Technische Mechanik

Übung 6

01.11.2022
Lina De Windt

Themen von Heute:

> Teil 1: Fragen & Inputs zu Themen von letzter Woche

> Teil 2: Recap der Theorie von dieser Woche:

1. Parallele Kräfte
   - 1.1 Dipolmoment & Kräftemittelpunkt
2. Schwerpunkt
   - 2.1 allgemeine Formel für die Schwerpunktberechnung
   - 2.2 Schwerpunkt & Flächen einiger simplen Körper
3. Statik
   - 3.1 Hauptsatz der Statik
   - 3.2 Freischneiden
   - 3.3 Lagerkräfte
   - 3.4 Seilkräfte

auch: Kochrezept Statikaufgaben !

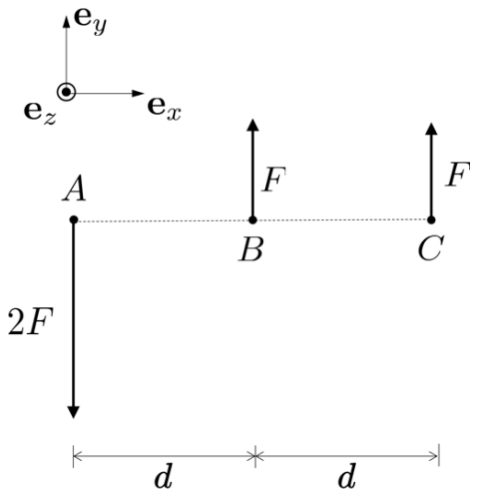
> Teil 3: Übungsaufgaben lösen (Seite 6)

Teil 1: Fragen & Inputs zu Themen von letzter Woche

↪ Rechte-Hand Regel: Erklärungen auf Webseite :)

Quiztime :)

6. Betrachten Sie die aus drei Kräften bestehende Kräftegruppe, die unten skizziert ist. Beträge und Richtungen der Kräfte sind der Skizze zu entnehmen.



Wozu ist die dargestellte Kräftegruppe äquivalent?

(a) Einem Nullsystem

(b) Einer Dyname $\mathbf{R} = 2F\mathbf{e}_y$, $\mathbf{M}_A = 2Fd\mathbf{e}_z$

(c) Einem Kräftepaar $\mathbf{M}_A = 2Fd\mathbf{e}_z$

(d) Einer Resultierenden $\mathbf{R} = 4F\mathbf{e}_y$

(e) Einem Kräftepaar $\mathbf{M}_A = 3Fd\mathbf{e}_z$

→ Dyname in A berechen: wegen

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ -2F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{M}_A^{tot} = \sum_i \vec{M}_A^i = dF\vec{e}_z + 2dF\vec{e}_z = 3dF\vec{e}_z$$

Moment in 2D: $\pm r \cdot F \cdot \vec{e}_z$ ← nur z-Komponente

Vorzeichen mit rechte Hand Regel bestimmen

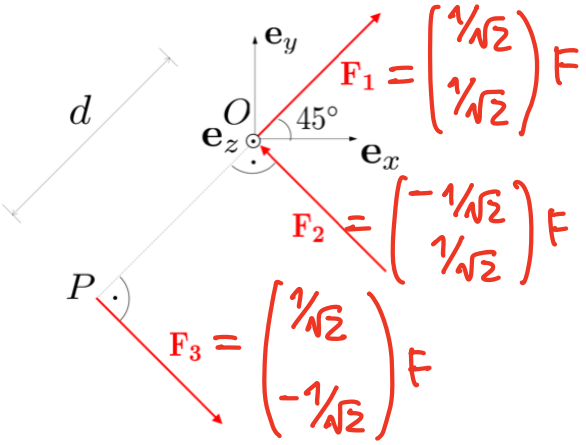
↑↑ Beträge

wenn

Erinnerung: "Kräftepaar": $\vec{R} = 0$, $\vec{M} \neq 0$

⇒ e)

7. Betrachten Sie die skizzierte, aus den drei Kräften $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$ bestehende Kräftegruppe, wobei jede Kraft den Betrag F hat. Der Abstand zwischen Punkt O und P ist gegeben als d.



Wozu ist die dargestellte Kräftegruppe äquivalent?

(a) Einem Nullsystem

(b) Einer Dyname $\mathbf{M}_O = Fd\mathbf{e}_z$, $\mathbf{R} = \dfrac{F}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y)$

(c) Einer einzelnen Kraft $\mathbf{F} = \dfrac{F}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y)$

(d) Einer einzelnen Kraft $\mathbf{F} = \dfrac{F}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y)$

(e) Einem Kräftepaar $\mathbf{M}_O = Fd\mathbf{e}_z$

→ Dyname in Punkt O berechnen:

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} F + \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} F + \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} F = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} F$$

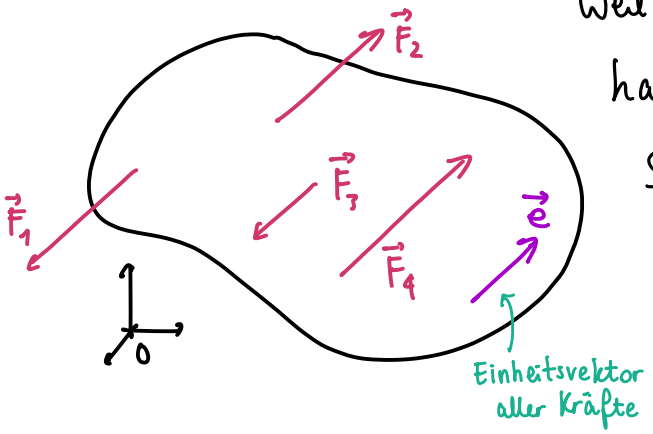
$$\vec{M}_0^{tot} = dF\vec{e}_z$$

⇒ b)

Teil 2: Recap der Theorie von dieser Woche

1. Parallele Kräfte:

Hier betrachten wir Kräftegruppen $\{\vec{F}_i\} = \{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N\}$, wobei alle Kräfte parallel aufeinander sind:



Weil alle Kräfte parallel aufeinander sind, haben alle den gleichen Richtungsvektor $\vec{e}$.

Somit können wir die Kräfte aufschreiben als:

$$\vec{F}_i = F_i \vec{e}$$

Die Resultierende ist dann $\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n} F_i \vec{e} = R\vec{e}$

und das Moment bezüglich O: $\vec{M}_0^{tot} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n} F_i \vec{r}_i \times \vec{e} = \vec{N} \times \vec{e}$

($\vec{F}_i = F_i \vec{e}$)

wobei $\vec{N} = \sum_{i=1}^{n} F_i \vec{r}_i$ Das Dipolmoment der Kräftegruppe ist.

Bem: Bei parallelen Kräften ist die 2. Invariante null.

SP von 2 Vektoren

$$I_2 = \vec{R} \cdot \vec{M}_0 = R\vec{e} \cdot (\vec{N} \times \vec{e}) = 0$$

$\vec{N} \times \vec{e}$ ⊥ auf $\vec{e}$

1.1 Dipolmoment & Kräftemittelpunkt

Das Dipolmoment einer Kräftegruppe ($\exists$ nur wenn alle Kräfte parallel aufeinander)

ist definiert als: $$\vec{N} = \sum_{i=1}^{n} F_i \vec{r}_i$$

wobei: F_i: Richtungsbehafteter Betrag der einzelnen Kräfte

↑ d.h. es kann auch negativ sein je nach Richtung von $\vec{e}$

$\vec{r}_i$: Ortsvektor des Angriffspkts. der jeweiligen Kraft

Fallunterscheidung:

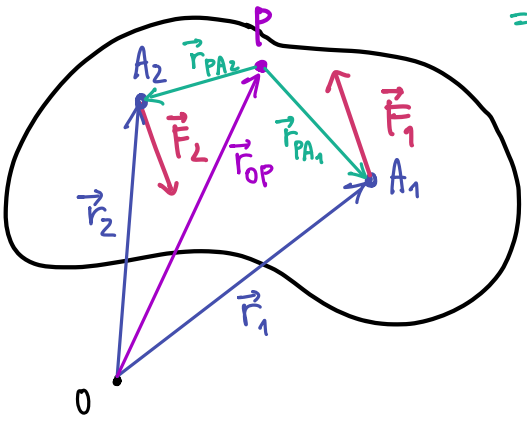
$\vec{R}=0$: Dann ist das Dipolmoment unabhängig vom Punkt O.

Why? $\vec{N} = \sum_{i=1}^{n} F_i \vec{r}_i = \sum_i F_i (\vec{r}_{OP} + \vec{r}_{PA_i}) = \underbrace{\sum_i F_i \vec{r}_{OP}}_{=0} + \sum_i F_i \vec{r}_{PA_i} = \sum_i F_i \vec{r}_{PA_i}$

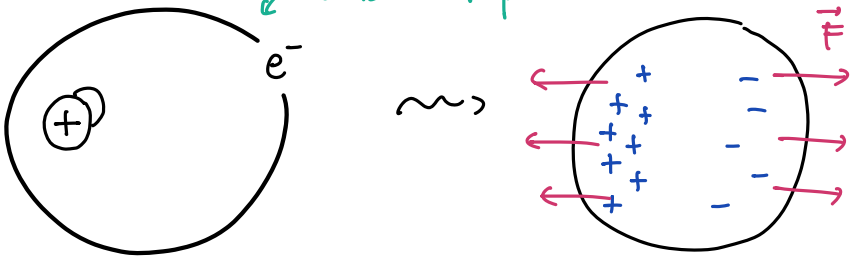
↑ Ortsvektor (von O aus)

weil: $\sum_i F_i \vec{r}_{OP} = \vec{r}_{OP} \cdot \sum_i F_i = \vec{r}_{OP} \cdot \vec{R} = 0$

↑ unabhängig von wo aus die "Ortsvektoren" kommen → unabhängig vom Bezugssystem



Warum ist das wichtig für uns? → in Elektrostatik passiert genau das!



↙ das ist ein Dipol

Ladungen:

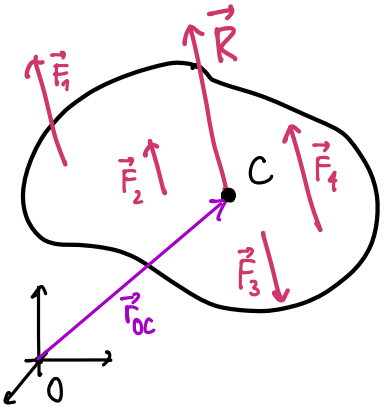
Atom in GGW

in GGW heisst : $\vec{R}=0$

Dipolmoment ist unabhängig vom Bezugssystem

⚠ Das elektrische Dipolmoment ist ein Mass für die räumliche Ladungstrennung (d.h. "Stärke" des Dipolcharakters z.B. eines Moleküls)

$\vec{R} \neq 0$: Dann ist das Dipolmoment abhängig vom Bezugspunkt & es interessiert uns auch, wo der Kräftemittelpunkt C (≙ dort wo $\vec{R}$ angreift) ist:



Kräftemittelpunkt:

$$\vec{r}_{OC} = \frac{\sum F_i \vec{r}_i}{\sum F_i}$$

↳ Herleitung in den VL-Slides (nicht wichtig)

Der Schwerpunkt ist dann:

2. Schwerpunkt (auch: Massenmittelpunkt) ← in TechMech nur in 2D :)

⇒ hier greift die Gewichtskraft eines Körpers an.

2.1 allgemeine Formel für die Schwerpunktberechnung:

Die x- und y-Koordinate des Schwerpunkts werden so berechnet:

$$x_S = \frac{\int_{\Delta A} x \, dA}{A} \overset{\circledast}{=} \frac{\sum_i x_i A_i}{\sum_i A_i}$$

$$y_S = \frac{\int_{\Delta A} y \, dA}{A} \overset{\circledast}{=} \frac{\sum_i y_i A_i}{\sum_i A_i}$$

Der Schwerpunkt ist dann:

$$\vec{r}_{OS} = \begin{pmatrix} x_S \\ y_S \end{pmatrix}$$

↑ Ortsvektor vom Schwerpunkt

Wobei $\sum_i x_i A_i$ = " Summe der x-Komponenten der Schwerpunktsortsvektoren aller Teilkörper" mal "Fläche der jeweiligen Teilkörper"

und $\sum_i A_i$ = Summe aller Flächen der Teilkörper ($\hat{=}$ Gesamtfläche)

↑ analog für y

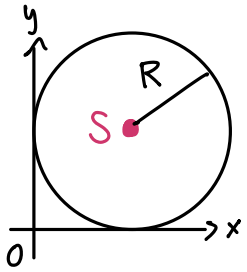
$\circledast$ Wenn der Körper homogen ist & wir einfache Geometrien haben
→ in TechMech immer der Fall. d.h. Integral-formel ist für uns nicht wichtig :)

Doch um diese Formel anwenden zu können, brauchen wir die Schwerpunkte einiger simplen Körper!

2.2 Schwerpunkte & Flächen einiger simpler Körper:

⚠ Achte wo das Koordinatensystem ist!

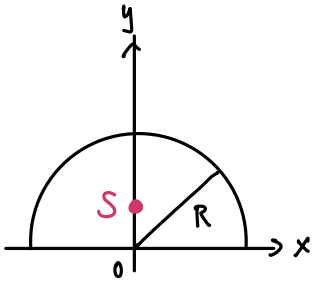
Kreis:



$$\vec{r}_{OS} = \begin{pmatrix} R \\ R \end{pmatrix}$$

$$A = \pi r^2$$

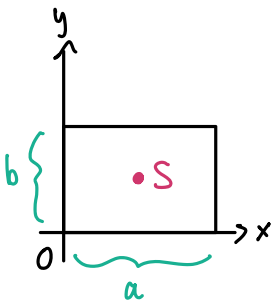
Halbkreis:



$$\vec{r}_{OS} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4R}{3\pi} \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2}\pi r^2$$

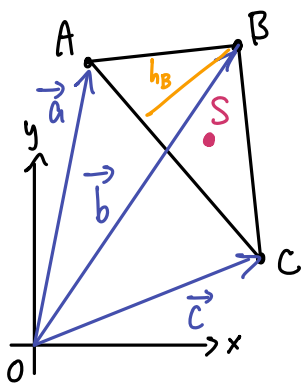
Rechteck:



$$\vec{r}_{OS} = \begin{pmatrix} a/2 \\ b/2 \end{pmatrix}$$

$$A = a \cdot b$$

Dreieck:



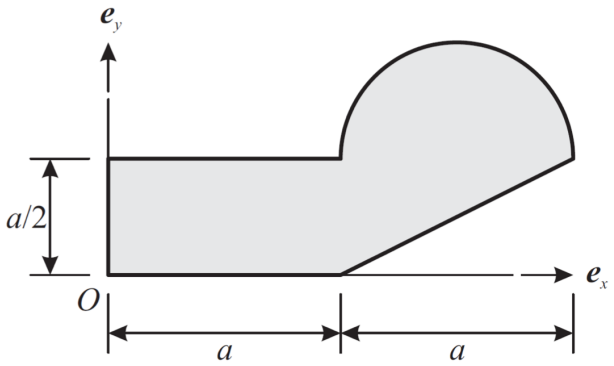
$$\vec{r}_{OS} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$

$$A = \frac{1}{2} AC h_B$$

↳ Annahme: alle Körper homogen!

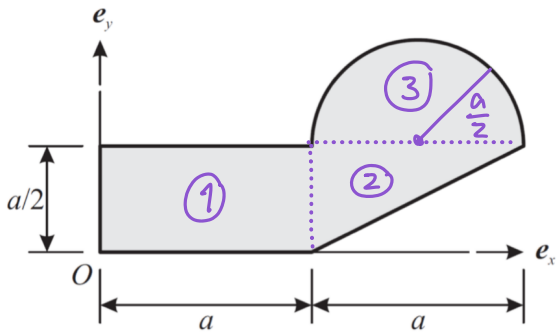
Beispielaufgabe: Serie 6 Aufgabe 8

8. [4] Finden Sie den Schwerpunkt des unten skizzierten, homogenen, ebenen Körpers.



Annahme: Der Körper ist eben und hat eine homogene Massenverteilung.

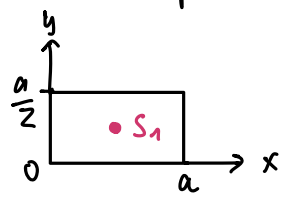
Schritt 1: Körper in einfachere Körper zerteilen:



Schritt 2: Schwerpunkte und Flächen der einzelnen Körper bestimmen:

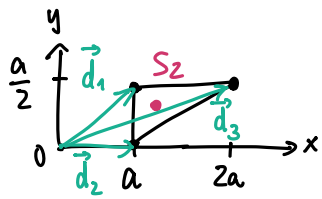
rosa: später für Formel

① :



$$\vec{r}_{OS_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a \leftarrow x_1 \\ \frac{1}{4}a \leftarrow y_1 \end{pmatrix} \qquad A_1 = \frac{a}{2} \cdot a = \frac{a^2}{2}$$

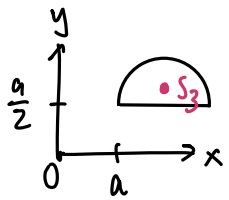
② :



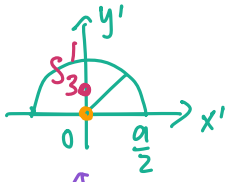
$$\vec{r}_{OS_2} = \frac{\vec{d}_1 + \vec{d}_2 + \vec{d}_3}{3} = \frac{\begin{pmatrix} a \\ \frac{1}{2}a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a \\ \frac{1}{2}a \end{pmatrix}}{3} = \frac{\begin{pmatrix} 4a \\ a \end{pmatrix}}{3} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{4}{3}a \leftarrow x_2 \\ \frac{1}{3}a \leftarrow y_2 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot a = \frac{a^2}{4}$$

③ :



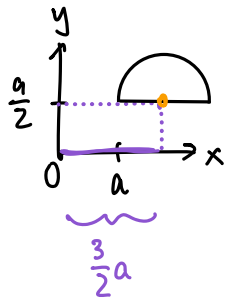
Zwischenschritt machen:



$$\vec{r}'_{OS_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{3\pi}\frac{a}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3\pi}a \end{pmatrix}$$

↑ Koordinaten so setzen

Dann verschieben s.d. wir die richtigen Koordinaten haben:



$$\rightarrow \vec{r}_{OS_3} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3\pi}a \end{pmatrix}}_{\vec{r}'_{OS_3}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{3}{2}a \\ \frac{1}{2}a \end{pmatrix}}_{\text{Verschiebung der Koordinatenachse}} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}a \\ \left(\frac{2}{3\pi}+\frac{1}{2}\right)a \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow x_3 \\ \leftarrow y_3 \end{matrix}$$

$$A_3 = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2\pi}{2} = \frac{a^2}{8}\pi$$

Gesamtfläche: $A = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{8}\pi = \left(\frac{3}{4}+\frac{\pi}{8}\right)a^2$

Ortsvektor vom Schwerpunkt

$\Rightarrow \vec{r}_{OS}$ bestimmen:

x-Koordinate von $\vec{r}_{OS}$:

$$x_S = \frac{\sum_i x_i A_i}{\sum_i A_i} = \frac{x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3}{A} = \frac{\frac{1}{2}a\cdot\frac{a^2}{2} + \frac{4}{3}\cdot\frac{a^2}{4} + \frac{3}{2}a\cdot\frac{a^2}{8}\pi}{\left(\frac{3}{4}+\frac{\pi}{8}\right)a^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{4}a + \frac{1}{3}a + \frac{3}{16}\pi a}{\frac{3}{4}+\frac{\pi}{8}} = \frac{\frac{7}{12}a + \frac{3}{16}\pi a}{\frac{6+\pi}{8}} \cdot \underbrace{\frac{48}{48}}_{=\cdot 1} = \frac{(28+9\pi)a}{6\cdot(6+\pi)}$$

y-Koordinate von $\vec{r}_{OS}$:

$$y_S = \frac{\sum_i y_i A_i}{\sum_i A_i} = \frac{y_1A_1 + y_2A_2 + y_3A_3}{A} = \frac{\frac{1}{4}a\cdot\frac{a^2}{2} + \frac{1}{3}a\cdot\frac{a^2}{4} + \left(\frac{2}{3\pi}+\frac{1}{2}\right)a\cdot\frac{a^2}{8}\pi}{\left(\frac{3}{4}+\frac{\pi}{8}\right)a^2} =$$

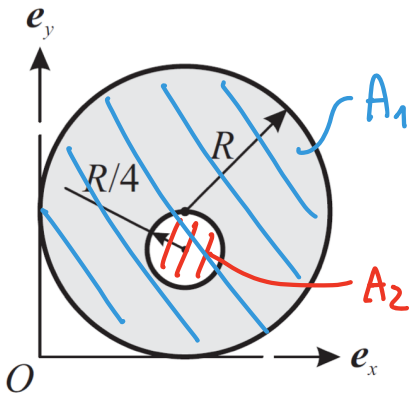
$$= \frac{\frac{1}{8}a + \frac{1}{12}a + \frac{1}{12}a + \frac{1}{16}\pi a}{\frac{3}{4}+\frac{\pi}{8}} = \frac{\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{6}+\frac{1}{16}\pi\right)a}{\frac{6+\pi}{8}} \cdot \frac{48}{48} = \frac{(6+8+3\pi)a}{6\cdot(6+\pi)}$$

$$= \frac{(14+3\pi)a}{6\cdot(6+\pi)}$$

Somit ist $\vec{r}_{OS} = \begin{pmatrix} \frac{(28+9\pi)a}{6\cdot(6+\pi)} \\ \frac{(14+3\pi)a}{6\cdot(6+\pi)} \end{pmatrix} = \frac{a}{6\cdot(6+\pi)} \cdot \begin{pmatrix} 28+9\pi \\ 14+3\pi \end{pmatrix}$

Bem.: "negative Masse"

9. [5] Finden Sie den Schwerpunkt des unten skizzierten, homogenen, ebenen Körpers.



Annahme: Der Körper ist eben und hat eine homogene Massenverteilung.

$$\vec{r}_{OS} = \frac{\vec{r}_{OS1} \cdot A_1 \ominus \vec{r}_{OS2} \cdot A_2}{A_1 \ominus A_2}$$ berechnen.

3. Statik: – Ziel: Bindungskräfte eines Systems bestimmen:

3.1 Hauptsatz der Statik:

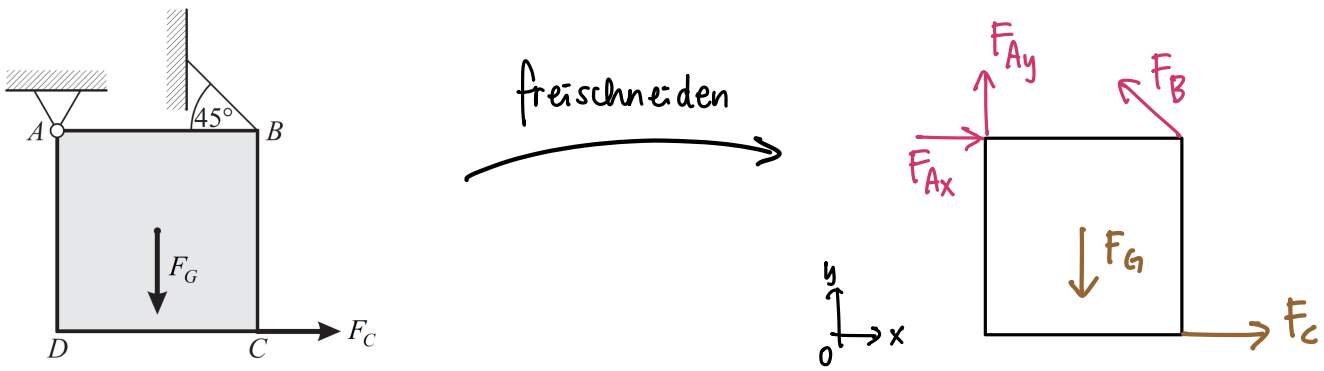
Damit ein System in Ruhe ist, gilt $\vec{R}=0$ & $\vec{M}=0$

Bem: Moment ist unabhängig vom Bezugspunkt wegen $\vec{R}=0$

3.2 Freischneiden:

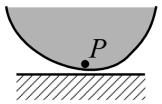
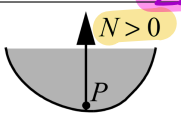
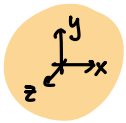
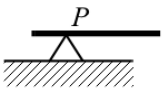
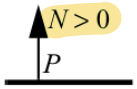
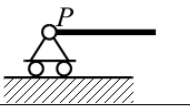
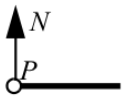
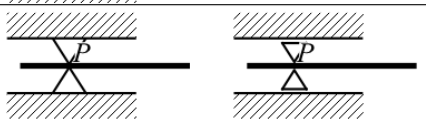
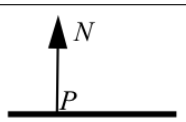
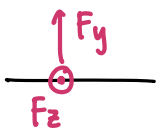
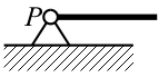
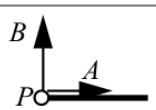
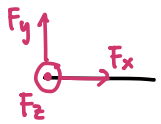
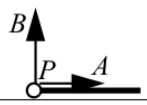
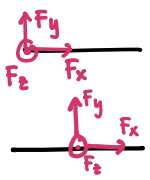
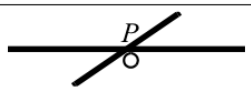
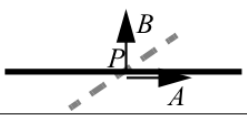
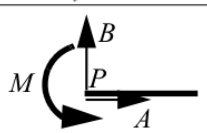
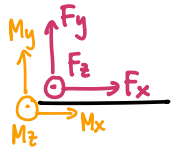
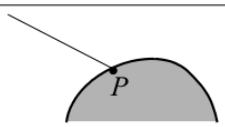
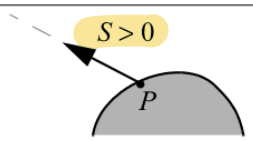
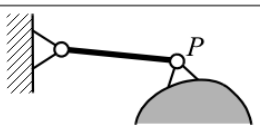
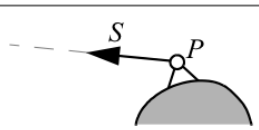
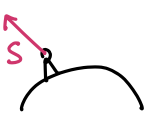
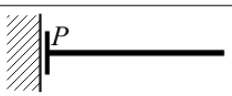
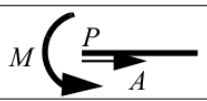
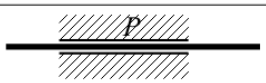
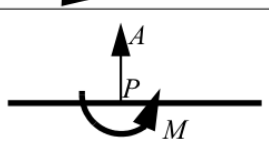
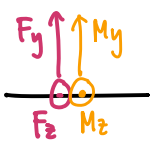
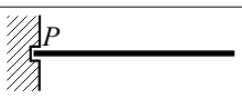
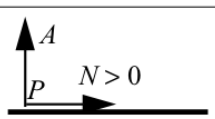
Beim analysieren eines Systems (d.h. Bindungskräfte bestimmen usw.) muss man immer als allererster Schritt alle Starrkörper freischneiden. Dabei zeichnet man alle Kräfte (auch Bindungskräfte!) ein, die auf das System wirken.

Bsp: (aus Serie 6, A1)



3.3 Lagerkräfte: Beim Freischneiden muss man die Lagerkräfte so einzeichnen:

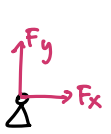
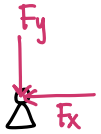
Lager vor dem Freischnitt | nach Freischnitt

		2D	3D:
Auflager (einseitig)			
Auflager (einseitig) *Loslager*			
Auflager (beidseitig) *Loslager*			
Auflager (beidseitig) *Kurzes Querlager* *Loslager*			
Gelenk *Festlager*			
Gelenk			
Gelenk (zwei gelenkig verbundene Balken)			
Einspannung			
Faden / Seil			
Pendelstütze (Modellannahme: äussere Kräfte nur in den Gelenken)			
Parallelführung			
Langes Querlager, Schiebehülse			
Längs- und kurzes Querlager			

Seilkraft

↳ aus Skript S.54~55

Good to know: Man zeichnet die Kräfte / Momente dort ein, wo die Bewegung / Rotation in diese Richtung vom Lager aufgehalten wird. D.h. dort wo die Bewegung wegen dem Lager nicht zugelassen ist.

Wichtig: Es ist egal, ob ihr die Kräfte / Momente in plus oder minus Richtung einzeichnet (d.h. z.B.  oder  egal)

⇒ Bei den Aufgaben / an der Prüfung wird die Skizze berücksichtigt!
(Deswegen auch: zeichnet die Kräfte sauber ein beim freischneiden)

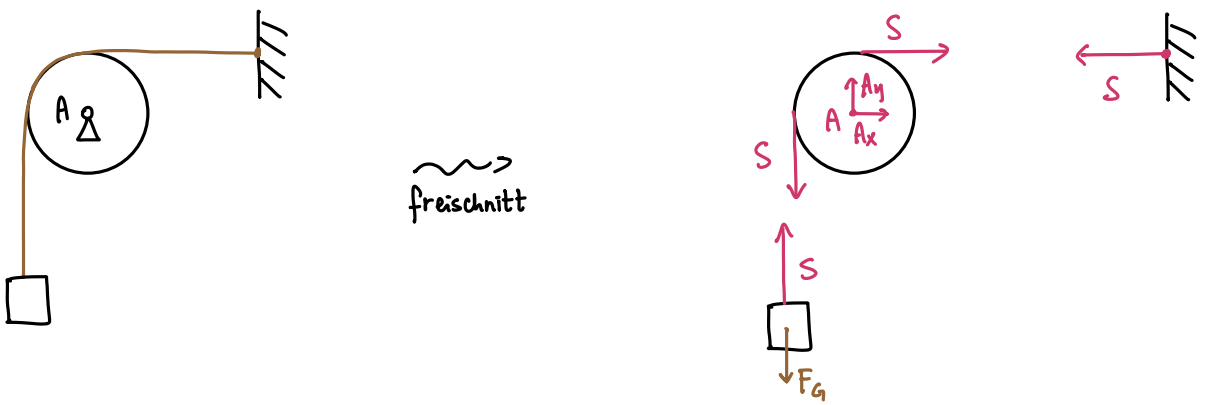
Seilkräfte: Seile können nur auf Zug belastet werden. Das heisst:

- Seilkräfte immer auf Zug (weg vom Körper) & in Seilrichtung zeichnen
- Bedingung: $S \geq 0$ S: Seilkraft

Bsp:

Wichtig: Reibungsfreie Umlenkungen: Seilkraft ist an beiden Enden gleich gross

Bsp:



So weit so gut, aber wofür brauchen wir das Ganze jetzt?

Kochrezept für Statikaufgaben:

1) Koordinatensystem einführen & Freischnittskizze erstellen.

wie ihr wollt! aber macht euer Leben nicht unnötig schwer...

- Lager ersetzen durch Lagerkräfte gemäss Tabelle (Seile auch)
- Alle äusseren Kräfte & Momente eintragen
- Falls nicht masselos → Gewichtskräfte eintragen

2) Gleichgewichtsbedingungen formulieren:

3D:	$R = R_x = R_y = R_z = 0$	$M = M_x = M_y = M_z = 0$	6 Gleichungen pro SK
2D:	$R = R_x = R_y = 0$	$M = M_z = 0$	3 Gleichungen pro SK

& nach gesuchten Kräften / Momenten auflösen

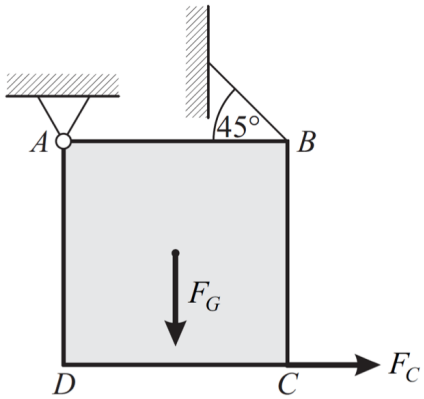
3) Diskussion über Ruhe:

- Seilkräfte nur auf Zug belastet → $S > 0$
- Auflager hebt nicht ab → $F_y > 0$ $\forall$ Auflager

↳ Schauen wir uns das ganze anhand eines Beispiels an!

Beispielaufgabe: Serie 6 Aufgabe 1

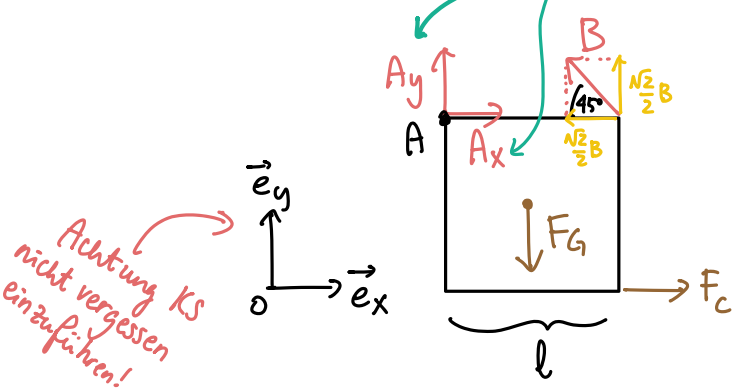
1. [1] Eine homogene Quadratplatte ist durch ihr Eigengewicht F_G sowie durch eine horizontale Kraft vom Betrag F_C belastet. Die Platte ist in der Ecke A gelenkig reibungsfrei gelagert sowie mit einem gewichtslosen Faden an der Ecke B gestützt.



1. Ermitteln Sie alle an der Platte angreifenden Bindungskräfte.
2. Wie gross darf F_C höchstens sein, damit die Platte noch ruht?

1) Schritt 1: Freischnitt:

ich benenne meine Kräfte gerne so, damit ich nicht unnötig oft "F" schreiben muss.



Achtung KS nicht vergessen einzuführen!

Schritt 2: Gleichungen aufstellen:

Merke: – Statikaufgabe! → $\vec{R}=0$, $\vec{M}=0$

– 2D → 3 Gleichungen pro SK

$$K_B(x): \quad 0 = A_x + F_C - \frac{\sqrt{2}}{2}B \quad \cdots \quad (1)$$

$$K_B(y): \quad 0 = A_y - F_G + \frac{\sqrt{2}}{2}B \quad \cdots \quad (2)$$

$$M(A, z): \quad 0 = l\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}B - \frac{l}{2}F_G + lF_C \quad \cdots \quad (3)$$

lineares Gleichungssystem!

Bezugspkt. beliebig! (Moment ist unabhängig vom Bezugspkt. wegen $\vec{R}=0$)

Moment hat in 2D nur 1 Komponente (hier z weil Körper auf xy-Ebene)

Tipp: nummeriert eure Gleichungen, um den Überblick zu erhalten

Schritt 3: Gleichungen auflösen: Tipp: schreibt am Anfang auf, welche Kräfte gesucht sind, um den Überblick zu erhalten!

$\Rightarrow$?: A_x, A_y, B

③ $\Rightarrow$ $l \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} B - \frac{l}{2} F_G + l F_C = 0 \quad | \div l, \cdot 2$

$\Leftrightarrow \sqrt{2} B - F_G + 2 F_C = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{2} B = F_G - 2 F_C$

$\Leftrightarrow B = \frac{\sqrt{2}}{2} F_G - \sqrt{2} F_C \quad \dots$ ④ //

② $\Rightarrow$ $A_y - F_G + \frac{\sqrt{2}}{2} B = 0 \quad |$ ④ $\Rightarrow B = \frac{\sqrt{2}}{2} F_G - \sqrt{2} F_C$

$\Leftrightarrow A_y = F_G - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} F_G - \sqrt{2} F_C \right) = F_G - \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} F_G}_{\frac{1}{2} F_G} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} F_C$

$\Rightarrow A_y = \frac{1}{2} F_G + F_C \quad \dots$ ⑤ //

① $\Rightarrow$ $A_x + F_C - \frac{\sqrt{2}}{2} B \quad /$ ④ $\Rightarrow B = \frac{\sqrt{2}}{2} F_G - \sqrt{2} F_C$

$\Leftrightarrow A_x = -F_C + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} F_G - \sqrt{2} F_C \right) = -F_C + \frac{1}{2} F_G - F_C$

$\Rightarrow A_x = \frac{1}{2} F_G - 2 F_C$ //

2) F_C max., s.d. Platte ruht?

$\Rightarrow$ Platte ruht, solange das Seil gespannt ist $\Rightarrow B \geq 0$

④ $\Rightarrow$ $B = \frac{\sqrt{2}}{2} F_G - \sqrt{2} F_C \geq 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{2} F_C \leq \frac{\sqrt{2}}{2} F_G \quad | \div \sqrt{2}$

$F_C \leq \frac{1}{2} F_G$ //

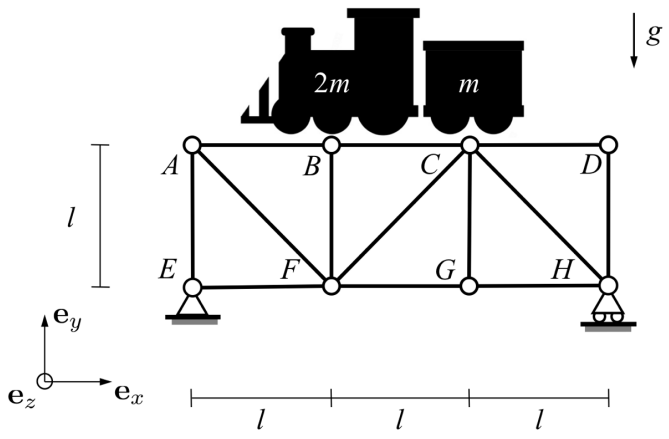
Teil 3: Übungsaufgaben - Serie 6

↪ A1, A6, A7, A8 in Ü-Stunde gelöst :)

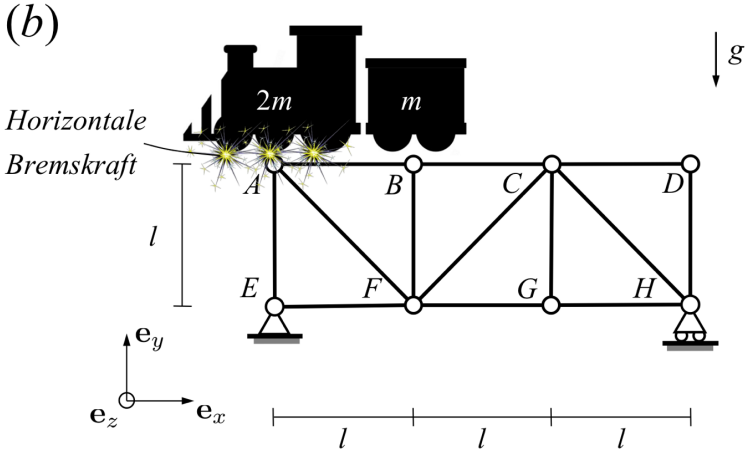
Statikaufgabe

2. Ein Zug, bestehend aus einer $2m$ schweren Lokomotive und einem $1m$ schweren Waggon, fährt über eine Fachwerkbrücke. Zug und Waggon können als Punktmassen modelliert werden und die erzeugten Kräfte wirken direkt auf die darunterliegenden Punkte, z.B. wirken die Kräfte der Lokomotive im ersten Aufgabenteil (Abbildung a) nur auf Punkt B. Die starr gebaute Brücke ist im Punkt E mit einem Festlager und im Punkt H mit einem beidseitigen Auflager verbunden (siehe Skizze).

(a)



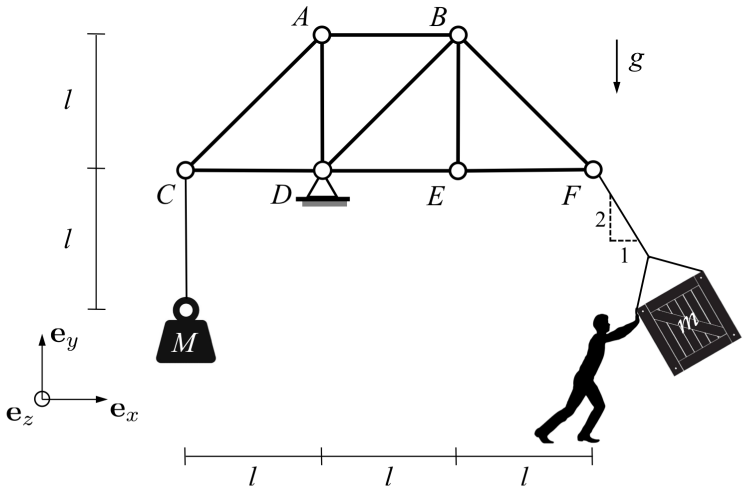
(b)



1. Berechnen Sie die Reaktionskräfte in den Punkten E und H für den in Abbildung (a) gezeigten Fall.
2. Der Zug muss am Ende der Brücke eine Notbremsung durchführen, siehe Abbildung (b). Die Bremskräfte werden nur von der Lokomotive in negativer $\mathbf{e}_x$ Richtung erzeugt und betragen die Hälfte der Gewichtskraft der Lokomotive. Wie gross sind die Reaktionskräfte in den Lagern E und H?

Statikaufgabe

3. Der unten stehende Fachwerkkran ist mit einer Kiste (Gewicht m) beladen. Zusätzlich zur Gravitationskraft stösst jemand die Kiste in positive $\mathbf{e}_x$-Richtung mit der Kraft $mg/2$ (siehe Skizze). Im Punkt C greift das Gegengewicht M in negativer $\mathbf{e}_y$-Richtung an. Der Punkt D ist gelenkig gelagert.



Wie schwer muss das Gegengewicht M sein, damit das System im Gleichgewicht bleibt (Ruhezustand)?

(a) m

(b) $\frac{\sqrt{5}}{2}m$

(c) $2m$

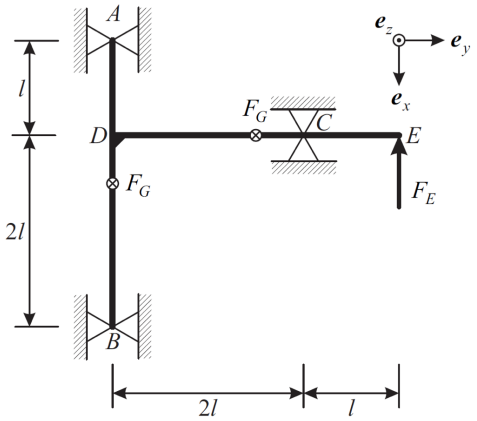
(d) $\sqrt{5}m$

(e) $3m$

Statikaufgabe

4. [2] Zwei gleichlange Stäbe der Länge $3l$ sind in D gemäss Skizze rechtwinklig zusammengeschweisst. Sie haben jeweils das Gewicht F_G. Das System liegt in einer Horizontalebene. Es ist in A, B und C durch kurze räumliche Querlager gelagert. In E wirkt eine horizontale Kraft vom Betrag F_E.

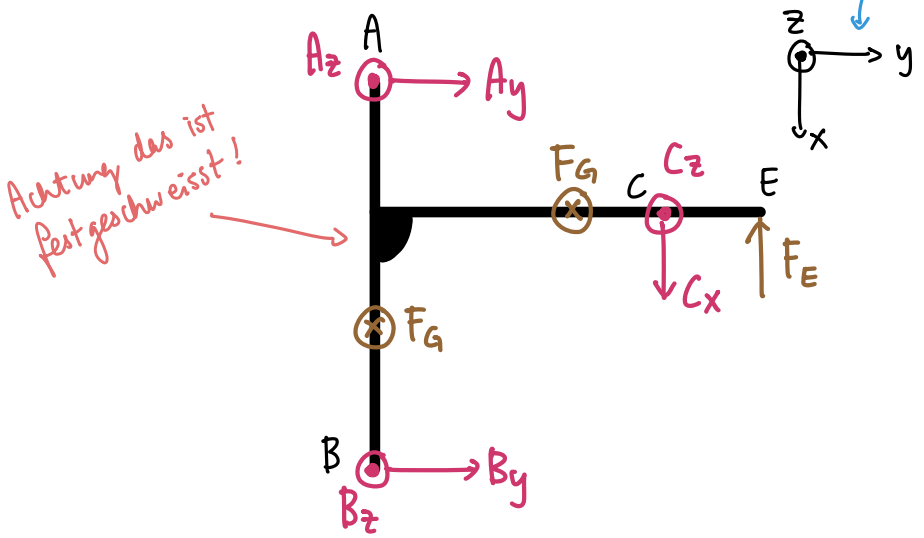
Tipp: Führen Sie in A und B Lagerkräfte in y- und z-Richtung ein, in C Lagerkräfte in x- und z-Richtung.



Bestimmen Sie die Lagerkräfte in A, B und C.

Schritt 1: freischneiden:

achte auf KS!



Schritt 2: Gleichgewichtsbedingungen aufstellen: 3D → 6 Gleichungen pro SK

KB(x): $0 = C_x - F_E$

KB(y): $0 = A_y + B_y$

KB(z): $0 = A_z + B_z + C_z - 2F_G$

$$MB(A,x): 0 = 2L C_z - \frac{3}{2} L F_G$$

$$MB(A,y): 0 = -3L B_z - L C_z + L F_G + \frac{3}{2} L F_G$$

$$MB(A,z): 0 = 3L B_y - 2L C_x + 3L F_E$$

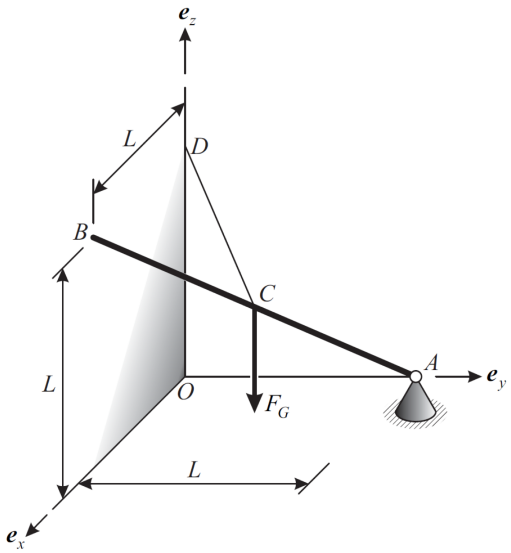
↑ Wählt einen geeigneten Pkt.!

Schritt 3: Gleichungen auflösen nach: (?): $A_y, A_z, B_y, B_z, C_y, C_z$

→ siehe Mulö

Statikaufgabe

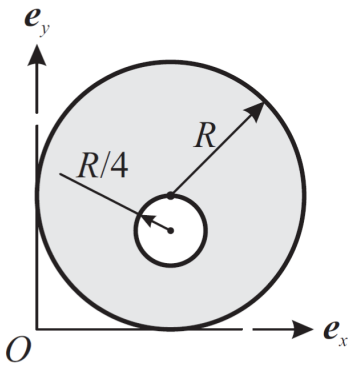
5. [3] Wir betrachten einen starren Balken (Länge $\sqrt{3}L$) im Raum. Er ist im Punkt A reibungsfrei gelenkig gelagert und wird im Punkt B reibungsfrei von der Wand (xz-Ebene) abgestützt. Zwischen den Punkten C (Mittelpunkt des Balkens) und D ist ein gewichtsloses Seil gespannt. Auf den Balken wirkt sein Eigengewicht F_G im Massenmittelpunkt C.



Berechnen Sie die Bindungskräfte in den Punkten A, B und C.

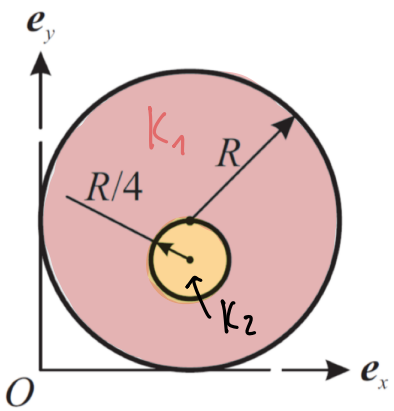
Schwerpunktberechnung

9. [5] Finden Sie den Schwerpunkt des unten skizzierten, homogenen, ebenen Körpers.

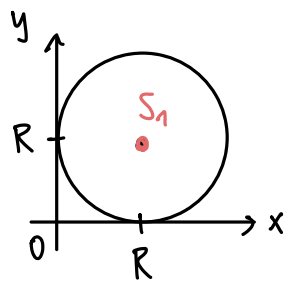


Annahme: Der Körper ist eben und hat eine homogene Massenverteilung.

Schritt 1: Körper in simplere Körper zerteilen:

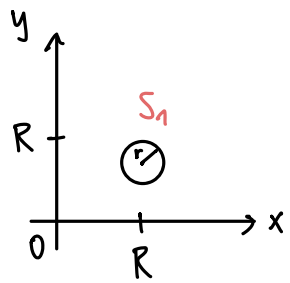


K_1:

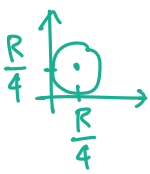


$$\vec{r}_{OS_1} = \begin{pmatrix} R \\ R \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow x_1 \\ \leftarrow y_1 \end{matrix} \qquad A_1 = \pi R^2$$

K_2:

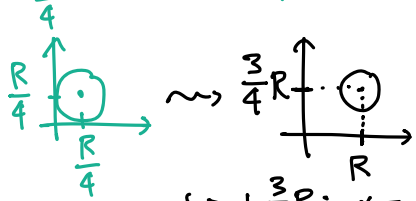


Wie vorher: Zwischenschritt:



$$\vec{r}_{OS_2}' = \begin{pmatrix} \frac{R}{4} \\ \frac{R}{4} \end{pmatrix}$$

dann Koordinatenverschiebung:



↪ $+\frac{3}{4}R$ in x-, $+\frac{2}{4}R$ in y-Richtung

$$\rightarrow \vec{r}_{OS_2} = \begin{pmatrix} \frac{R}{4} \\ \frac{R}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{4}R \\ \frac{2}{4}R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \\ \frac{3}{4}R \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow x_2 \\ \leftarrow y_2 \end{matrix} \qquad A_2 = \frac{R^2}{16}\pi$$

Bem: Diese 2 Schwerpunkte hätte man auch einfach aus der Skizze ablesen können.

Schritt 2: Formel anwenden um $\vec{r}_{OS} = \begin{pmatrix} x_S \\ y_S \end{pmatrix}$ herauszufinden:

Minus weil wir die 2. Fläche abziehen müssen!

$$x_S = \frac{\sum_i x_i A_i}{\sum_i A_i} = \frac{x_1 A_1 - x_2 A_2}{A_1 - A_2} = \frac{R \cdot \pi R^2 - R \cdot \frac{\pi}{16} R^2}{\left(1 - \frac{1}{16}\right) \pi R^2} =$$

$$= \frac{R \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right)}{1 - \frac{1}{16}} = R$$

$$y_S = \frac{\sum_i y_i A_i}{\sum_i A_i} = \frac{y_1 A_1 - y_2 A_2}{A_1 - A_2} = \frac{R \cdot \pi R^2 - \frac{3}{4} R \cdot \frac{1}{16} \pi R^2}{\left(1 - \frac{1}{16}\right) \pi R^2}$$

$$= \frac{R \cdot \left(1 - \frac{3}{64}\right)}{1 - \frac{1}{16}} \cdot \underbrace{\frac{64}{64}}_{=1} = \frac{R \cdot (64 - 3)}{64 - 4} = \frac{61}{60} R$$

Somit ist $\vec{r}_{OS} = \begin{pmatrix} x_S \\ y_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{61}{60} \end{pmatrix} \cdot R$