# Übung 6

01.11.2022
Lina De Windt

## Themen von Heute:

> Teil 1: Fragen & Inputs zu Themen von letzter Woche

> Teil 2: Recap der Theorie von dieser Woche:

1. Parallele Kräfte
    - 1.1 Dipolmoment & Kräftemittelpunkt
2. Schwerpunkt
    - 2.1 allgemeine Formel für die Schwerpunktberechnung
    - 2.2 Schwerpunkt & Flächen einiger simplen Körper
3. Statik
    - 3.1 Hauptsatz der Statik
    - 3.2 Freischneiden
    - 3.3 Lagerkräfte
    - 3.4 Seilkräfte

auch: Kochrezept Statikaufgaben !

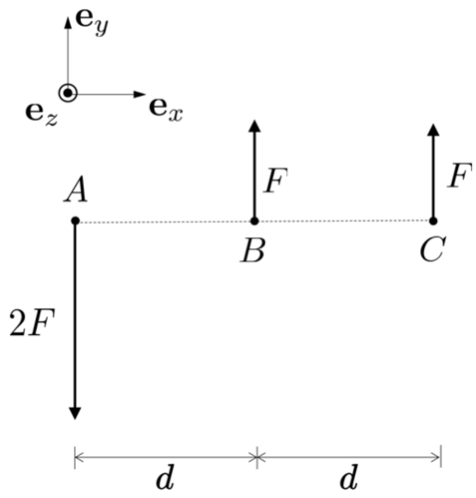
> Teil 3: Übungsaufgaben lösen (Serie 6)

## Teil 1: Fragen & Inputs zu Themen von letzter Woche

↪ Rechte-Hand Regel: Erklärungen auf Webseite :)

Quiztime :)

**6.** Betrachten Sie die aus drei Kräften bestehende Kräftegruppe, die unten skizziert ist. Beträge und Richtungen der Kräfte sind der Skizze zu entnehmen.




Wozu ist die dargestellte Kräftegruppe äquivalent?

(a) Einem Nullsystem

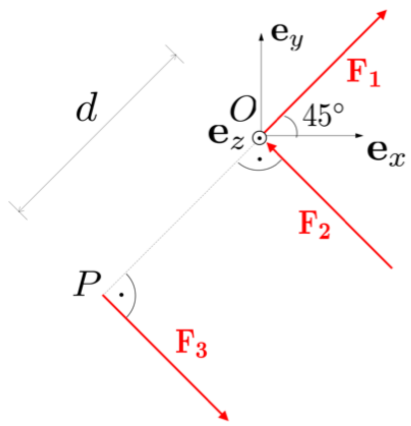
(b) Einer Dyname $\mathbf{R} = 2F\mathbf{e}_y$, $\mathbf{M}_A = 2Fd\mathbf{e}_z$

(c) Einem Kräftepaar $\mathbf{M}_A = 2Fd\mathbf{e}_z$

(d) Einer Resultierenden $\mathbf{R} = 4F\mathbf{e}_y$

(e) Einem Kräftepaar $\mathbf{M}_A = 3Fd\mathbf{e}_z$

**7.** Betrachten Sie die skizzierte, aus den drei Kräften $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$ bestehende Kräftegruppe, wobei jede Kraft den Betrag $F$ hat. Der Abstand zwischen Punkt $O$ und $P$ ist gegeben als $d$.




Wozu ist die dargestellte Kräftegruppe äquivalent?

(a) Einem Nullsystem

(b) Einer Dyname $\mathbf{M}_O = Fd\mathbf{e}_z$, $\mathbf{R} = \frac{F}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y)$

(c) Einer einzelnen Kraft $\mathbf{F} = \frac{F}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y)$

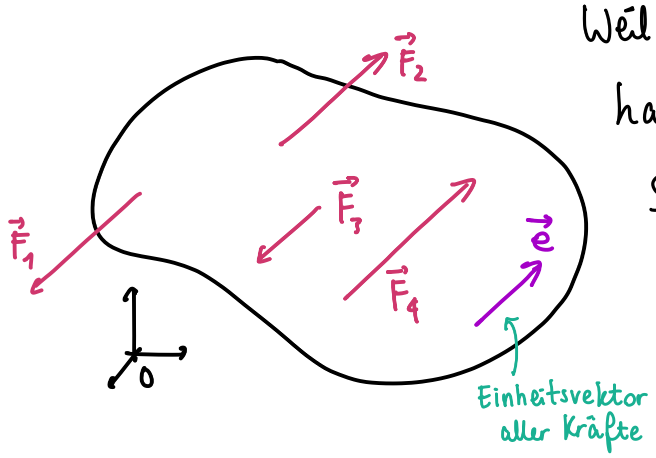
(d) Einer einzelnen Kraft $\mathbf{F} = \frac{F}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y)$

(e) Einem Kräftepaar $\mathbf{M}_O = Fd\mathbf{e}_z$

# Teil 2: Recap der Theorie von dieser Woche

## 1. Parallele Kräfte:

Hier betrachten wir Kräftegruppen $\{\vec{F}_i\} = \{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N\}$, wobei alle Kräfte parallel aufeinander sind:




Weil alle Kräfte parallel aufeinander sind, haben alle den gleichen Richtungsvektor $\vec{e}$.
Somit können wir die Kräfte aufschreiben als:

$\boxed{\phantom{xxxxxxxx}}$

Die Resultierende ist dann $\vec{R} =$

und das Moment bezüglich 0: $\vec{M}_0^{tot} =$

wobei $\vec{N} = \sum_{i=1}^{n} F_i \vec{r}_i$ Das Dipolmoment der Kräftegruppe ist.

Bem: Bei parallelen Kräften ist die 2. Invariante ______.

## 1.1 Dipolmoment & Kräftemittelpunkt

Das Dipolmoment einer Kräftegruppe ($\exists$ nur wenn alle Kräfte parallel aufeinander)

ist definiert als : $\boxed{\phantom{xxxxxxxxxx}}$

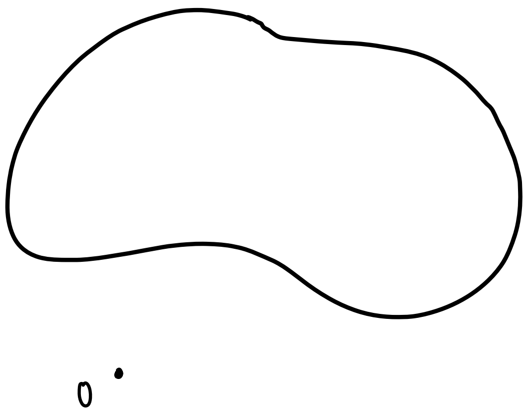
wobei : $F_i$: Richtungsbehafteter Betrag der einzelnen Kräfte

$\vec{r}_i$: Ortsvektor des Angriffspkts. der jeweiligen Kraft

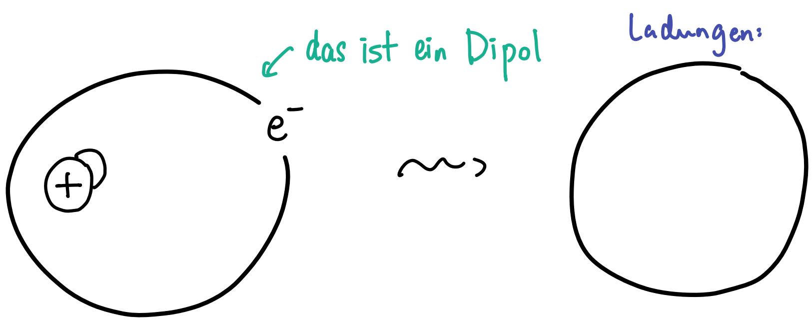
**Fallunterscheidung:**

$\vec{R}=0$: Dann ist das Dipolmoment unabhängig vom Punkt O.

Why?




Warum ist das wichtig für uns? → in Elektrostatik passiert genau das!



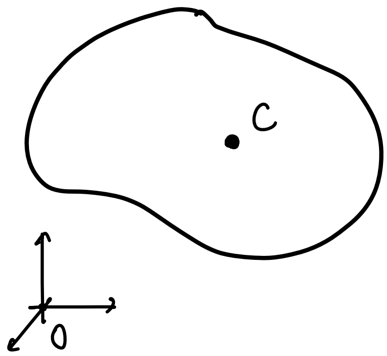

Dipolmoment ist unabhängig vom Bezugssystem

Atom in GGW

in GGW heisst: $\vec{R}=0$

⚠ Das elektrische Dipolmoment ist ein Mass für die räumliche Ladungstrennung (d.h. "Stärke" des Dipolcharakters z.B. eines Moleküls)

$\vec{R} \neq 0$ : Dann ist das Dipolmoment abhängig vom Bezugspunkt & es interessiert uns auch, wo der Kräftemittelpunkt C ($\hat{=}$ dort wo $\vec{R}$ angreift) ist:




**Kräftemittelpunkt:**

↳ Herleitung in den VL-Slides (nicht wichtig)

# 2. Schwerpunkt (auch: Massenmittelpunkt) ← in TechMech nur in 2D :)

⇒ hier greift die Gewichtskraft eines Körpers an.

## 2.1 allgemeine Formel für die Schwerpunktberechnung:

Die x- und y-Koordinate des Schwerpunkts werden so berechnet:

Der Schwerpunkt ist dann:

Wobei $\sum_i x_i A_i$ =" Summe der x-Komponenten der Schwerpunktsortsvektoren aller Teilkörper" mal "Fläche der jeweiligen Teilkörper"

und $\sum_i A_i$ = Summe aller Flächen der Teilkörper ($\hat{=}$ Gesamtfläche)

analog für y

⊛ Wenn der Körper homogen ist & wir einfache Geometrien haben

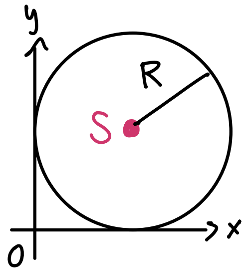
→ in TechMech immer der Fall. d.h. Integral-formel ist für uns nicht wichtig :)

Doch um diese Formel anwenden zu können, brauchen wir die Schwerpunkte einiger simplen Körper!

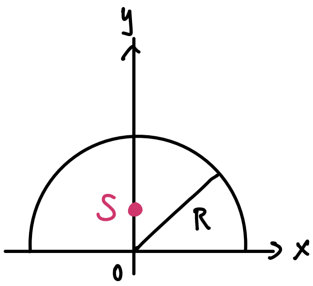
## 2.2 Schwerpunkte & Flächen einiger simplen Körper:

⚠ Achte wo das Koordinatensystem ist!

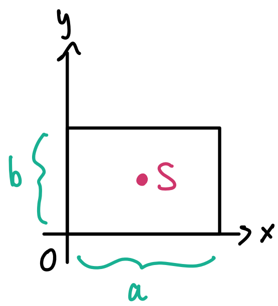
**Kreis:**



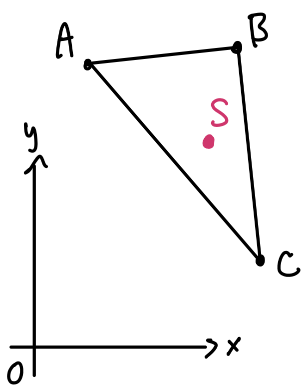

**Halbkreis:**




**Rechteck:**



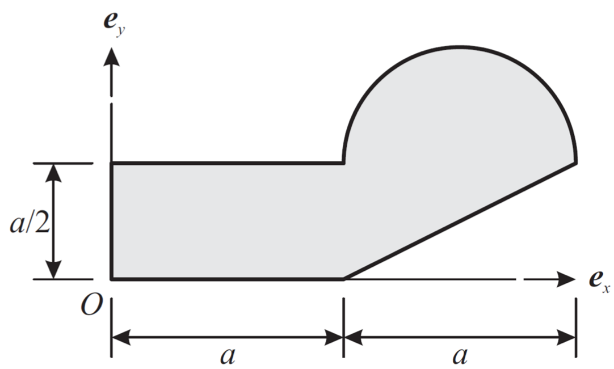

**Dreieck:**




↳ hier sind alle Körper homogen.

Beispielaufgabe: Serie 6 Aufgabe 8

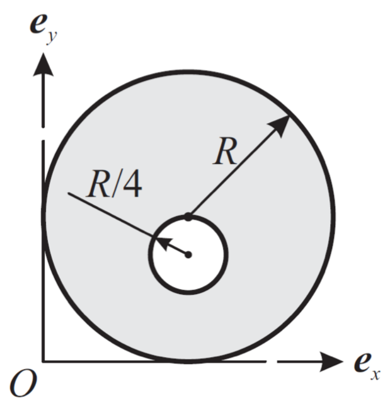
**8.** [4] Finden Sie den Schwerpunkt des unten skizzierten, homogenen, ebenen Körpers.




*Annahme: Der Körper ist eben und hat eine homogene Massenverteilung.*

Bem. : "negative Masse"

**9.** [5] Finden Sie den Schwerpunkt des unten skizzierten, homogenen, ebenen Körpers.




*Annahme: Der Körper ist eben und hat eine homogene Massenverteilung.*

# 3. Statik:

– Ziel: Bindungskräfte eines Systems bestimmen:

## 3.1 Hauptsatz der Statik:

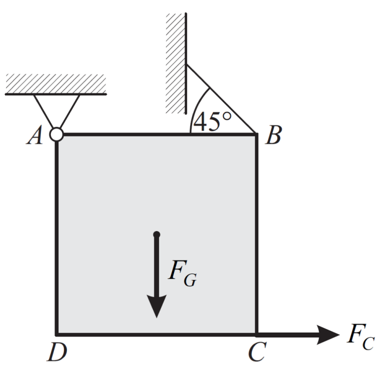
Damit ein System in Ruhe ist, gilt

Bem: Moment ist unabhängig vom Bezugspunkt wegen $\vec{R}=0$

## 3.2 Freischneiden:

Beim analysieren eines Systems (d.h. Bindungskräfte bestimmen usw.) muss man immer als allererster Schritt alle Starrkörper freischneiden. Dabei zeichnet man alle Kräfte (auch Bindungskräfte!) ein, die auf das System wirken.

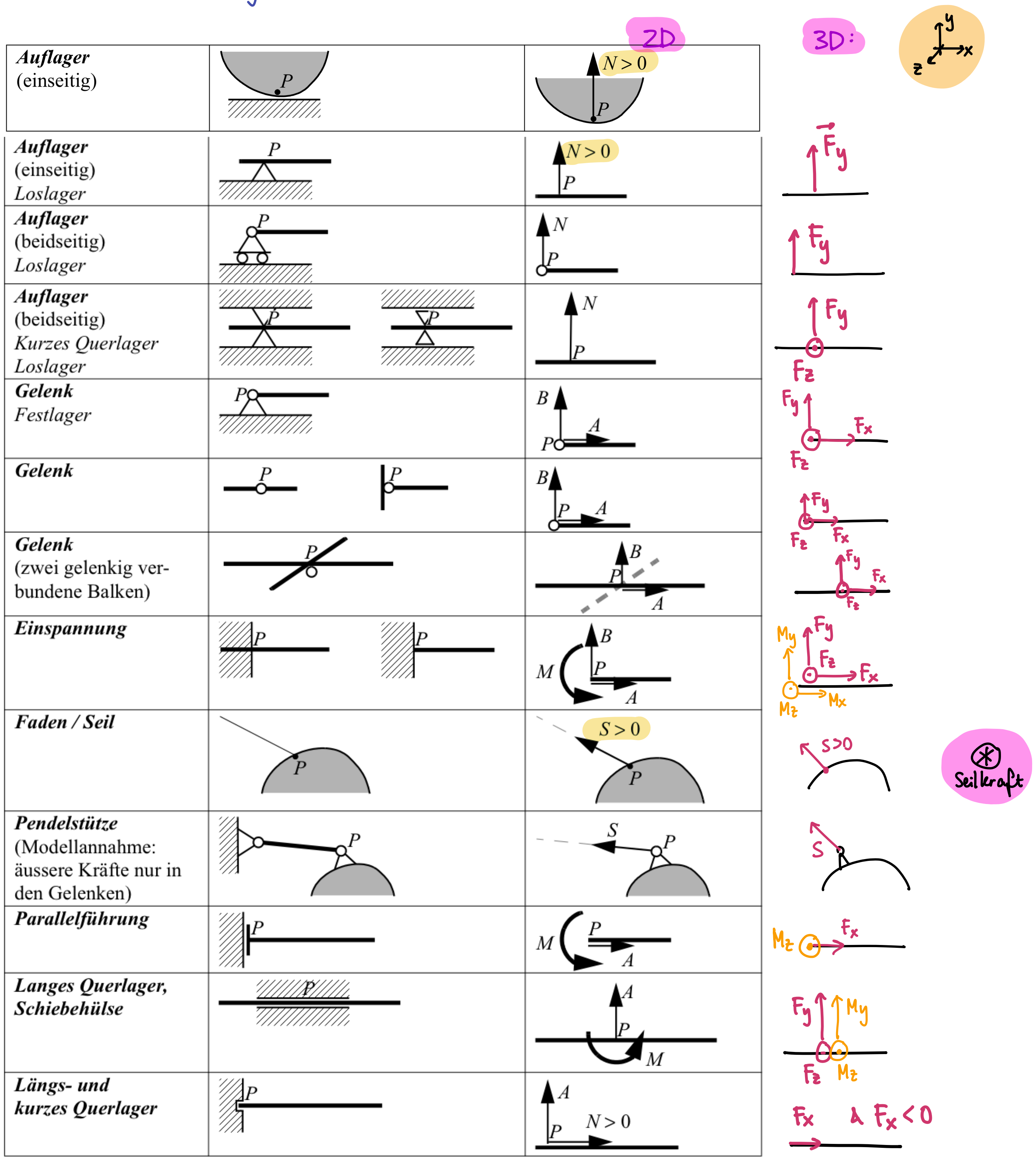
Bsp: (aus Serie 6, A1)




freischneiden

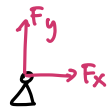
## 3.3 Lagerkräfte: Beim freischneiden muss man die Lagerkräfte so einzeichnen:

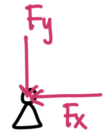
Lager vor dem Freischnitt — nach Freischnitt




↳ aus Skript S.54~55

**Good to know:** Man zeichnet die Kräfte / Momente dort ein, wo die Bewegung / Rotation in diese Richtung vom Lager aufgehalten wird. D.h. dort wo die Bewegung wegen dem Lager nicht zugelassen ist.

**Wichtig:** Es ist egal, ob ihr die Kräfte / Momente in plus oder minus Richtung einzeichnet (d.h. z.B. 

oder 

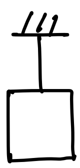
egal)

⇒ Bei den Aufgaben / an der Prüfung wird die Skizze berücksichtigt!
(Deswegen auch: zeichnet die Kräfte sauber ein beim freischneiden)

**Seilkräfte:** Seile können nur auf Zug belastet werden. Das heisst:

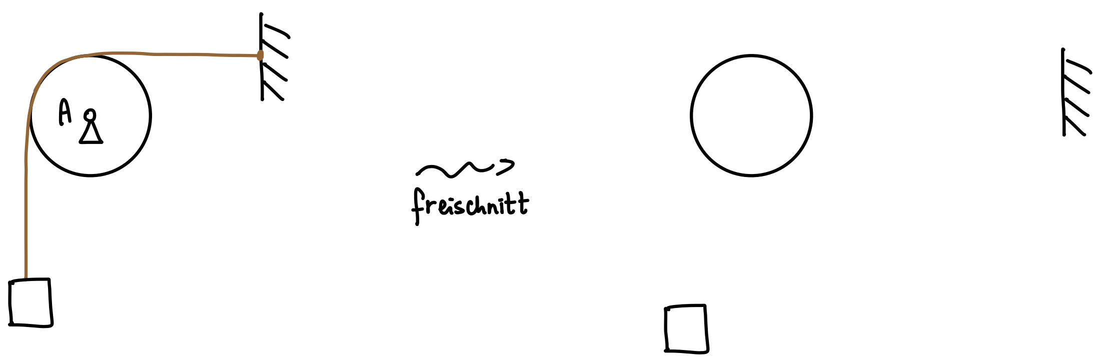
- Seilkräfte immer auf Zug (weg vom Körper) & in Seilrichtung zeichnen
- Bedingung: $\boxed{\quad\quad\quad}$ S: Seilkraft

Bsp:



**Wichtig:** Reibungsfreie Umlenkungen: Seilkraft ist an beiden Enden gleich gross

Bsp:




So weit so gut, aber wofür brauchen wir das Ganze jetzt?

## Kochrezept für Statikaufgaben:

1) Koordinatensystem einführen & Freischnittskizze erstellen.

wie ihr wollt ! aber macht euer leben nicht unnötig schwer ...

- Lager ersetzen durch Lagerkräfte gemäss Tabelle (Seile auch)
- Alle äusseren Kräfte & Momente eintragen
- Falls nicht masselos → Gewichtskräfte eintragen

2) Gleichgewichtsbedingungen formulieren:

3D: $R = R_x = R_y = R_z = 0$ $\quad M = M_x = M_y = M_z = 0$ $\quad$ 6 Gleichungen pro SK

2D: $R = R_x = R_y = 0$ $\quad M = M_z = 0$ $\quad$ 3 Gleichungen pro SK

& nach gesuchten Kräften / Momenten auflösen

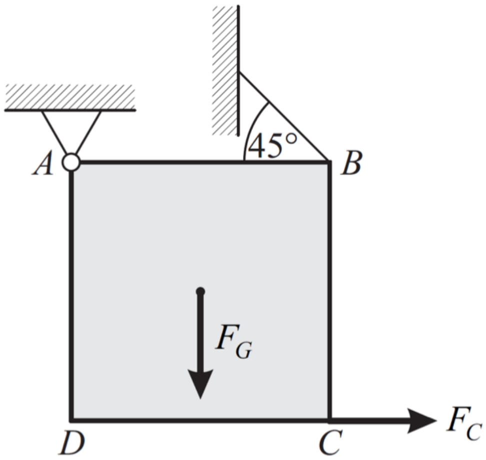
3) Diskussion über Ruhe:

- Seilkräfte nur auf Zug belastet → $S > 0$
- Auflager hebt nicht ab → $F_y > 0 \quad \forall$ Auflager

↳ Schauen wir uns das ganze anhand eines Beispiels an!

Beispielaufgabe: Serie 6 Aufgabe 1

**1.** [1] Eine homogene Quadratplatte ist durch ihr Eigengewicht $F_G$ sowie durch eine horizontale Kraft vom Betrag $F_C$ belastet. Die Platte ist in der Ecke $A$ gelenkig reibungsfrei gelagert sowie mit einem gewichtslosen Faden an der Ecke $B$ gestützt.



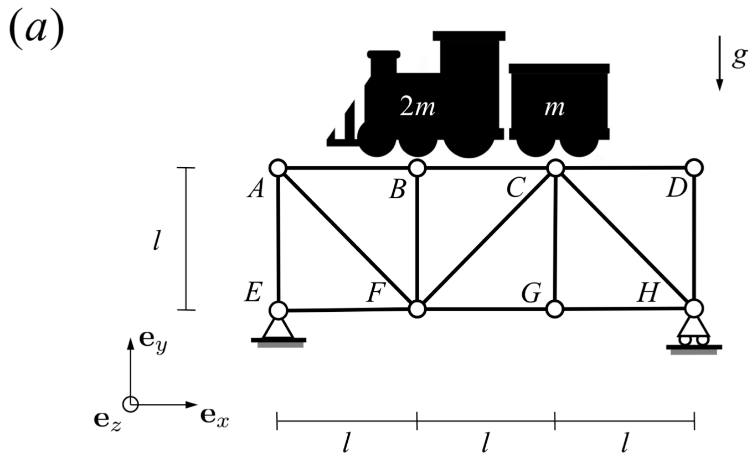

1. Ermitteln Sie alle an der Platte angreifenden Bindungskräfte.
2. Wie gross darf $F_C$ höchstens sein, damit die Platte noch ruht?

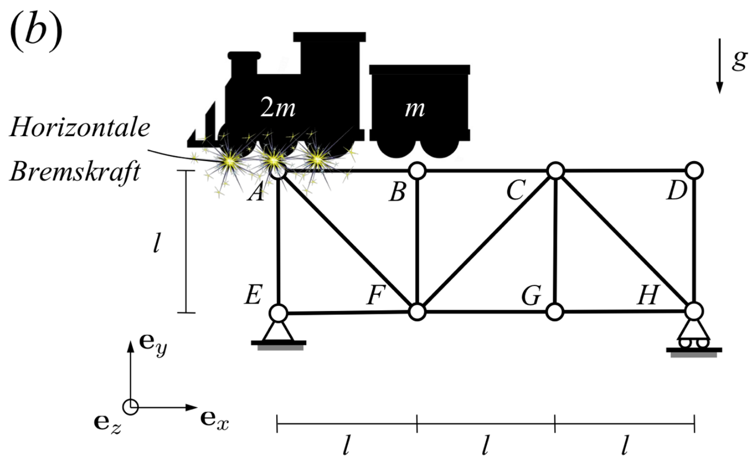
# Teil 3: Übungsaufgaben - Serie 6

↪ A1, A6, A7, A8 in Ü-Stunde gelöst :)

Statikaufgabe

**2.** Ein Zug, bestehend aus einer $2m$ schweren Lokomotive und einem $1m$ schweren Waggon, fährt über eine Fachwerkbrücke. Zug und Waggon können als Punktmassen modelliert werden und die erzeugten Kräfte wirken direkt auf die darunterliegenden Punkte, z.B. wirken die Kräfte der Lokomotive im ersten Aufgabenteil (Abbildung a) nur auf Punkt $B$. Die starr gebaute Brücke ist im Punkt $E$ mit einem Festlager und im Punkt H mit einem beidseitigen Auflager verbunden (siehe Skizze).



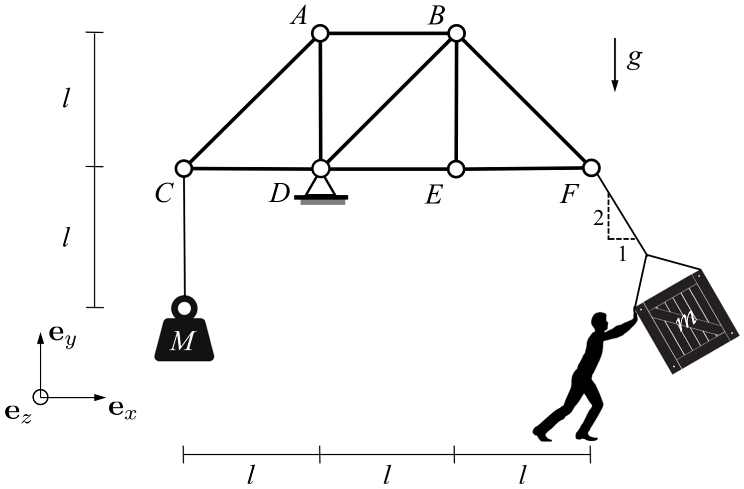

1. Berechnen Sie die Reaktionskräfte in den Punkten E und H für den in Abbildung (a) gezeigten Fall.
2. Der Zug muss am Ende der Brücke eine Notbremsung durchführen, siehe Abbildung (b). Die Bremskräfte werden nur von der Lokomotive in negativer $\mathbf{e}_x$ Richtung erzeugt und betragen die Hälfte der Gewichtskraft der Lokomotive. Wie gross sind die Reaktionskräfte in den Lagern E und H?

Tipps: Genau wie im Kochrezept vorgehen.

Beim Freischnitt gut überlegen, welche Kräfte wo angreifen.

Statikaufgabe

**3.** Der unten stehende Fachwerkkran ist mit einer Kiste (Gewicht $m$) beladen. Zusätzlich zur Gravitationskraft stösst jemand die Kiste in positive $\mathbf{e}_x$-Richtung mit der Kraft $mg/2$ (siehe Skizze). Im Punkt $C$ greift das Gegengewicht $M$ in negativer $\mathbf{e}_y$-Richtung an. Der Punkt D ist gelenkig gelagert.




Wie schwer muss das Gegengewicht $M$ sein, damit das System im Gleichgewicht bleibt (Ruhezustand)?

(a) $m$

(b) $\frac{\sqrt{5}}{2}m$

(c) $2m$

(d) $\sqrt{5}m$

(e) $3m$

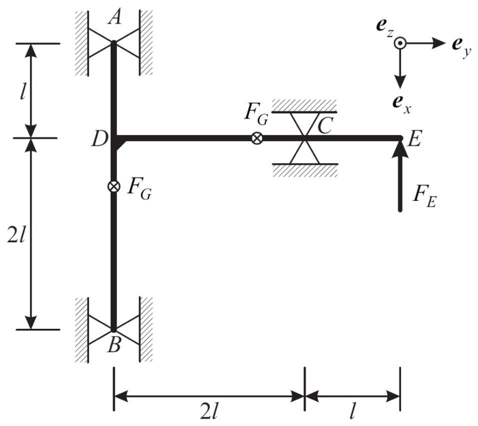
**Tipps:**

- Beim Freischnitt gut überlegen, welche Kräfte wo angreifen.
  ↳ Tipp bei Punkt C: die Kraft, die am Punkt C angreift, ist $\begin{pmatrix} 0 \\ -Mg \end{pmatrix}$ (g: Erdbeschleunigung!)
- GGW-Gleichungen aufstellen und nach M auflösen.

Statikaufgabe

**4.** [2] Zwei gleichlange Stäbe der Länge $3l$ sind in $D$ gemäss Skizze rechtwinklig zusammengeschweisst. Sie haben jeweils das Gewicht $F_G$. Das System liegt in einer Horizontalebene. Es ist in $A$, $B$ und $C$ durch kurze räumliche Querlager gelagert. In $E$ wirkt eine horizontale Kraft vom Betrag $F_E$.

*Tipp: Führen Sie in $A$ und $B$ Lagerkräfte in $y$- und $z$-Richtung ein, in $C$ Lagerkräfte in $x$- und $z$-Richtung.*




Bestimmen Sie die Lagerkräfte in $A$, $B$ und $C$.

Tipps: Gleich vorgehen wie Aufgaben 1,2,3

→ Kochrezept & Bsp. in Ü-Stunde!

aber das ist (neu) eine 3D - Aufgabe.

→ d.h. 6 GGW-Gleichungen:

KB(x) = ...

KB(y) = ..

KB(z) = ...

MB(_, x) = ...

MB(_, y) = ...

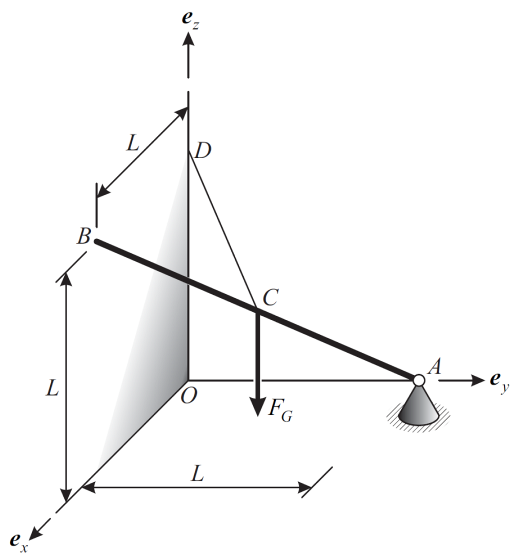
MB(_, z) = ...

Punkt selber wählen

alle aufstellen & nach den Unbekannten lösen.

Statikaufgabe

**5.** [3] Wir betrachten einen starren Balken (Länge $\sqrt{3}L$ ) im Raum. Er ist im Punkt $A$ reibungsfrei gelenkig gelagert und wird im Punkt $B$ reibungsfrei von der Wand (xz-Ebene) abgestützt. Zwischen den Punkten $C$ (Mittelpunkt des Balkens) und $D$ ist ein gewichtsloses Seil gespannt. Auf den Balken wirkt sein Eigengewicht $F_G$ im Massenmittelpunkt $C$.

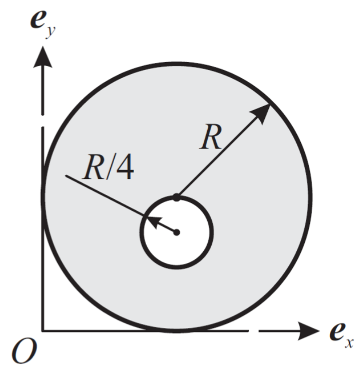



Berechnen Sie die Bindungskräfte in den Punkten $A$, $B$ und $C$.

Tipps:
- ein bisschen kompliziertere Geometrie → sich Zeit nehmen bei der Berechnung der Richtung der Bindungskräfte!
- Danach wie im Kochrezept für Statikaufgaben / im Bsp. in Ü vorgehen
- 3D → 6 GGW-Gleichungen!

Schwerpunktberechnung

**9.** [5] Finden Sie den Schwerpunkt des unten skizzierten, homogenen, ebenen Körpers.




*Annahme: Der Körper ist eben und hat eine homogene Massenverteilung.*

Tipps: – Welche einfache Geometrien haben wir hier?

↪ berechne Schwerpkte dieser Geometrien!

↪ in Vektorform!

↪ verwende Formeln aus Ü-slides

– Konzept der negativen Masse (in Ü angeschaut) anwenden!