

Themen von Heute:

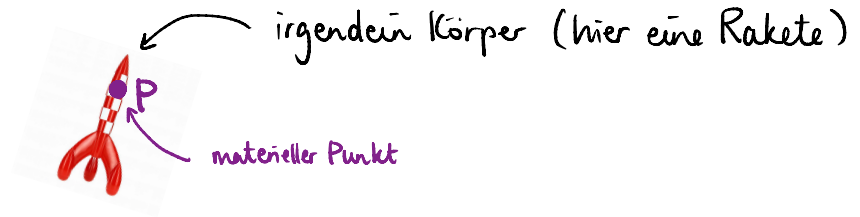
- Kleine Vorstellungsrunde
- Organisatorisches: Informationen zur Übungsstunde
- **Teil 1:** Recap der Theorie:
 1. materieller Punkt
 2. Geschwindigkeit & Schnelligkeit
 3. Starre Körper
- **Teil 2:** Übungsaufgaben lösen

Kleine Vorstellungsrunde

Teil 1: Recap der Theorie

1. materieller Punkt:

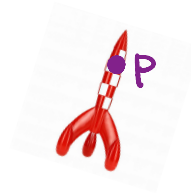
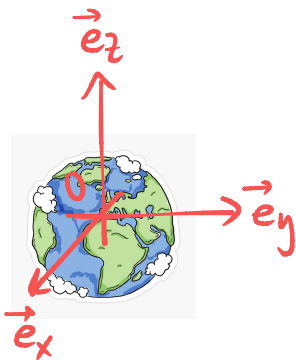
Ein materieller Punkt ist nichts anderes als ein Punkt eines Körpers.



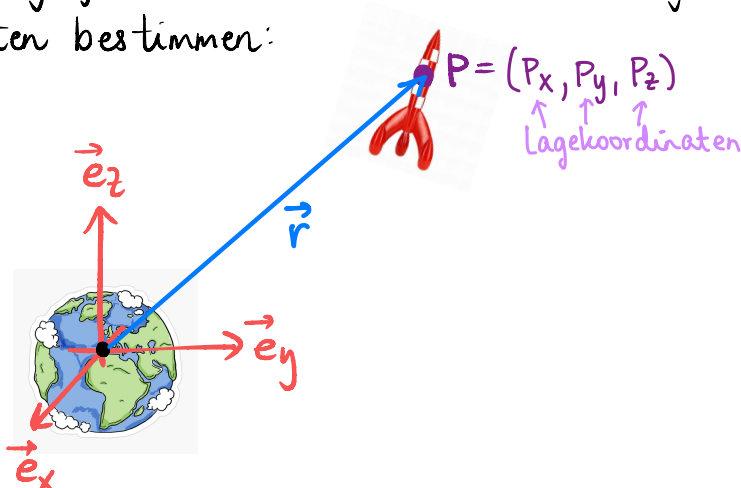
Doch mit nur einem Punkt im Raum können wir nichts anfangen. Deswegen führen wir **Bezugskörper** ein. z.B. wäre die Erde ein guter Bezugskörper für die Rakete:



Bezugskörper haben **Bezugssysteme**: das ist ein fancy-Wort für Koordinatensystem:



Wo wir jetzt ein Bezugssystem haben, können wir die Lage des Punktes durch die Lagekoordinaten bestimmen:



Ortsvektor: $\vec{r} = \vec{OP} = P_x \cdot \vec{e}_x + P_y \cdot \vec{e}_y + P_z \cdot \vec{e}_z$ oder $\vec{r} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix}$

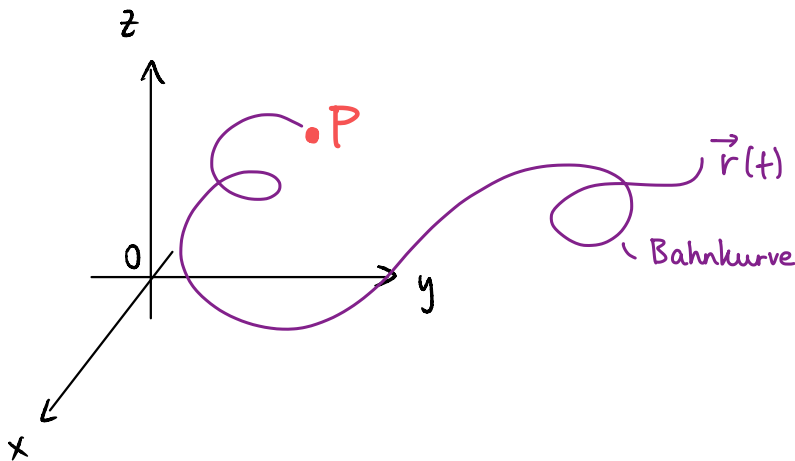
↑ ↑ ↑
Einheitsvektoren

Verbindet den Ursprung (O) mit dem Punkt (P)

Ein System: Ist eine Menge von materiellen Punkten.

2. Geschwindigkeit & Schnelligkeit:

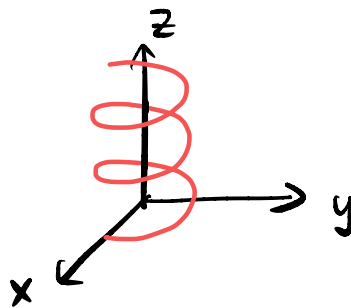
Ein Punkt im Raum, der sich bewegt, kann man durch eine Funktion beschreiben:



Eine solche Funktion könnte z.B. so aussehen $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}$

Quiz: Welche Bahnkurve beschreibt diese Funktion?

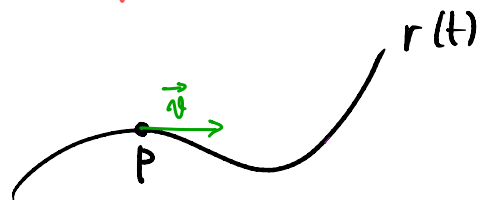
→ Spirale



Geschwindigkeit: Die Geschwindigkeit ist definiert als die zeitliche Ableitung des (zeitlich abhängigen) Ortsvektors. ⚠ Geschwindigkeit ist ein Vektor!

↑
"Punkt": zeitliche Ableitung

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \frac{d}{dt} \vec{r}(t)$$



Good to know: der Geschwindigkeitsvektor eines Punktes ist tangential zur Bahnkurve des Punktes.

Schnelligkeit:

3D:

$$v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

wobei $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$

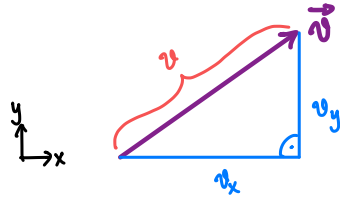
2D:

$$v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

wobei $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$

Bem: Das ist nichts anderes als Pythagoras!

Geometrisch gesehen: die Schnelligkeit ist die Länge des Geschwindigkeitsvektors.



Das Ableiten ist in kartesischen Koordinaten recht straightforward, aber sobald wir andere Koordinaten nehmen, wird es ein bisschen komplizierter. Deswegen hier eine kleine Übersicht:

Tabelle Geschwindigkeit & Schnelligkeit in verschiedenen Koordinaten:

Koordinaten	Bewegungsgleichung	Geschwindigkeitsgleichung*	Schnelligkeit
Kartesische	$\underline{r} = x\underline{e}_x + y\underline{e}_y + z\underline{e}_z$	$\underline{v} = \dot{x}\underline{e}_x + \dot{y}\underline{e}_y + \dot{z}\underline{e}_z$	$s = \underline{v} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$
Zylindrische	$\underline{r} = \rho\underline{e}_\rho + z\underline{e}_z$	$\underline{v} = \dot{\rho}\underline{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\underline{e}_\varphi + \dot{z}\underline{e}_z$ = $\dot{\rho}\underline{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\underline{e}_\varphi + \dot{z}\underline{e}_z$	$s = \underline{v} = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2}$
Polar:	$\underline{r} = \rho\underline{e}_\rho$	$\underline{v} = \dot{\rho}\underline{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\underline{e}_\varphi = \dot{\rho}\underline{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\underline{e}_\varphi$	$s = \underline{v} = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2}$

- Beachte: Der Einheitsvektor $\underline{e}_\rho = \underline{e}_\rho(\varphi(t))$ ist abhängig von $\varphi(t)$, resp. $\psi(t)$ und $\theta(t)$. Dies muss beim Ableiten berücksichtigt werden.
- Die zeitlichen Abhängigkeiten habe ich in der Tabelle weggelassen $x = x(t), y = y(t)...$

* Bem: Beim ableiten muss man hier die Produktregel anwenden. In kartesischen Koordinaten muss man nicht so aufpassen, weil die Einheitsvektoren konstant sind:

$$\dot{\underline{r}} = (\dot{r}_x \underline{e}_x + r_x \dot{\underline{e}}_x + \dot{r}_y \underline{e}_y + r_y \dot{\underline{e}}_y + \dot{r}_z \underline{e}_z + r_z \dot{\underline{e}}_z) = \dot{r}_x \underline{e}_x + r_x \dot{\underline{e}}_x + \dot{r}_y \underline{e}_y + r_y \dot{\underline{e}}_y + \dot{r}_z \underline{e}_z + r_z \dot{\underline{e}}_z = \dot{r}_x \underline{e}_x + \dot{r}_y \underline{e}_y + \dot{r}_z \underline{e}_z$$

sowieso 0, deswegen schreibt man diese i.d.R. nicht explizite auf.

In Polar- / Zylinderkoordinaten muss man jedoch aufpassen:

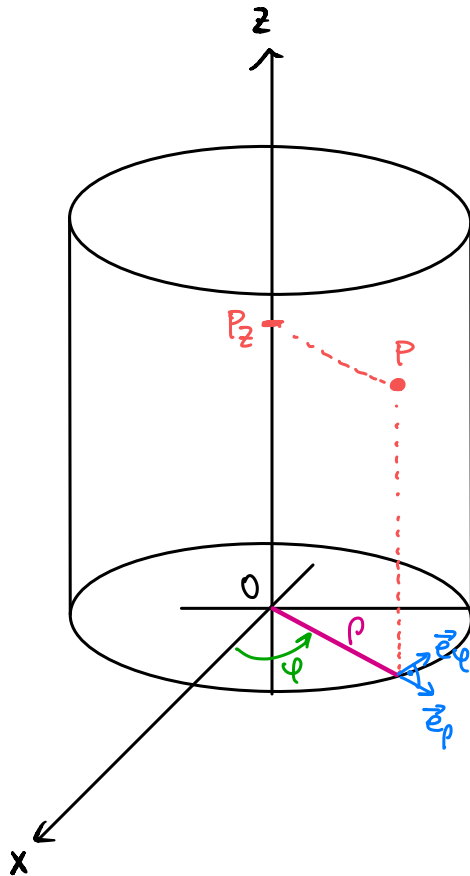
$$\dot{\underline{r}} = (\dot{\rho} \underline{e}_\rho + \rho \dot{\underline{e}}_\rho + \dot{z} \underline{e}_z)$$

ist im allgemeinen $\neq 0$, da $\underline{e}_\rho$ zeitlich veränderlich sein kann!

Wichtig, auf Zusammenfassung!

Exkurs: Koordinatensysteme

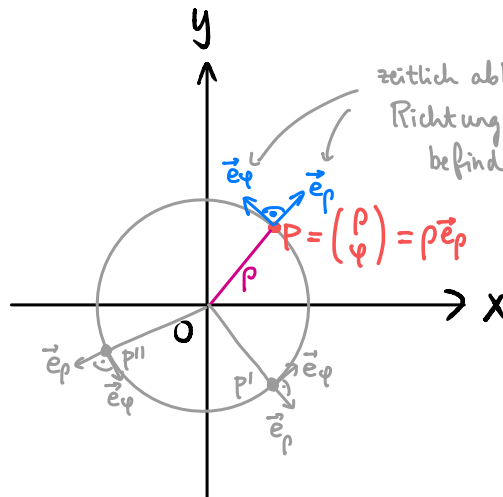
Zylinder:



$P = \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z$

⚠️ kein $\varphi \cdot \vec{e}_\varphi$ Term!
Es macht nicht mal Sinn, einen Winkel mit einem Vektor zu multiplizieren!
Aber geht nicht Information über φ verloren?
→ Nein! In hier steckt die Information über φ ! $\vec{e}_\rho$ ist abhängig von φ :
 $\vec{e}_\rho = \cos(\varphi) \vec{e}_x + \sin(\varphi) \vec{e}_y$
⇒ sobald wir $\vec{e}_\rho$ wissen, ist auch φ eindeutig bestimmbar.

Polar ("Zylinder ohne z"):

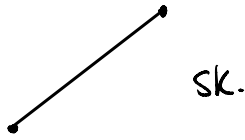


zeitlich abhängig! bzw. zeigt in eine andere Richtung, je nach dem wo sich der Punkt befindet!

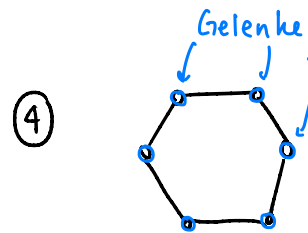
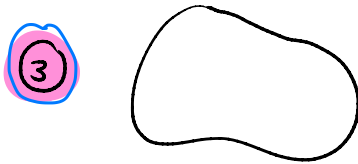
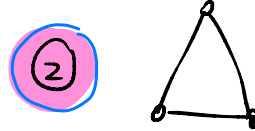
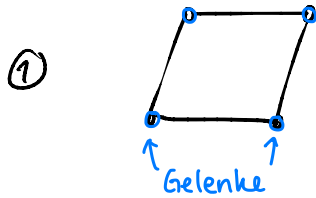
→ genauer & Formeln für Koordinatenwechsel: siehe "Zusatzmaterialien 1"

③ Starre Körper

Starre Körper (SK) sind Körper, die sich nicht deformieren. z.B. ist ein Stab ein Starrkörper.



Quiz: Welche der folgenden Körper sind Starrkörper?

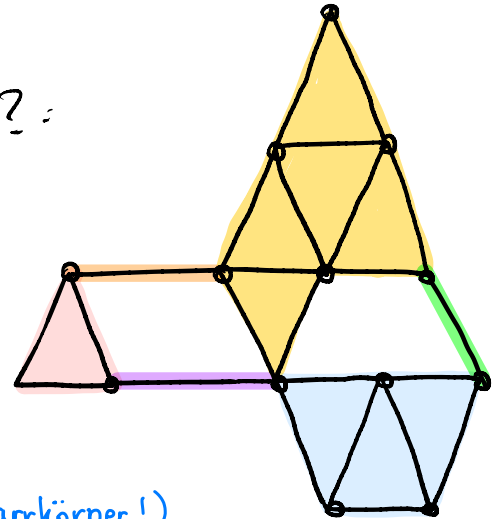


Bonus: Wie viele SK hat dieses System? :
(in 3D)

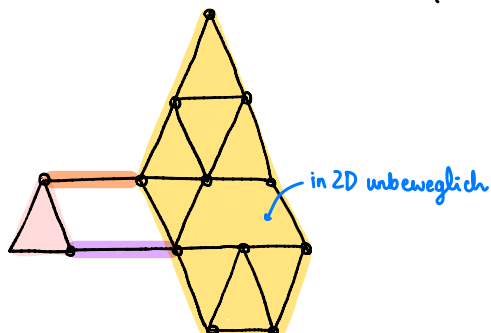
Lösung: 6

Warum? siehe Farben.

(Dreieck-Fachwerke bilden einen Starrkörper!)



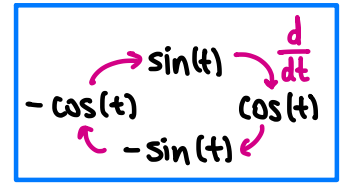
Bem: Wenn wir uns in 2D befinden würden (d.h. der Körper darf sich nicht ins Blatt / aus dem Blatt bewegen), dann wären es nur 4 Starrkörper:



Teil 2: Übungsaufgaben:

1. Ein materieller Punkt P hat die Bewegungsgleichungen

$$\mathbf{r}_P(t) = \left(\frac{6L}{5} + \frac{L}{4} \cos \pi t \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{6L}{5} + \frac{L}{4} \sin \pi t \right) \mathbf{e}_y.$$



- Bestimmen Sie die Geschwindigkeit $\mathbf{v}_P$ des Punktes P als Funktion der Zeit.
- Bestimmen Sie die Schnelligkeit v_P des Punktes P als Funktion der Zeit.
- Welche Bahn beschreibt der Punkt P ?

1. Geschwindigkeit: $\vec{v}_P(t) = \dot{\vec{r}}_P(t) = \frac{d}{dt} \left(\left(\frac{6L}{5} + \frac{L}{4} \cos(\pi t) \right) \vec{e}_x + \left(\frac{6L}{5} + \frac{L}{4} \sin(\pi t) \right) \vec{e}_y \right) =$

↑
Vektor!

$$= \frac{d}{dt} \left(\frac{6L}{5} + \frac{L}{4} \cos(\pi t) \right) \vec{e}_x + \frac{d}{dt} \left(\frac{6L}{5} + \frac{L}{4} \sin(\pi t) \right) \vec{e}_y =$$
$$= \left(\frac{d}{dt} \frac{6L}{5} + \frac{d}{dt} \frac{L}{4} \cos(\pi t) \right) \vec{e}_x + \left(\frac{d}{dt} \frac{6L}{5} + \frac{d}{dt} \frac{L}{4} \sin(\pi t) \right) \vec{e}_y =$$
$$= -\frac{L}{4} \pi \sin(\pi t) \vec{e}_x + \frac{L}{4} \pi \cos(\pi t) \vec{e}_y =$$

↑
Einheitsvektoren

$$= \underline{\underline{\frac{L}{4} \pi (-\sin(\pi t) \vec{e}_x + \cos(\pi t) \vec{e}_y)}}$$

2. Schnelligkeit: $v_P(t) = |\vec{v}_P(t)| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

↑
Skalar!

↑
x-Komponente

↑
y-Komponente

Aus Teilaufgabe 1: $\vec{v}_P(t) = \underbrace{-\frac{L}{4} \pi \sin(\pi t) \vec{e}_x}_{x\text{-Komponente}} + \underbrace{\frac{L}{4} \pi \cos(\pi t) \vec{e}_y}_{y\text{-Komponente}}$

$$\Rightarrow v_P(t) = \sqrt{\left(-\frac{L}{4} \pi \sin(\pi t) \right)^2 + \left(\frac{L}{4} \pi \cos(\pi t) \right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(-\frac{L}{4} \pi \right)^2 \sin^2(\pi t) + \left(\frac{L}{4} \pi \right)^2 \cos^2(\pi t)} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{L}{4} \pi \right)^2 \underbrace{(\sin^2(\pi t) + \cos^2(\pi t))}_{=1}} = \sqrt{\left(\frac{L}{4} \pi \right)^2} = \underline{\underline{\frac{L}{4} \pi}}$$

↑
in diesem Fall sogar zeitunabhängig!

3. Bahn? $\mathbf{r}_P(t) = \left(\frac{6L}{5} + \frac{L}{4} \cos \pi t \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{6L}{5} + \frac{L}{4} \sin \pi t \right) \mathbf{e}_y.$

Wie kommt man am besten auf die Lösung? → Schritt für Schritt Anleitung:

1. in Vektorschreibweise schreiben: $\vec{r}_p(t) = \begin{pmatrix} \frac{6L}{5} + \frac{L}{4} \cos(\pi t) \\ \frac{6L}{5} + \frac{L}{4} \sin(\pi t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{6L}{5} \\ \frac{6L}{5} \end{pmatrix}}_{\text{zeitunabhängiger Teil}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{L}{4} \cos(\pi t) \\ \frac{L}{4} \sin(\pi t) \end{pmatrix}}_{\text{zeitabhängiger Teil}} =$

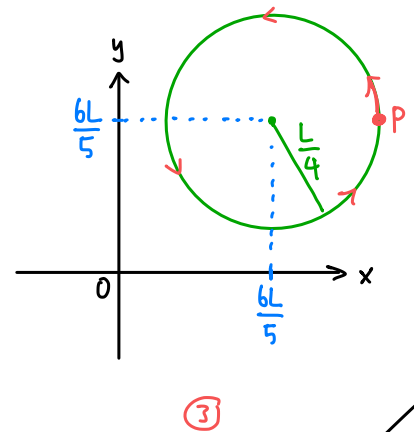
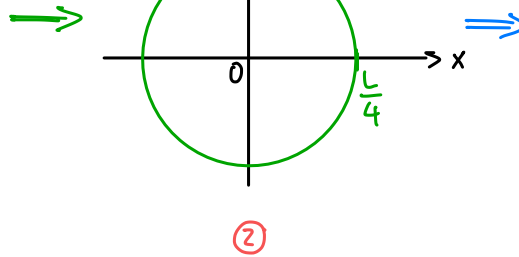
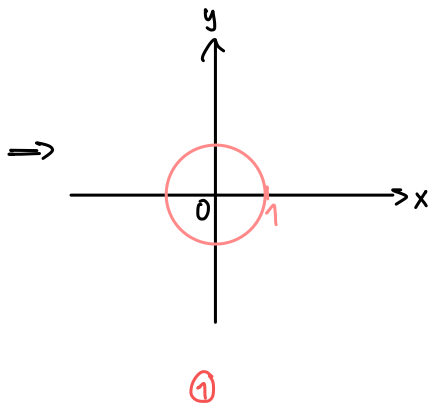
2. Term analysieren

$$= \begin{pmatrix} \frac{6L}{5} \\ \frac{6L}{5} \end{pmatrix} + \frac{L}{4} \begin{pmatrix} \cos(\pi t) \\ \sin(\pi t) \end{pmatrix}$$

schliesslich beschreibt dieser Term die Verschiebung der Kreisbahn vom Ursprung.

dieser Term skaliert den Einheitskreis um den Faktor $\frac{L}{4}$

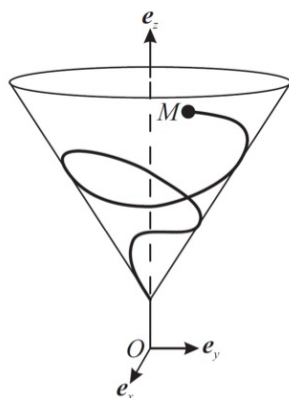
das beschreibt eine in gegenuh-zigersinn orientierte kreisförmige Bahn mit dem Mittelpunkt im Ursprung & Radius 1



2. ² Ein materieller Punkt M bewegt sich auf einer Kreiskegelfläche. Die Bewegung des Punktes wird in Zylinderkoordinaten durch die Gleichungen

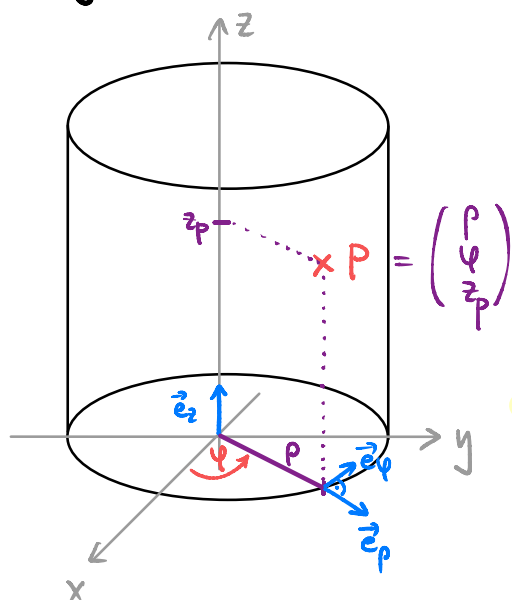
$$\begin{cases} \rho = \frac{\sqrt{3}}{3}(1 - \cos \mu t) \\ \varphi = \sqrt{3} \mu t \\ z = 3 - \cos \mu t \end{cases}$$

gegeben (t wird in Zeiteinheiten gemessen und μ ist eine dimensionslose Konstante).



1. Berechnen Sie die **Geschwindigkeit** von M in Zylinderkoordinaten.
2. Berechnen Sie die Schnelligkeit von M .
3. Berechnen Sie die Geschwindigkeit von M in den kartesischen Koordinaten.

recap Zylinderkoordinaten:



$$\begin{aligned} \vec{e}_\rho &= \cos(\varphi) \vec{e}_x + \sin(\varphi) \vec{e}_y \\ \vec{e}_\varphi &= -\sin(\varphi) \vec{e}_x + \cos(\varphi) \vec{e}_y \end{aligned}$$

Umrechnung:

Zylinder $\rightarrow$ kartesisch

$$\begin{aligned} x &= \rho \cdot \cos(\varphi) \\ y &= \rho \cdot \sin(\varphi) \\ z &= z \end{aligned}$$

kartesisch $\rightarrow$ Zylinder

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ z &= z \end{aligned}$$

① Bewegungsfunktion bestimmen: $\vec{r}_{OM}(t) = \rho(t) \vec{e}_\rho(\varphi(t)) + z(t) \vec{e}_z$

mit $\rho(t) = \frac{\sqrt{3}}{3} (1 - \cos(\mu t))$

$$\varphi(t) = \sqrt{3} \mu t$$

$$z(t) = 3 - \cos(\mu t)$$

Geschwindigkeit: $\vec{v}_M = \dot{\vec{r}}_{\text{on}} = \dot{\rho}(t) \vec{e}_\rho + \rho(t) \dot{\varphi}(t) \vec{e}_\varphi + \dot{z} \vec{e}_z =$

Achtung: Ableiten bei Zylinderkoordinaten:

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{3} (1 - \cos(\mu t)) \right) \vec{e}_\rho + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} (1 - \cos(\mu t)) \cdot (\sqrt{3} \mu) \right) \vec{e}_\varphi + (3 - \cos(\mu t)) \vec{e}_z$$

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos(\varphi(t)) \vec{e}_x + \sin(\varphi(t)) \vec{e}_y \\ \vec{e}_\varphi = -\sin(\varphi(t)) \vec{e}_x + \cos(\varphi(t)) \vec{e}_y \end{cases}$$

$\sin(\alpha t)' = \alpha \cdot \cos(\alpha t)$
 $\uparrow$
 $e^{3x}' = 3e^{3x}$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (\mu \sin(\mu t)) \vec{e}_\rho + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} (1 - \cos(\mu t)) \cdot (\sqrt{3} \mu) \right) \vec{e}_\varphi + \mu \sin(\mu t) \vec{e}_z$$

$$= \mu \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \sin(\mu t) \vec{e}_\rho + \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} (1 - \cos(\mu t)) \vec{e}_\varphi + \sin(\mu t) \vec{e}_z \right)$$

$$= \mu \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \sin(\mu t) \vec{e}_\rho + (1 - \cos(\mu t)) \vec{e}_\varphi + \sin(\mu t) \vec{e}_z \right)$$

② Schnelligkeit: $v_M = |\vec{v}_M| =$

$$= \mu \cdot \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3} \sin(\mu t) \right)^2 + (1 - \cos(\mu t))^2 + \sin^2(\mu t)}$$

$$= \mu \cdot \sqrt{\frac{1}{3} \sin^2(\mu t) + 1 - 2 \cos(\mu t) + \underbrace{\cos^2(\mu t) + \sin^2(\mu t)}_1}$$

$$= \mu \cdot \sqrt{\frac{1}{3} \sin^2(\mu t) - 2 \cos(\mu t) + 2}$$

③ $\vec{v}_M$ in kartesische Koordinaten:

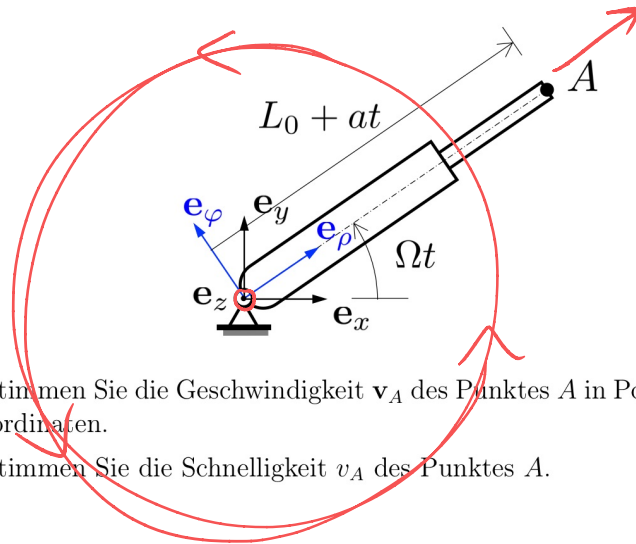
Einheitsvektoren: $\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos(\varphi(t)) \vec{e}_x + \sin(\varphi(t)) \vec{e}_y \\ \vec{e}_\varphi = -\sin(\varphi(t)) \vec{e}_x + \cos(\varphi(t)) \vec{e}_y \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases}$

einsetzen in $\vec{v}_M(t)$ (Zylinder) =

$$\mu \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \sin(\mu t) \vec{e}_\rho + (1 - \cos(\mu t)) \vec{e}_\varphi + \sin(\mu t) \vec{e}_z \right)$$

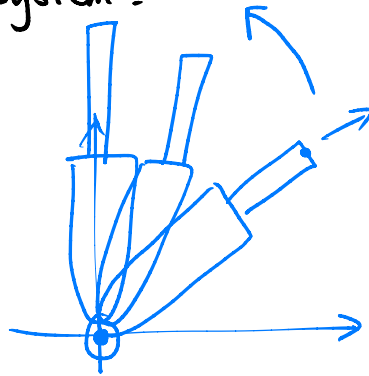
$\Rightarrow \vec{v}_M(t)$ (kartesisch) = **Mulö** :)

3. Ein Antrieb, der im Gelenk O drehbar gelagert wird, rotiert um die $\mathbf{e}_z$ Achse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω und verlängert sich gleichzeitig gemäss dem Ausdruck $L(t) = L_0 + at$, wie in der folgenden Skizze dargestellt.



1. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit $\mathbf{v}_A$ des Punktes A in Polar- und kartesischen Koordinaten.
2. Bestimmen Sie die Schnelligkeit v_A des Punktes A .

Wie bewegt sich das System?



2 Punkte zu merken: 1) zuerst polar, dann kartesisch
2) 2D-Aufgabe :)

① Polar: $\vec{r}_A(t) = \rho \vec{e}_\rho = (L_0 + at) \vec{e}_\rho$

mit $\vec{e}_\rho = \cos(\Omega t) \vec{e}_x + \sin(\Omega t) \vec{e}_y$

Einheitsvektoren wiederum zeitabhängig!

$$\vec{v}_A(t) = \dot{\vec{r}}_A(t) = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\vec{e}}_\rho$$

$$= (L_0 + at) \vec{e}_\rho + \rho \cdot (\cos(\Omega t) \dot{\vec{e}}_x + \sin(\Omega t) \dot{\vec{e}}_y)$$

$$= a \vec{e}_\rho + \rho \cdot (-\Omega \sin(\Omega t) \vec{e}_x + \Omega \cos(\Omega t) \vec{e}_y)$$

$$= a \vec{e}_\rho + \rho \cdot \Omega \cdot (-\sin(\Omega t) \vec{e}_x + \cos(\Omega t) \vec{e}_y)$$

$= \vec{e}_\phi$

$$= a\vec{e}_\rho + (L_0 + at) \cdot \Omega \vec{e}_\varphi //$$

mit $\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos(\Omega t) \vec{e}_x + \sin(\Omega t) \vec{e}_y \\ \vec{e}_\varphi = -\sin(\Omega t) \vec{e}_x + \cos(\Omega t) \vec{e}_y \end{cases}$ } $\otimes$ in einsetzen

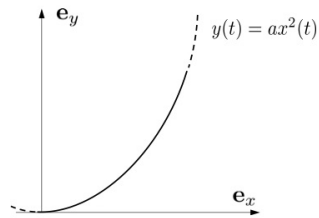
kartesisch: $\vec{v}_A(t) = a \cdot (\cos(\Omega t) \vec{e}_x + \sin(\Omega t) \vec{e}_y) + (L_0 + at) \Omega \cdot (-\sin(\Omega t) \vec{e}_x + \cos(\Omega t) \vec{e}_y)$
 $= (a \cos(\Omega t) - \Omega(L_0 + at) \sin(\Omega t)) \vec{e}_x + (a \sin(\Omega t) + \Omega(L_0 + at) \cos(\Omega t)) \vec{e}_y //$

Polarkoordinaten

② Schnelligkeit: $v_A = |\vec{v}_A| = \sqrt{a^2 + (L_0 + at)^2 \Omega^2}$

4. Gegeben sei die Bahnkurve $y(t) = ax^2(t)$. Zur Zeit $t_1 = 1$ [s] sind $x(t_1)$ und $\dot{x}(t_1)$ gegeben als

$$x(t_1) = 1; \quad \dot{x}(t_1) = 1.$$



Was ist die **Schnelligkeit** $v(t_1)$?

(a) $v(t_1) = \sqrt{1 + 4a^2}$

(b) $v(t_1) = \sqrt{2 - \frac{1}{2}a^2}$

(c) $v(t_1) = \sqrt{2 + \frac{1}{2}a^2}$

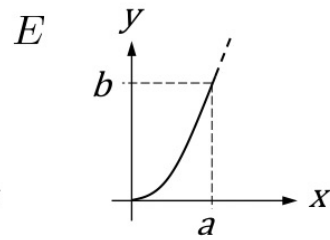
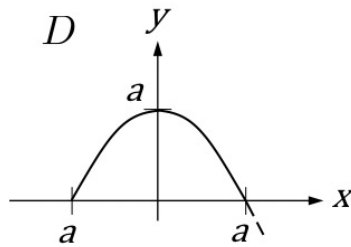
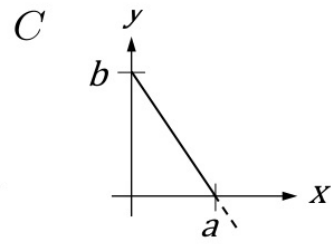
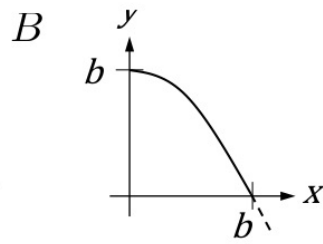
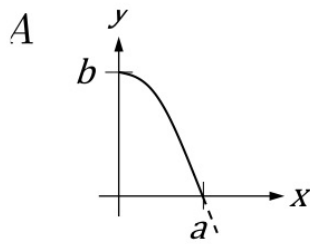
(d) $v(t_1) = -\sqrt{1 + 4a^2}$

(e) $v(t_1) = \sqrt{2 + 4a^2}$

5. Betrachten Sie die folgende Bahnkurve:

$$x(t) = at \quad y(t) = b - \frac{a^2}{b}t^2$$

Wobei $a > 0$ und $b > 0$ gegebene Konstanten sind und die Zeit $t \geq 0$ als positiv betrachtet wird.



Welcher von der Graphen stellt die richtige Bahnkurve dar?

- (a) *A*
- (b) *B*
- (c) *C*
- (d) *D*
- (e) *E*