Technische Mechanik

Übung 4

18.10.2022
Lina De Windt

Themen von Heute:

> Teil 1: Fragen zu Themen / Aufgaben von letzter Woche?

> Teil 2: Recap der Theorie von dieser Woche:

1. Kraft
2. Moment
3. Leistung

> Teil 3: Übungsaufgaben lösen (Serie 4)

Teil 1: Fragen zu Themen von letzter Woche?

⚠ Wichtig(st)e Formeln bisher:

SdpG: $\vec{v}_A' = \vec{v}_B'$ $\hookleftarrow$ $\vec{v}_A \cdot \vec{e}_{AB} = \vec{v}_B \cdot \vec{e}_{AB}$

SvM: $\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{r}_{MP}$ M: Momentanzentrum vom SK

↳ falls $\vec{\omega} \perp \vec{r}$ (was in 2D immer der Fall ist)

$\Rightarrow$ $v_P = \omega \cdot r_{MP}$

SK-Formel: $\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}$ $\forall A, B \in$ eines Starrkörpers.

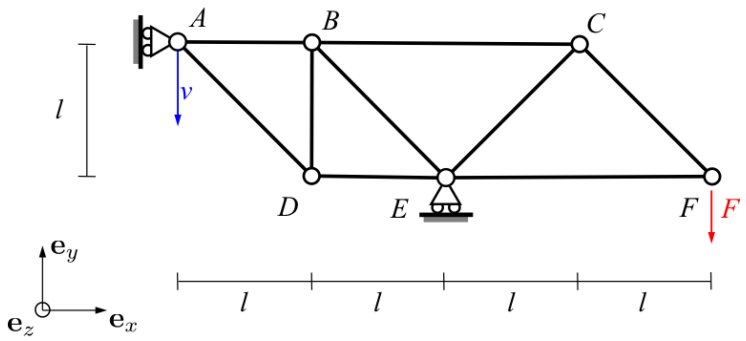
Kinemate (von Punkt P) = $\{\vec{v}_P, \vec{\omega}\}$

⚠ höchstens 1 Momentanzentrum und 1 Rotationsgeschwindigkeit ω pro Starrkörper.

Quiztime :)

↳ aus Serie 4 → detaillierte Lösungen siehe Mulö

5. Das unten skizzierte System besteht aus 9 gelenkig miteinander verbundenen Stäben. Die entsprechenden Längen sind in der Skizze angegeben. Punkt A ist durch ein Rolllager auf eine vertikale und Punkt E auf eine horizontale Bewegung beschränkt. Punkt A bewegt sich mit der Geschwindigkeit v nach unten und die Kraft F greift am Punkt F an (siehe Skizze).



1. Was ist der Freiheitsgrad des Systems und aus wie vielen starren Körpern besteht es?

   (a) Freiheitsgrad = 0, Anzahl Starrkörper = 9

   (b) Freiheitsgrad = 1, Anzahl Starrkörper = 1

   (c) Freiheitsgrad = 1, Anzahl Starrkörper = 3

   (d) Freiheitsgrad = 1, Anzahl Starrkörper = 4

   (e) Freiheitsgrad = 2, Anzahl Starrkörper = 1

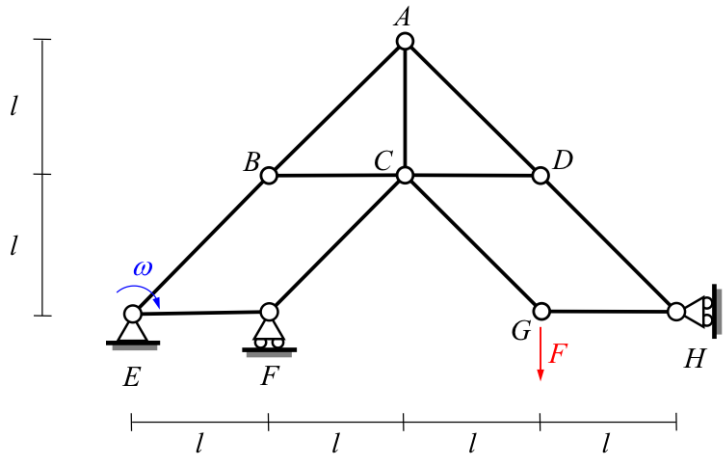
↳ minimale Anzahl angeben.

Dreiecke bilden Starrkörper!

$b_{Gelenk} = (\#\text{ mit Gelenk verbundene SK} - 1) \cdot 2$

↳ aus Serie 4 → detaillierte Lösungen siehe Mulö

7. Das unten skizzierte System besteht aus 11 gelenkig miteinander verbundenen Stäben. Die entsprechenden Längen sind in der Skizze angegeben. Punkt E ist gelenkig gelagert, die Punkte F und H sind durch Rolllager auf eine horizontale bzw. vertikale Bewegung beschränkt. Die Kraft F greift im Punkt G an und der Stab BE hat die Winkelgeschwindigkeit ω.



1. Was ist die Winkelgeschwindigkeit ω_{GH} vom Stab GH?

(a) $\omega_{GH} = 0$

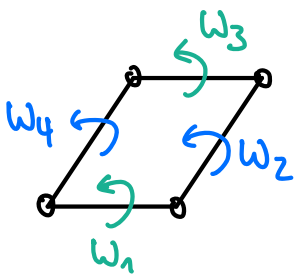
(b) $\omega_{GH} = \omega$

(c) $\omega_{GH} = -\omega$

(d) $\omega_{GH} = 2\omega$

(e) $\omega_{GH} = \frac{\omega}{2}$

→ Parallelogrammregel verwenden:

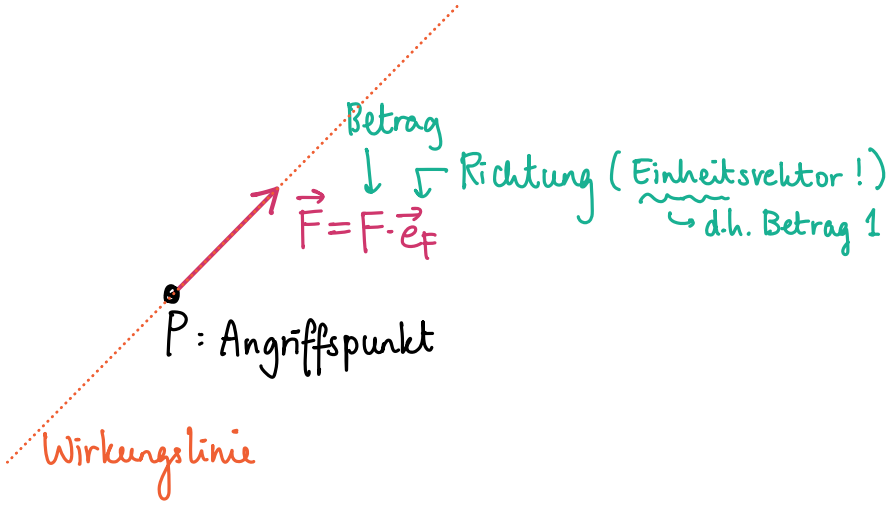


$\omega_1 = \omega_3$

$\omega_2 = \omega_4$

Teil 2: Recap der Theorie von dieser Woche

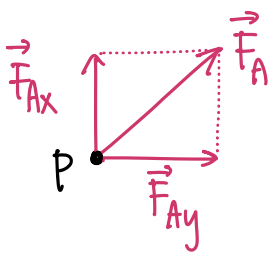
1. Kraft: Kräfte machen sich durch ihre Wirkung auf Objekte bemerkbar. Sie hat immer einen **Betrag**, eine **Richtung** und einen **Angriffspunkt**. Man stellt sie als Vektoren dar:

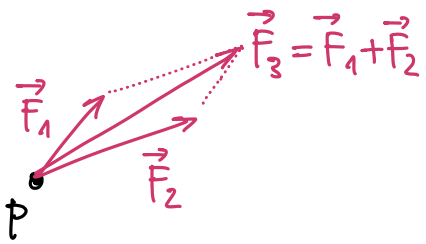


Bem: $[F] = N = \frac{m \cdot kg}{s^2}$

Kräfte dürfen vektoriell addiert werden, wenn sie denselben Angriffspkt. haben:

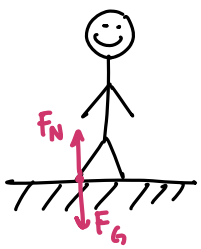
z.B.

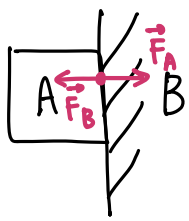




Reaktionsprinzip: ← sehr wichtig

Kräfte wirken immer wechselseitig. Übt A eine Kraft F_A auf B aus, so übt B eine gleich grosse, entgegengesetzt gerichtete Kraft auf A aus:





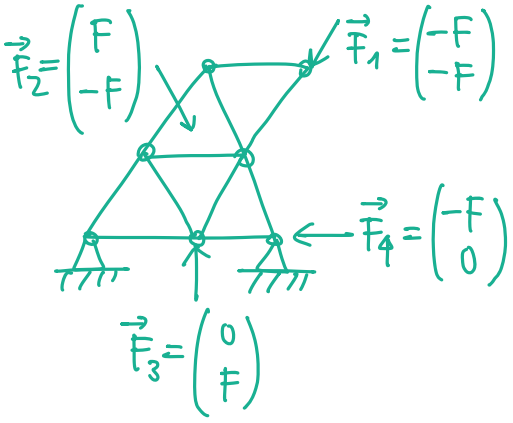
$\vec{F}_N = -\vec{F}_G$, $|\vec{F}_G| = |\vec{F}_N|$ $\qquad$ $\vec{F}_B = -\vec{F}_A$, $|\vec{F}_B| = |\vec{F}_A|$

⚠ Beide Kräfte haben dieselbe Wirkungslinie!

Definition: Die Resultierende: $\vec{R} = \sum_i F_i$

Ist die Summe aller Kräfte, die auf das System wirken.

Bsp:

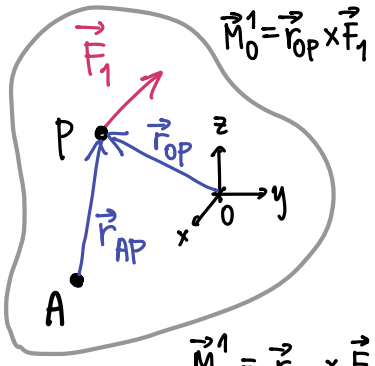


$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \begin{pmatrix} -F \\ -F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F \\ -F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F \\ -F \end{pmatrix}$$

2. Das Moment: Beschreibt die Drehwirkung einer Kraft auf einen Körper.
Sie ist ein Vektor & ist vom Bezugspunkt abhängig.

Moment von $\vec{F}_i$ bezüglich Punkt O: $\vec{M}_O^i = \vec{r}_{OP} \times \vec{F}_i$

(Index der betrachteten Kraft; Angriffspunkt der Kraft; Bezugspunkt)



Moment von $\vec{F}_i$ bezüglich Punkt A: $\vec{M}_A^i = \vec{r}_{AP} \times \vec{F}_i$

!

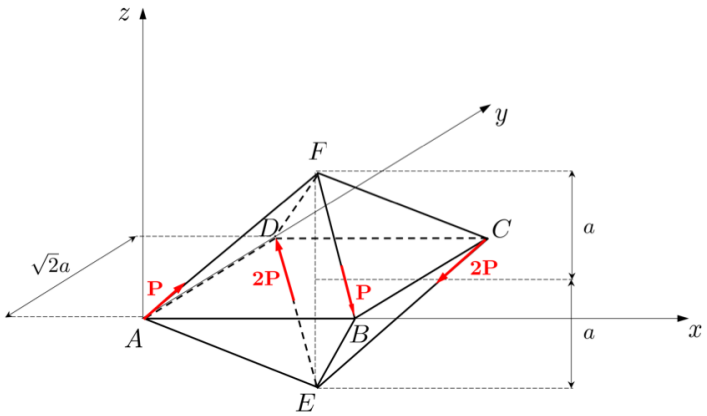
das resultierende Moment: Ist die Summe aller Momente auf einem Körper.
Diese ist auch bezogen auf einem Punkt des Körpers!

bezüglich O: $\vec{M}_O^{tot} = \sum_i \vec{M}_O^i$ (wird leider oft nicht geschrieben)

bezüglich A: $\vec{M}_A^{tot} = \sum_i \vec{M}_A^i$ (anderer Bezugspunkt)

Beispielaufgabe: Serie 4 Aufgabe 2 Teilaufgabe 1

2. Auf einem Oktaeder (Seitenlänge $\sqrt{2}a$, Höhe $2a$) wirken in den Eckpunkten die in der Skizze eingezeichneten Kräfte.



1. Bestimmen Sie die Resultierende.
2. Bestimmen Sie das resultierende Moment bezüglich A und E.
3. Bestimmen Sie zwei zusätzliche, in E und in F wirkende Kräfte $\mathbf{F}_E$ und $\mathbf{F}_F$ so, dass sich die aus allen Kräften bestehende Kräftegruppe auf ein einzelnes Moment $\mathbf{M} = (2aP,\ 0,\ 0)^T$ in x-Richtung reduzieren lässt. Von der Kraft $\mathbf{F}_E$ wissen wir, dass sie *keine z-Komponente* hat.

1) $\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i$ → alle $\vec{F}_i$ in Vektorform bestimmen:

$$\vec{F}_A = P \cdot \vec{e}_{AF} \quad | \quad \vec{F}_B = P \cdot \vec{e}_{FB} \quad | \quad \vec{F}_C = 2P \cdot \vec{e}_{CE} \quad | \quad \vec{F}_D = 2P \cdot \vec{e}_{ED}$$

Einheitsvektoren bestimmen:

$$\vec{e}_{AF} = \frac{\vec{AF}}{|\vec{AF}|} = \frac{\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}a \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}a \\ a \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}a \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}a \\ a \end{pmatrix}\right|} = \frac{1}{\sqrt{2}a} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}a \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}a \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_A = \frac{1}{2} P \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_{FB} = \frac{\vec{FB}}{|\vec{FB}|} = \frac{\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}a \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}a \\ -a \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}a \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}a \\ -a \end{pmatrix}\right|} = \frac{1}{\sqrt{2}a} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}a \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}a \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_B = \frac{1}{2}P \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

analog zu $\vec{e}_{AF}$ und $\vec{e}_{FB}$

$$\vec{e}_{CE} = \frac{\vec{CE}}{|\vec{CE}|} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \vec{F}_C = P \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_{ED} = \frac{\vec{ED}}{|\vec{ED}|} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \vec{F}_D = P \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{F}_D =$$

$$= \frac{1}{2}P \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}P \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} + P \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} + P \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}P - P - P \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Transformationsregel: Wenn das resultierende Moment bez. eines Punktes & die Resultierende bekannt ist, kann das resultierende Moment bez. ein anderer Pkt. mit dieser Formel bestimmt werden:

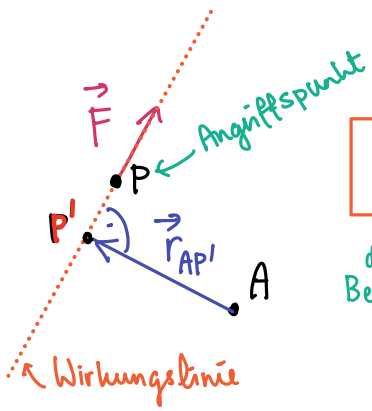
$$\vec{M}_A = \vec{M}_0 + \vec{r}_{A0} \times \vec{R}$$

("analog" zur SK-Formel in Kinematik)

Good to know: Wenn $\vec{R} = 0$, ist das Moment unabhängig vom Bezugspunkt.

Warum? → Traforegel: $\vec{M}_P = \vec{M}_Q + \underbrace{\vec{r}_{PQ} \times \vec{R}}_{=0} = \vec{M}_Q \quad \Leftrightarrow \quad \vec{M}_P = \vec{M}_Q \; \forall P, Q$

Good to know: Wenn $\vec{r} \perp$ Wirkungslinie von $\vec{F}$, kann der Betrag des Moments so berechnet werden:



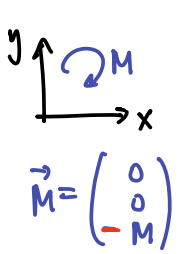
$M_A = r_{AP'} F$

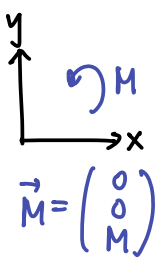
$\vec{r}_{AP'} \perp$ Wirkungslinie von $\vec{F}$

das sind alles (nur) Beträge, keine Vektoren!

Tipp: Wenn ihr das Moment einzeichnen müsst, oder sie (in 2D-Aufgaben) in Vektorform angeben müsst:

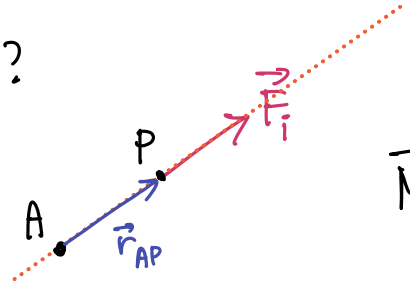
die rechte-Hand-Regel benutzen: (analog zu $\vec{\omega}$, ω)





Good to know: Wenn die Wirkungslinie einer Kraft durch einen Punkt geht, dann ist das Moment dieser Kraft bez. diesen Punkt O.

Warum?



$$\vec{M}_A^i = \vec{r}_{AP} \times \vec{F}_i = \vec{0}$$

Kreuzprodukt von 2 parallelen Vektoren ergibt immer 0 !

ausserdem: Wenn man physikalisch überlegt kann man auch sehen, dass eine solche Kraft keine Drehwirkung auf diesen Punkt hat.

Die Dyname eines Punktes P auf einem Starrkörper ist:

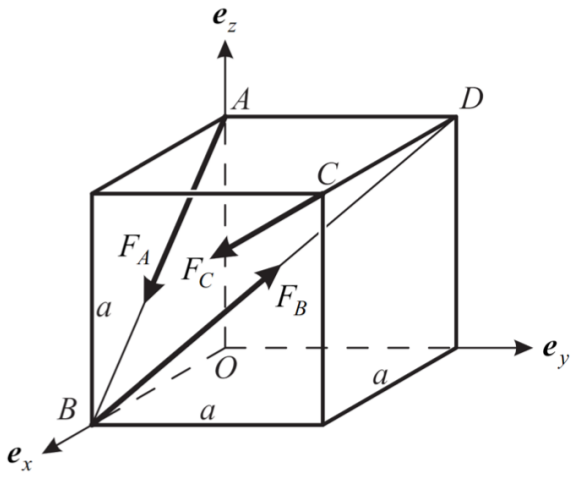
$$\{\vec{R}, \vec{M}_P^{tot}\}$$

$\vec{R}$: Resultierende

$\vec{M}_P^{tot}$: Resultierendes Moment bezüglich Punkt P.

Beispielaufgabe: Serie 4 Aufgabe 1 Teilaufgabe 1

1. [1] An einem Würfel mit der Seitenlänge a greifen die gezeichneten Kräfte vom Betrag F_A ,F_B und F_C an. Die Kraft $\mathbf{F}_C$ verläuft parallel zur $\mathbf{e}_x$-Achse.



1. Berechnen Sie die Momente dieser Kräfte bezüglich der Punkte O und A.
2. Bestimmen Sie die Abstände der drei Kraft-Wirkungslinien von O und A. Berechnen Sie daraus die Beträge der Momente und vergleichen Sie diese mit den Beträgen der oben berechneten Momente.

1) Schritt 1: alle Kräfte in Vektorform schreiben:

$$\vec{F}_A = F_A \vec{e}_{F_A} \quad , \quad \vec{F}_B = F_B \vec{e}_{F_B} \quad , \quad \vec{F}_C = F_C \vec{e}_{F_C}$$

wir brauchen die Einheitsvektoren in Richtung der Kräfte

Erinnerung: $\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

$$\vec{e}_{F_A} = \vec{e}_{AB} = \frac{\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}\right|} = \frac{1}{a\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_A = \frac{1}{\sqrt{2}} F_A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_{F_B} = \vec{e}_{BD} = \frac{\begin{pmatrix} -a \\ a \\ a \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} -a \\ a \\ a \end{pmatrix}\right|} = \frac{1}{a\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -a \\ a \\ a \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_B = \frac{1}{\sqrt{3}} F_B \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_{F_C} = \vec{e}_{DC} = \frac{\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \vec{F}_C = F_C \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Schritt 2: Momente berechnen:

Momente bezüglich Punkt O:

$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

M. von Kraft F_A: $\vec{M}_0^A = \vec{r}_{OA} \times \vec{F}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{2}} F_A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} F_A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} a F_A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

M. von Kraft F_B: $\vec{M}_0^B = \vec{r}_{OB} \times \vec{F}_B = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{3}} F_B \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} F_B \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ a \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{3} a F_B \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

M. von Kraft F_C: $\vec{M}_0^C = \vec{r}_{OC} \times \vec{F}_C = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix} \times F_C \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = F_C \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ -a \end{pmatrix} = a F_C \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

entsprechende Beträge: $M_0^A = |\vec{M}_0^A| = \frac{\sqrt{2}}{2} a F_A$

$$M_0^B = |\vec{M}_0^B| = \frac{\sqrt{3}}{3} a F_B \sqrt{1+1} = \frac{\sqrt{6}}{3} a F_B$$

$$M_0^C = |\vec{M}_0^C| = \sqrt{2}\, a F_C$$

Momente bezüglich Punkt A:

$$\vec{M}_A^A = \vec{r}_{AA} \times \vec{F}_A = \vec{0} \times \vec{F}_A = \vec{0}$$

$$\vec{M}_A^B = \vec{r}_{AB} \times \vec{F}_B = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} \times \frac{\sqrt{3}}{3} F_B \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{3} F_B \cdot \begin{pmatrix} a \\ a-a \\ a \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{3} a F_B \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{M}_A^C = \vec{r}_{AC} \times \vec{F}_C = \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \times F_C \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = F_C \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} = a F_C \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Beträge der Momente:

$$M_A^A = |\vec{M}_A^A| = 0$$

$$M_A^B = |\vec{M}_A^B| = \left| \frac{\sqrt{3}}{3} a F_B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{\sqrt{6}}{3} a F_B$$

$$M_A^C = |\vec{M}_A^C| = \left| a F_C \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = a F_C$$

3. Leistung:

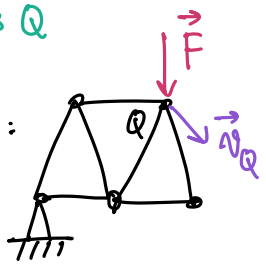
$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}_Q$$

Geschwindigkeit des Angriffspunktes Q

angreifende Kraft

ist ein Skalar (d.h. $\in \mathbb{R}$) & kein Vektor!

z.B.:



Die Gesamtleistung:

wenn ein äusseres Moment angreift

$$P_{tot} = \sum_i P_i = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i + \sum_i \vec{M}_i \cdot \vec{\omega}_i$$

Summe der Leistungen der einzelnen Pkte

"reine-Rotation-Komponenten"

Good to know: Bei einer reinen Rotation gilt $P = \vec{M}_0 \cdot \vec{\omega}$

Good to know:

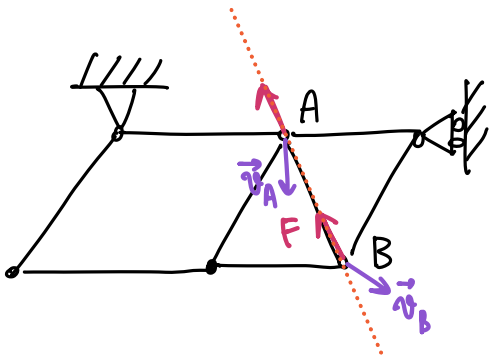
Wenn alle Kräfte & Momente nur an einem SK angreifen: $P_{tot} = \vec{R} \cdot \vec{v}_A + \vec{M}_A^{tot} \cdot \vec{\omega}$

hier gleicher Punkt!

↳ nützlich wenn die Kinemate $\{\vec{v}_B, \vec{\omega}\}$ & das Moment $\vec{M}_B$ bez. eines Pktes bekannt ist.

Wichtig: Für die Bestimmung von Momenten & Leistungen darf man die Kräfte entlang ihrer Wirkungslinie verschieben. Wählt deswegen einen Punkt aus, bei der die Geschwindigkeit einfach zu bestimmen ist.

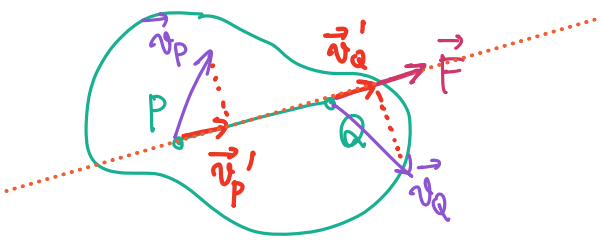
Bsp:

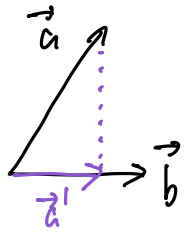


$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}_B = \vec{F} \cdot \vec{v}_A$$

⚠ gilt nur für Starrkörper!

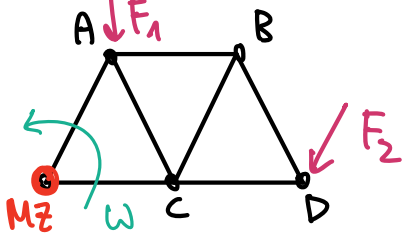
↳ Warum? → Wegen SdpG!





Kochrezept Gesamtleistung berechnen:

1. Geschwindigkeiten der Punkte berechnen, auf welche eine Kraft angreift:



→ $\vec{v}$ von A und D bestimmen.
$\vec{v}$ von B und C interessieren uns nicht für die Berechnung der Gesamtleistung!

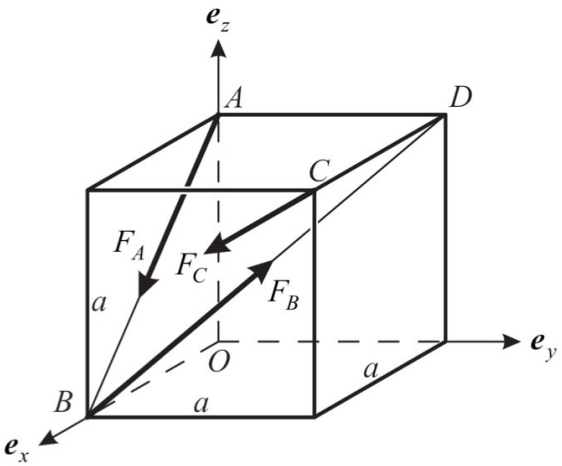
2. Mit den in 1. bestimmten Geschwindigkeiten die Leistung berechnen.

$$P_{tot} = \vec{F}_1 \cdot \vec{v}_A + \vec{F}_2 \cdot \vec{v}_D$$

Teil 3: Übungsaufgaben - Serie 4

↳ Aufgaben 1.1, 2.1, 5.1, 7.1 in Ü gelöst :)

1. [1] An einem Würfel mit der Seitenlänge a greifen die gezeichneten Kräfte vom Betrag F_A ,F_B und F_C an. Die Kraft $\mathbf{F}_C$ verläuft parallel zur $\mathbf{e}_x$-Achse.



in Ü gelöst :)

1. Berechnen Sie die Momente dieser Kräfte bezüglich der Punkte O und A.
2. Bestimmen Sie die Abstände der drei Kraft-Wirkungslinien von O und A. Berechnen Sie daraus die Beträge der Momente und vergleichen Sie diese mit den Beträgen der oben berechneten Momente.

Tipps:

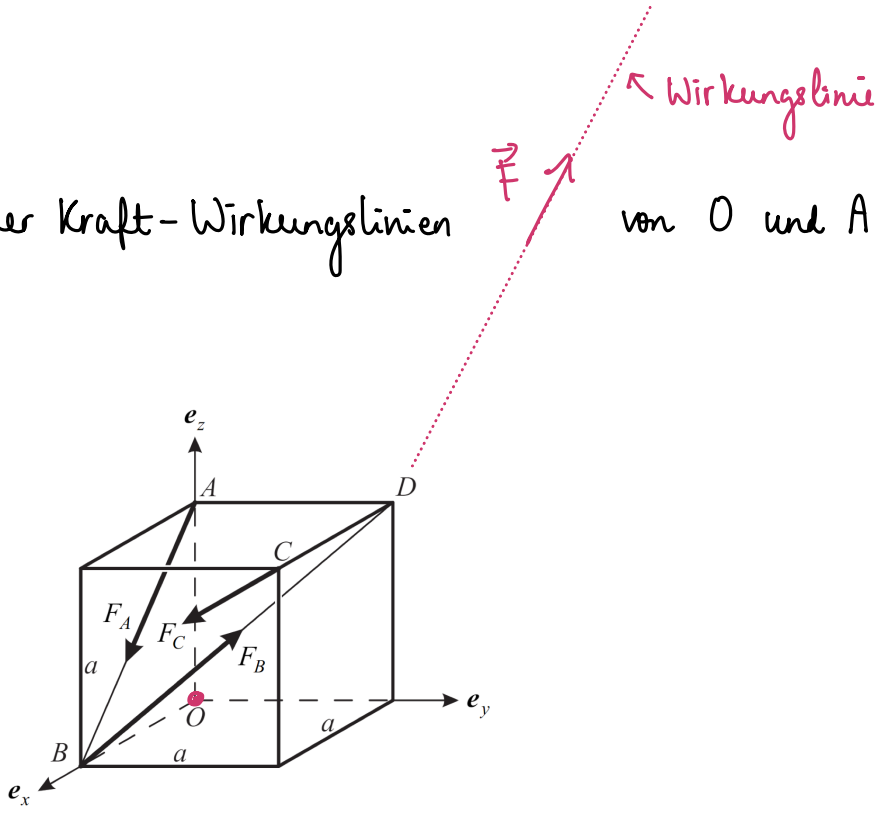
2. Abstand einer Geraden AB zum Punkt C:

$$d_C^{AB} = |\vec{r}_{CA} \times \vec{e}_{AB}| = |\vec{r}_{CB} \times \vec{e}_{AB}|$$

oder aus Skizze ablesen wo möglich :)

$M_0 = \pm dF$, falls $d \perp$ Wirkungslinie von F.

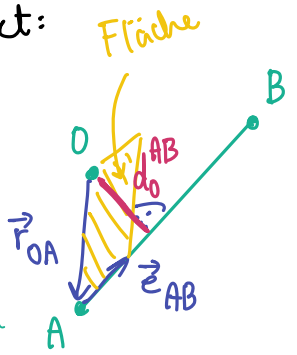
2) Abstände der Kraft-Wirkungslinien von O und A



Formel für Abstand einer Geraden zu einem Punkt:

$$d_0^{AB} = |\vec{r}_{OA} \times \vec{e}_{AB}|$$

Why?



$|\vec{r}_{OA} \times \vec{e}_{AB}|$ ist die Fläche des Parallelogramms, welcher von $\vec{r}_{OA}$ und $\vec{e}_{AB}$ eingeschlossen wird. Die Fläche eines Parallelogramms ist i.A. aber auch Höhe × Seite

. Nun sehen wir aber, dass die Länge unserer Seite $|\vec{e}_{AB}| = 1$ ist. d.h. Wir finden: Fläche = Höhe × Seite = Höhe (Seite = 1)

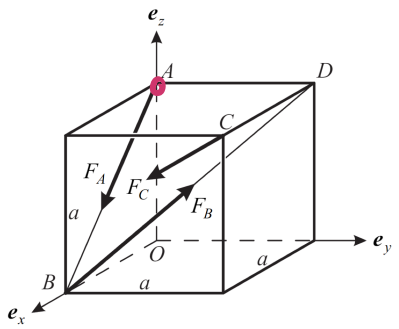
$\Leftrightarrow$ Höhe = d_0^{AB} = Fläche = $|\vec{r}_{OA} \times \vec{e}_{AB}|$

$$d_0^{AB} = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} a$$

$$d_0^{BD} = |\vec{r}_{OB} \times \vec{e}_{BD}| = \left| \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ a \end{pmatrix} \right| = \frac{\sqrt{6}}{3} a$$

$$d_0^{DC} = |\vec{r}_{OD} \times \vec{e}_{DC}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ -a \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2} a$$

Von A:



$$d_A^{AB} = |\vec{r}_{AA} \times \vec{e}_{AB}| = |\vec{0} \times \vec{e}_{AB}| = 0$$

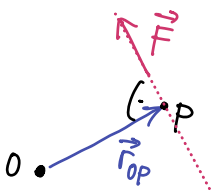
$$d_A^{BD} = |\vec{r}_{AB} \times \vec{e}_{BD}| = \left| \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} \times \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \begin{pmatrix} a \\ a-a \\ a \end{pmatrix} \right| = \frac{\sqrt{6}}{3} a$$

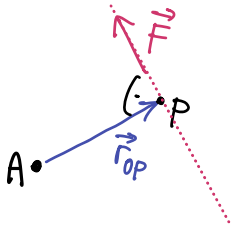
$$d_A^{DC} = |\vec{r}_{AD} \times \vec{e}_{DC}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} \right| = a$$

Daraus die Beträge der Momente berechnen:

⚠ Wenn $\vec{r}_{OP}$ ⊥ Wirkungslinie von $\vec{F}$ bzw. $\vec{r}_{AP}$ ⊥ Wirkungslinie von $\vec{F}$ dürfen wir diese Formel verwenden:

$M_O = r_{OP} \cdot F$ bzw. $M_A = r_{AP} \cdot F$



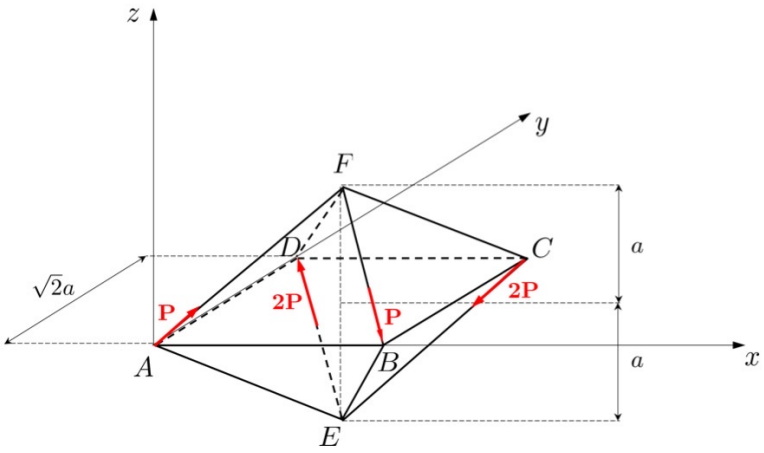


→ ist hier der Fall mit den d_O^{ij} bzw. d_A^{ij}, welche wir berechnet haben :)

$$\Rightarrow \begin{cases} M_O^A = d_O^{AB} \cdot F_A = \frac{\sqrt{2}}{2} a F_A \\ M_O^B = d_O^{BD} \cdot F_B = \frac{\sqrt{6}}{3} a F_B \\ M_O^C = d_O^{DC} F_C = \sqrt{2} a F_C \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases} M_A^A = d_A^{AB} \cdot F_A = 0 \\ M_A^B = d_A^{BD} \cdot F_B = \frac{\sqrt{6}}{3} a F_B \\ M_A^C = d_A^{DC} F_C = a F_C \end{cases}$$

Im Vergleich zu den in Teilaufgabe 1 berechneten Momente: gleich:)

2. Auf einem Oktaeder (Seitenlänge $\sqrt{2}a$, Höhe $2a$) wirken in den Eckpunkten die in der Skizze eingezeichneten Kräfte.



in Ü gelöst :)

1. Bestimmen Sie die Resultierende.
2. Bestimmen Sie das resultierende Moment bezüglich A und E.
3. Bestimmen Sie zwei zusätzliche, in E und in F wirkende Kräfte $\mathbf{F}_E$ und $\mathbf{F}_F$ so, dass sich die aus allen Kräften bestehende Kräftegruppe auf ein einzelnes Moment $\mathbf{M} = (2aP,\ 0,\ 0)^T$ in x-Richtung reduzieren lässt. Von der Kraft $\mathbf{F}_E$ wissen wir, dass sie *keine z-Komponente* hat.

Tipps:

2. In Formel einsetzen und berechnen.

3. Ziel ist:

$$\vec{R}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad M^* = \begin{pmatrix} 2aP \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Was muss für $\vec{F}_E = \begin{pmatrix} F_{Ex} \\ F_{Ey} \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{F}_F = \begin{pmatrix} F_{Fx} \\ F_{Fy} \\ F_{Fz} \end{pmatrix}$ gelten, damit das erfüllt ist? Bestimme die unbekannten Komponenten $F_{Ex}, F_{Ey}, F_{Fx}, F_{Fy}, F_{Fz}$!

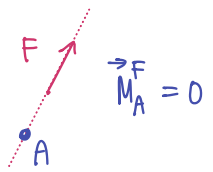
2) resultierendes Moment bezüglich A & E:

$$\vec{M}_A^{tot} = \sum_i \vec{M}_A^i \quad \text{bzw.} \quad \vec{M}_E^{tot} = \sum_i \vec{M}_E^i$$

bezüglich A:

M. von Kraft $\vec{F}_A$: $\vec{M}_A^A = \vec{r}_{AA} \times \vec{F}_A = \vec{0} \times \vec{F}_A = \vec{0}$

merke: wenn die Wirkungslinie einer Kraft durch einen Punkt geht, hat diese Kraft kein Moment bezüglich diesen Punkt.



M. von Kraft $\vec{F}_B$: $\vec{M}_A^B = \vec{r}_{AB} \times \vec{F}_B = \begin{pmatrix} \sqrt{2}a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2}P \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}P \begin{pmatrix} 0 \\ 2a \\ -\sqrt{2}a \end{pmatrix} = aP \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

M. von Kraft $\vec{F}_C$: $\vec{M}_A^C = \vec{r}_{AC} \times \vec{F}_C = \begin{pmatrix} \sqrt{2}a \\ \sqrt{2}a \\ 0 \end{pmatrix} \times P \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} -2a \\ 2a \\ -\sqrt{2}a + \sqrt{2}a \end{pmatrix} = 2aP \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

M. von Kraft $\vec{F}_D$: $\vec{M}_A^D = \vec{r}_{AD} \times \vec{F}_D = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}a \\ 0 \end{pmatrix} \times P \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ \sqrt{2}a \end{pmatrix} = aP \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

$$\vec{M}_A^{tot} = \sum_i \vec{M}_A^i = \vec{M}_A^A + \vec{M}_A^B + \vec{M}_A^C + \vec{M}_A^D =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + aP \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} + 2aP \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + aP \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = aP \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

bezüglich E: verwende die Transformationsregel:

$$\vec{M}_E^{tot} = \vec{M}_A^{tot} + \vec{r}_{EA} \times \vec{R}$$

Bem: Ihr dürft auch nochmal alle Teil-Momente bez. E berechnen & am Schluss zusammenaddieren, aber mit dieser Formel geht es deutlich schneller, vor allem wenn ihr $\vec{R}$ schon habt :)

$$= aP \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2}a \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}a \\ a \end{pmatrix} \times P \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = aP \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}a \end{pmatrix} P =$$

$$= aP \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3-1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = aP \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3) → mühsam.

Laut Aufgabe sind die Bedingungen: $\vec{R}_{neu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{M}_{neu} = \begin{pmatrix} 2aP \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

gesucht: $\vec{F}_E = \begin{pmatrix} F_{Ex} \\ F_{Ey} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{F}_F = \begin{pmatrix} F_{Fx} \\ F_{Fy} \\ F_{Fz} \end{pmatrix}$

Gleichungen aufstellen:

$$\vec{R}_{neu} = \vec{R} + \vec{F}_E + \vec{F}_F = \begin{pmatrix} -P \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{Ex} \\ F_{Ey} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{Fx} \\ F_{Fy} \\ F_{Fz} \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_{Ex} + F_{Fx} = P \\ F_{Ey} = -F_{Fy} \\ F_{Fz} = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Da $\vec{R}_{neu} = 0$, ist der Moment unabhängig vom Bezugspunkt ← Wichtig

Warum? → Traforegel: $\vec{M}_P = \vec{M}_Q + \vec{r}_{PQ} \times \vec{R} = \vec{M}_Q \quad \forall P, Q \in SK$ ($\vec{R} \stackrel{!}{=} 0$)

wähle E als Bezugspkt.

$$\vec{M}_{neu} = \vec{M}_E^{tot} + \underbrace{\vec{r}_{EE} \times \vec{F}_E}_{=0} + \vec{r}_{EF} \times \vec{F}_F = aP \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_{Fx} \\ F_{Fy} \\ 0 \end{pmatrix} =$$

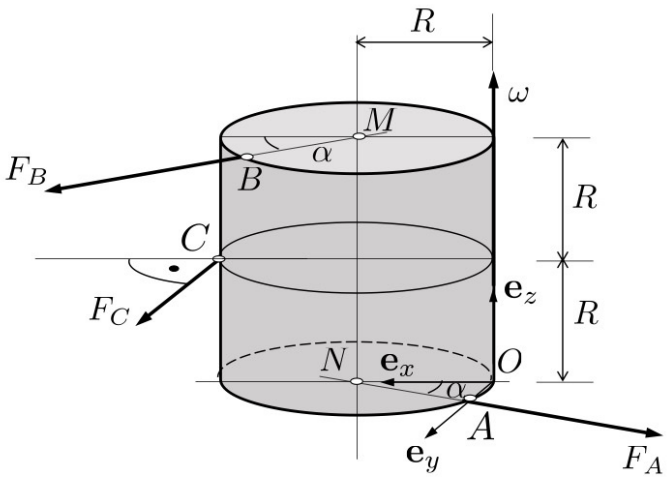
neu hinzugekommene Kräfte

$$= aP \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2aF_{Fy} \\ 2aF_{Fx} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2aF_{Fy} \\ 2aP + 2aF_{Fx} \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 2aP \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2aF_{Fy} = 2aP \Rightarrow F_{Fy} = -P \\ 2aP + 2aF_{Fx} = 0 \Rightarrow F_{Fx} = -P \end{cases}$$

Somit ist $\underline{\vec{F}_F = P \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}$. Von oben (*) haben wir, dass $\begin{cases} F_{Ex} = P - F_{Fx} \\ F_{Ey} = -F_{Fy} \end{cases}$ und somit ist $\underline{\vec{F}_E = P \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$

3. [2] Ein Kreiszylinder mit dem Radius R und der Höhe $2R$ dreht sich mit der Rotationsschnelligkeit ω um die z-Achse. Auf ihn wirken die drei Kräfte $\mathbf{F}_A$, $\mathbf{F}_B$, und $\mathbf{F}_C$ mit den Beträgen F, F bzw. $\sqrt{2}F$. Die beiden Kräfte $\mathbf{F}_A$ und $\mathbf{F}_B$ greifen radial unter einem Winkel von $\alpha = 45°$ an. Die Kraft $\mathbf{F}_C$ verläuft parallel zur $\mathbf{e}_y$-Achse.



Die Leistungen dieser Kräfte können auf zwei Arten bestimmt werden:

wirklich machen!

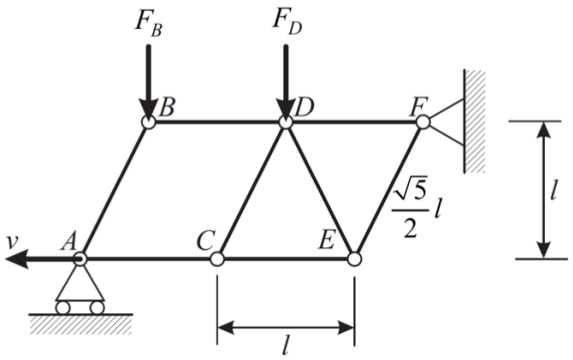
1. Zur Berechnung der Leistungen dürfen die Kräfte längs ihrer Wirkungslinien verschoben werden. Wählen Sie Punkte auf den Wirkungslinien, deren Geschwindigkeiten einfach zu berechnen sind. Ermitteln Sie daraus die Leistungen der drei Kräfte.
2. Berechnen Sie die Momente der Kräfte bezüglich O und daraus die Leistungen.

Tipps:

Dauert ein bisschen lange, aber gute Übung.

Alle Definitionen in den Ü-slides von heute.

4. [3] Der abgebildete ebene Mechanismus besteht aus acht Stäben, welche miteinander gelenkig verbunden und in A sowie F gelagert sind. Die horizontalen Stäbe haben alle die Länge l, die schiefen Stäbe die Länge $\frac{\sqrt{5}l}{2}$. Das horizontal verschiebbare Auflager in A bewegt sich momentan mit der Schnelligkeit v nach links.



↳ d.h. MZ und ω für jeden SK bekannt

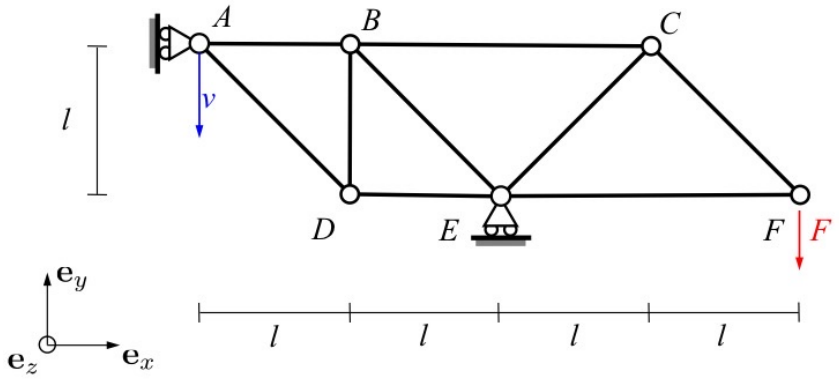
1. Bestimmen Sie den momentanen Bewegungszustand des Systems (Momentenzentren und Rotationsschnelligkeiten aller Starrkörper).
2. Berechnen Sie die Gesamtleistung der Lasten F_B und F_D.

Tipps:

1. geht recht lang. SdpG und SvM verwenden & Konstruktion für MZ-Bestimmung.

2. $P_{tot} = \Sigma_i P_i = \Sigma_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$

5. Das unten skizzierte System besteht aus 9 gelenkig miteinander verbundenen Stäben. Die entsprechenden Längen sind in der Skizze angegeben. Punkt A ist durch ein Rolllager auf eine vertikale und Punkt E auf eine horizontale Bewegung beschränkt. Punkt A bewegt sich mit der Geschwindigkeit v nach unten und die Kraft F greift am Punkt F an (siehe Skizze).



in Ü gelöst

1. Was ist der Freiheitsgrad des Systems und aus wie vielen starren Körpern besteht es?

   (a) Freiheitsgrad = 0, Anzahl Starrkörper = 9

   (b) Freiheitsgrad = 1, Anzahl Starrkörper = 1

   (c) Freiheitsgrad = 1, Anzahl Starrkörper = 3

   (d) Freiheitsgrad = 1, Anzahl Starrkörper = 4

   (e) Freiheitsgrad = 2, Anzahl Starrkörper = 1

2. Wie gross ist die Leistung der Kraft F?

   (a) $P = 0$

   (b) $P = -\frac{1}{2}vF$

   (c) $P = -\frac{\sqrt{5}}{2}vF$

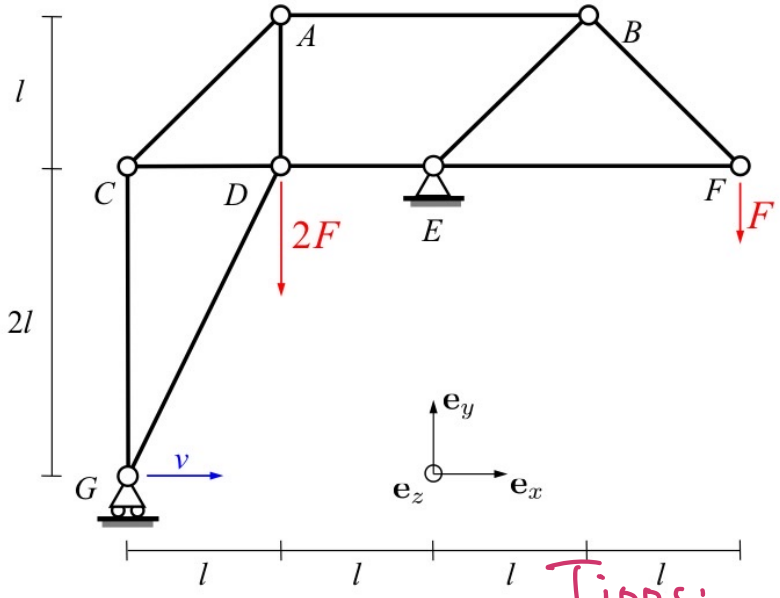
   (d) $P = -vF$

   (e) $P = \frac{\sqrt{5}}{2}vF$

Tipps:

ω bestimmen → $\vec{v}_F$ bestimmen → P bestimmen.

6. Das unten skizzierte System besteht aus 10 gelenkig miteinander verbundenen Stäben. Die entsprechenden Längen sind in der Skizze angegeben. Der Punkt G bewegt sich mit der Geschwindigkeit v in positive x-Richtung und der Punkt E ist gelenkig gelagert. Zwei Kräfte mit Beträgen $2F$ und F wirken an den Punkten D bzw. F in negative y-Richtung.



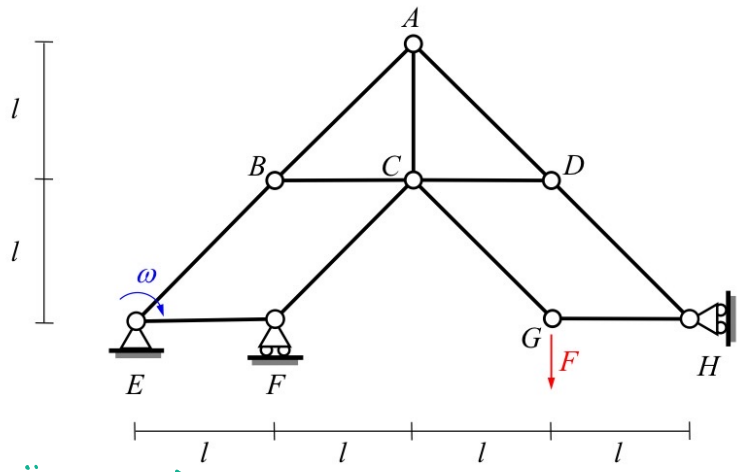
Tipps:

1. Identifizieren Sie alle starren Körper im System. → Dreiecke?
2. Berechnen Sie die Geschwindigkeit im Punkt D. → SvM
3. Berechnen Sie die Geschwindigkeit im Punkt F. → SdpG & SvM.
4. Was ist die Gesamtleistung des Systems?

geometrisch argumentieren & Symmetrien ausnutzen!

↳ $P_{tot} = \sum_i P_i$

7. Das unten skizzierte System besteht aus 11 gelenkig miteinander verbundenen Stäben. Die entsprechenden Längen sind in der Skizze angegeben. Punkt E ist gelenkig gelagert, die Punkte F und H sind durch Rolllager auf eine horizontale bzw. vertikale Bewegung beschränkt. Die Kraft F greift im Punkt G an und der Stab BE hat die Winkelgeschwindigkeit ω.



in Ü gelöst :)

1. Was ist die Winkelgeschwindigkeit ω_{GH} vom Stab GH?
   (a) $\omega_{GH} = 0$
   (b) $\omega_{GH} = \omega$
   (c) $\omega_{GH} = -\omega$
   (d) $\omega_{GH} = 2\omega$
   (e) $\omega_{GH} = \frac{\omega}{2}$

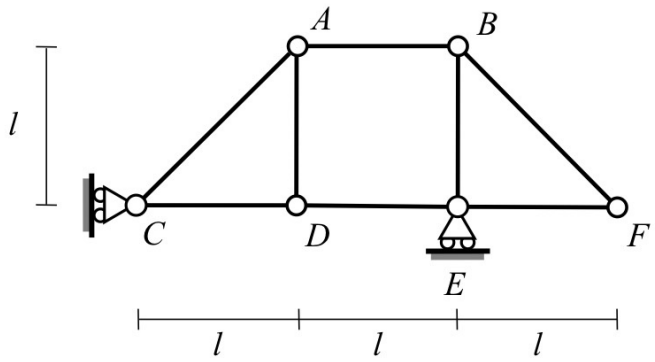
2. Wie gross ist die Gesamtleistung des Systems?
   (a) $P = 0$
   (b) $P = -vF$
   (c) $P = \omega l F$
   (d) $P = -\omega l F$
   (e) $P = 2\omega l F$

Tipps:

$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$

siehe Kochrezept weiter oben in den Ü-slides

8. Das folgende System besteht aus 8 gelenkig miteinander verbundenen Stäben (siehe Skizze). Die Punkte C und E sind durch Rolllager auf eine horizontale bzw. vertikale Bewegung beschränkt. Die Längen der Stäbe sind in der Skizze angegeben.



9. Wie gross ist der Freiheitsgrad des Systems?

(a) 0

(b) 1

(c) 2

(d) 3

(e) 4

Tipps:

$f = n - b$

n: Summe der Freiheitsgrade der einzelnen Körper

b: # linear unabhängige Bindungsgleichungen