Technische Mechanik

Übung 7

08.11.2022
Lina De Windt

Themen von Heute:

> Teil 1: Fragen zu Themen / Aufgaben von letzter Woche?

> Teil 2: Recap der Theorie von dieser Woche:

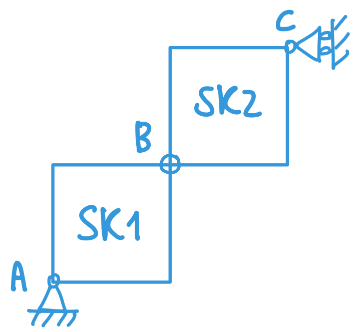
1. Prinzip der virtuellen Leistungen (PdvL)
   - 1.1 PdvL (Satz)
   - 1.2 Virtuelle Bewegungszustände
   - 1.3 Recap Leistung
   - 1.4 Stabkräfte
   - 1.5 Kochrezept PdvL
   - 1.6 Beispielaufgabe PdvL

> Teil 3: Stoffübersicht der bisher behandelten Themen

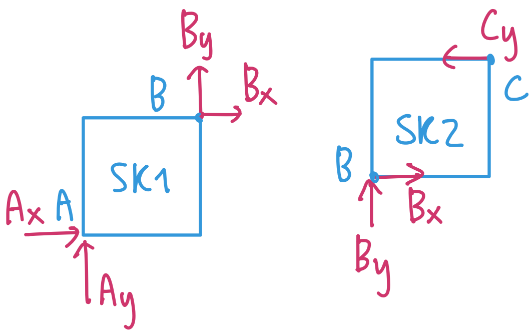
> Teil 4: Übungsaufgaben lösen – Serie 7

Teil 1: Fragen zu Themen von letzter Woche?

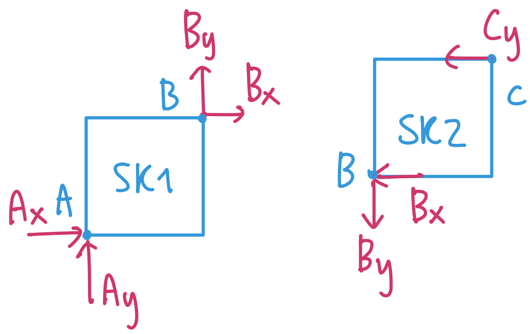
Quiz: Welcher Freischnitt ist korrekt?



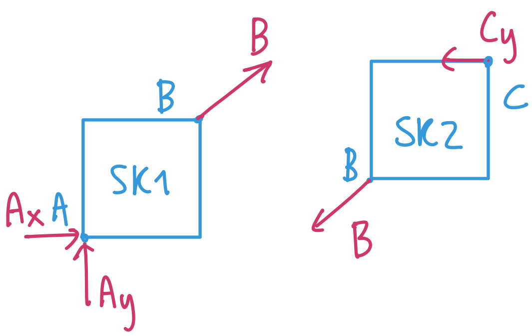
a)



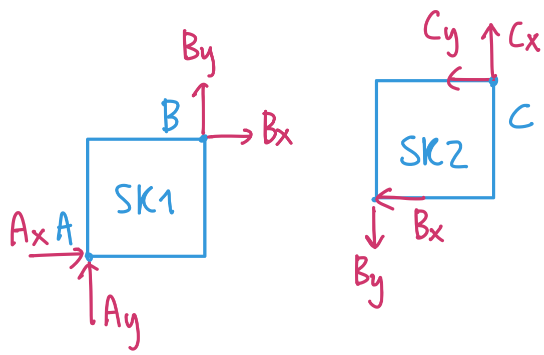
b)



c)



d)



Teil 2: Recap der Theorie von dieser Woche

1. Prinzip der virtuellen Leistungen (PdvL)

1.1 PdvL (Satz):

→ Skript S.48

Prinzip der virtuellen Leistungen (PdvL):

Ein System befindet sich genau dann in einer Ruhelage, wenn die virtuelle Gesamtleistung der inneren und äusseren Kräfte bei jedem virtuellen Bewegungszustand verschwindet (und die Eigenschaften des Systems und seiner Lagerung diese Kräfte zulassen).

d.h. $$\boxed{\tilde{P} = \tilde{P}^{(i)} + \tilde{P}^{(a)} = 0} \quad \forall \{\tilde{v}\}$$

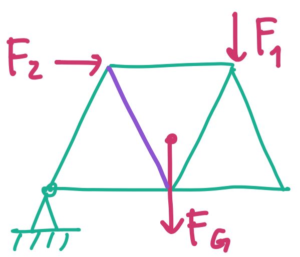
$\sim$ heisst virtuell.

Wir benutzen den PdvL, um Bewegungsgleichungen von mechanischen Systemen mit Zwangsbedingungen (z.B. Bindungen) aufzustellen.

Doch was nützt uns eigentlich der PdvL? → 2 Sachen:

Wir werden es hauptsächlich benutzen um Stabkräfte zu bestimmen.

Bsp:



Wir wollen wissen, mit welcher Kraft der violette Stab gedrückt bzw. gezogen wird. Bei einer solchen Aufgabe wird uns der PdvL sehr nützlich sein!

Ausserdem impliziert der PdvL den Hauptsatz der Statik (System ist in Ruhe wenn $\vec{R}=0$ und $\vec{M}=0$) → haben wir letzte Woche gesehen :)

Und! Bisher kam an der Prüfung zu 100% eine PdvL-Aufgabe

Wir sehen, dass der PdvL recht nützlich ist :)

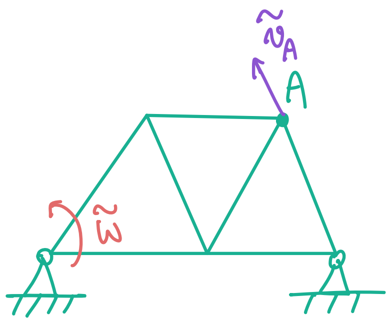
Doch was bedeutet eigentlich "virtuell"?

1.2 Virtuelle Bewegungszustände:

Ein virtueller Bewegungszustand ist irgendein gedachter Bewegungszustand, der keinen Bezug zu wirklich möglichen Bewegungszuständen haben muss.

Virtuell heisst also, dass wir uns diese Bewegungen einfach nur vorstellen!

z.B.



Dieses System kann sich eigentlich gar nicht bewegen. Aber wir könnten z.B. eine virtuelle Rotationsgeschwindigkeit $\tilde{\omega}$ einführen um zu schauen was dann die Geschwindigkeit im Punkt A wäre, wenn sich das System tatsächlich ein solches $\tilde{\omega}$ hätte.

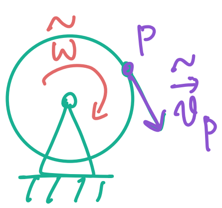
Um virtuelle Bewegungen von wirklichen Bewegungen zu unterscheiden, bezeichnen wir sie mit einer Tilde "~".

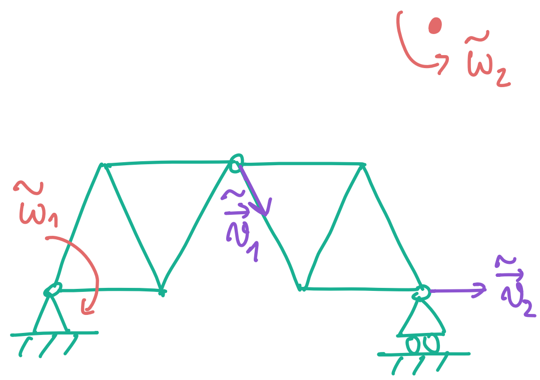
Die Kinemate $\{\tilde{\vec{v}}, \tilde{\vec{\omega}}\}$ ist dann ein virtueller SK-Zustand.

Wir unterscheiden zwischen zulässigen und unzulässigen Bewegungszuständen:

Zulässiger Bewegungszustand: Wenn der virtuelle Bewegungszustand keine Bindungen verletzt.

z.B.

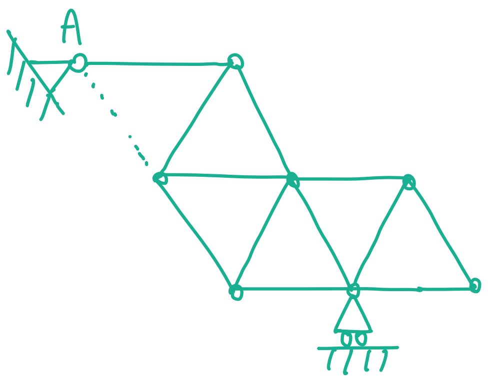




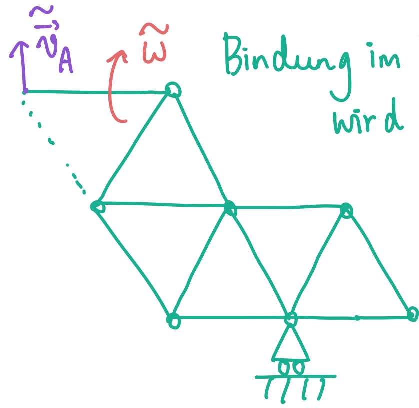
⚠ Wir werden uns (nur) mit zulässigen Bewegungszuständen beschäftigen!

Unzulässiger Bewegungszustand: Wenn der virtuelle Bewegungszustand mindestens 1 Bindung verletzt.

z.B.



$\rightsquigarrow$

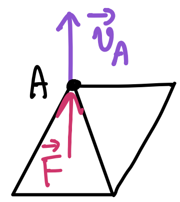


Bindung im Punkt A wird verletzt!

1.3 Recap Leistung:

$$\boxed{P_{einzelkraft} = \vec{F} \cdot \vec{v} = F \cdot v \cdot \cos(\alpha)}$$

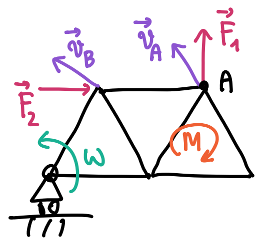
Bsp:



$P_A = \vec{F} \cdot \vec{v}_A$

Gesamtleistung: $\boxed{P = \sum_i \vec{F}_i \vec{v}_i + \sum_i \vec{M}_i \vec{\omega}_i}$

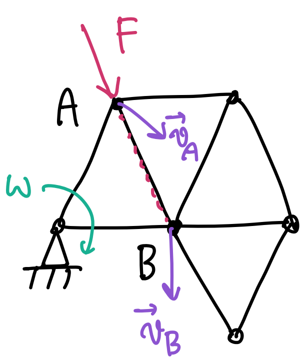
Bsp:



$P = \vec{F}_1 \vec{v}_A + \vec{F}_2 \vec{v}_B + M \cdot \omega$

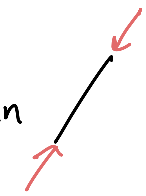
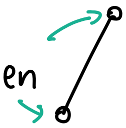
don't forget: Bei der Berechnung der Leistung dürfen die Kräfte entlang ihrer Wirkungslinie verschoben werden.

Bsp:



$$\boxed{P = \vec{F} \cdot \vec{v}_A = \vec{F} \cdot \vec{v}_B}$$

1.4 Stabkräfte (bzw. Pendelstäbe):

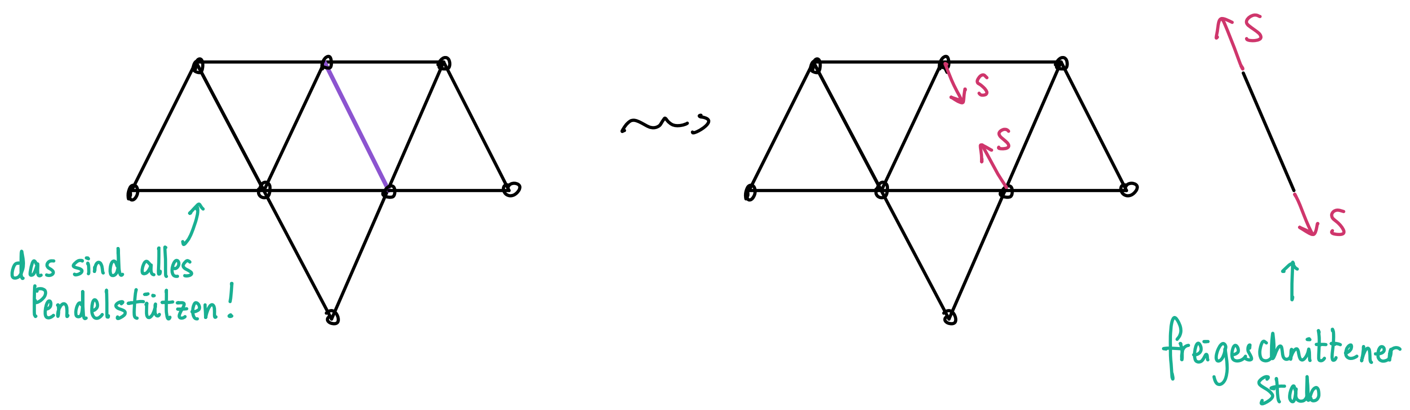
Pendelstab:
- ist an beiden Enden gelenkig gelagert
- kann nur Kräfte in Stabrichtung aufnehmen 
  - ↪ Zug- / Druckkräfte
  - ↪ keine Querkräfte ∨ Biegemomente!
- externe Kräfte greifen nur an Knotenpunkten  an.

Wir werden uns nur mit solchen Stäben beschäftigen

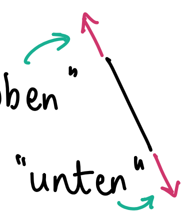
⚠ Ein Fachwerk besteht aus lauter Pendelstäben!

d.h. der Freischnitt ist recht einfach!

Bsp: Wir wollen den violetten Stab wegnehmen & mit den entsprechenden Stabkräften ersetzen:



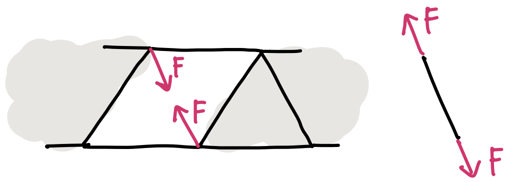
Bem: Wegen dem Reaktionsprinzip (Newton) ist:

- Beim Stab die Kraft "oben"  gleich gross, aber entgegengesetzt gerichtet zu der Kraft "unten", da der Stab ein SK ist und sich somit nicht verformen darf. → gilt ∀ Stäbe in TechMech!

- Die Stabkräfte, die wir im Fachwerk einzeichnen, sind gleich gross & entgegengesetzt gerichtet zu den Kräften, die wir beim Stab einzeichnen.

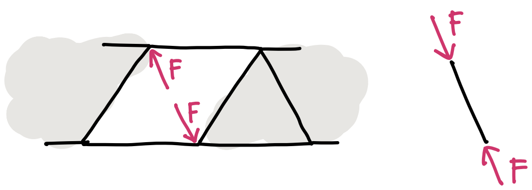
Zug- / Druckstab: Beim bestimmen ob ein Stab ein Zug- oder Druckstab ist, muss man aufpassen denn je nach dem, wie man die Stabkraft beim Freischnitt einzeichnet sind die Vorzeichen anders:

Wenn man die Stabkraft so eingezeichnet hat:



$$\boxed{\begin{array}{l} \text{falls } F \geq 0 \Rightarrow \text{Zugstab} \\ \text{falls } F < 0 \Rightarrow \text{Druckstab} \end{array}}$$

Wenn man sie so eingezeichnet hat:



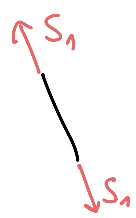
$$\boxed{\begin{array}{l} \text{falls } F \geq 0 \Rightarrow \text{Druckstab} \\ \text{falls } F < 0 \Rightarrow \text{Zugstab} \end{array}}$$

So merke ich es mir: Die Kräfte, die wir einzeichnen, sind die Kräfte, welche auf das System wirken. D.h. ich sage mir im Kopf:

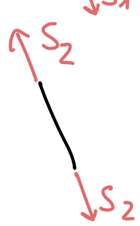
"Der Stab / das Fachwerk wird": $\begin{cases} \text{gezogen} \rightarrow \text{Zugstab} \\ \text{gedrückt} \rightarrow \text{Druckstab} \end{cases}$

Wenn Vorzeichen negativ ist, einfach sich vorstellen, dass die Pfeile in die andere Richtung wie eingezeichnet zeigen & genau dasselbe Gedankenexperiment machen.

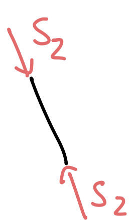
Bsp:



$S_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} F \rightsquigarrow$ Zugstab



$S_2 = -\frac{1}{2} F \rightsquigarrow$



$S_2 = \frac{1}{2} F \rightsquigarrow$ Druckstab

↑ So muss man nicht immer überlegen mit den Vorzeichen :)

1.5 Kochrezept PdvL :

1.3 Prinzip der virtuellen Leistung (PdvL)

1. Stab mit der gesuchten Stabkraft entfernen und an seiner Stelle Stabkraft einführen. Externe Kräfte und Momente in Skizze übernehmen.
2. Bewegung einführen, die möglich ist. In der Regel eine Rotation um ein Festlager
3. Starre Körper identifizieren, Momentanzentren und Winkelgeschwindigkeiten bestimmen, Geschwindigkeit an den Knoten berechen, an denen Kräfte angreifen
4. Gesamtleistung der Bewegung berechen und gleich null setzen.

$$\boxed{P_{tot} = \sum_i \underline{F}_i \cdot \underline{\tilde{v}}_i + \sum_i \underline{M}_i \cdot \underline{\tilde{w}}_i = 0}$$

Beachte: $\underline{F}_i \cdot \underline{v}_i = F_i \cdot v_i \cdot cos(\alpha)$

5. Nach gesuchter Stabkraft auflösen. Das eingeführte w kürzt sich heraus. :)

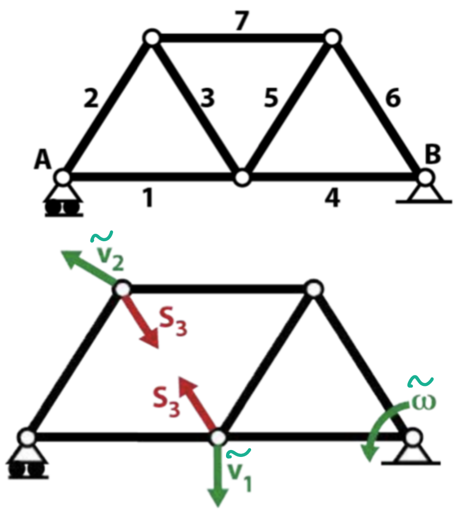


Abbildung 2: PdvL

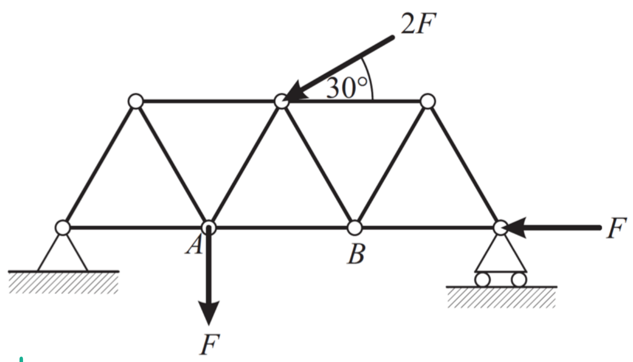
Beachte: Lager nicht durch Lagerkräfte ersezten sondern als Lager lassen.

Notation: $\sim$: $\tilde{P}, \tilde{\omega}, \tilde{v}$: steht für virtuell

↳ Schauen wir uns das anhand eines Beispiels an!

Beispielaufgabe: Serie 7, Aufgabe 1

1. [1]Das skizzierte ideale Fachwerk ist durch die drei eingezeichneten Kräfte belastet. Alle Stäbe haben die Länge l.



Statikaufgabe

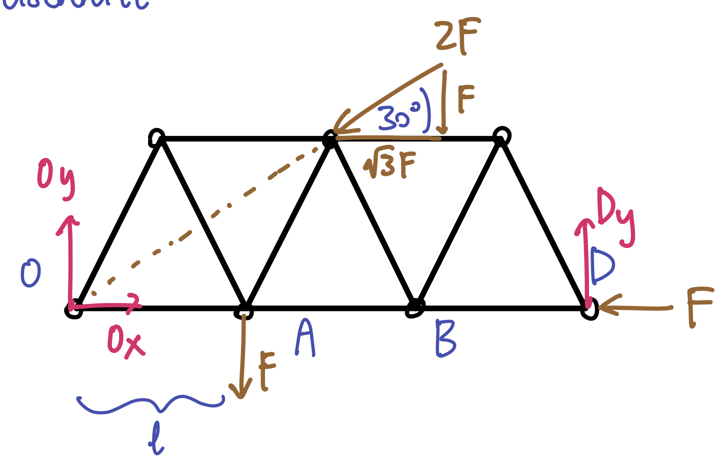
1. Bestimmen Sie die Bindungskräfte in den Lagern.

PdvL

2. Berechnen Sie mit dem Prinzip der virtuellen Leistungen (PdvL) die Stabkraft im Stab AB.
3. Ist es ein Zug- oder Druckstab?

1) Statikaufgabe:

Schritt 1: Freischnitt:



Schritt 2: Gleichgewichtsgleichungen aufstellen:

$KB(x)$: $0 = O_x - F - \sqrt{3}F$ ... ①

$KB(y)$: $0 = O_y - F - F + D_y$ ... ②

$MB(O, z)$: $0 = -lF + 3lD_y$ ... ③

Schritt 3: Gleichungen auflösen: Unbekannte: O_x, O_y, D_y

③ $\Rightarrow$ $3lD_y = lF \quad / \div 3l$

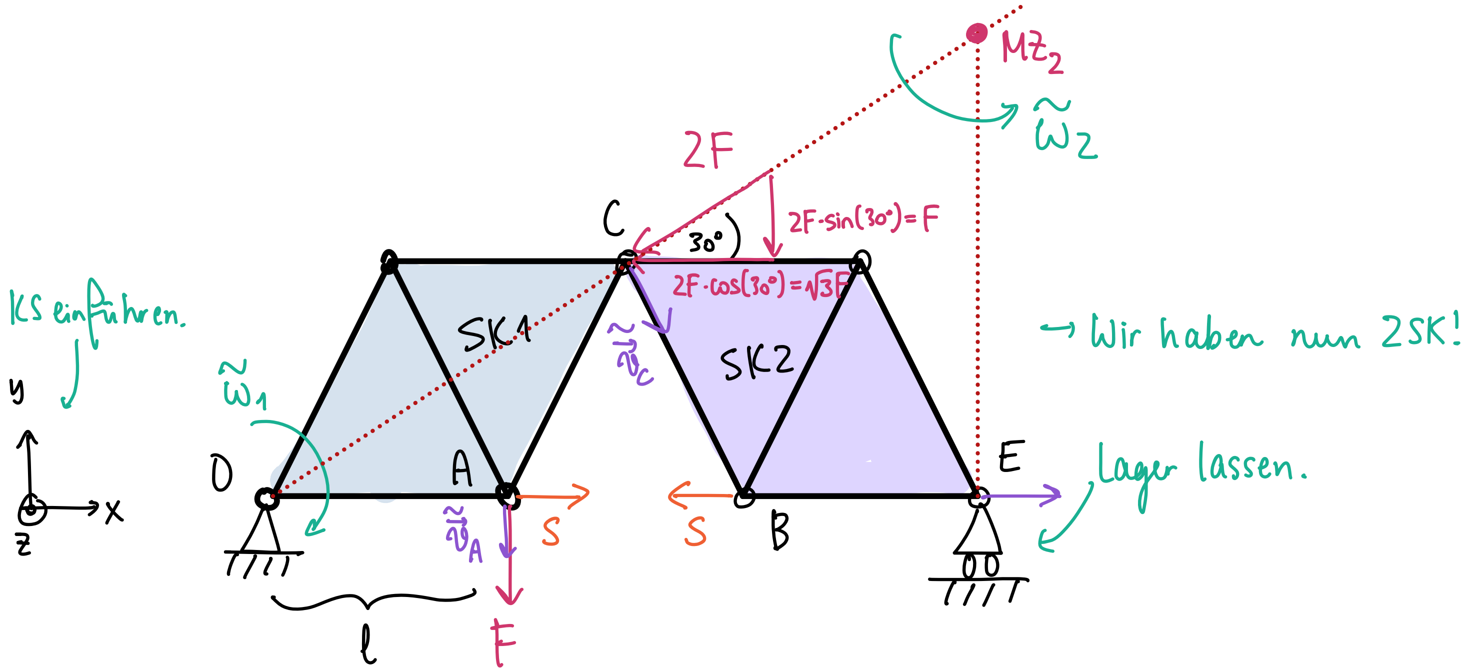
$\Leftrightarrow \underline{\underline{D_y = \frac{1}{3}F}}$

② $\Rightarrow$ $O_y = 2F - D_y = 2F - \frac{1}{3}F = \underline{\underline{\frac{5}{3}F}}$

① $\Rightarrow$ $O_x = F + \sqrt{3}F = \underline{\underline{(1+\sqrt{3})F}}$

2) Wir müssen die Stabkraft im Stab AB bestimmen

→ Stab entfernen & durch Stabkräfte ersetzen:



SK identifizieren: SK1 und SK2

Mz von SK1 ist sofort ersichtlich: Pkt. O → hier eine Virtuelle Rotationsgeschwindigkeit $\tilde{\omega}_1$ einführen.

Dann alle Geschwindigkeiten von den Pkten, an welche eine Kraft angreift, bestimmen → why? Weil wir sie für die Leistungsberechnung brauchen! ($P = \vec{F} \cdot \vec{v}$, dort wo $\vec{F} = 0$ ist brauchen wir deswegen keine $\vec{v}$.)

$$\tilde{\vec{v}}_A = \tilde{\vec{\omega}}_1 \times \vec{r}_{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\tilde{\omega}_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\tilde{\omega}_1 l \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \tilde{\omega}_1 l$$

2D-Aufgabe → in Skizze*

$$\tilde{\vec{v}}_C = \tilde{\vec{\omega}}_1 \times \vec{r}_{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\tilde{\omega}_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{3}{2} l \\ \frac{\sqrt{3}}{2} l \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} l \tilde{\omega}_1 \\ -\frac{3}{2} l \tilde{\omega}_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} l \tilde{\omega}_1$$

*Tipp: zeichnet alles sofort in die Skizze rein, damit ihr den Überblick nicht verliert.

MZ von SK2 finden über senkrechten zu $\tilde{\vec{v}}_C$ und $\tilde{\vec{v}}_E$ → in Skizze

aus Symmetrie können wir sofort sehen, dass $|\tilde{\vec{\omega}}_1| = \tilde{\omega}_1 = |\tilde{\vec{\omega}}_2| = \tilde{\omega}_2$

$$\tilde{\vec{v}}_B = \tilde{\omega}_2 \times \vec{r}_{MZ_2B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{\omega}_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -l \\ -\sqrt{3}\,l \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}\,l\tilde{\omega}_2 \\ -l\tilde{\omega}_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} l\tilde{\omega}_2$$

$$\overset{\tilde{\omega}_2 = \tilde{\omega}_1}{=} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} l\tilde{\omega}_1$$

2D-Aufgabe & $\tilde{\omega}_1 = \tilde{\omega}_2$

$$\tilde{\vec{v}}_D = \tilde{\omega}_2 \times \vec{r}_{MZ_2D} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{\omega}_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{3}\,l \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}\,l\tilde{\omega}_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} l\tilde{\omega}_1$$

PdvL anwenden: $\tilde{P}_{tot} = \sum_i \tilde{P}_i \overset{!}{=} 0$ erinnerung: $P = \vec{F}\cdot\vec{v}$

$$\Rightarrow \tilde{P}_{tot} = \tilde{\vec{v}}_A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -F \end{pmatrix} + \tilde{\vec{v}}_A \cdot \begin{pmatrix} S \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{\vec{v}}_B \cdot \begin{pmatrix} -S \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{\vec{v}}_C \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{3}F \\ -F \end{pmatrix} + \tilde{\vec{v}}_D \cdot \begin{pmatrix} -F \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} l\tilde{\omega}_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} l\tilde{\omega}_1 \cdot \begin{pmatrix} S \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} l\tilde{\omega}_1 \cdot \begin{pmatrix} -S \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -3/2 \end{pmatrix} l\tilde{\omega}_1 \begin{pmatrix} -\sqrt{3}F \\ -F \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} l\tilde{\omega}_1 \cdot \begin{pmatrix} -F \\ 0 \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0 \qquad / \div l\tilde{\omega}_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -S \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -3/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{3}F \\ -F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -F \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow F - \sqrt{3}S - \cancel{\tfrac{3}{2}F} + \cancel{\tfrac{3}{2}F} - \sqrt{3}F = 0$$

virtuelle Rotationsgeschwindigkeit, willkürlich eingeführt!

$$\Leftrightarrow -\sqrt{3}S + (1-\sqrt{3})F = 0$$

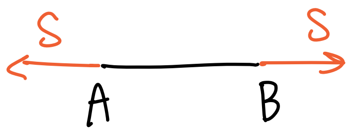
$$\Leftrightarrow \sqrt{3}S = (1-\sqrt{3})F$$

Merke, dass sich l und $\tilde{\omega}_1$ rausgekürzt haben! :)

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{S = \frac{(1-\sqrt{3})F}{\sqrt{3}}}}$$

3) Druck- oder Zugstab?

Wir haben die Stabkräfte so eingeführt:



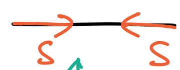
und haben berechnet, dass $S = \frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \cdot F$.

Wir sehen, dass $\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \cdot F < 0$

d.h. der Stab AB ist ein **Druckstab**.

Bem: Wenn eine Kraft negativ ist, heisst es einfach dass sie eigentlich in die andere Richtung wie eingezeichnet wirkt. D.h. in diesem Fall:

also eigentlich sind die Kräfte so gerichtet:



Stab wird gedrückt!

Teil 3: Stoffübersicht der bisher behandelten Themen

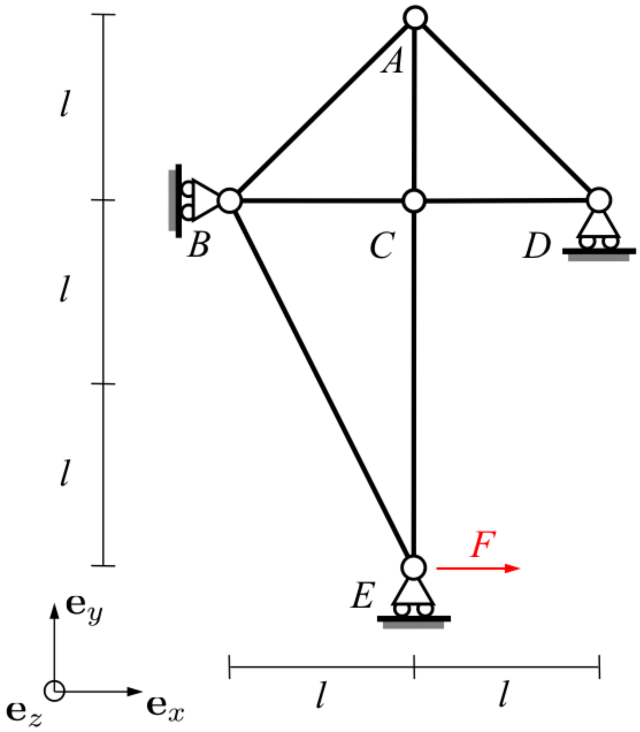
↳ Dokument "Stoffübersicht SHORT für Zwischenprüfung"

↳ Dokument "Stoffübersicht für Zwischenprüfung"

auf Webseite unter Woche 9 :)

Teil 4 : Übungsaufgaben - Serie 7

2. Das unten skizzierte Fachwerk besteht aus 7 gelenkig miteinander verbundenen Stäben. Die entsprechenden Längen können aus der Skizze abgelesen werden. Eine Kraft F wirkt im Punkt E und die Punkte B, D und E sind mit Rollagern verbunden (siehe Skizze).

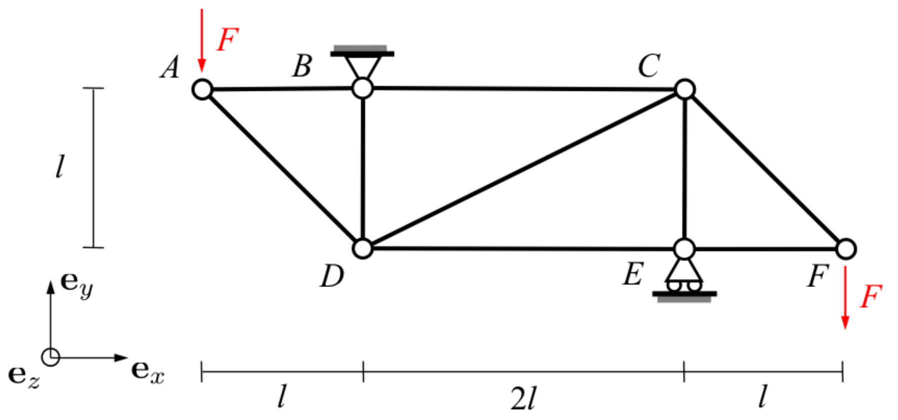


1. Wie gross ist der Freiheitsgrad des Systems?
2. Berechnen Sie die Reaktionskräfte in B, D und E.
3. Bestimmen Sie die Stabkraft CD. Handelt es sich um einen Druck- oder Zugstab?

Hinweis: Um die Stabkraft zu berechnen, verwenden Sie das PdvL.

3. Das unten skizzierte Fachwerk besteht aus 9 gelenkig miteinander verbundenen Stäben. Die entsprechenden Längen können aus der Skizze abgelesen werden. Zwei gleich grosse Kräfte F wirken in den Punkten A und F senkrecht nach unten. Punkt B ist gelenkig gelagert und Punkt E ist auf eine horizontale Bewegung beschränkt.

Hinweis: Um diese Aufgabe zu lösen, verwenden Sie das PdvL



Wie gross ist die Stabkraft CD? Handelt es sich um einen Zug- (positiver Wert) oder Druckstab (negativer Wert)?

(a) $S_{CD} = 0$

(b) $S_{CD} = \frac{\sqrt{5}}{2}F$

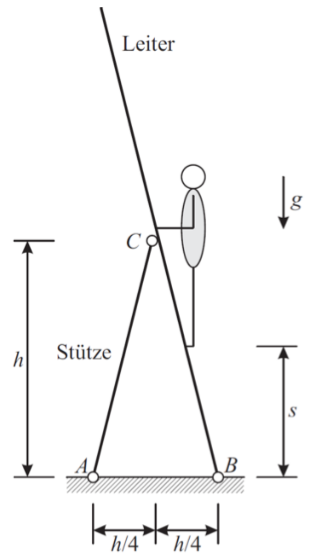
(c) $S_{CD} = -\frac{\sqrt{5}}{2}F$

(d) $S_{CD} = \sqrt{5}F$

(e) $S_{CD} = -\sqrt{5}F$

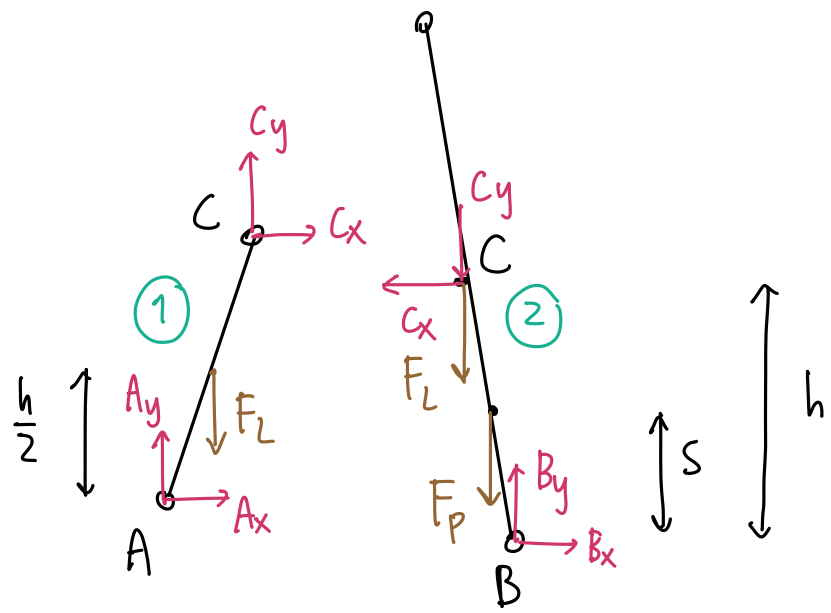
Statikaufgabe

4. [2] Eine Leiter und ihre mit einem reibungsfreien Gelenk verbundene Stütze stehen auf einem rauen Boden. Der Kontakt mit dem Boden kann durch reibungsfreie Gelenke modelliert werden. Die Leiter ist doppelt so lang wie die Stütze. Das Gewicht der Leiter und das der Stütze sei je F_L. Eine Person steht auf der Leiter. Das Gewicht F_P der Person wirkt nur über die Füsse.



Bestimmen Sie die Bindungskräfte in den drei Gelenken.

1. Schritt: Freischnitt: → Wir haben 2 SK:



2. Schritt: GGW-Bedingungen aufstellen: → 2SK, 3 Gleichungen pro SK

(1): $KB(x): \quad 0 = A_x + C_x$ ... $\cancel{1}$

$KB(y): \quad 0 = A_y + C_y - F_L$ ... $\cancel{2}$

$MB(A,z): 0 = -\frac{h}{8} F_L + \frac{h}{4} C_y - h \cdot C_x$ ... $\cancel{3}$

(2): $KB(x): \; 0 = B_x - C_x \quad \cdots \cancel{(4)}$

$KB(y): \; 0 = B_y - C_y - F_L - F_p \quad \cdots (5)$

$MB(B, z): \; 0 = h \cdot C_x + \frac{h}{4} C_y + \frac{h}{4} F_L + \frac{s}{4} F_p \quad \cdots \cancel{(6)}$

Schritt 3: Gleichungen auflösen: Gesucht: $A_x, A_y, B_x, B_y, C_x, C_y$

aus (1) haben wir, dass $C_x = -A_x$

und aus (4) haben wir, dass $C_x = B_x$ $\quad \Rightarrow \quad C_x = B_x = -A_x \quad \cdots (7)$

(3) $\Rightarrow \quad h \cdot C_x = \frac{h}{4} C_y - \frac{h}{8} F_L \quad / \div h$

$\Leftrightarrow \quad C_x = \frac{1}{4} C_y - \frac{1}{8} F_L \quad \cdots (8)$

(6) $\Rightarrow \quad h \cdot C_x + \frac{h}{4} C_y + \frac{h}{4} F_L + \frac{s}{4} F_p = 0 \; / \; C_x = \frac{1}{4} C_y - \frac{1}{8} F_L$ einsetzen

$\Leftrightarrow \quad h \cdot \left(\frac{1}{4} C_y - \frac{1}{8} F_L \right) + \frac{h}{4} C_y + \frac{h}{4} F_L + \frac{s}{4} F_p = 0$

$\Leftrightarrow \quad \frac{h}{4} C_y - \frac{h}{8} F_L + \frac{h}{4} C_y + \frac{h}{4} F_L + \frac{s}{4} F_p = 0$

$\Leftrightarrow \quad \frac{h}{2} C_y = \left(\frac{h}{8} - \frac{h}{4} \right) F_L - \frac{s}{4} F_p$

$\Leftrightarrow \quad \frac{h}{2} C_y = -\frac{h}{8} F_L - \frac{s}{4} F_p \quad / \cdot \frac{2}{h}$

$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{C_y = -\frac{1}{4} F_L - \frac{s}{2h} F_p}}$

(8) $\Rightarrow \quad C_x = \frac{1}{4} C_y - \frac{1}{8} F_L = \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{4} F_L - \frac{s}{2h} F_p \right) - \frac{1}{8} F_L =$

$= -\frac{1}{16} F_L - \frac{s}{8h} F_p - \frac{1}{8} F_L =$

$\underline{\underline{C_x = -\frac{3}{16} F_L - \frac{s}{8h} F_p}}$

⑦ $\Rightarrow$ $C_x = B_x = -A_x$ $\Rightarrow$ $B_x = -\frac{3}{16}F_L - \frac{s}{8h}F_P$ //

$A_x = \frac{3}{16}F_L + \frac{s}{8h}F_P$ //

② $\Rightarrow$ $A_y + C_y - F_L = 0$

$\Leftrightarrow$ $A_y = F_L - C_y = F_L - \left(-\frac{1}{4}F_L - \frac{s}{2h}F_P\right) =$

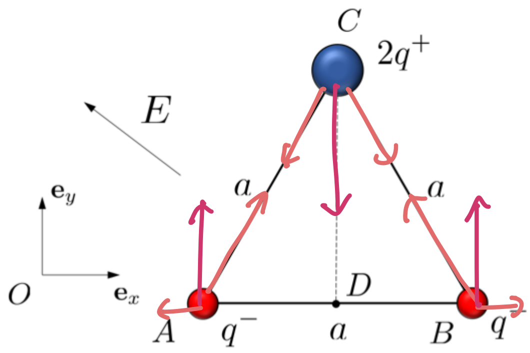
$= F_L + \frac{1}{4}F_L + \frac{s}{2h}F_P = \underline{\underline{\frac{5}{4}F_L + \frac{s}{2h}F_P}}$

⑤ $\Rightarrow$ $B_y - C_y - F_L - F_P = 0$

$\Leftrightarrow$ $B_y = C_y + F_L + F_P = -\frac{1}{4}F_L - \frac{s}{2h}F_P + F_L + F_P =$

$B_y = \underline{\underline{\frac{3}{4}F_L + \left(1 - \frac{s}{2h}\right)F_P}}$

5. In den Eckpunkten A, B, C eines gleichseitigen Dreiecks (Seitenlänge a) sitzen drei Ladungen. Im Punkt C sitzt eine positive Ladung vom Betrag $2q$, während in den Punkten A und B jeweils eine negative Ladung vom Betrag q sitzt. Die Ladungen befinden sich in einem homogenen elektrischen Feld $\mathbf{E} = E\mathbf{e}$.



Was ist das Dipolmoment der Punktladungsgruppe?

(a) $\mathbf{N} = -E2q\sqrt{3}a\mathbf{e}_x$

(b) $\mathbf{N} = -Eq\frac{\sqrt{3}}{2}a\mathbf{e}_y$

(c) $\mathbf{N} = -Eq\frac{1}{2}a\mathbf{e}_y$

(d) $\mathbf{N} = Eq\frac{\sqrt{3}}{2}a\mathbf{e}_x$

(e) $\mathbf{N} = E2q\frac{\sqrt{3}}{2}a\mathbf{e}_y$

Da $Q_{ges} = \sum_i q_i = 0$, kann die Kräftegruppe auf ein Moment $\vec{M}$ reduziert werden (Erinnerung: Moment: $\vec{M} \neq 0$, $\vec{R} = 0$)

Doch Warum folgt aus $Q_{ges} = 0$ $\vec{R} = 0$?

Kraft von E auf Ladung q_i

$\vec{R}$ ist $\sum_i \vec{F}_i$. Und in elektrostatik ist $F_i = q_i E$.

elektrische Feldstärke

d.h Wir haben hier:

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = q^- E + q^- E + 2q^+ E = (q^- + q^- + 2q^+) \cdot E = 0$$

Das heisst wir können das Dipolmoment so berechnen:

$\vec{N} = \sum_{i=1}^{n} F_i \vec{r}_i$ (<u>unabhängig</u> vom Nullpkt., da $\vec{R} = 0$).

und es gilt $\vec{M} = \sum_i F_i \vec{r}_i \times \vec{e} = \vec{N} \cdot \vec{e}$ → d.h. $\vec{N}$ ist auch unabhängig vom Bezugspunkt!

Warum? $\vec{M}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{r}_i \times F_i \vec{e} = F_i \cdot \vec{r}_i \times \vec{e}$

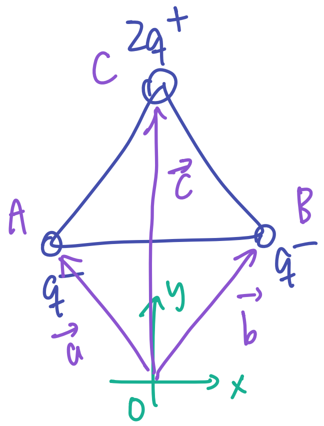
da wir parallele Kräfte haben

Weiter gilt für el. Ladungen: $\vec{N} = \sum_i \underbrace{q_i E}_{F_i} \vec{r}_i = E \cdot \sum_i q_i \vec{r}_i = E \cdot \vec{P}$

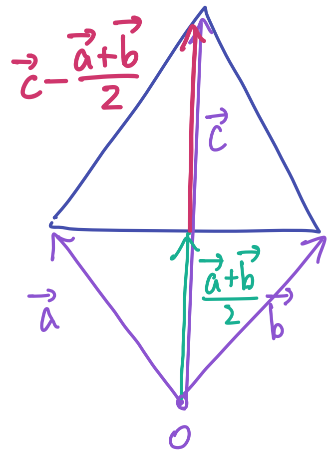
mit $\vec{P} = \sum_i q_i \vec{r}_i = q^- \vec{a} + q^- \cdot \vec{b} + 2q^+ \cdot \vec{c} = 2q^+ \cdot \vec{c} - q^+ \cdot \vec{a} - q^+ \cdot \vec{b} =$

$= 2q^+ \cdot \left(\vec{c} - \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} \right) = 2q^+ \cdot \vec{h}$

Höhe vom Dreieck

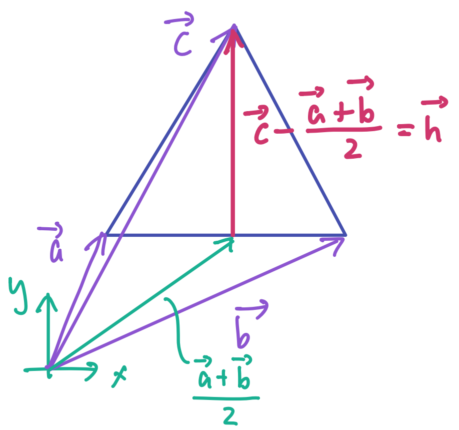


irgendein Bezugssystem wählen!



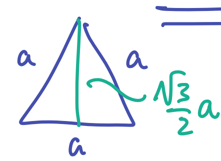
*

* das funktioniert mit einem beliebigen Bezugssystem!
z.B. wenn wir es so gewählt hätten:



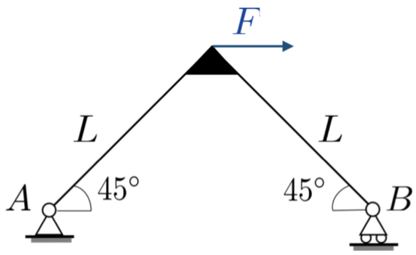
Somit ist:

$\vec{N} = E\vec{P} = E \cdot 2q^+ \cdot \vec{h} = \underline{\underline{E \cdot 2q^+ \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a \vec{e}_y}}$



6. Betrachten Sie das abgebildete System, das aus zwei zusammengeschweissten Stäben besteht und reibungsfrei gemäss Skizze gelagert ist. Beide Stäbe haben die Länge L.

Statikaufgabe



Was sind die Bindungskräfte in A und B ?

(a) $A_x = -F$; $\quad A_y = 2F$; $\quad B_y = -2F$

(b) $A_x = -F$; $\quad A_y = -\frac{F}{2}$; $\quad B_y = \frac{F}{2}$

(c) $A_x = F$; $\quad A_y = -F$; $\quad B_y = F$

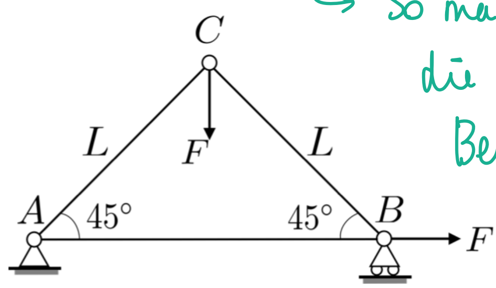
(d) $A_x = 2F$; $\quad A_y = \sqrt{2}F$; $\quad B_y = -\sqrt{2}F$

(e) $A_x = -F$; $\quad A_y = -\frac{F}{\sqrt{2}}$; $\quad B_y = \frac{F}{\sqrt{2}}$

7. Das skizzierte ideale Fachwerk ist durch die zwei eingezeichneten Kräfte belastet. Die Stäbe AC und BC haben die Länge L.

PdvL

↳ So machen, s.d. die virtuelle Bewegung zulässig ist!



Wie gross ist die Stabkraft im Stab BC (positiv für einen Zugstab, negativ für einen Druckstab)?

(a) $R_{BC} = -\frac{F}{\sqrt{2}}$

(b) $R_{BC} = -\frac{F}{2}$

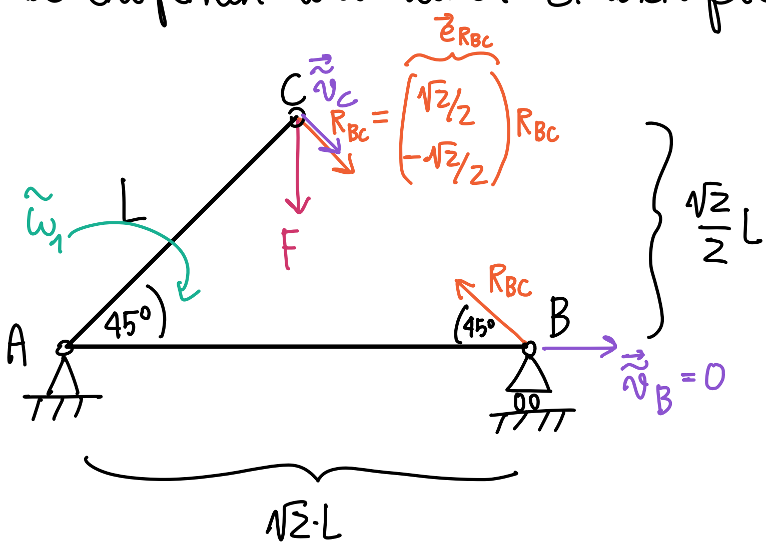
(c) $R_{BC} = F$

(d) $R_{BC} = 0$

(e) $R_{BC} = \sqrt{2}F$

Stabkraft BC bestimmen:

Stab BC entfernen und durch Stabkräfte ersetzen:



Virtueller Bewegungszustand einführen: $\tilde{\omega}_1$

$$\tilde{\vec{v}}_C = \tilde{\vec{\omega}}_1 \times \vec{r}_{AC} = \begin{pmatrix}0\\0\\-\tilde{\omega}_1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\sqrt{2}/2\,L\\ \sqrt{2}/2\,L\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{2}/2\,L\tilde{\omega}_1\\ -\sqrt{2}/2\,L\tilde{\omega}_1\end{pmatrix}$$

$\tilde{\vec{v}}_B = 0$, da die Bindung sonst verletzt wäre.

$$\text{PdvL} \Rightarrow \tilde{P}_{tot} = \tilde{\vec{v}}_c \cdot \vec{F} + \tilde{\vec{v}}_c \cdot \vec{R}_{Bc} \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} L\tilde{\omega}_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} L\tilde{\omega}_1 \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} R_{Bc} = 0 \quad \Big/ \div L\tilde{\omega}_1$$

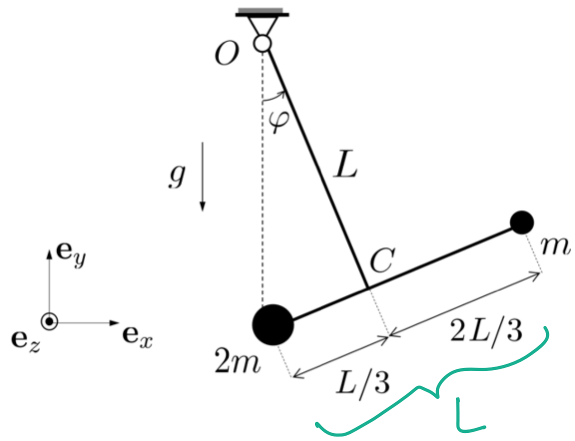
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} R_{Bc} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} F + \frac{1}{2} R_{Bc} + \frac{1}{2} R_{Bc} = 0$$

$$\Leftrightarrow S = -\frac{\sqrt{2}}{2} F \underset{\cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}{=} \underline{\underline{-\frac{1}{\sqrt{2}} F}} \qquad \rightarrow \text{b) ist korrekt.}$$

8. Das dargestellte System besteht aus 2 Punktmassen der Masse $2m$ bzw. m, die durch masselose Stäbe verbunden sind und im Punkt O gelenkig gelagert sind.

Kräftemittelpunkt



Unter welchem Winkel φ befindet sich das System in Ruhe?

(a) $\varphi = \pi$

(b) $\varphi = \frac{\pi}{2}$

(c) $\varphi = \frac{\pi}{3}$

(d) $\varphi = \frac{\pi}{4}$

(e) $\varphi = \frac{\pi}{6}$

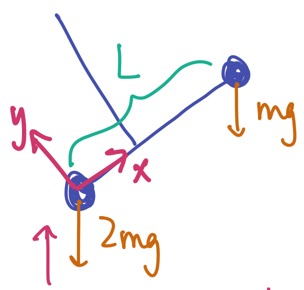
Kräftemittelpunkt bestimmen:

$$\vec F_1 = -2mg\,\vec e_y \quad , \quad \vec F_2 = -mg\,\vec e_y$$

$$\vec r_{\text{Kräftemittepunkt}} = \frac{\sum F_i \vec r_i}{\sum F_i} = \frac{\overset{\vec r_1 = 0}{\cancel{-2mg\cdot\vec r_1}} - mg\cdot\vec r_2}{-2mg-mg} =$$

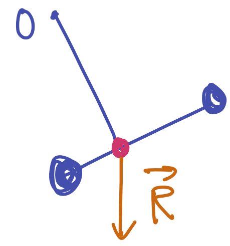
$$= \frac{\vec r_2}{3} = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} r_{2x} \\ r_{2y}\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} L \\ 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_c = \frac{L}{3}$$



Wir setzen unser Koordinatensystem hier, und bestimmen die Distanz vom Schwerpunkt von hier aus.

d.h. Kräftemittelpunkt ist hier:



Da $\vec{R} = -3mg\vec{e}_y$ nach <u>unten</u> zeigt, kann das System nur in Ruhe sein, wenn $\varphi = 0$ (sonst erzeugt $\vec{R}$ ein Moment bezüglich $0 \rightarrow$ das System bewegt sich ϟ)   remember: in Ruhe $\Leftrightarrow$ $\vec{R} = 0$ und $\vec{M} = 0$