Technische Mechanik

Übung 12

20.12.2022
Lina De Windt

Themen von Heute:

> Teil 1: Fragen & Inputs zu Themen / Aufgaben von letzter Woche?

> Teil 2: Recap der Theorie für die aktuelle Serie:

1. Bewegungen von rotierenden Körpern beschreiben:
   - 1.1 Drall
     - 1.1.1 Satz von Steiner
   - 1.2 Drallsatz
   - 1.3 Drallsatz für ebene Rotationen von Starrkörpern
   - 1.4 Massenträgheitsmoment (≙ Inertialmoment)
     - 1.4.1 Beispiele Massenträgheitsmomente
2. Kleine Zusammenfassung von Dynamik
3. Kochrezept Dynamikaufgaben

> Teil 3: Übungsaufgaben besprechen (Seite 12)

> Teil 4: Abschliessende Worte zur TechMech Ü:

↳ kleine Zusammenfassung von TechMech

↳ Tipps für die Lern- & Prüfungsphase

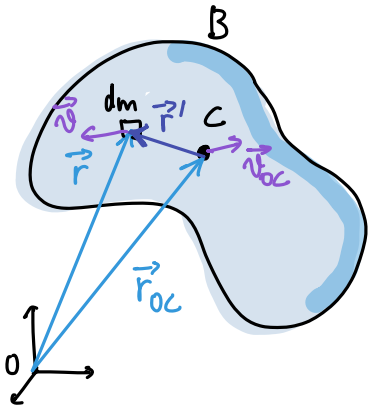
Teil 1: Fragen & Inputs zu Themen / Aufgaben von letzter Woche?

Teil 2: Recap der Theorie für die aktuelle Serie

1. Bewegungen von rotierenden Körpern beschreiben

1.1 Drall

Der Drall (bzw. Drehimpuls) ist eine physikalische Grösse, welche den Bewegungszustand eines rotierenden starren Körpers bestimmt. Sie beschreibt sozusagen den "Schwung" der Rotation. Den Drall kann man bezüglich eines inertialen Punktes (d.h. ein Punkt in Ruhe) O oder bezüglich des Massenmittelpunktes bestimmen:



Bezüglich inertialer Punkt O: $\vec{L}_O = \iiint_B \vec{r} \times \vec{v}\, dm$

Bezüglich Massenmittelpunkt C: $\vec{L}_C = \iiint_B \vec{r}\,' \times \vec{v}\,' dm$

Keine Angst ihr müsst den Drall nie berechnen. Es ist aber gut zu wissen wie sie definiert ist :)

mit $\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{r}_{OC}$

$\vec{v}\,' = \vec{v} - \vec{v}_{OC}$

1.1.1 Satz von Steiner (Transformationsregel für den Drall)

Wie beim Moment gibt es für den Drall auch eine Transformationsregel:

$$\vec{L}_O = \vec{r}_C \times \vec{p} + \vec{L}_C$$

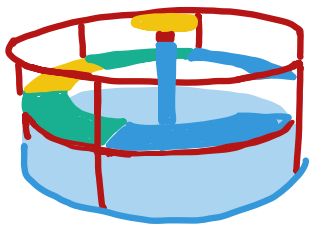
Drall bezüglich O (≙ Punkt in Ruhe) — Drall bezüglich Massenmittelpunkt

$$\Rightarrow \quad I_O = m r_{OC}^2 + I_C$$

2.2 Drallsatz

Der Drallsatz ist ein physikalisches Gesetz, das besagt, dass zur Änderung des Drehimpulses eines Körpers ein Drehmoment an ihm aufgebracht werden muss.

z.B. Wenn wir ein Spielplatzkarussel haben:



Um diesen Karussel in Drehung zu versetzen, muss man es anstossen (≙ ein Moment aufbringen, das dem Karussel Drehimpuls zuführt). Um die Drehung aufzuhören muss man wieder ein Moment in Gegenrichtung aufbringen, um den Drehimpuls zu verändern und es zum anhalten zu bringen. (Das machen in der realen Welt Reibungsmomente im Lager und der Luftwiderstand).

Die mathematische Formulierung dieses Gesetzes lautet wie folgt:

zeitliche Ableitung!

Drallsatz bezüglich des inertialen Punktes O: $\boxed{\dot{\vec{L}}_O = \vec{M}_O^{tot}}$

Drallsatz bezüglich des Massenmittelpunktes C: $\boxed{\dot{\vec{L}}_C = \vec{M}_C^{tot}}$

(≙ relativer Drallsatz)

Bem: Den Drallsatz kann man "nur" bezüglich 2 Punkte aufstellen!

2.3 Drallsatz für ebene Rotationen von Starrkörpern:

Bei ebenen (d.h. 2D) Rotationen kann der Drall und folglich auch der Drallsatz vereinfacht werden: (→ Herleitung im Skript oder Vorlesung)

Drallsatz bezüglich O (Inertialpunkt (≙ Punkt in Ruhe)): $\dot{L}_O = I_O \dot{\omega} = I_O \ddot{\varphi} = M_O^{tot}$ (Drall: $L_O = I_O \omega$)

Drallsatz bezüglich C (Massenmittelpunkt): $\dot{L}_C = I_C \dot{\omega} = I_C \ddot{\varphi} = M_C^{tot}$ (Drall: $L_C = I_C \omega$)

wobei I_O bzw. I_C der Massenträgheitsmoment ist.

⚠ Der Drall und das Moment müssen in dieselbe Richtung positiv gerechnet werden.

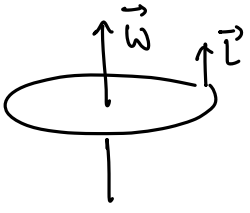
2.4 Massenträgheitsmoment (≙ Inertialmoment):

bezüglich O: $I_O = \iint_B r^2 \, dm$

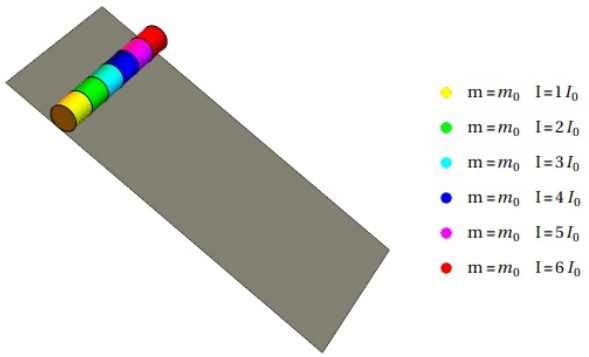
bezüglich C: $I_C = \iint_B r'^2 \, dm$

} keine Angst, müsst ihr nie berechnen in TechMech

Sie gibt die Trägheit eines starren Körpers gegenüber einer Änderung seiner Rotationsgeschwindigkeit bei der Drehung um eine gegebene Achse an. Sie ist abhängig von der Geometrie und Masse des Körpers.



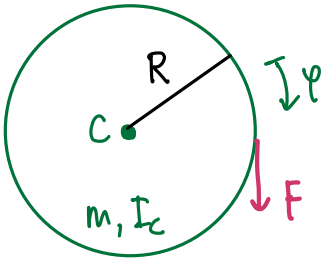
$I = \frac{L}{\omega}$



Bem: Das Massenträgheitsmoment ist bei einer ebenen SK-Bewegung konstant.

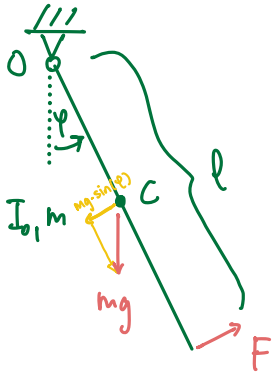
↳ Grund warum wir aus dem Drall $L_O = I_O \omega$ den Drallsatz $\dot{L}_O = I_O \dot{\omega}$ erhalten :)

Beispiele:

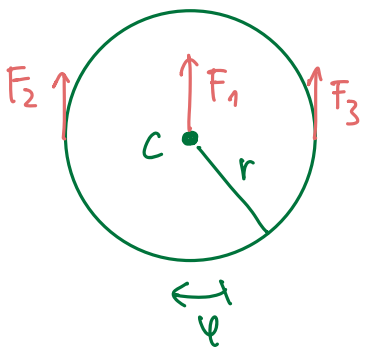
① 

$$\dot{L}_c = I_c\ddot{\varphi} = M_c = RF$$

Drall und Moment in dieselbe Richtung positiv rechnen!

② 

$$\dot{L}_0 = I_0\ddot{\varphi} = M_0 = lF - \frac{l}{2}mg\cdot\sin(\varphi)$$

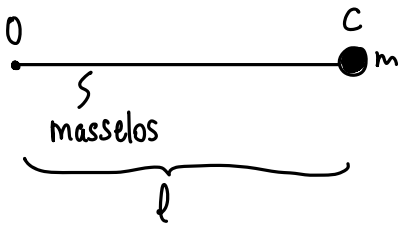
③ 

$$\dot{L}_c = I_c\ddot{\varphi} = M_c = rF_2 - rF_3$$

1.4.1 Beispiele Massenträgheitsmomente

(in der Regel werden sie auch in der Aufgabe angegeben)

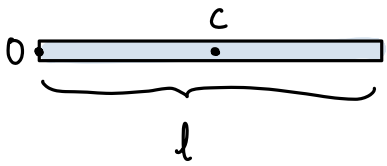
Massenpunkt:



$$I_C = 0$$

$$I_O = m\ell^2$$

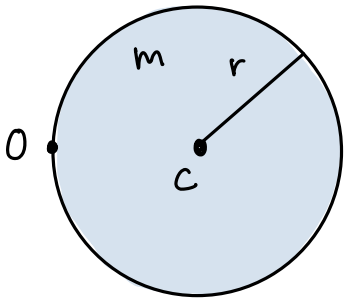
Balken:



$$I_C = \frac{1}{12} m\ell^2$$

$$I_O = \frac{1}{3} m\ell^2$$

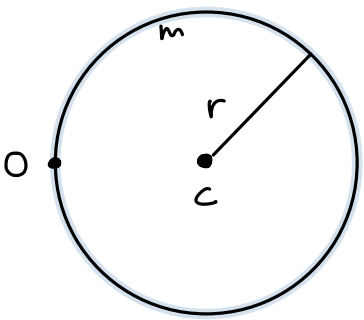
Kreisscheibe:



$$I_C = \frac{1}{2} mr^2$$

$$I_O = \frac{3}{2} mr^2$$

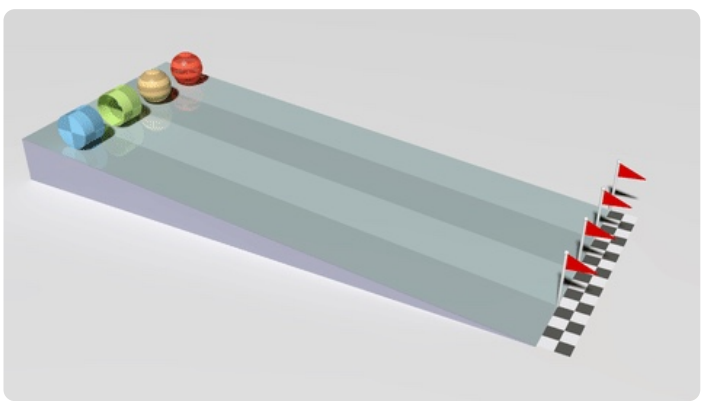
Infinitesimal dünner Ring:



$$I_C = mr^2$$

$$I_O = 2mr^2$$

Bem: Der Massenträgheitsmoment eines aus homogenen Teilen zusammengesetzten Körpers ist die Addition der einzelnen Massenträgheitsmomente.



Four objects with identical masses and radii racing down a plane while rolling without slipping.

From back to front:
- spherical shell,
- solid sphere,
- cylindrical ring, and
- solid cylinder.

The time for each object to reach the finishing line depends on their moment of inertia. (OGV version)

2. Kleine Zusammenfassung von Dynamik

Massenpunkte: Newton'scher Bewegungsgesetz $\boxed{m\vec{a} = \vec{R}} = \dot{\vec{p}}$ auch: Impulssatz

Starre & deformierbare Körper:

Impulssatz: $\vec{p} = \vec{R}$ $\xrightarrow{m\vec{r}_c = \iiint_B \vec{r}\,dm}$ Massenmittelpunktsatz: $\boxed{m\vec{a}_c = \vec{R}}$

Drallsatz: bezüglich 0 (Inertialpunkt (= Pkt. in Ruhe)) $\boxed{\dot{\vec{L}}_0 = \vec{M}_0}$ wobei $\vec{L}_0 = \iiint_B \vec{r} \times \vec{v}\,dm$

bezüglich C (Massenmittelpunkt) $\boxed{\dot{\vec{L}}_c = \vec{M}_c}$ wobei $\vec{L}_c = \iiint_B \vec{r}' \times \vec{v}'\,dm$

Satz von Steiner: $\boxed{\vec{L}_0 = \vec{r}_{0c} \times \vec{P} + \vec{L}_c}$ (Transformationsregel für den Drall)

Ebene Rotationen von starren Körpern:

Drallsatz: bezüglich 0 (Inertialpunkt): $\boxed{\dot{L}_0 = I_0\dot{\omega} = I_0\ddot{\varphi} = M_0^{tot}}$ Drall: $\boxed{L_0 = I_0\omega}$

bezüglich C (Massenmittelpunkt): $\boxed{\dot{L}_c = I_c\dot{\omega} = I_c\ddot{\varphi} = M_c^{tot}}$ Drall: $\boxed{L_c = I_c\omega}$

L_c in TechMech: Massenmittelpunkt = geom. Schwerpunkt

Wichtig: Der Drall und das Moment müssen in dieselbe Richtung positiv gerechnet werden.

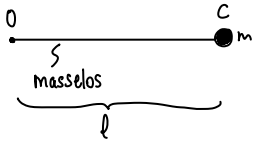
wobei I_0, I_c das Massenträgheitsmoment (≙ Inertialmoment) ist

bezüglich 0: $I_0 = \iint_B r^2\,dm$

bezüglich C: $I_c = \iint_B r'^2\,dm$

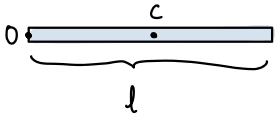
Umrechnung zw. I_0 & I_c: $\boxed{I_0 = mr_{0c}^2 + I_c}$

Beispiele Massenträgheitsmoment:



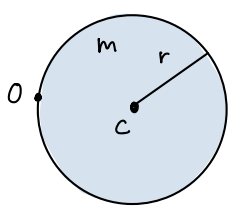
$I_c = 0$

$I_0 = ml^2$



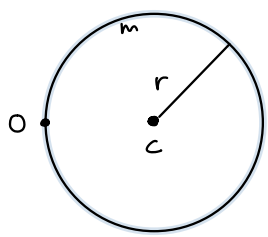
$I_c = \frac{1}{12}ml^2$

$I_0 = \frac{1}{3}ml^2$



$I_c = \frac{1}{2}mr^2$

$I_0 = \frac{3}{2}mr^2$



$I_c = mr^2$

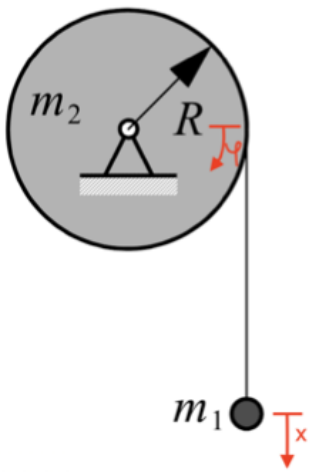
$I_0 = 2mr^2$

3. Kochrezept Dynamikaufgaben (aus Theorieblätter von Felix Stadler)

1. Identifiziere die allgmeine Lage, die unterschiedlichen Starrkörper und deren Verbindungen
2. Freischnittskizze für die einzelnen Starrkörper (von der allgemeinen Lage) erstellen:
   (a) Körper freischneiden und Verbindungskräfte (z.B. Seilkräfte) einführen
   (b) alle externen Kräfte einführen
   (c) geeignetes Koordinatensystem für jeden Körper einführen. Koordinaten sollten in die Richtung zeigen, in den sich der Körper bewegen wird. Der Ursprung dieser Koordinaten sollte in der Skizze deutlich erkennbar sein (wichtig für Anfangsbedingungen).
   (d) Freiheitsgrad ermitteln, falls danach gefragt ist
3. Newtonsches Bewegungsgesetz für jeden Körper, Drallsatz für jeden *rotierenden* Körper aufstellen

$$\underline{R} = m\underline{a} \qquad \& \qquad M_O = \dot{L}_O = I_O\ddot{\varphi}$$

4. Bei System mit mehreren Körpern: Kinematische Relationen aufstellen → Zusammenhang zwischen den einzelnen Variablen der unterscheidlichen Körpern finden. Häufig gilt: $x = R\varphi$ (siehe Skizze rechts)



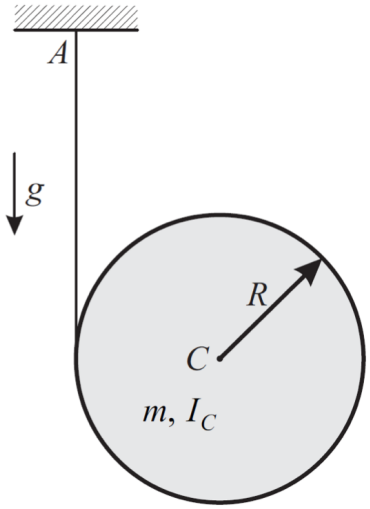
5. Anfangsbedingungen aufstellen (um später die Integrationskonstanten zu bestimnmen)

$$x(0) = ... \quad \& \quad \dot{x}(0) = ... \quad \text{oder} \quad \varphi(0) = ... \quad \& \quad \dot{\varphi}(0) = ...$$

6. DGL lösen - mithilfe von Lösungsansatz oder bei einfachen DGLs durch Integration
7. Anfangsbedingungen in Lösungen der DGL einsetzten und Integrationskonstanten bestimmen

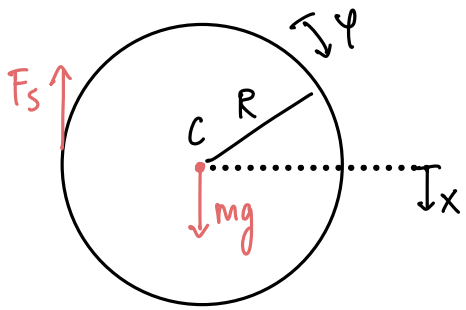
Beispielaufgabe: Serie 12 Aufgabe 1

1. [1]Eine Jo-Jo-Spule (Masse m, Radius R, Trägheitsmoment in Achsenrichtung im Massenmittelpunkt $I_C = mR^2/2$) ist mit einem vertikalen Faden in A aufgehängt und wird zum Zeitpunkt$t = 0$ aus der Ruhe losgelassen. Die Spule ist mit genügend Faden umwickelt.



1. Stellen Sie alle zur Bestimmung der Bewegung und der Fadenkraft nötigen Gleichungen auf.

Freischnitt:



Koordinaten einführen!

Massenmittelpunktsatz: $ma_c = m\ddot{x} = R = mg - F_S$ ... (1)

Drallsatz bezüglich Massenmittelpunkt C (ebene Rotation): $\dot{L}_c = I_c \ddot{\varphi} = M_c$

$\rightsquigarrow I_c \ddot{\varphi} = RF_S$ ... (2)

Kinematische Relationen: $x = R\varphi$

Wir wollen (1) und (2) reduzieren in eine Gleichung (weil System hat Freiheitsgrad 1

$\Rightarrow$ Bewegung kann durch 1 Gleichung beschrieben werden!)

$$① + \frac{②}{R} : m\ddot{x} + \frac{I_c\ddot{\varphi}}{R} = mg - F_S + F_S \quad / \text{ kin. Relation: } \ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}}{R}$$

$$\Leftrightarrow m\ddot{x} + \frac{I_c\ddot{x}}{R^2} = mg$$

$$\Leftrightarrow \left(m + \frac{I_c}{R^2}\right)\ddot{x} = mg \quad / \quad I_c = \frac{mR^2}{2} \text{ einsetzen}$$

$$\Leftrightarrow \left(m + \frac{m}{2}\right)\ddot{x} = mg$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}m\ddot{x} = mg \quad / \div m \; / \cdot \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x} = \frac{2}{3}g$$

Anfangsbedingungen: $\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$

2. Bestimmen Sie die Bewegung und die Fadenkraft für die gegebenen Anfangsbedingungen.

DGL: $\ddot{x} = \frac{2}{3}g$

$$\Leftrightarrow \int \ddot{x}\,dt = \int \frac{2}{3}g\,dt$$

$$\Leftrightarrow \dot{x} = \frac{2}{3}gt + v_0$$

$$\Leftrightarrow \int \dot{x}\,dt = \int \frac{2}{3}gt + v_0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}gt^2 + v_0 t + x_0$$

Anfangsbedingungen: $x(0) = x_0 \overset{!}{=} 0$

$\dot{x}(0) = v_0 \overset{!}{=} 0$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x(t) = \frac{1}{3}gt^2}}$$

Fadenkraft: aus ①: $m\ddot{x} = mg - F_S$

$$\Leftrightarrow \quad F_S = mg - m\ddot{x} \qquad / \ \ddot{x} = \left(\frac{1}{3}gt^2\right)'' = \left(\frac{2}{3}gt\right)' = \frac{2}{3}g$$

$$F_S = mg - \frac{2}{3}mg = \underline{\underline{\frac{1}{3}mg}}$$

3. Wie viel Zeit vergeht, bis die Spule um $10R$ gefallen ist?

Sei t_1 die Zeit, wenn die Spule um $10R$ gefallen ist.

$$\Rightarrow x(t_1) = \frac{1}{3}gt_1^2 \stackrel{!}{=} 10R$$

$$\Leftrightarrow t_1^2 = 10R \cdot \frac{3}{g}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{t_1 = \sqrt{\frac{30R}{g}}}}$$

4. Vergleichen Sie diese Zeit mit derjenigen für den freien Fall.

Freier Fall: $x(t) = \frac{1}{2}gt^2$

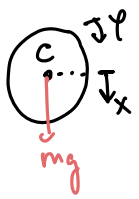
Sei t_2 die Zeit, wenn die Spule um $10R$ gefallen ist im freien Fall:

$$x(t_2) = \frac{1}{2}gt_2^2 \stackrel{!}{=} 10R$$

$$\Leftrightarrow t_2^2 = \frac{20R}{g} \quad \Leftrightarrow t_2 = \sqrt{\frac{20R}{g}}$$

Verhältnis $\frac{t_2}{t_1} = \frac{\sqrt{\frac{20R}{g}}}{\sqrt{\frac{30R}{g}}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \underline{\underline{t_2 = \frac{\sqrt{6}}{3}t_1}}$

(Herleitung freier Fall (freiwillig)):



$m\ddot{x} = mg$

$L_C = I_0\ddot{\varphi} = 0$

$\ddot{x} = g \Leftrightarrow \int \ddot{x}\,dt = \int g\,dt$

$\Leftrightarrow \dot{x} = gt + v_0$

$\Leftrightarrow \int \dot{x}\,dt = \int gt + v_0\,dt$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + x_0$

Anfangsbedingungen: $v_0 = 0$, $x_0 = 0$

$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{2}gt^2$

Beispiel Prüfungsaufgabe zu Dynamik: Basisprüfung HS 20

Aufgabe 3 (28 Punkte)

Eine Rolle mit Masse m_B ist im Punkt B reibungsfrei gelagert. Wenn sich die Rolle dreht, dann wird ein Quader mit der Masse m_Q eine schräge Ebene, welche reibungsbehaftet ist, hinaufgezogen. Das Seil, welches den Quader hochzieht, hat zudem eine Feder mit Federkonstante c, welche am Quader angemacht ist. Gegeben sind folgende Grössen: M, F, a, b, R_A, R_B, μ_0, m_B, m_Q, g. Geben Sie Ihre Lösungen mit den bekannten Grössen an.
Annahmen: System eben; Seil masselos, undehnbar und immer gespannt; Rollen reibungsfrei gelagert und Rolle A masselos; die Dichte von Quader (m_Q) und m_B ist homogen verteilt; Körper bewegen sich nur entlang der eingezeichneten Richtungen x_1, ϕ_1 und ϕ_2; Anfangsbedingungen $x_1 = \phi_1 = \phi_2 = 0$. Massenträgheitsmoment einer homogenen Kreisscheibe (Rolle): $I_0 = \frac{mR^2}{2}$.

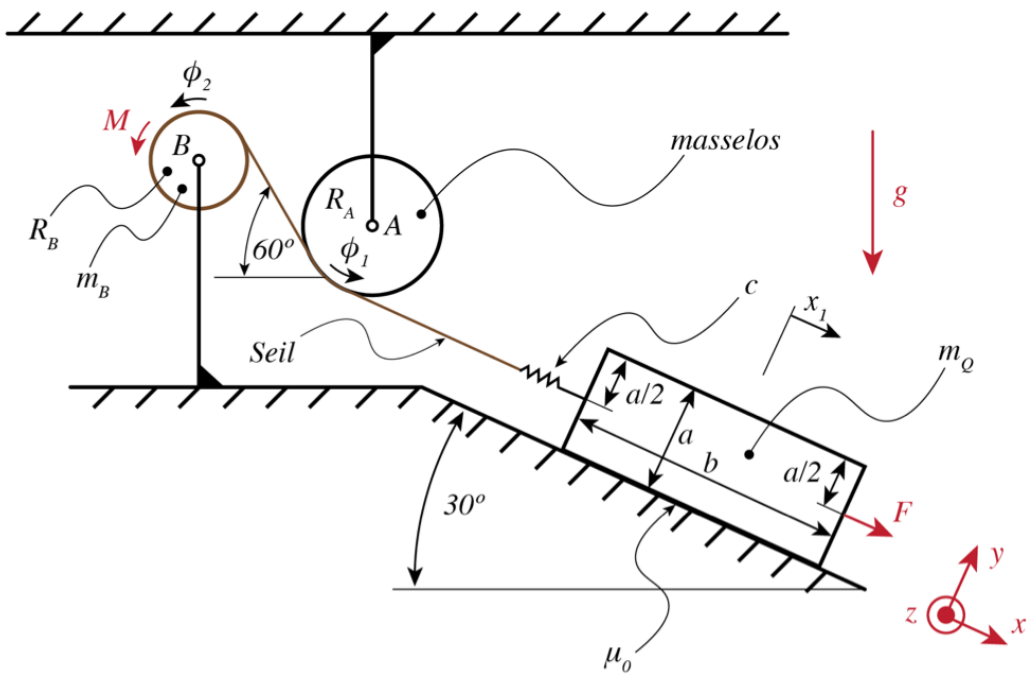


Abbildung 3: Skizze zu Aufgabe 3.

(a) Wieviele Freiheitsgrade hat das System unter Berücksichtigung aller Bindungen? [*1 Punkt*]

Wieviele unabhängigen Bewegungen möglich? → 2

(Quader ↘ und Rolle B inklusive Seil ↶)

(b) Was ist die kinematische Relation zwischen ϕ_1 und ϕ_2. [*1 Punkt*]

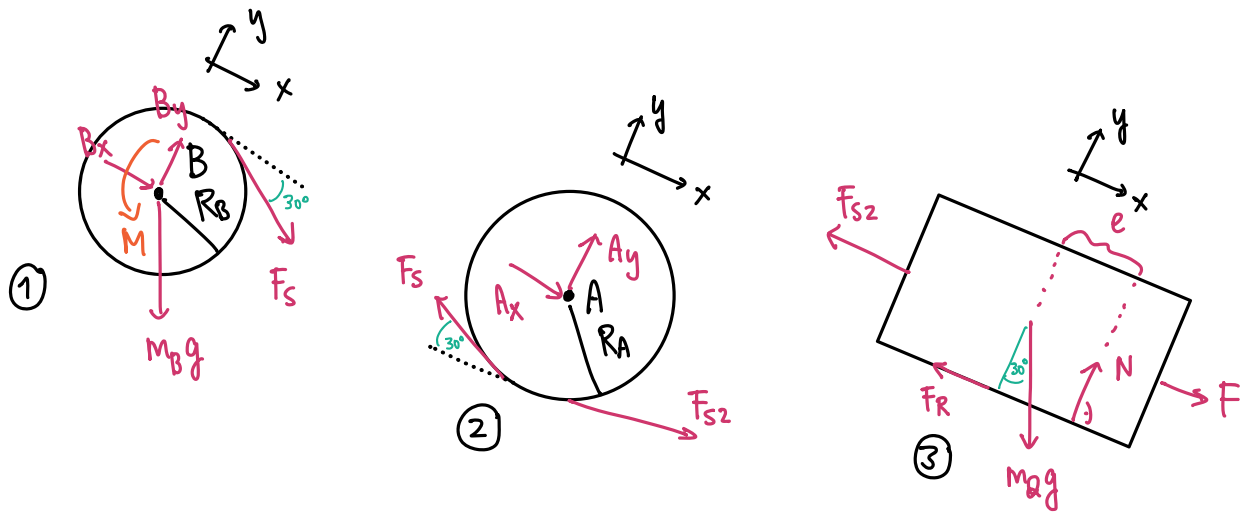
$$v_S = R_B \cdot \dot{\phi}_2 = -R_A \cdot \dot{\phi}_1 \quad \Rightarrow \quad \dot{\phi}_2 = -\frac{R_A}{R_B}\dot{\phi}_1 \quad \Rightarrow \quad \phi_2 = -\frac{R_A}{R_B}\phi_1$$

Weil $\int \dot{\phi}_2 \, dt = \int -\frac{R_A}{R_B}\dot{\phi}_1 \, dt$

$$\Leftrightarrow \quad \phi_2 = -\frac{R_A}{R_B}\phi_1 + C$$

Anfangsbedingungen: $\phi_2(0) = -\frac{R_A}{R_B}\underbrace{\phi_1(0)}_{=0} + C \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0$

(c) Schneiden Sie die beiden Rollen und den Quader frei und zeichnen Sie alle Reaktionskräfte ein. Nehmen Sie an, dass das System sich in einem statischen Gleichgewicht befindet. [*3 Punkte*]



(d) Berechnen Sie die Lagerkräfte in A und B und die Reaktionskräfte im System. Nehmen Sie an, dass das System sich in einem statischen Gleichgewicht befindet. [*12 Punkte*]

? $A_x, A_y, B_x, B_y, F_S, F_{S2}, F_R, N, e$

SK ①: KB(x): $0 = B_x + F_S \cdot \cos(30°) + m_B g \cdot \sin(30°) = B_x + \frac{\sqrt{3}}{2}F_S + \frac{1}{2}m_B g$ ... ①

KB(y): $0 = B_y - F_S \cdot \sin(30°) - m_B g \cdot \cos(30°) = B_y - \frac{1}{2}F_S - \frac{\sqrt{3}}{2}m_B g$ ... ②

MB(B, z): $0 = M - R_B F_S \quad \Rightarrow F_S = \frac{M}{R_B}$ ... ③

SK ②: KB(x): $0 = A_x - F_S \cos(30°) + F_{S2}$ ... ④

KB(y): $0 = A_y + F_S \cdot \sin(30°)$ ... ⑤

MB(A, z): $0 = R_A \cdot F_{S2} - R_A \cdot F_S \quad \Rightarrow F_{S2} = F_S = \frac{M}{R_B}$ ... ⑥

SK ③: KB(x): $0 = m_Q g \cdot \sin(30°) - F_{S2} - F_R + F$ ... ⑦

KB(y): $0 = N - m_Q g \cdot \cos(30°)$ ... ⑧

MB(D, z): $0 = eN - \frac{a}{2} \cdot F_R$ ... ⑨

① & ③ $\Rightarrow$ $B_x = -\frac{\sqrt{3}}{2} F_S - \frac{1}{2} m_B g = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{M}{R_B} - \frac{1}{2} m_B g$

② & ③ $\Rightarrow$ $B_y = \frac{1}{2} F_S + \frac{\sqrt{3}}{2} m_B g = \frac{1}{2} \cdot \frac{M}{R_B} + \frac{\sqrt{3}}{2} m_B g$

④ & ⑥ $\Rightarrow$ $A_x = \frac{\sqrt{3}}{2} F_S - F_{S2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) \cdot \frac{M}{R_B}$

⑤ & ⑥ $\Rightarrow$ $A_y = -\frac{1}{2} F_S = -\frac{M}{2R_B}$

⑦ & ⑥ $\Rightarrow$ $F_R = \frac{1}{2} m_Q g - F_{S2} + F = \frac{1}{2} m_Q g - \frac{M}{R_B} + F$

⑧ $\Rightarrow$ $N = \frac{\sqrt{3}}{2} m_Q g$ ... ⑩

⑨ $\Rightarrow$ $e = \frac{a}{2} \cdot \frac{F_R}{N} = \frac{a}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2} m_Q g - \frac{M}{R_B} + F}{\frac{\sqrt{3}}{2} m_Q g} = \frac{a}{\sqrt{3} m_Q g} \cdot \left(\frac{1}{2} m_Q g - \frac{M}{R_B} + F\right)$

(e) Was sind die Kipp- und Haftbedingung? Nehmen Sie an, dass das System sich in einem statischen Gleichgewicht befindet. *Achtung, folgende Annahmen gelten nur für diesen Aufgabenteil:* Folgende Werte können zur Lösung der Aufgabe verwendet werden: $M = r_B F$, $\mu_0 = 2$, $b > a$. Gibt es Kippen oder Gleiten? [*3 Punkte*]

Kippen: $|e| > \frac{b}{2} \iff \frac{2|e|}{b} > 1$

e umformen: $e = \frac{a}{\sqrt{3} m_Q g} \cdot \left(\frac{1}{2} m_Q g - \frac{M}{R_B} + F\right) \cdot \frac{R_B}{R_B}$

$$\Rightarrow\quad e = \frac{a}{\sqrt{3}\, m_Q g \cdot R_B} \cdot \left(\frac{1}{2} m_Q g \cdot R_B - M + R_B F \right)$$

$$\Leftrightarrow\quad e = \frac{a}{\sqrt{3}\, m_Q g R_B} \cdot \left(\frac{1}{2} m_Q g R_B - \cancel{M} + \cancel{M} \right) = \frac{a \cdot \cancel{m_Q g R_B}}{2\sqrt{3}\, \cancel{m_Q g R_B}} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

Bedingung $\Rightarrow \quad \frac{2|e|}{b} = \frac{\cancel{2} \frac{a}{\cancel{2}\sqrt{3}}}{b} = \frac{a}{\sqrt{3}\, b} \overset{?}{>} 1$

Verwende $b > a \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{3}\, b} < 1$! $\rightarrow$ kippt nicht.

Haften: $|F_R| \leq \mu_0 |N|$

F_R umformen: $F_R = \frac{1}{2} m_Q g - \frac{M}{R_B} + F \quad \Big/ \cdot \frac{R_B}{R_B}$

$$\Leftrightarrow\quad F_R = \frac{1}{R_B} \cdot \left(\frac{1}{2} m_Q g R_B - \cancel{M + \underbrace{F \cdot R_B}_{=M}} \right) \rightarrow 0$$

$$= \frac{1}{2} m_Q g$$

$N = \frac{\sqrt{3}}{2} m_Q g$

Bedingung: $\frac{1}{2} m_Q g \overset{?}{\leq} \cancel{2} \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} m_Q g = \sqrt{3}\, m_Q g$

$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \leq \sqrt{3}$ ✓ gilt.

$\Rightarrow$ haftet

kein Kippen & kein Gleiten //

(f) Bestimmen Sie die Differentialgleichungen für die Bewegung des Quaders und der Rolle. Nehmen Sie an, dass der Quader nun nicht reibungsbehaftet ist und geben Sie Ihre Lösung in Abhängigkeit von x_1 und ϕ_2 an. *Hinweis: Die Lösung der Differentialgleichungen wird nicht benötigt.* [*6 Punkte*]

Quader: $m_Q \ddot{x}_1 = -F_C + \frac{1}{2} m_Q g + F \qquad F_C = c \cdot (x_1 + \phi_2 R_B)$

$\Rightarrow m_Q \ddot{x}_1 = -c(x_1 + \phi_2 R_B) + \frac{1}{2} m_Q g + F \qquad$ / alle x_1 nach links

$\Leftrightarrow m_Q \ddot{x}_1 + c x_1 = -c \phi_2 R_B + \frac{1}{2} m_Q g + F \qquad \cdots (1)$

Rolle: $\dot{L}_B = I_B \ddot{\phi}_2 = M - R_B \cdot F_C \qquad / F_C = c \cdot (x_1 + \phi_2 R_B) \;,\; I_B = \frac{m R_B^2}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{m R_B^2}{2} \ddot{\phi}_2 = M - R_B c (x_1 + \phi_2 R_B) \qquad$ / alle ϕ_2 nach links

$\Leftrightarrow \frac{m R_B^2}{2} \ddot{\phi}_2 + c R_B^2 \phi_2 = M - c R_B x_1 \qquad \cdots (2)$

(g) Wie bekommt man aus diesen Differentialgleichungen die statischen Gleichungen aus dem Problem 3(d) (ohne Reibung)? Bestimmen Sie M aus den statischen Gleichungen mit den anderen bekannten Grössen. [*2 Punkte*]

statisch: $\dot{x} = \ddot{x} = 0 \;,\; \dot{\phi}_2 = \ddot{\phi}_2 = 0$ (keine Geschwindigkeit & keine Beschleunigung!)

(1) mit $\ddot{x} = 0 \Rightarrow \; c x_1 = -c \phi_2 R_B + \frac{1}{2} m_Q g + F$

(2) mit $\ddot{\phi}_2 = 0 \Rightarrow \; c R_B^2 \phi_2 = M - c R_B x_1$

einsetzen

$c R_B^2 \phi_2 = M - R_B \cdot (-c \phi_2 R_B + \frac{1}{2} m_Q g + F)$

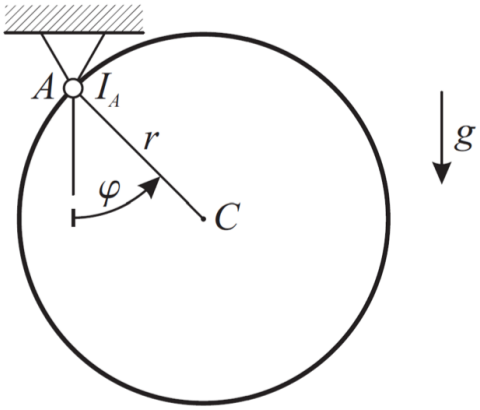
$$\Leftrightarrow \cancel{cR_B^2\phi_2} = M + \cancel{cR_B^2\phi_2} - \frac{1}{2}m_Q g R_B - F R_B$$

$$\Leftrightarrow \quad M = \frac{1}{2}m_Q g R_B + F R_B = \underline{\underline{R_B \cdot (F + \frac{1}{2}m_Q g)}}$$

Teil 3: Übungsaufgaben - Serie 12

↳ Aufgaben 1, 5 & 7 in Ü gelöst :)

2. [2]Ein homogener Reifen ist im Punkt A gelenkig gelagert und schwingt in einer Vertikalebene. Der Reifen hat die Masse m und den Radius r. Das Massenträgheitsmoment des Reifens bezüglich des Punktes A beträgt .



1. Finden Sie die Bewegungsdifferentialgleichung. Kommt sie Ihnen bekannt vor ?
2. Linearisieren Sie die Bewegungsdifferentialgleichung und bestimmen Sie die Kreisfrequenz einer kleinen Schwingung. $\varphi \ll 1$

Tipps:

1. - Freischnitt
   - Drallsatz aufstellen
   - Vergleiche mit Bewegungsgleichung vom klassischen mathematischen Pendel: $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0$

2. Welcher Term in der Bewegungsgleichung aus 1. ist nicht linear? → Den wollen wir linearisieren!

oder einfacher für diese Aufgabe: Wie kann die Bewegungsgleichung vereinfacht werden für kleine φ?

Linearisieren heisst (einfach erklärt, in Analysis genauer!): Maclaurin-Reihe der Funktion entwickeln und alle Terme, die Ordnung ≥2 haben wegwerfen:

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)\,x + \frac{1}{2}f''(0)\,x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)\,x^3 + \dots$$

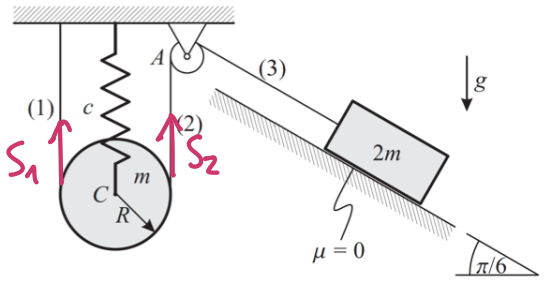
Kommt dir die Bewegungsgleichung bekannt vor?

(Tipp: Ü10 oder Ü11)

Kannst du daraus die Kreisfrequenz ω ablesen?

3. [3]Eine Rolle (Masse m und Radius R) und ein Quader (Masse $2m$) sind gemäss der Skizze über ein masseloses, undehnbares Seil miteinander verbunden. Eine Feder (deren ungespannte Länge null ist) ist im Punkt C an der Spule befestigt. Der Quader liegt auf einer schiefen Ebene und gleitet reibungsfrei.

gute Aufgabe!



Annahmen:

- *Trägheit der Rolle in A vernachlässigbar*
- *Rollenlager reibungsfrei*
- *kein Gleiten zwischen Seil und Rolle*
- *keine Reibung zwischen Quader und Eben*
- *Feder masselos*

⚠ Achtung bei Dynamikaufgaben: $S_1 \neq S_2$ im allgemeinen!

Hinweis: Massenträgheitsmoment der Rolle: $I_C = mR^2/2$

1. Bestimmen Sie den Freiheitsgrad des Systems.
2. Schneiden Sie die zwei Körper frei und formulieren Sie an ihnen den Massenmittelpunktsatz und wo nötig den Drallsatz.
3. Sofern in 2) mehr Koordinaten verwendet wurden, als der Freiheitsgrad des Systems ist: Welche Beziehungen gelten zwischen diesen Koordinaten?
4. Stellen Sie die Bewegungsdifferentialgleichung für den Quader auf (ohne sie zu lösen). Bestimmen Sie die Seilkräfte in den Abschnitten (1), (2) und (3) als Funktion der Koordinate und der Beschleunigung des Quaders, die Kreisfrequenz der Bewegung des Quaders und die Gleichgewichtslage des Systems.

Tipps:

1. # Unabhängige Bewegungen bzw. # benötigte Koordinaten, um das System vollständig zu beschreiben?

2. Massenmittelpunktsatz siehe Ü11
   Drallsatz siehe slides von dieser Ü

3. Kinematische Relationen aufstellen → Ü10

4. Federkraft als Gleichung in Abhängigkeit der Koordinate aufschreiben.
   Unbekannte Grössen aus den Bewegungsgleichungen aus 2. eliminieren, indem ihr die Gleichungen schlau zusammenaddiert & Ergebnisse aus 3. verwendet.

Am Schluss solltet ihr eine einzige Gleichung für die Bewegung des Systems haben.

Kommt dir diese Gleichung bekannt vor?

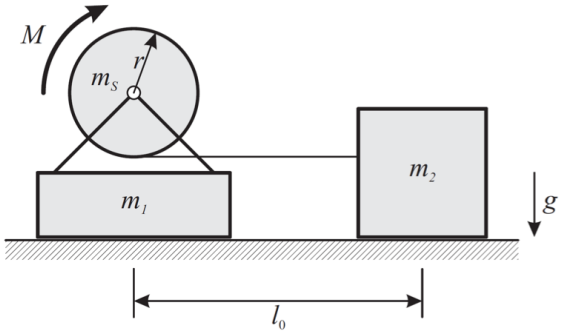
Kannst du daraus die Kreisfrequenz ω ablesen?

Gleichgewicht heisst: keine Geschwindigkeit ($\dot{x} = 0$)

und keine Beschleunigung ($\ddot{x} = 0$)

$\Rightarrow$ setze das in die Gleichung ein um die Bedingung für Gleichgewicht zu bestimmen.

4. [4]Zwei Quader bewegen sich reibungsfrei auf einer horizontalen Ebene. Der Anfangsabstand ist l_0. Auf dem linken Quader (Masse m_1) ist reibungsfrei eine Seilspule (homogener Zylinder mit Masse m_S und Radius r) angebracht. Das Ende des um die Spule gewickelten Seiles ist am rechten Quader (Masse m_2) befestigt. Ein Motor übt ab dem Zeitpunkt $t = 0$ ein konstantes Moment M auf die Seilspule aus. Die Quader setzen sich dadurch in Bewegung, ohne zu kippen.



1. Was ist der Freiheitsgrad des Systems? Stellen Sie die Bewegungsdifferentialgleichungen auf.
2. Wie bewegt sich das System? Wie gross ist die Seilkraft?

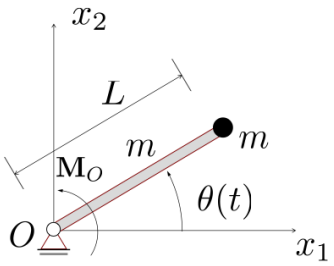
Tipps:

Dieses System ist ein gekoppeltes System (d.h. Bewegungsgleichung in einer Koordinate ist abhängig von einer anderen Koordinate. Solche Aufgaben wurden nicht explizite in der Vorlesung besprochen.

1. könnt ihr nichtdestotrotz lösen.

für 2. falls ihr es nicht schafft selbständig zu lösen, versucht mindestens die Mulö zu verstehen :)

5. Ein Teilchen der Masse m wird an der Spitze eines Stabes der Länge L mit vernachlässigbarer Masse befestigt. Es dreht um den festen Punkt O mit dem Winkel $\theta(t) = a\cos^2(\Omega t)$, wobei Ω = konst. Das System bewegt sich in der $x_1 - x_2$ Ebene. Auf das System wirkt *keine Schwerkraft*.



Was ist der Betrag des Moments M_O, das auf den Punkt O ausgeübt werden muss, um das gegebenen $\theta(t)$ zu erzeugen ?

(a) $M_O = 2maL^2\Omega^2\sin^2(2\Omega t)$

(b) $M_O = maL^2\Omega^2$

(c) $M_O = mL^2\Omega^2\tan(\Omega t)$

(d) $M_O = maL^2\Omega^2(\sin^2(\Omega t) + 2\cos^2(\Omega t))$

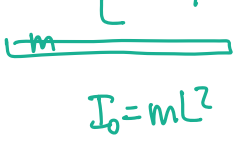
(e) $M_O = 2maL^2\Omega^2(\sin^2(\Omega t) - \cos^2(\Omega t))$

Tipps:

Typische Drallsatz - Aufgabe!

Drallsatz aufstellen und $\ddot{\theta}$ und I_0 einsetzen um M_0 zu bestimmen

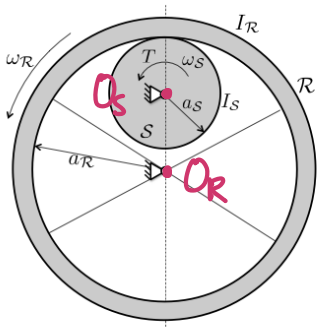
Massenträgheitsmoment eines Stabes



$I_0 = mL^2$

auf Zusammenfassung!

6. Betrachten Sie das skizzierte Getriebesystem in der Abbildung. Das Sonnenrad S und das Hohlrad R haben die Radien a_S bzw. a_R, ihre Massenträgheitsmomente sind I_S bzw. I_R. Die Mittelpunkte der beiden Zahnräder sind gelenkig mit dem Boden verbunden. Ein Moment T wird auf das Sonnenrad ausgeübt, wenn sich das System in Ruhe befindet. Es seien ω_R und ω_S die Winkelgeschwindigkeiten des Hohlrads bzw. des Sonnenrads. Positive Richtungen sind in der Abbildung dargestellt.



Wie gross ist die Winkelbeschleunigung $\dot{\omega}_R$ des Hohlrads?

(a) $\dot{\omega}_R = \dfrac{T}{\frac{a_S}{a_R}(I_S + I_R)}$

(b) $\dot{\omega}_R = \dfrac{T}{\frac{a_R}{a_S}I_S + \frac{a_S}{a_R}I_R}$

(c) $\dot{\omega}_R = \dfrac{T}{\frac{a_R}{a_s}(I_S + I_R)}$

(d) $\dot{\omega}_R = \dfrac{T}{\frac{a_R}{a_s}}$

(e) $\dot{\omega}_R = \dfrac{T}{\frac{a_s}{a_R}I_S - \frac{a_S}{a_R}I_R}$

Tipps:

1. 2× Drallsatz aufstellen → ein Mal bezüglich O_R, ein Mal bezüglich O_S. Kannst du dir erklären warum genau bezüglich diese Punkte?

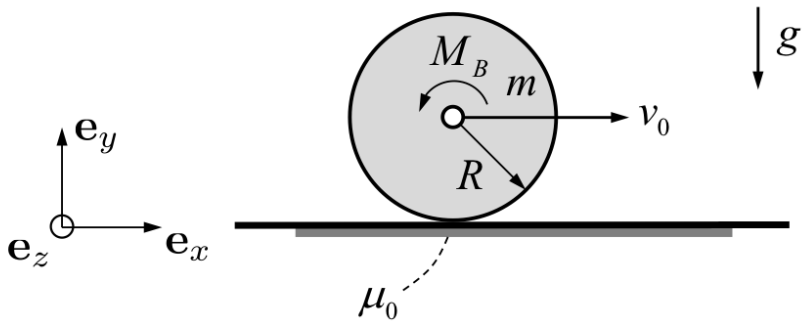
2. Was muss gelten für v_A? (SvM verwenden!)

3. aus 1. & 2. $\dot{\omega}_R$ bestimmen.

Wichtige Aufgabe

(enthält viele Themen von Dynamik !)

7. Der unten abgebildete Zylinder der Masse m rollt ohne zu gleiten auf einer ebenen Oberfläche. Zum Zeitpunkt $t = 0$ rollt der Zylinder mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}_0$ in positive $\mathbf{e}_x$-Richtung (siehe Skizze). Das Bremsmoment M_B wirkt in der Mitte des Rades und der Reibungswert ist mit μ_0 gegeben.



1. Wie gross ist das maximal einsetzbare Bremsmoment M_B, damit das Rad nicht auf der Oberfläche rutscht?
   (a) $M_B \leq \mu_0 mgR$
   (b) $M_B \leq \frac{1}{2}\mu_0 mg$
   (c) $M_B \leq \frac{2}{3}v_0 mgR$
   (d) $M_B \leq \frac{3}{2}\mu_0 mgR$
   (e) $M_B \leq \frac{4}{3}\mu_0 mgR$
2. Wie lange dauert es, bis der Zylinder anhält, wenn das gegebene Bremsmoment M_B eingesetzt wird?

   d.h. in Ruhe

   (a) $t = 0$
   (b) $t = \frac{3}{2}\frac{v_0 mR}{M_B}$
   (c) $t = \frac{2}{3}\frac{\mu_0 mR}{M_B}$
   (d) $t = \frac{4}{3}\frac{v_0 mR}{M_B}$
   (e) $t = \frac{v_0 mR}{M_B}$

Tipps:

1.