinematik:

Geschwindigkeit:

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$$

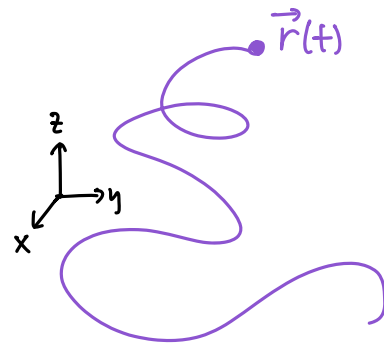
Schnelligkeit:

$$2D: v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Ü1 S.3~4

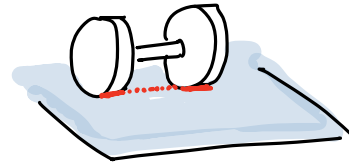
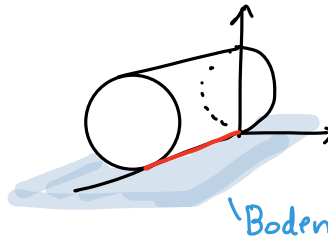
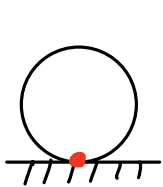
$$3D: v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Bewegungsfunktion



Momentanzentren finden: Ü2 S.6~7

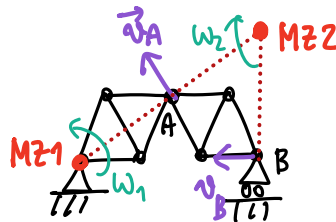
1. Falls keine Translation stattfindet, hat jeder SK mind. 1 MZ
2. Alle Pkte, die im Kontakt mit dem Boden / der Wand sind, sind Momentanzentren (bei nicht gleiten)



3. Ein Festlager ist immer ein MZ:



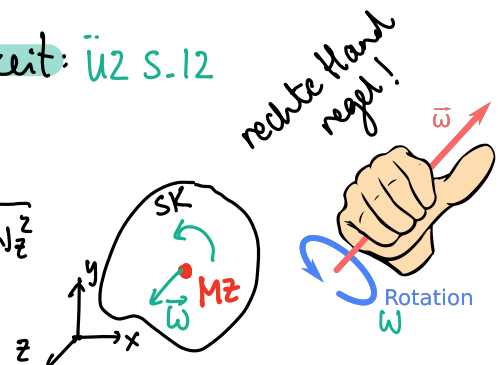
4. $\vec{v}$ ist immer senkrecht zu $\vec{r}$: MZ durch Konstruktion bestimmen
(Schnittpunkt der Senkrechten zu $\vec{v}$)



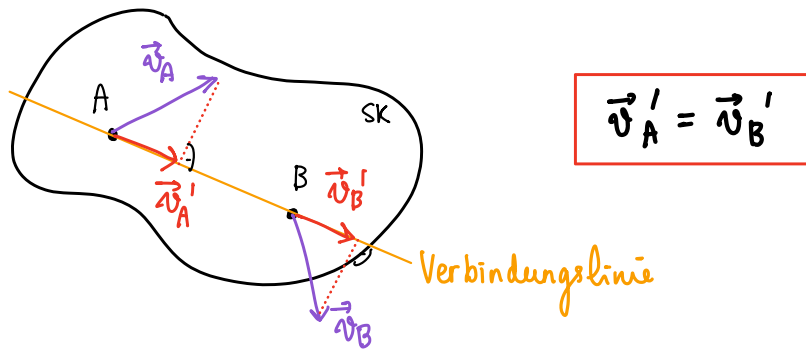
Rotationsgeschwindigkeit & Rotationsschnelligkeit: Ü2 S.12

$\vec{\omega}$: Rotationsgeschwindigkeit, ist ein Vektor

ω : Rotationsschnelligkeit, $\omega = |\vec{\omega}| = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}$

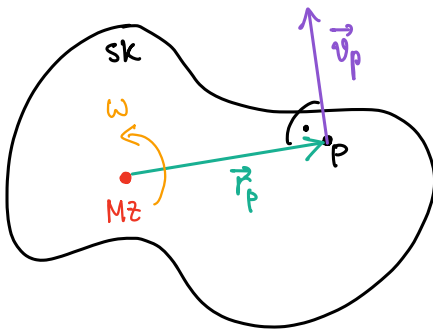


Satz der projizierten Geschwindigkeiten (SdpG): Ü2 S.3



$$\Rightarrow (\vec{v}_A - \vec{v}_B) \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_A) = 0 \quad \forall A, B \in SK$$

Satz vom Momentanzentrum (SvM): Ü2 S.6



$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{r}_P \quad \text{wenn } \vec{\omega} \perp \vec{r} \text{ (immer in 2D): } v_P = \omega \cdot r_P$$

Achtung diese 2 nicht vertauschen!

⚠ $\vec{v}$ ist immer $\perp$ zu $\vec{\omega}$ und $\vec{r}$.

Die Starrkörperformel: Ü3 S.5

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BA} \quad \forall A, B \in SK$$

Die Kinematik: Ü3 S.6

Kinematik von Punkt A =

$$\{\vec{v}_A, \vec{\omega}\}$$

← vom SK, zu dem Pkt. A gehört.

(Wenn 2 $\vec{\omega}$ s: das $\vec{\omega}$ nehmen mit welchem du die $\vec{v}$ berechnet hast)

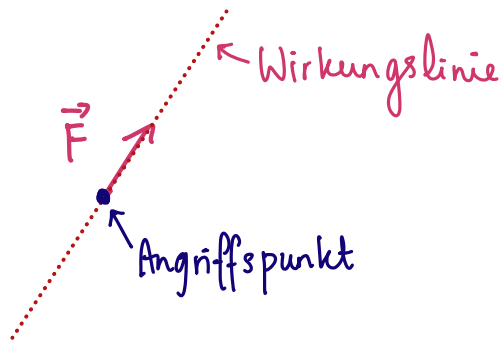
Invarianten:

$$\vec{I}_1 = \vec{\omega}$$

$$I_2 = \vec{v}_A \cdot \vec{\omega}$$

	$I_2 = 0$	$I_2 \neq 0$
$I_1 = 0$	Translation/ Stillstand	—
$I_1 \neq 0$	Rotation	Schraubung

Kräfte:
Ü4 S.5

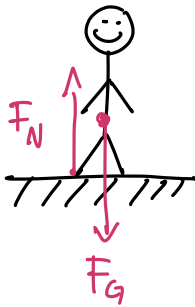


$$\vec{F} = \vec{e}_F \cdot F$$

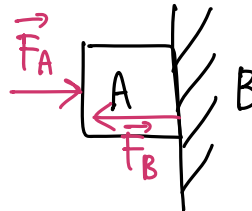
Kräfte sind Vektoren & machen sich durch ihre Wirkung bemerkbar.

Reaktionsprinzip Ü4 S.5

Kräfte wirken immer wechselseitig. Übt A eine Kraft F_A auf B aus, so übt B eine gleich grosse, entgegengesetzt gerichtete Kraft auf A aus:



$$\vec{F}_G = -\vec{F}_N, \quad |\vec{F}_N| = |\vec{F}_G|$$



$$\vec{F}_A = -\vec{F}_B, \quad |\vec{F}_A| = |\vec{F}_B|$$

Die Resultierende: Ü4 S.6

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$$

Ist die Summe aller Kräfte, die auf das System wirken.

Das Moment: Ü4 S.6

Beschreibt die Drehwirkung einer Kraft auf einen Körper.

Sie ist ein Vektor & ist vom Bezugspunkt abhängig.

Index der betrachteten Kraft

$$\vec{M}_0^i = \vec{r}_{0p} \times \vec{F}_i$$

Angriffspunkt der Kraft
Bezugspunkt

das resultierende Moment: Ist die Summe aller Momente auf einem Körper.
Diese ist auch bezogen auf einem Punkt des Körpers!

← wird leider oft nicht geschrieben

$$\vec{M}_0^{\text{tot}} = \sum_i \vec{M}_0^i$$

Die Transformationsregel: ü4 S.9

$$\vec{M}_A^{\text{tot}} = \vec{M}_0^{\text{tot}} + \vec{r}_{A0} \times \vec{R}$$

⚠ Wenn $\vec{R} = 0$, ist das Moment unabhängig vom Bezugspunkt.
d.h. $\vec{M}_A = \vec{M}_B \quad \forall A, B \in SK$

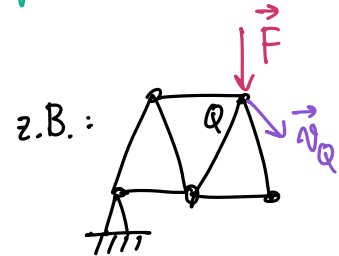
Leistung: ü4 S.14

← Geschwindigkeit des Angriffspunktes Q

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}_Q$$

← angreifende Kraft

ist ein Skalar (d.h. $\in \mathbb{R}$) & kein Vektor!



Die Gesamtleistung:

$$P_{\text{tot}} = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i + \sum_i \vec{M}_i \cdot \vec{\omega}_i$$

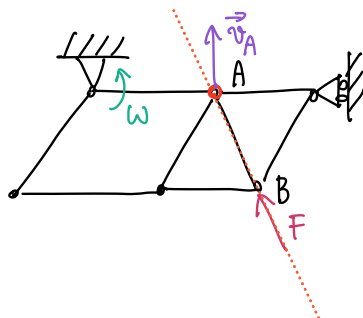
Summe der Leistungen der einzelnen Pkte "reine-Rotation-Komponenten"

Wenn nur 1 SK:

$$P_{\text{tot}} = \vec{R} \cdot \vec{v}_A + \vec{M}_A \cdot \vec{\omega} \quad \text{mit } A \in SK$$

Wichtig: Für die Bestimmung von Momenten & Leistungen darf man die Kräfte entlang ihrer Wirkungslinie verschieben. Wählt deswegen einen Punkt aus, bei der die Geschwindigkeit einfach zu bestimmen ist.

Bsp:



$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}_B = \vec{F} \cdot \vec{v}_A$$

Ü5 S.10

Die **Dynami**: eines Pktes P ist nichts anderes als

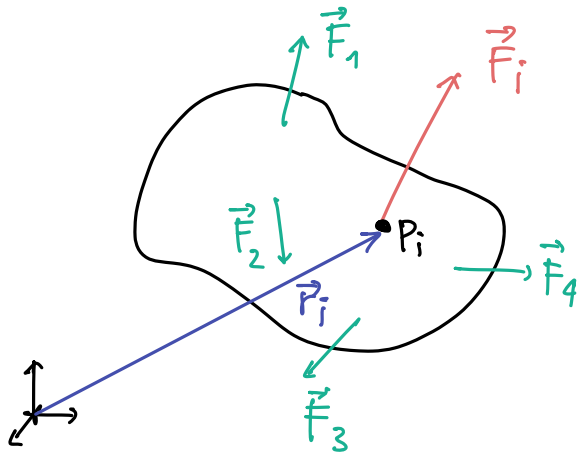
$$\{\vec{R}, \vec{M}_P^{\text{tot}}\}$$

Invarianten: $\vec{I}_1 = \vec{R}$

$$I_2 = \vec{R} \cdot \vec{M}_P^{\text{tot}}$$

Äquivalenz & Reduktion von Kräftegruppen: Ü5 S.8~9 & 12~14

Kräftegruppe: Ist eine Sammlung von Kräften, die an einem Körper angreifen.



$$\{\vec{F}_i\} = \{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N\}$$

P_i ist dabei der Angriffspunkt der Kräftegruppe
 $\vec{r}_i$ ist der Ortsvektor zu P_i .

Charakterisierung von Kräftegruppen:

Kräftepaar ($\hat{=}$ Moment): $\vec{R} = 0$ und $\vec{M}_P \neq 0$

Einzelkraft: $\vec{R} \neq 0$ und $I_2 = 0$

Nullsystem: $\vec{R} = 0$ und $\vec{M}_P = 0$

Schraube: $I_2 \neq 0$

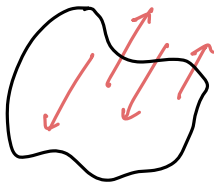
statische Äquivalenz

⚠ Wenn 2 Kräftegruppen in einem beliebigen Punkt die **gleiche Dynami** $\{\vec{R}, \vec{M}_P\}$ haben, sind sie **statisch äquivalent**.

$$\text{d.h. } \vec{R}\{\vec{F}_i\} = \vec{R}\{\vec{G}_i\} \quad \text{und} \quad \vec{M}_P\{\vec{F}_i\} = \vec{M}_P\{\vec{G}_i\}$$

↑ beliebig, aber gleicher Pkt.

Parallele Kräfte: Dipolmoment & Kräftemittelpunkt ü6 S.5 ~ 8



Wenn alle Kräfte, die ein System angreifen, parallel aufeinander sind, existiert ein Dipolmoment:

$$\vec{N} = \sum_{i=1}^n F_i \vec{r}_i$$

Falls $\vec{R} = 0$, ist das Dipolmoment unabhängig vom Bezugssystem.

Falls $\vec{R} \neq 0$, interessiert uns wo die $\vec{R}$ angreift:

$$\text{Kräftemittelpunkt} = \vec{r}_{oc} = \frac{\sum F_i \vec{r}_i}{\sum F_i}$$

Schwerpunkt: ü6 S.9 ~ 13 → Beispielaufgabe anschauen!

Ist dort wo die Gewichtskraft eines Körpers angreift.

$$\vec{r}_s = \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix}$$

mit

$$x_s = \frac{\int_{\Delta A} x dA}{A} = \frac{\sum_i x_i A_i}{\sum_i A_i} \quad \& \quad y_s = \frac{\int_{\Delta A} y dA}{A} = \frac{\sum_i y_i A_i}{\sum_i A_i}$$

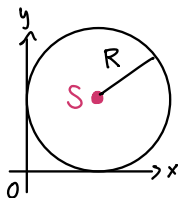
Wobei $\sum_i x_i A_i =$ "Summe der x-Komponenten der Schwerpunktsortsvektoren aller Teilkörper" mal "Fläche der jeweiligen Teilkörper"

und $\sum_i A_i =$ Summe aller Flächen der Teilkörper ($\hat{=}$ Gesamtfläche)

↖ analog für y

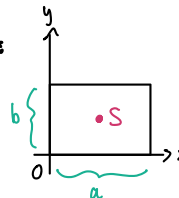
⊗ Wenn der Körper homogen ist & wir einfache Geometrien haben → in TechMech immer der Fall. d.h. Integral-formel ist für uns nicht wichtig:)

Kreis:



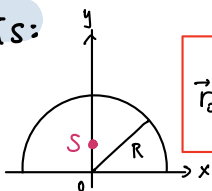
$$\vec{r}_{os} = \begin{pmatrix} R \\ R \end{pmatrix} \quad A = \pi r^2$$

Rechteck:



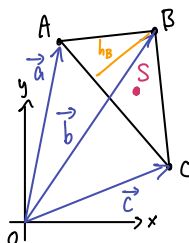
$$\vec{r}_{os} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{b}{2} \end{pmatrix} \quad A = a \cdot b$$

Halbkreis:



$$\vec{r}_{os} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4R}{3\pi} \end{pmatrix} \quad A = \frac{1}{2} \pi r^2$$

Dreieck:



$$\vec{r}_{os} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} \quad A = \frac{1}{2} A_C h_B$$

↪ hier sind alle Körper homogen.

Statik

→ Ziel: Bindungs-/ Stabkräfte bestimmen

Hauptsatz der Statik ü6 S.15

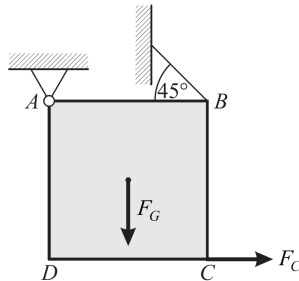
Damit ein System in Ruhe ist, gilt

$$\vec{R} = 0 \quad \& \quad \vec{M} = 0$$

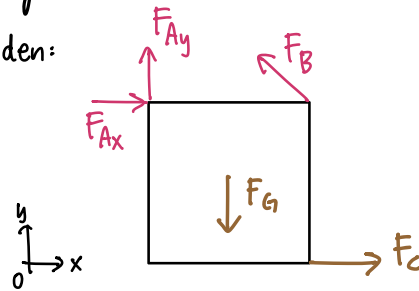
! 1 SK:
in Ruhe $\Leftrightarrow \vec{R} = \vec{M} = 0$
n SK: $n \in \mathbb{N}_{>1}$
in Ruhe $\Rightarrow \vec{R} = \vec{M} = 0$
✗

Freischneiden ü6 S.15 ~ 17 → viel üben!

Beim analysieren eines Systems (d.h. Bindungskräfte bestimmen usw.) muss man immer als allererster Schritt alle Starrkörper freischneiden. Dabei zeichnet man alle Kräfte (auch Bindungskräfte!) ein, die auf das System wirken.



freischneiden:



Prinzip der virtuellen Leistungen (PdvL) ü7 S.3

Prinzip der virtuellen Leistungen (PdvL):

Ein System befindet sich genau dann in einer Ruhelage, wenn die virtuelle Gesamtleistung der inneren und äusseren Kräfte bei jedem virtuellen Bewegungszustand verschwindet (und die Eigenschaften des Systems und seiner Lagerung diese Kräfte zulassen).

d.h.
$$\tilde{P} = \tilde{P}^{(i)} + \tilde{P}^{(a)} = 0 \quad \forall \{ \tilde{v} \}$$

~ heisst virtuell.

Wir benutzen PdvL hauptsächlich um Stabkräfte zu bestimmen
(manchmal auch um Bedingungen für Ruhe aufzustellen)

Bindungs-, Lager- und Seilkräfte

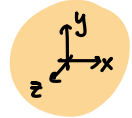
Üb S. 16 ~ 17

Lager vor dem Freischnitt

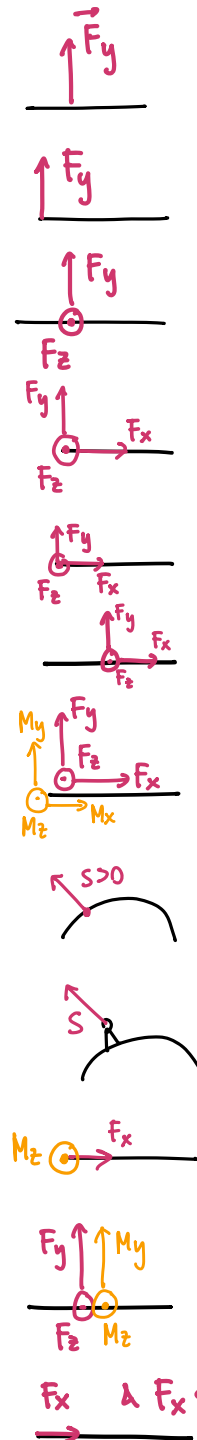
nach Freischnitt

2D

3D:



Auflager (einseitig)		
Auflager (einseitig) <i>Loslager</i>		
Auflager (beidseitig) <i>Loslager</i>		
Auflager (beidseitig) <i>Kurzes Querlager</i> <i>Loslager</i>		
Gelenk <i>Festlager</i>		
Gelenk		
Gelenk (zwei gelenkig verbundene Balken)		
Einspannung		
Faden / Seil		
Pendelstütze (Modellannahme: äussere Kräfte nur in den Gelenken)		
Parallelführung		
Langes Querlager, Schiebehülse		
Längs- und kurzes Querlager		



↳ aus Skript S. 54~55

Man zeichnet die Kräfte / Momente dort ein, wo die Bewegung / Rotation in diese Richtung vom Lager aufgehalten wird. D.h. dort wo die Bewegung wegen dem Lager nicht zugelassen ist.

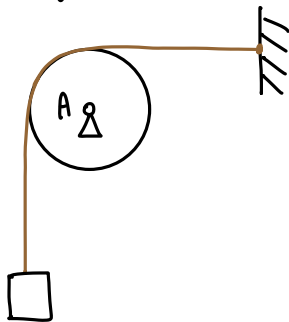


Seilkräfte: Seile können nur auf Zug belastet werden. Das heisst:

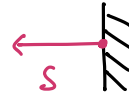
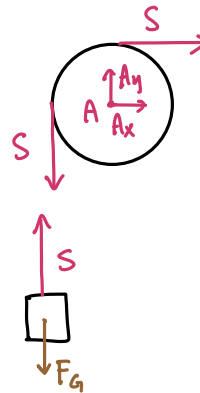
- Seilkräfte immer auf Zug (weg vom Körper) & in Seilrichtung zeichnen
- Bedingung: $S \geq 0$ s : Seilkraft



Wichtig: Reibungsfreie Umlenkungen: Seilkraft ist an beiden Enden gleich gross



freischnitt



Kochrezept für Statikaufgaben:

1) Koordinatensystem einführen & Freischnittsskizze erstellen.

wie ihr wollt! aber macht euer Leben nicht unnötig schwer...

- Lager ersetzen durch Lagerkräfte gemäss Tabelle (Seile auch)
- Alle äusseren Kräfte & Momente eintragen
- Falls nicht masselos $\rightarrow$ Gewichtskräfte eintragen

2) Gleichgewichtsbedingungen formulieren:

3D: $R = R_x = R_y = R_z = 0$	$M = M_x = M_y = M_z = 0$	6 Gleichungen pro SK
2D: $R = R_x = R_y = 0$	$M = M_z = 0$	3 Gleichungen pro SK

& nach gesuchten Kräften / Momenten auflösen

3) Diskussion über Ruhe:

- Seilkräfte nur auf Zug belastet $\rightarrow S > 0$
- Auflager hebt nicht ab $\rightarrow F_y > 0 \quad \forall$ Auflager

Kochrezept für PdvL-Aufgaben: Ü7 S.8~13 → Beispielaufgabe anschauen!

1.3 Prinzip der virtuellen Leistung (PdvL)

1. Stab mit der gesuchten Stabkraft entfernen und an seiner Stelle Stabkraft einführen. Externe Kräfte und Momente in Skizze übernehmen.
2. Bewegung einführen, die möglich ist. In der Regel eine Rotation um ein Festlager
3. Starre Körper identifizieren, Momentanzentren und Winkelgeschwindigkeiten bestimmen, Geschwindigkeit an den Knoten berechnen, an denen Kräfte angreifen
4. Gesamtleistung der Bewegung berechnen und gleich null setzen.

$$P_{tot} = \sum_i \underline{F}_i \cdot \underline{\tilde{v}}_i + \sum_i \underline{M}_i \cdot \underline{\tilde{\omega}}_i = 0$$

Beachte: $\underline{F}_i \cdot \underline{v}_i = F_i \cdot v_i \cdot \cos(\alpha)$

5. Nach gesuchter Stabkraft auflösen. Das eingeführte w kürzt sich heraus.

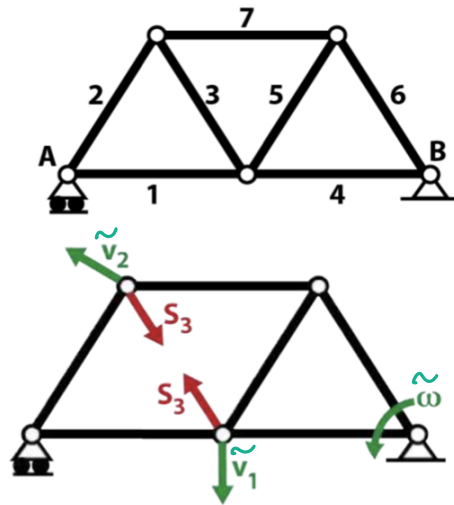


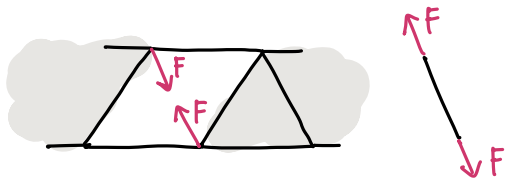
Abbildung 2: PdvL

Beachte: Lager nicht durch Lagerkräfte ersetzen sondern als Lager lassen.

Notation: $\sim$: $\tilde{P}, \tilde{\omega}, \tilde{v}$: steht für virtuell

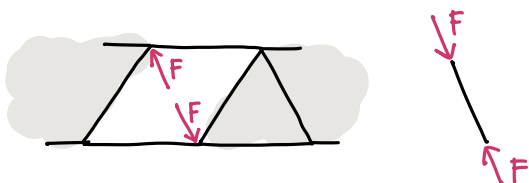
Stabkräfte: Druck- & Zugstab Ü7 S.7

Wenn man die Stabkraft so eingezeichnet hat:



falls $F \geq 0 \Rightarrow$ Zugstab
falls $F < 0 \Rightarrow$ Druckstab

Wenn man sie so eingezeichnet hat:



falls $F \geq 0 \Rightarrow$ Druckstab
falls $F < 0 \Rightarrow$ Zugstab