Übung 10

06.12.2022
Lina De Windt

Themen von Heute:

> Teil 1: Fragen & Inputs zu Themen / Aufgaben von letzter Woche

> Teil 2: Recap der Theorie für die aktuelle Serie:

neues Thema: Dynamik!

1. Beschleunigung
2. kinematische Relationen
3. Feder
4. Impuls
5. Newton'sches Bewegungsgesetz ($\hat{=}$ Impulssatz)
6. Differenzialgleichungen

> Teil 3: Übungsaufgaben lösen (Serie 10)

↳ viele Aufgaben zu Reibung & Kippen

↳ nur 2 Dynamik-Aufgaben :/ → nächste Woche mehr!

Teil 1: Fragen zu Themen/Aufgaben von letzter Woche?

Input ①: Bei Statik-Aufgaben kann man beim Freischnitt die Koordinaten so einführen, wie man möchte:

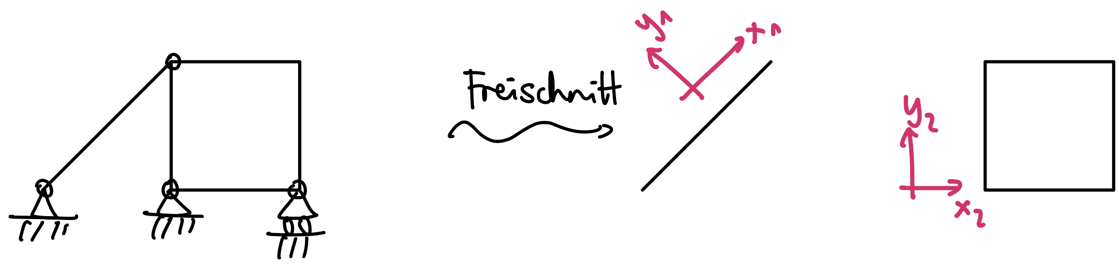
"Normal":

Man könnte sie aber auch so einführen:

Man muss dann einfach alle Kräfte, Distanzen, Momente usw. mit den eingeführten Koordinaten beschreiben & v.a. wichtig, dass man dabei konsistent bleibt!

Ausserdem: Wenn man mehrere Starrkörper hat, kann man für jeden Starrkörper ein eigenes Koordinatensystem einführen!

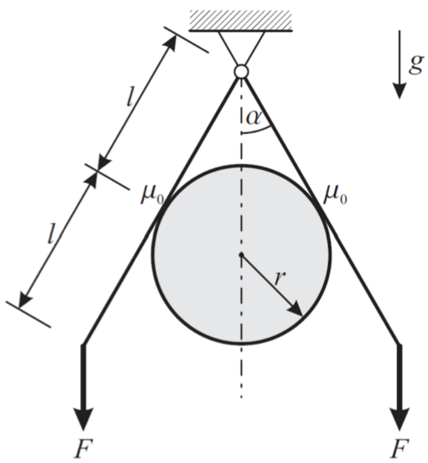
z.B.



↳ Wozu das Ganze? ⇒ Manchmal ist die Aufgabe leichter / schneller lösbar, wenn man die Koordinaten schlau einführt.

Beispiel: Serie 10 Aufgabe 1:

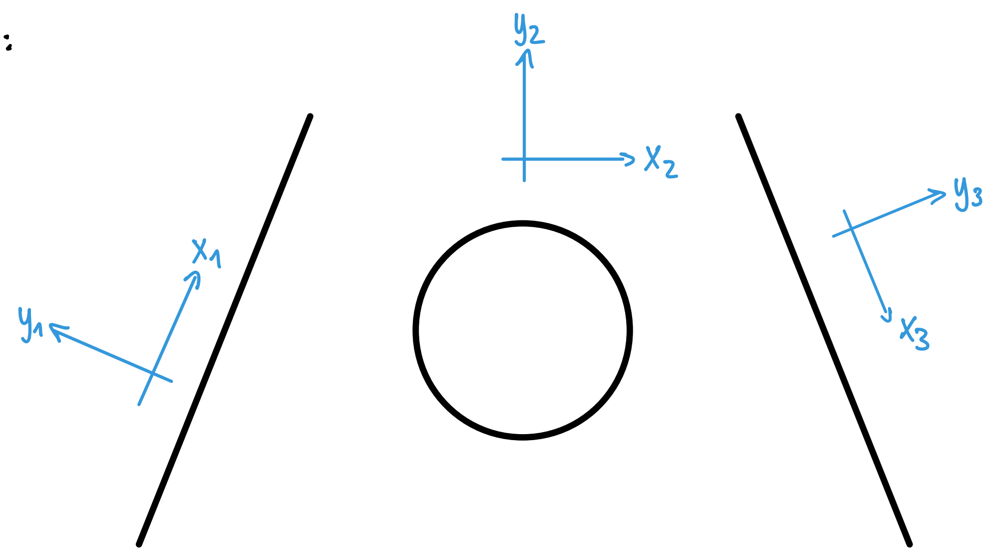
1. [1] Eine Kugel mit dem Gewicht F_G wird von zwei um $\alpha = 30°$ geneigten gewichtslosen Platten laut Abbildung festgehalten. Die dabei aufgewendeten Kräfte vom Betrag F seien $5F_G$.



1. Wie gross muss der zwischen Platte und Kugel auftretende Haftreibungskoeffizient μ_0 mindestens sein, damit die Kugel nicht hinunterfällt?

Hinweis: Der Rollwiderstand ist vernachlässigbar.

Freischnitt:



Input ②:

Wichtig! Aufgaben mit einer konstanten Geschwindigkeit (d.h. keine Beschleunigung) kann man als Statik-Aufgaben sehen!

Wikipedia:

Statik (Mechanik)

Die **Statik** ist ein Teilgebiet der Mechanik, das sich mit unbewegten, ruhenden Körpern befasst. Bei diesen befinden sich alle Kräfte im Gleichgewicht; die Statik wird daher auch als „Lehre vom Gleichgewicht" bezeichnet. Mit beschleunigten Körpern befasst sich die Kinetik. Die Methoden und Erkenntnisse der Statik sind auch auf Körper anwendbar, die sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegen, da diese keine Beschleunigung erfahren.

Keine Beschleunigung ≙ im Gleichgewicht ≙ Statikaufgabe

Teil 2: Recap der Theorie für die aktuelle Serie

Dynamik

Definition in Physik:

Dynamik (Physik)

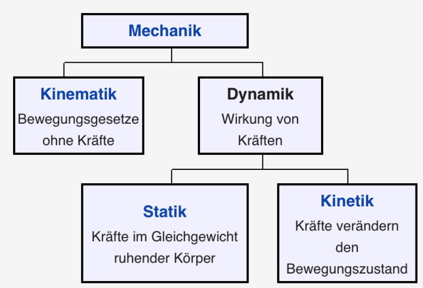
Die **Dynamik** (altgriechisch δύναμις ‚Kraft') ist das Teilgebiet der Mechanik, das sich mit der Wirkung von Kräften befasst. In der Physik wird unter Dynamik die Beschreibung der Bewegung von Körpern in ihrer Abhängigkeit von den einwirkenden Kräften verstanden.

Im allgemeineren Sinn bezeichnet Dynamik in der Physik das (zeitliche) Verhalten eines dynamischen Systems und der Bewegungsgleichungen, die ihm zugrunde liegen.

Es existieren unterschiedliche Einteilungen der Dynamik.

Inhaltsverzeichnis [Verbergen]

Strukturierung der Mechanik unter dem Gesichtspunkt der beteiligten Kräfte (typisch für die Physik)



Physik [Bearbeiten | Quelltext bearbeiten]

In der Physik wird die Dynamik eingeteilt in die Statik, die den Fall des Kräftegleichgewichts behandelt (unbeschleunigte Körper) und in die Kinetik, die sich mit beschleunigten Körpern befasst. Im Unterschied dazu beschränkt sich die Kinematik als weiteres Gebiet der Mechanik auf eine geometrische Beschreibung der Bewegungen, ohne dabei Kräfte zu berücksichtigen.

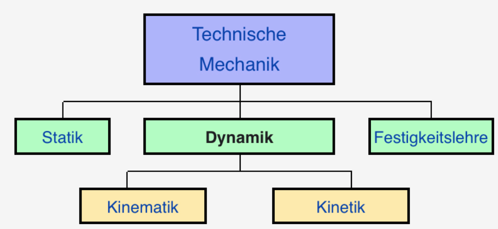
Definition in TechMech:

Technische Mechanik [Bearbeiten | Quelltext bearbeiten]

In der Technischen Mechanik wird die Dynamik als Lehre von den Bewegungen fester Körper verstanden. Mit Gasen und Flüssigkeiten befasst sich dagegen die Fluiddynamik. In der Technischen Mechanik wird die Dynamik meist eingeteilt in[1][2][3]

- die Kinematik, die keine Kräfte berücksichtigt, sondern nur geometrisch die Bahnen der bewegten Körper beschreibt und
- die Kinetik, die auch Kräfte berücksichtigt.

Die Dynamik in der Technischen Mechanik



Die Dynamik ist somit neben der Statik und der Festigkeitslehre eines der drei Hauptgebiete der Technischen Mechanik. Zum Teil wird auch die Auffassung vertreten, dass die Dynamik aus den beiden Gebieten der Statik und der Kinetik besteht,[4][5][6] die entsprechenden Werke sind jedoch bei allen Autoren in drei Bände oder Kapitel unterteilt, von denen je eines die Statik und die Festigkeitslehre behandeln und ein weiteres Kinetik und Kinematik. Zum Teil werden diese Bände als *Dynamik* bezeichnet, teils auch als *Kinetik und Kinematik*[7] oder nur *Kinetik*[8] bezeichnet. Zu den Inhalten zählen die Kinematik und Kinetik von einzelnen Punktmassen, von mehreren Punktmassen und von starren Körpern sowie Schwingungen. Wenn in Problemstellungen die Trägheitskräfte mit einbezogen werden, lassen sie sich mit Methoden der Statik lösen. Insofern baut die Dynamik methodisch auf der Statik auf und wird daher erst nach der Statik gelehrt.[9][10]

↳ D.h. also: In der Dynamik sind die Körper im Gegensatz zur Statik nicht in Ruhe, sondern bewegen sich!

Dynamik beschreibt die Bewegung & die Gestaltänderung von Körpern unter dem Einfluss von Kräften.

→ Ab Heute bis Ende Semester: Dynamik! :)

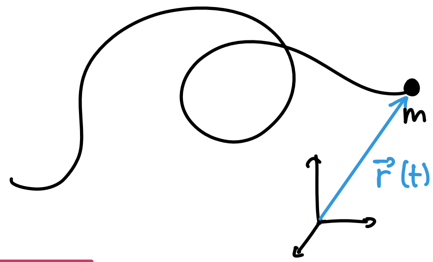
Wichtige Definitionen / Konzepte, die in Dynamik vorkommen:

1. Beschleunigung:

Die Beschleunigung gibt an, wie schnell sich die Geschwindigkeit eines Körpers ändert. Sie ist die Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit (bzw. 2 Ableitung der Bewegungsfkt.)

$$\boxed{\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)}$$

r(t): Bahnkurve



In kartesischen Koordinaten: $\boxed{\vec{a} = \ddot{x}\,\vec{e}_x + \ddot{y}\,\vec{e}_y + \ddot{z}\,\vec{e}_z}$

In ebenen Polarkoordinaten: $\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z$

$$\boxed{\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{e}_z}$$

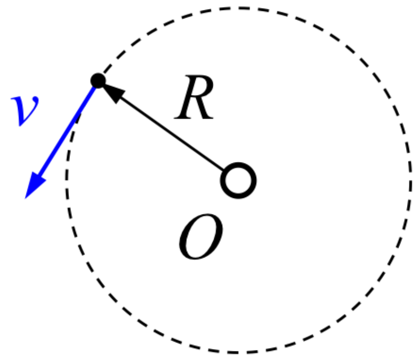
Falls r konstant ist:
(z.B. bei einem Pendel)

$\dot{\vec{\rho}} = \ddot{\vec{\rho}} = 0$

$$\boxed{\vec{a} = -\rho\dot{\varphi}^2\vec{e}_\rho + \rho\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi}$$

Beispielaufgabe: Serie 10 Aufgabe 7:

7. Ein Teilchen bewegt sich auf einer Kreisbahn mit dem Radius R (siehe Skizze). Die Geschwindigkeit des Teilchens ist gegeben als $|\mathbf{v}| = at$, wobei a eine Konstante ist.



Was ist die Beschleunigung des Teilchens in Polarkoordinaten?

(a) $\mathbf{a} = -\frac{a^2t^2}{R}\mathbf{e}_\rho + a\mathbf{e}_\varphi$

(b) $\mathbf{a} = \frac{at}{R}\mathbf{e}_\rho - at\mathbf{e}_\varphi$

(c) $\mathbf{a} = \frac{a^2t^2}{R}\mathbf{e}_\rho$

(d) $\mathbf{a} = -a^2t^2\mathbf{e}_\rho + at\mathbf{e}_\varphi$

(e) $\mathbf{a} = a\mathbf{e}_\varphi$

Formel für die Beschleunigung in Polarkoordinaten:

$$\vec a = (\ddot\rho - \rho\dot\varphi^2)\vec e_\rho + (\rho\ddot\varphi + 2\dot\rho\dot\varphi)\vec e_\varphi \; (+\cancel{\ddot z \vec e_z})$$

=0 da keine Bewegung in z-Richtung.

diese Unbekannten Grössen bestimmen!

$\rho = R \Rightarrow \dot\rho = 0 \Rightarrow \ddot\rho = 0$ easy :)

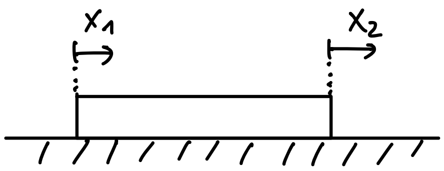
$|\vec v| = \dot\varphi R = at \iff \dot\varphi = \frac{at}{R} \Rightarrow \ddot\varphi = \frac{a}{R}$

$$\Rightarrow \vec a = \left(0 - R\left(\frac{at}{R}\right)^2\right)\vec e_\rho + \left(R\cdot\frac{a}{R} + 2\cdot 0\cdot\frac{at}{R}\right)\vec e_\varphi =$$

$$= \underline{\underline{-\frac{a^2t^2}{R}\vec e_\rho + a\cdot\vec e_\varphi}}$$

2. kinematische Relationen

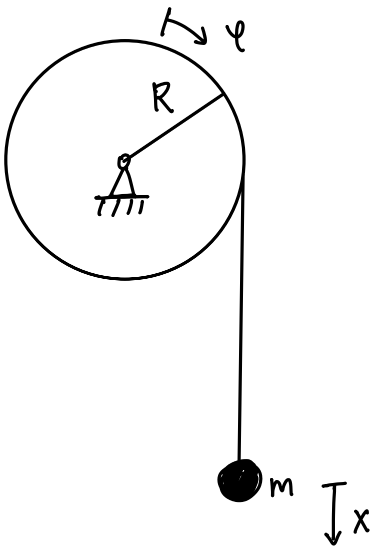
Wenn wir mehr Koordinaten haben als Freiheitsgrade, sind die Koordinaten voneinander abhängig. Man sagt, dass diese Koordinaten eine kinematische Relation haben. Unsere Aufgabe ist es, Gleichungen aufzustellen, welche diese Relationen beschreiben:



$x_1 = x_2$

Oft treten kinematische Relationen bei Rollen auf:

Allgemein:



$$\boxed{x = R \cdot \varphi}$$

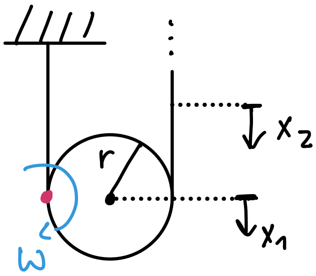
Bem: $\boxed{\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \omega}$

$\omega =$ Kreisfrequenz $= 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \dot{\varphi}$

$\hat{=}$ Rotationsgeschwindigkeit

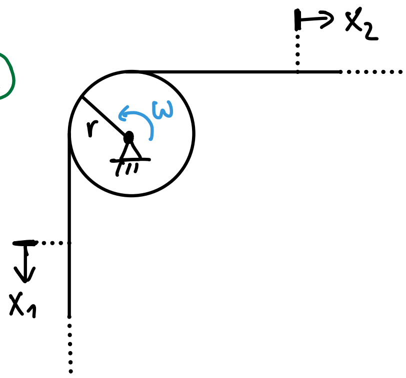
Beispiele: Bestimme die kinematischen Relationen:

(1)



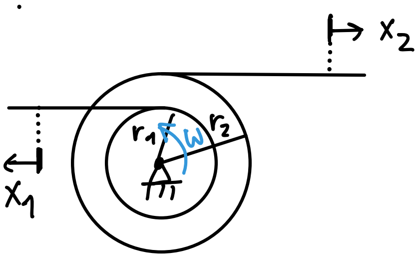
$$\omega = \frac{\dot{x}_1}{r} = \frac{\dot{x}_2}{2r} \Rightarrow \dot{x}_2 = 2\dot{x}_1$$

(2)



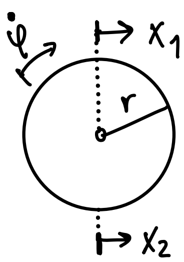
$$\omega = \frac{\dot{x}_1}{r} = -\frac{\dot{x}_2}{r} \Rightarrow \dot{x}_1 = -\dot{x}_2$$

(3)



$$\omega = \frac{\dot{x}_1}{r_1} = -\frac{\dot{x}_2}{r_2} \Rightarrow \dot{x}_2 = -\frac{r_2}{r_1}\dot{x}_1$$

(4)

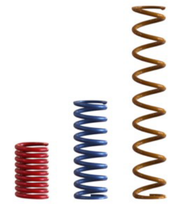


$$\dot{x}_2 = \dot{x}_1 - r\dot{\varphi}$$

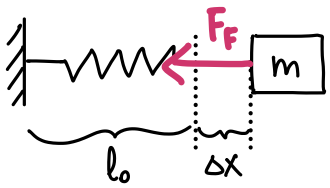
3. Feder

Wir zeichnen sie so

Eine Feder ist ein Bauteil, dass sich elastisch verformen lässt:



Wenn sie gezogen / gedrückt wird, übt sie eine Kraft in die entgegengesetzte Richtung aus. ("Sie will in die ursprüngliche Lage zurück"). Diese Kraft kann man nach dem Hookeschen Gesetz bestimmen:

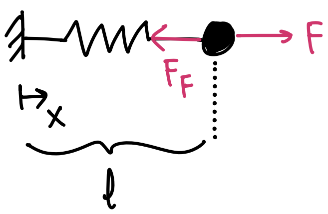


$$\boxed{F_{Feder} = \pm k \cdot \Delta x}$$

Vorzeichen: je nach dem in welche Richtung man das Pfeil eingezeichnet hat.

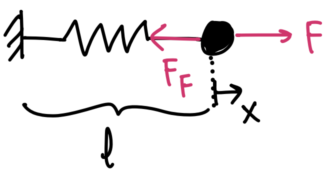
k: Federkonstante: gibt an, wie "steif" eine Feder ist (gegeben).
Δx: Auslenkung

Aufpassen, wo die Ruhelage und wo die Koordinate ist:



Ruhelage bei $x=0$ $\rightarrow$ $F_F = k\cdot x$

Ruhelage bei $x=l$ $\rightarrow$ $F_F = k\cdot(x-l)$

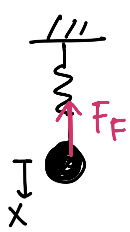


Ruhelage bei $x=-l$ $\rightarrow$ $F_F = k\cdot(l+x)$

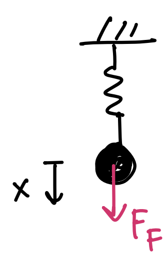
Ruhelage bei $x=0$ $\rightarrow$ $F_F = k\cdot x$

Aufpassen mit dem Vorzeichen:

Ruhelage bei $x=0$:

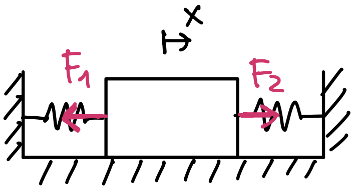


$F_F = k\cdot x$



$F_F = -kx$

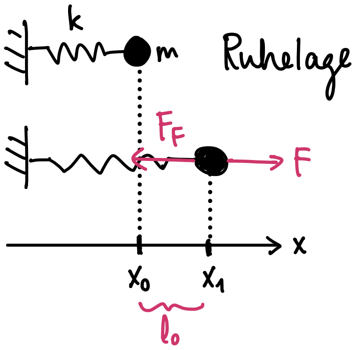
Beispiele: Im folgenden haben alle Feder die Federkonstante k.

① 

beide Feder sind in ihrer Ruhelage.

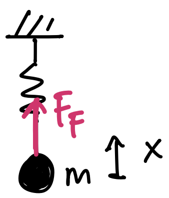
$F_1 = kx$

$F_2 = -kx$

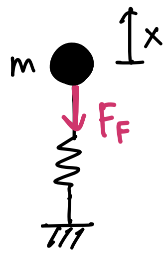
② 

$F_F = k \cdot (x_1 - x_0) = k \cdot l_0$

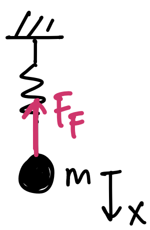
③ alle sind in Ruhelage



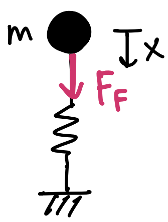
$F_F = -kx$



$F_F = kx$

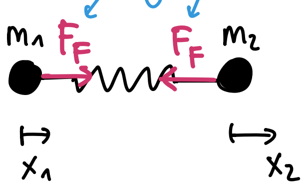


$F_F = +kx$



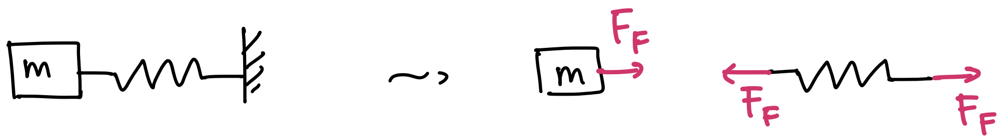
$F_F = -kx$

④ wegen dem Reaktionsprizip auf beide Seiten gleich!



$F_F = k \cdot (x_2 - x_1)$

Wichtig! : Beim Freischneiden einer Feder sind die Kräfte auf ihre beiden Enden gleich gross (wegen dem Reaktionsprinzip von Newton)



Wichtig!: Federn verringern den Freiheitsgrad eines Systems <u>nicht</u>.

4. Impuls

Der Impuls ist folgendermassen definiert: $\boxed{\vec{p} = m \cdot \vec{v}}$

Sie beschreibt die "Wucht" oder der "Schwung" eines Körpers.

5. Das Newton'sche Bewegungsgesetz (≙ Impulssatz)

In der Dynamik sind die Körper im Gegensatz zur Statik nicht in Ruhe, sondern bewegen sich. Daher führen wir neue Gleichung ein:

$$\boxed{m\vec{a} = \vec{R}} \quad \text{oder} \quad \boxed{\frac{d}{dt} m\vec{v} = \dot{\vec{p}} = \vec{R}}$$

m = Masse

$\vec{a}$ = Beschleunigung

$\vec{R}$ = Resultierende, $\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i$

$\vec{p} = m\vec{v}$ = Impuls

und der Drallsatz: $\boxed{\vec{M}_0 = \dot{\vec{L}}_0}$ (nächste Woche genauer)

Diese Gleichungen heissen **Bewegungsgleichung** und es sind **Differenzialgleichungen**.

Da es sich um physikalische Systeme handelt, haben diese Gleichungen auch gewisse Anfangsbedingungen:

$$\boxed{\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}}$$

(≙ Werte zum Zeitpunkt $t=0$)

Diese werden wir auch brauchen, um die DGL's komplett lösen zu können.

Bem: Falls mehrere Körper/Massepunkte gegeben sind, muss man für jeden Massepunkt das Newton'sche Bewegungsgesetz und Anfangsbedingungen aufstellen.

6. Differenzialgleichungen

→ "Crash Course DGL" auf meine Webseite anschauen :)

Um diese DGL's zu lösen gibt es Lösungsansätze, die in der Prüfung meistens gegeben sind.

Der folgende Ansatz kommt sehr häufig vor:

die Werte vor dem x einfach mit ω^2 ersetzen

Falls die DGL in diese Form umgeformt werden kann: $\boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = g}$ $g \in \mathbb{R}$

↳ meistens möglich!!

nichts vor der 2. Ableitung

⚠ ω ist die Kreisfrequenz

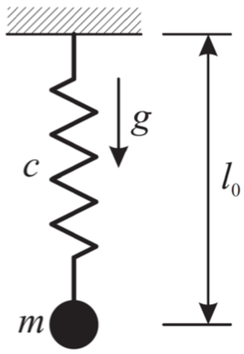
Dann löst dieser Ansatz die DGL: $\boxed{x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) + \frac{g}{\omega^2}}$ ← unsere Lösung zu !!

Wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ Konstanten sind, die durch das Einsetzen der Anfangsbedingungen bestimmt werden müssen. g und ω sind Konstanten, die durch die DGL bestimmt sind. Nach dem Bestimmen von c_1 und c_2 können wir die Werte für ω und g einsetzen und das ist unsere Lösung :)

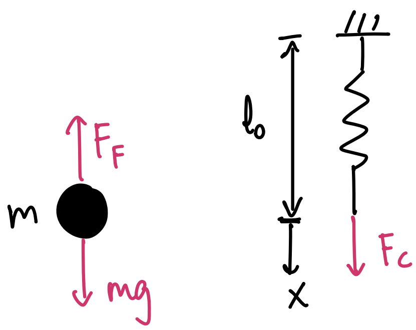
↳ Schauen wir uns das anhand eines Beispiels an!

Beispielaufgabe: aus letztes Jahr, kommt wahrscheinlich in der nächten Serie...

1. [1] Ein Massenpunkt (Masse m) hängt an einer Feder. Diese ist in vertikaler Lage am oberen Ende befestigt. Die Federkonstante ist c und die Feder besitzt die ungespannte Länge l_0 . Finde die Bewegung des Massenpunktes, wenn dieser bei ungespannter Feder aus der Ruhe losgelassen wird.



1. Nehmen Sie an, dass die Feder während der Bewegung vertikal bleibe und führen Sie in einer allgemeinen Lage die Kräfte am Massenpunkt ein.



l_0: Länge der ungespannten Feder

2. Formulieren Sie das Newtonsche Bewegungsgesetz und finden Sie die Bewegungsdifferentialgleichung.

$$m\ddot{x} = mg - F_F$$

mit $F_F = cx$ (Feder ist ungespannt wenn $x=0$)

$$\Rightarrow m\ddot{x} = mg - cx$$

$$\Leftrightarrow m\ddot{x} + cx = mg \quad / \div m$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{c}{m}x = g$$

Tipp: die höchste Ableitung Koeffizientenfrei machen.

3. Formulieren Sie das Anfangswertproblem für die Bewegung des Massenpunktes.

DGL: $\ddot{x} + \frac{c}{m} x = g$

Anfangswerte: $\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$ (wird aus der Ruhe losgelassen (Ruhe = Geschwindigkeit 0))

4. Bestimmen Sie die Bewegung des Massenpunktes. Dieser führt eine Schwingung aus. Wie gross sind die Amplitude und die Kreisfrequenz dieser Schwingung?

Schnelle Methode:

DGL: $m\ddot{x} + cx = mg \quad / \div m$

$\ddot{x} + \frac{c}{m} x = g \quad$ / definiere $\boxed{\omega^2 = \frac{c}{m}}$

$\ddot{x} + \omega^2 x = g \quad$ / DGL hat die Form wie oben gezeigt!

Wir wenden den Ansatz $x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) + \frac{g}{\omega^2}$ an:

Anfangsbedingungen einsetzen: $x(0) = c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) + \frac{g}{\omega^2} = c_1 + \frac{g}{\omega^2} \stackrel{!}{=} 0$

$\Rightarrow c_1 = -\frac{g}{\omega^2}$

$\dot{x}(0) = -\omega c_1 \sin(0) + \omega c_2 \cos(0) = \omega c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

Unsere Lösung ist also $x(t) = -\frac{g}{\omega^2} \cos(\omega t) + \frac{g}{\omega^2}$

$= \frac{g}{\omega^2}(1 - \cos(\omega t))$ / wir setzen wieder $\omega^2 = \frac{c}{m} \Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$ ein (Bem: $\omega \geq 0$)

$= \underline{\underline{\frac{mg}{c}\left(1 - \cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}}\, t\right)\right)}}$

Amplitude: $\underline{\underline{-\frac{mg}{c}}}$ Kreisfrequenz: $\underline{\underline{\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}}}$

Bem: $x(t) = A\cos(\omega t)$

↑ Amplitude ↖ Kreisfrequenz kann man aus der Gleichung ablesen.

Ausserdem: i.A. ist $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}}$ die Kreisfrequenz bei einem Federschwinger.

Ausführliche Methode:

unser AWP: $\begin{cases} \ddot{x}(t) + \frac{c}{m}x(t) = g & \leftarrow \text{DGL} \\ x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0 & \leftarrow \text{Anfangsbedingungen} \end{cases}$

1) als erstes schauen wir uns die entsprechende homogene Gleichung an:

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}x = 0$$

Ansatz: $x(t) = e^{\lambda t}$ in DGL einsetzen:

$$(e^{\lambda t})'' + \frac{c}{m}e^{\lambda t} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 e^{\lambda t} + \frac{c}{m}e^{\lambda t} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\lambda^2 + \frac{c}{m}\right)e^{\lambda t} = 0$$

$$\Rightarrow \mathrm{Chp}(\lambda): \lambda^2 + \frac{c}{m} = 0$$

Schwingungsfrequenz

wir definieren: $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}}$

werdet ihr in Physik 1 genauer sehen warum

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + \omega^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 = -\omega^2$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{\underbrace{-\omega^2}_{<0\,!}} = \pm i\sqrt{\omega^2} = \pm i\omega$$

→ λ ist komplex.

Das Fundamentalsystem ist also: $Ae^{+i\omega t}$, $Be^{-i\omega t}$

$$\Rightarrow x_h(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}$$

$$= A\cdot(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)) + B(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t))$$

$= (A+B)\cos(\omega t) + i(A-B)\sin(\omega t)$ / definiere $\tilde{A} = A+B$, $\tilde{B} = i(A-B)$ beide $\in \mathbb{R}$

$= \tilde{A}\cos(\omega t) + \tilde{B}\sin(\omega t)$

(weil wir sind nur an reelle Lösungen interessiert (es beschreibt ein physikalisches System!))

2) partikuläre Lösung bestimmen

Inhomogenität $= g$ $\longrightarrow$ Ansatz $= x_p(t) = \alpha \in \mathbb{R}$

in DGL einsetzen: $(\alpha)'' + \frac{c}{m}\alpha = g$

$$\Longleftrightarrow \frac{c}{m}\alpha = g \quad \Rightarrow \alpha = \frac{mg}{c}$$

3) allgemeine Lösung: $x(t) = x_h(t) + x_p(t) = \tilde{A}\cos(\omega t) + \tilde{B}\sin(\omega t) + \frac{mg}{c}$

4) Mittels AB die Koeffizienten $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ bestimmen:

$$x(0) = \tilde{A} + \frac{mg}{c} = 0 \quad \Rightarrow \tilde{A} = -\frac{mg}{c}$$

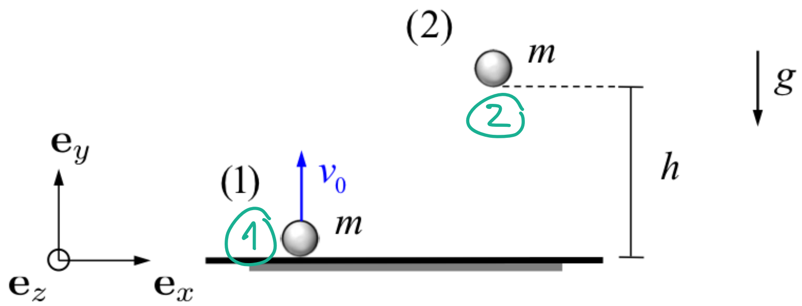
$$\dot{x}(0) = \tilde{B} = 0$$

$\Rightarrow$ Lösung: $x(t) = -\frac{mg}{c}\cos(\omega t) + \frac{mg}{c} = \frac{mg}{c}\cdot(1-\cos(\omega t))$ / $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$

$$\underline{\underline{x(t) = \frac{mg}{c}\cdot\left(1-\cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}}\,t\right)\right)}}$$

Beispielaufgabe 2: Serie 10 Aufgabe 6

6. Zwei Massen m befinden sich zum Zeitpunkt $t = 0$ in der unten skizzierten Ausgangslage. Masse (1) startet am Boden und hat die Anfangsgeschwindigkeit v_0 in $\mathbf{e}_y$-Richtung, Masse (2) fällt aus der Höhe h.



Anfangsbedingungen: (AB)

Masse 1: $y_1(t=0) = 0$ ① $\quad v_{1,y}(t=0) = v_0 = \dot{y}_1(0)$ ②

Masse 2: $y_2(t=0) = h$ ③ $\quad v_{2,y}(t=0) = 0 = \dot{y}_2(0)$ ④

Wie gross muss die Höhe h gewählt werden, damit beide Massen gleichzeitig (bei $t > 0$) den Boden berühren?

(a) $h = \frac{2v_0}{g}$

(b) $h = \frac{v_0^2}{g}$

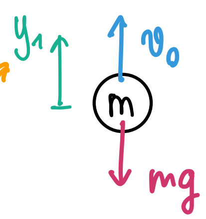
(c) $h = 4v_0^2$

(d) $h = \frac{2v_0^2}{g}$

(e) $h = \frac{v_0^2}{2g}$

↳ wichtigster Schritt: DGL aufstellen (Newton'scher Bewegungssatz)

Masse ①:



Koordinate einführen, die die Position der Masse beschreibt (so, dass $y_1 = 0$ wenn $t=0$ in dieser Aufgabe).

→ Newton'scher Bewegungssatz: $m\ddot{y}_1 = -mg$

$$\Leftrightarrow \quad \ddot{y}_1 = -g$$

τ: Integrationsvariable, "dummy"-variable

$$\Leftrightarrow \quad \int_0^t \ddot{y}_1(\tau)\, d\tau = \int_0^t -g\, d\tau$$

$$\Leftrightarrow \quad \dot{y}_1(t) - \dot{y}_1(0) = -gt \qquad / AB\ ②: \dot{y}_1(0) = v_1(0) = v_0$$

$$\Leftrightarrow \quad \dot{y}_1(t) - v_0 = -gt$$

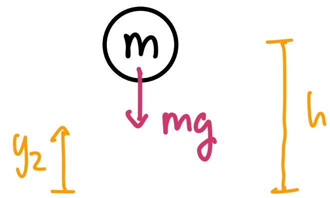
$$\Leftrightarrow \quad \dot{y}_1(t) = v_0 - gt$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_0^t \dot{y}_1(\tau)\, d\tau = \int_0^t (v_0 - g\tau)\, d\tau$$

$$\Leftrightarrow \quad y_1(t) - y_1(0) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad / AB\ ①: y_1(0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{y_1(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2} \quad ①$$

genau dasselbe machen für Masse ②:



Newton'scher Bewegungssatz: $m\ddot{y}_2 = -mg \qquad / \div m$

$$\Leftrightarrow \quad \ddot{y}_2 = -g$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_0^t \ddot{y}_2(\tau)\, d\tau = \int_0^t -g\, d\tau$$

$$\Leftrightarrow \quad \dot{y}_2(t) - \dot{y}_2(0) = -gt \qquad / AB\ ④: \dot{y}_2(0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \dot{y}_2(t) = -gt$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_0^t \dot{y}_2(\tau)\, d\tau = \int_0^t -g\tau\, d\tau$$

$$\Leftrightarrow \quad y_2(t) - y_2(0) = -\frac{1}{2} g t^2 \qquad / AB\ ③: y_2(0) = h$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{y_2(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + h} \quad ②$$

1: $y_1(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$

→ sind unsere Ortsbahnen !!

2: $y_2(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + h$

"Boden berühren" heisst: $y_1(t) = 0$ bzw. $y_2(t) = 0$.

Bestimmen wir zu welchem Zeitpunkt t_{B_1} bzw. t_{B_2} die Masse 1 bzw. 2 den Boden berührt:

1 $\Rightarrow$ $y_1(t = t_{B_1}) = v_0 t_{B_1} - \frac{1}{2} g t_{B_1}^2 \overset{!}{=} 0$ berührt den Boden

$$\Leftrightarrow v_0 - \frac{1}{2} g t_{B_1} = 0$$

$$\Leftrightarrow t_B = \frac{2v_0}{g}$$

2 $\Rightarrow$ $y_2(t = t_{B_2}) = -\frac{1}{2} g t_{B_2}^2 + h \overset{!}{=} 0$ Berührt den Boden.

$$\Leftrightarrow t_{B_2}^2 = \frac{2h}{g}$$

$$\Leftrightarrow t_{B_2} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Wir wollen die Höhe h so setzen, dass Masse 1 und 2 gleichzeitig den Boden berühren.

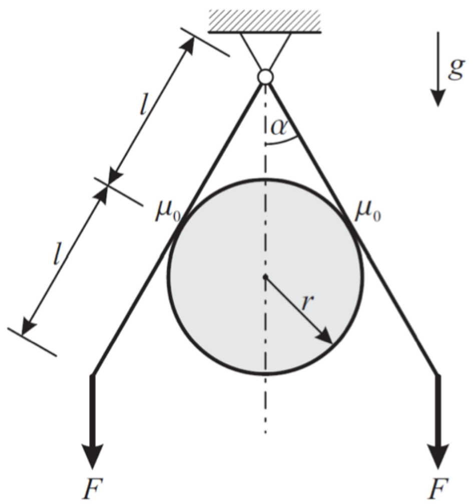
Also $t_{B_1} \overset{!}{=} t_{B_2}$

$$\Leftrightarrow \frac{2v_0}{g} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4v_0^2}{g^2} = \frac{2h}{g} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{h = \frac{2v_0^2}{g}}}$$

Teil 3: Übungsaufgaben – Serie 10

1. [1] Eine Kugel mit dem Gewicht F_G wird von zwei um $\alpha = 30°$ geneigten gewichtslosen Platten laut Abbildung festgehalten. Die dabei aufgewendeten Kräfte vom Betrag F seien $5F_G$.



1. Wie gross muss der zwischen Platte und Kugel auftretende Haftreibungskoeffizient μ_0 mindestens sein, damit die Kugel nicht hinunterfällt?

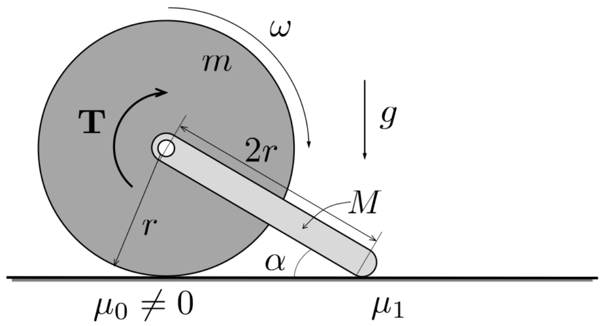
Hinweis: Der Rollwiderstand ist vernachlässigbar.

↳ Was bedeutet das für uns?
↪ Tipp: siehe slides von Ü letzter Woche

Tipps:

- Statikaufgabe!
- Verwende Tipp auf Seite 2~3 von dieser Ü.
- HS auf alle 3 SK anwenden um Kräfte zu bestimmen
- Bedingung für Haften aufstellen & nach μ_0 auflösen.
  ↳ auf slides von Ü letzter Woche :)

2. Ein Rad mit Masse m und Radius r, auf das ein Moment $\mathbf{T} = -T\mathbf{e}_z$ wirkt, rollt ohne zu gleiten auf dem Boden mit gegebener Rotationsgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$. Der Mittelpunkt des Rades ist durch ein Gelenk mit einem Stab mit homogener Masse M und Länge $L = 2r$ verbunden, der auf dem Boden gleitet und mit diesem einen Winkel $\alpha = \pi/6$ einschliesst. Der Boden ist rau mit Haftreibungskoeffizient $\mu_0 \neq 0$ und Gleitreibungskoeffizient μ_1. Die Schwerebeschleunigung $\mathbf{g}$ wirkt nach unten.



1. Wie gross muss der Gleitreibungskoeffizient μ_1 sein, damit sich das System mit einer konstanten Geschwindigkeit bewegt?

   (a) $\mu_1 = \dfrac{T}{\frac{Mgr}{2} + \frac{T}{\sqrt{3}}}$

   (b) $\mu_1 = \dfrac{\sqrt{3}Tr}{\frac{Mg}{2} - \frac{T}{2\sqrt{3}r}}$

   (c) $\mu_1 = \dfrac{2T}{\frac{Mgr}{2} - \frac{Tr}{\sqrt{3}}}$

   (d) $\mu_1 = \dfrac{T}{T - \frac{Mgr}{2}}$

   (e) $\mu_1 = \dfrac{\sqrt{3}T}{\frac{Mgr}{2} + T}$

2. Was ist der minimale Wert von μ_0, damit das Rad nicht gleitet?

   (a) $\mu_{0,min} = \dfrac{2T}{(M+m)\,gr - T\sqrt{3}}$

   (b) $\mu_{0,min} = \dfrac{\sqrt{3}T}{(M-m)\,gr}$

   (c) $\mu_{0,min} = \dfrac{T}{\left(\frac{M}{2}+m\right)gr - \frac{T}{\sqrt{3}}}$

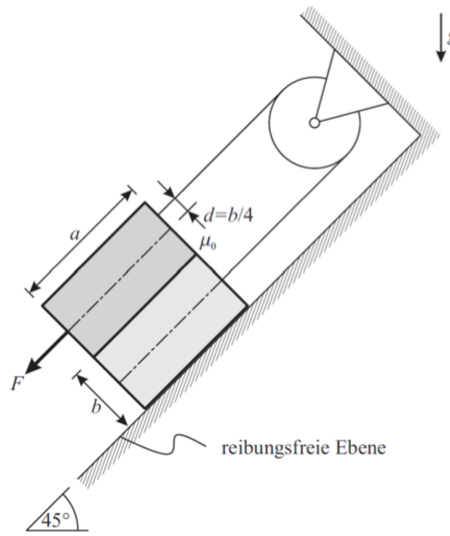
   (d) $\mu_{0,min} = \dfrac{\sqrt{3}T}{\left(\frac{M}{2}+m\right)g}$

   (e) $\mu_{0,min} = \dfrac{2T}{\left(\frac{M}{2}-m\right)gr}$

Tipps:

- Was heisst konstante Geschwindigkeit? → Seite 4 von dieser Ü
- Danach normale Reibungs-aufgabe. Wendet den HS (auf jeden einzelnen SK) an um die unbekannten Kräfte zu bestimmen.
- Nehmt euch genug Zeit um den Freischnitt korrekt zu machen!
  ↳ Normalkräfte, Reibungskräfte usw. nicht vergessen!

3. [2] Zwei identische Quader (je Gewicht F_G, Länge a, Höhe b) liegen wie skizziert aufeinander und auf einer schiefen Ebene (Neigungswinkel 45°). Ein Seil verbindet die beiden Quader über eine Umlenkrolle. Am unteren Quader ist das Seil auf Höhe der Mittellinie befestigt, am oberen Quader $d = b/4$ oberhalb der Mittellinie. Zwischen den Quadern herrscht Haftreibung ($\mu_0 > 0$). Der Kontakt zwischen dem unteren Quader und der schiefen Ebene ist reibungsfrei. Die Gewichtskräfte der Quader und die skizzierte Kraft vom Betrag F bilden die Belastung.



Gute Aufgabe!

Annahmen: Ebenes System, Quader homogen, Seil undehnbar und masselos, Umlenkrolle reibungsfrei, Seilkräfte parallel zur Unterlage.

1. Schneiden Sie die Quader einzeln frei und führen Sie alle an ihnen angreifenden Kräfte ein.
2. Stellen Sie die Gleichgewichtsbedingungen auf.
3. Berechnen Sie die Reibungskraft, die Seilkraft, die Normalkräfte und deren Angriffspunkte.
4. Gegeben seien F_G und μ_0 . Welche Bedingungen muss F erfüllen, damit das System nicht zu gleiten beginnt?
5. Welche Bedingung muss F erfüllen, damit das Seil gespannt bleibt?
6. Welche Ungleichungen stellen sicher, dass die Klötze nicht kippen? Diskutieren Sie diese Ungleichungen bei gegebenem a, b und F_G .

Tipps:

- Normalkräfte so einführen wie wir letzte Woche besprochen haben (mit Abstandsvariable) → genauer siehe Slides von Ü10.
- Dann HS um Kräfte zu bestimmen
- Alle Bedingungen aufstellen (Haften, gespanntes Seil, kein Kippen)

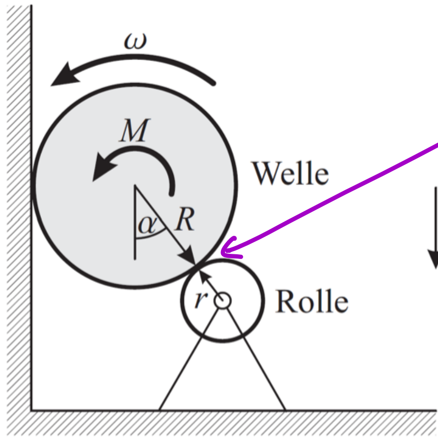
⚠ Die kritischere Bedingung ist die entscheidende Bedingung!

d.h. z.B. Bedingung ①: $0 \leq \alpha \leq 10$

Bedingung ②: $2 \leq \alpha \leq 4$

→ Bedingung ② deckt einen kleineren Bereich für α ab (Wenn ② gilt, gilt ① sowieso.) D.h. die Bedingung ② wird eher verletzt und ist somit kritischer. Wenn also z.B. die Bedingungen die Werte für α beschreiben, bei dem das System nicht kippt, muss man sicherstellen, dass die kritischere Bedingung (also Bedingung ②) erfüllt ist s.d. das System nicht kippt.

4. [3] Eine Welle rotiert mit konstanter Rotationsschnelligkeit ω . Sie ist mit einer vertikalen Wand und einer Rolle abgestützt. Alle Berührungen sind rau. Der Haftreibungskoeffizient ist μ_0 , der Gleitreibungskoeffizient μ_1. Die Rollwiderstandslänge ist μ_2. Die Welle hat das Gewicht F_G. Die Rolle ist reibungsfrei gelenkig gelagert und dreht mit, ihr Gewicht kann vernachlässigt werden. Die Radien von Welle und Rolle sind R und r. Es sei $\alpha = 45°$.



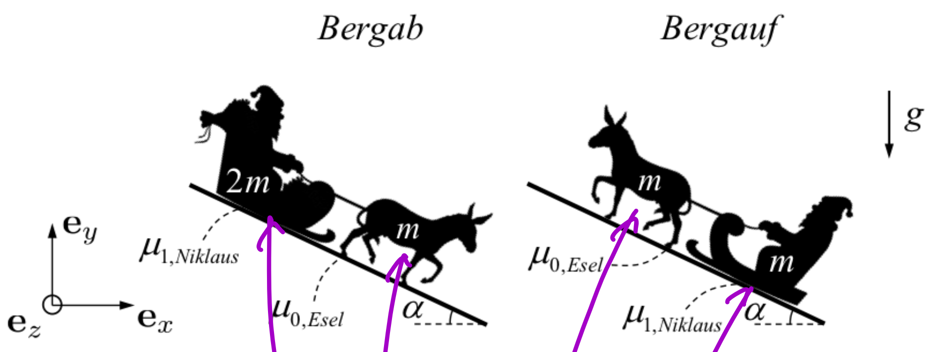
hier Haftreibung!

1. Bestimmen Sie alle Kräfte und Momente an Rolle und Welle, insbesondere auch das Antriebsmoment M.

Hinweis: Die Aufgabe ist als ebenes Problem mit den Methoden der Statik zu lösen.

Tipps: Normale Statikaufgabe mit Reibungskräften.
Erschreckt nicht wenn ihr hässliche Werte als Lösung kriegt diese Aufgabe hat tatsächlich hässliche Lösungen.

5. Es hat frisch geschneit und St. Nikolaus fährt mit seinem Schlitten voller Geschenke (Masse $2m$) zu den Kindern im nächsten Dorf bergab. Am Abend kehrt er mit dem leeren Schlitten (Masse m) in die Berge zurück. Die komplexe Iteration der Schlitten im Neuschnee kann durch den sehr hohen Reibungswert von $\mu_{1,Niklaus} = \sqrt{3}$ beschrieben werden. Dasselbe gilt für die Hufe des Esels im weichen Schnee, für die derselbe sehr hohe Haftreibungswert von $\mu_{0,Esel} = \sqrt{3}$ gilt.



1. Wie gross muss der Neigungswinkel α sein, damit der Esel bergab und bergauf immer mit der gleichen Kraft ziehen muss?

alles als Punktmassen betrachten!

   (a) $\alpha = 0°$

   (b) $\alpha = 15°$

   (c) $\alpha = 30°$

   (d) $\alpha = 45°$

   (e) $\alpha = 60°$

2. Wenn ein Esel bei weichem Schnee die volle Reibungskraft nutzen kann, wie viele Esel wären dann nötig, um den Schlitten mit konstanter Geschwindigkeit bergab bzw. bergauf zu ziehen?

   (a) Bergab: 0 Esel, Bergauf: 1 Esel

   (b) Bergab: 1 Esel, Bergauf: 1 Esel

   (c) Bergab: 1 Esel, Bergauf: 2 Esel

   (d) Bergab: 2 Esel, Bergauf: 2 Esel

   (e) Bergab: 2 Esel, Bergauf: 4 Esel

Hinweis: Alle Kräfte können auf der Höhe des Schnees angenommen werden. Bei konstanter Geschwindigkeit herrschen die Gleichgewichtsbedingungen.

↳ Methoden der Statik verwenden.