

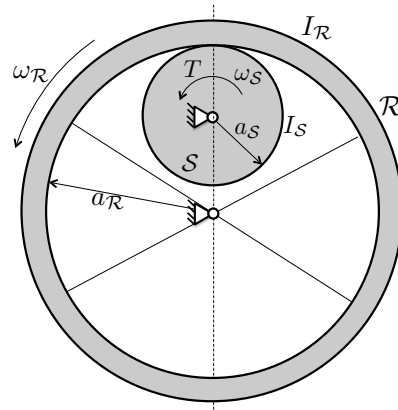
Technische Mechanik
151-0223-10

- Übung 12 -

Dr. Paolo Tiso

19. Dezember 2023

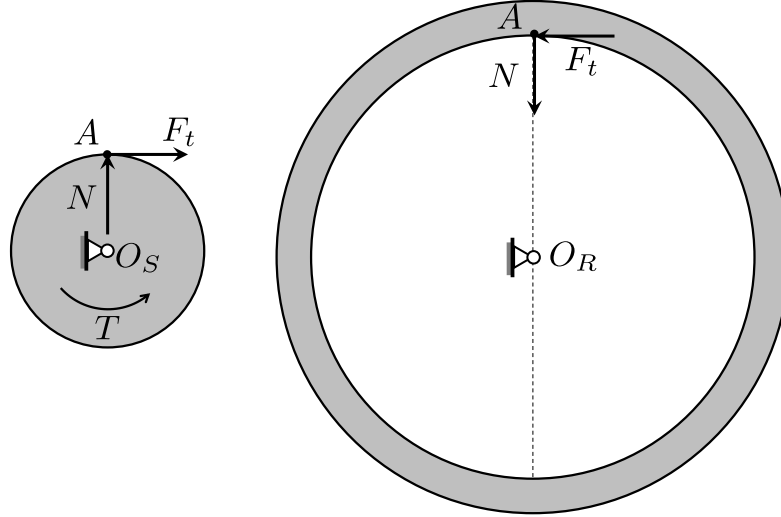
1. Betrachten Sie das skizzierte Getriebesystem in der Abbildung. Das Sonnenrad S und das Hohlrad R haben die Radien a_S bzw. a_R , ihre Massenträgheitsmomente sind I_S bzw. I_R . Die Mittelpunkte der beiden Zahnräder sind gelenkig mit dem Boden verbunden. Ein Moment T wird auf das Sonnenrad ausgeübt, wenn sich das System in Ruhe befindet. Es seien ω_R und ω_S die Winkelgeschwindigkeiten des Hohlrads bzw. des Sonnenrads. Positive Richtungen sind in der Abbildung dargestellt.



Wie gross ist die Winkelbeschleunigung $\dot{\omega}_R$ des Hohlrads?

- (a) $\dot{\omega}_R = \frac{T}{\frac{a_s}{a_R} I_S - \frac{a_S}{a_R} I_R}$
- (b) $\dot{\omega}_R = \frac{T}{\frac{a_R}{a_S} I_S + \frac{a_S}{a_R} I_R}$
- (c) $\dot{\omega}_R = \frac{T}{a_s}$
- (d) $\dot{\omega}_R = \frac{T}{\frac{a_R}{a_s} (I_S + I_R)}$
- (e) $\dot{\omega}_R = \frac{T}{\frac{a_S}{a_R} (I_S + I_R)}$

Lösung: Wir führen die Reaktionskräfte Zwischen Hohl- und Sonnenrad ein:



Wir können den Drallsatz im Punkt O_S anwenden. Dieser lautet

$$T - F_t a_S = I_S \dot{\omega}_S \quad (1)$$

bzw. im Punkt O_R

$$F_t a_R = I_R \dot{\omega}_R \quad (2)$$

Daraus finden wir die Reaktionskraft

$$F_t = \frac{I_R}{a_R} \dot{\omega}_R. \quad (3)$$

Da A der Berührungspunkt zwischen Hohl- und Sonnenrad ist, muss gelten

$$v_A = \omega_S a_S = \omega_R a_R \quad \Rightarrow \quad \dot{\omega}_S = \dot{\omega}_R \frac{a_R}{a_S}. \quad (4)$$

Nach Einsetzen von (3) und (4) in (1) erhalten wir

$$T - \frac{I_R}{a_R} \dot{\omega}_R a_S = I_S \dot{\omega}_R \frac{a_R}{a_S} \quad (5)$$

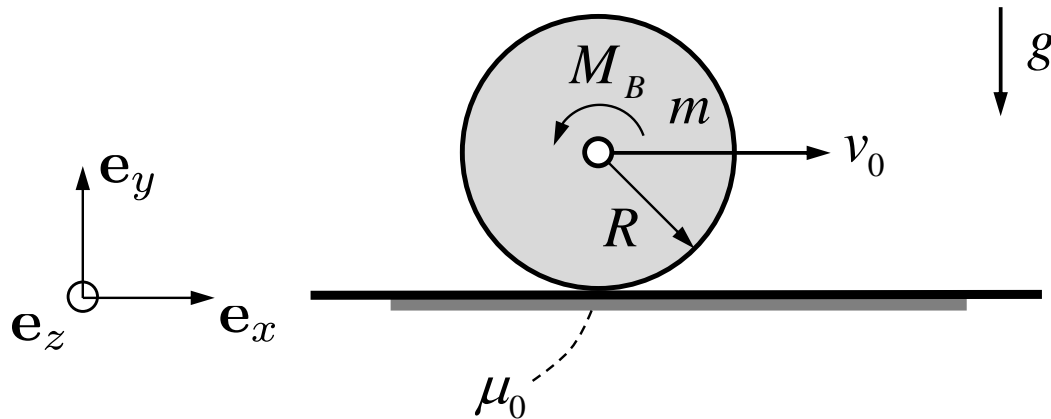
und folglich

$$\dot{\omega}_R \left(I_S \frac{a_R}{a_S} + I_R \frac{a_S}{a_R} \right) = T \quad (6)$$

Also

$$\Rightarrow \quad \dot{\omega}_R = \frac{T}{\frac{a_R}{a_S} I_S + \frac{a_S}{a_R} I_R}. \quad (7)$$

2. Der unten abgebildete Zylinder der Masse m rollt ohne zu gleiten auf einer ebenen Oberfläche. Zum Zeitpunkt $t = 0$ rollt der Zylinder mit der Geschwindigkeit \mathbf{v}_0 in positive \mathbf{e}_x -Richtung (siehe Skizze). Das Bremsmoment M_B wirkt in der Mitte des Rades und der Reibungswert ist mit μ_0 gegeben.



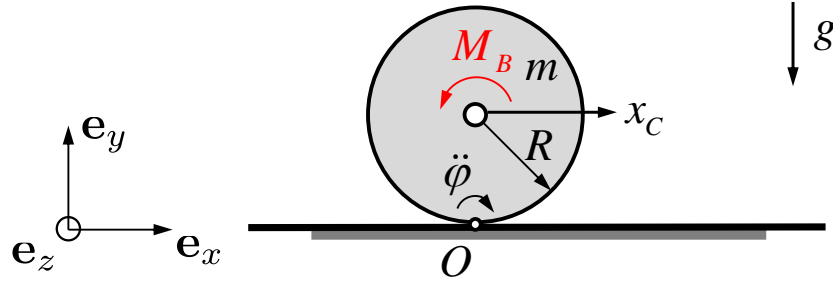
1. Wie gross ist das maximal einsetzbare Bremsmoment M_B , damit das Rad nicht auf der Oberfläche rutscht?
 - (a) $M_B \leq \mu_0 mgR$
 - (b) $M_B \leq \frac{1}{2}\mu_0 mg$
 - (c) $M_B \leq \frac{2}{3}v_0 mgR$
 - (d) $M_B \leq \frac{3}{2}\mu_0 mgR$
 - (e) $M_B \leq \frac{4}{3}\mu_0 mgR$
2. Wie lange dauert es, bis der Zylinder anhält, wenn das gegebene Bremsmoment M_B eingesetzt wird?
 - (a) $t = 0$
 - (b) $t = \frac{3}{2} \frac{v_0 m R}{M_B}$
 - (c) $t = \frac{2}{3} \frac{\mu_0 m R}{M_B}$
 - (d) $t = \frac{4}{3} \frac{v_0 m R}{M_B}$
 - (e) $t = \frac{v_0 m R}{M_B}$

Lösung:

1. Die horizontale negative Beschleunigung vom Moment M_B kann durch den Drallsatz berechnet werden:

$$I_O \dot{\omega} = M \quad \Rightarrow \quad -I_O \ddot{\varphi} = M_B \quad (1)$$

wobei M_B und $\ddot{\varphi}$ in entgegengesetzter Richtung rotieren und I_0 das Trägheitsmoment bezüglich Punkt O ist (siehe Skizze unten).



Das Trägheitsmoment I_O kann durch das Trägheitsmoment bezüglich des Schwerpunktes I_C (tabelliert) und Steiner's Theorem berechnet werden:

$$I_C = \frac{1}{2}mR^2 \quad \Rightarrow \quad I_O = I_C + r_{OC}^2 \cdot m = \frac{1}{2}mR^2 + R^2 \cdot m = \frac{3}{2}mR^2 \quad (2)$$

Damit ergibt sich aus Gleichungen 1 und 2:

$$\frac{3}{2}mR^2\ddot{\varphi} = -M_B \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} = -\frac{2}{3}\frac{M_B}{mR^2} \quad (3)$$

Aus dem Rollen ohne Gleiten ergibt sich der Zusammenhang zwischen dem Winkel φ und der Bewegung des Schwerpunktes x_C :

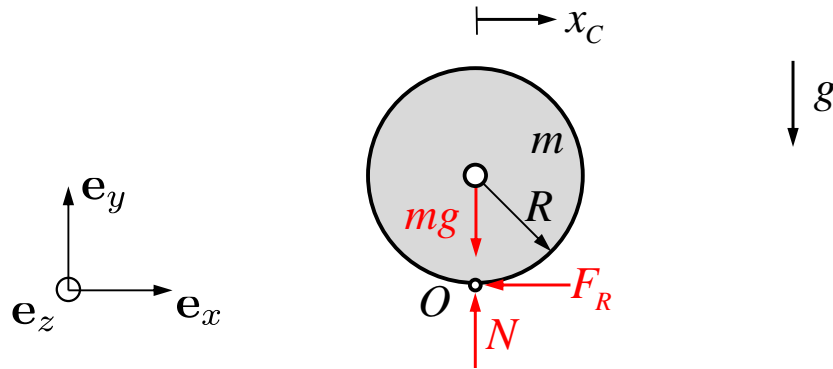
$$x_C = \varphi R \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_C = \dot{\varphi} R \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}_C = \ddot{\varphi} R \quad (4)$$

Und damit die Beschleunigung im Schwerpunkt \ddot{x}_C aus Gleichungen 3 und 4:

$$\ddot{x}_C = \ddot{\varphi} R = -\frac{2}{3}\frac{M_B}{mR} \quad (5)$$

Aus dem Impulssatz muss diese negative Beschleunigung von der Reibungskraft aufgenommen werden:

$$m\ddot{x}_C = -F_R \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}_C = -\frac{F_R}{m} \quad (6)$$



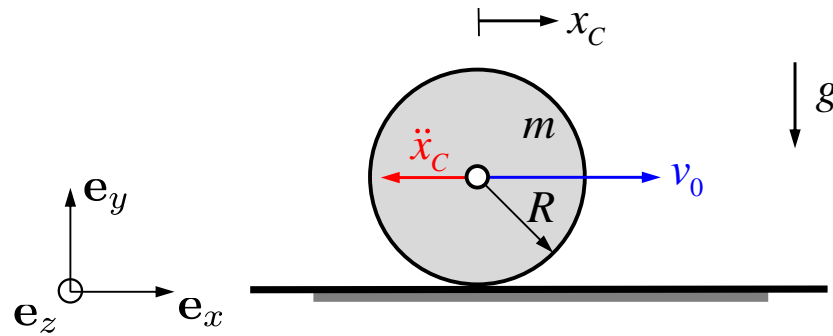
F_R kann dabei wie folgt berechnet werden:

$$F_R \leq \mu_0 N = \mu_0 mg \quad (7)$$

Schlussendlich kann aus den Gleichungen 5, 6 und 7 M_B berechnet werden:

$$-\frac{2}{3}\frac{M_B}{mR} \leq -\frac{F_R}{m} = -\frac{\mu_0 mg}{m} \quad \Rightarrow \quad M_B \leq \frac{3}{2}\mu_0 mgR \quad (8)$$

2. Wenn der Zylinder angehalten wird, beträgt seine Geschwindigkeit Null.



Die Geschwindigkeit vom Schwerpunkt kann durch Integration von \ddot{x}_C aus Gleichung 5 berechnet werden:

$$\ddot{x}_C = -\frac{2}{3} \frac{M_B}{mR} \Rightarrow \dot{x}_C = -\frac{2}{3} \frac{M_B}{mR} t + C_1 \quad (9)$$

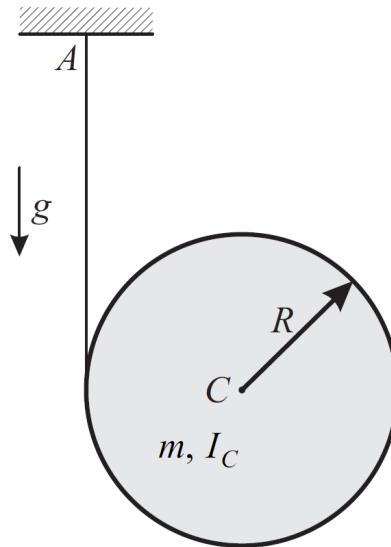
Durch Einsetzen der Anfangsbedingungen wird die Geschwindigkeitsgleichung vollständig:

$$\dot{x}_C(t=0) = v_0 = C_1 \Rightarrow \dot{x}_C = v_0 - \frac{2}{3} \frac{M_B}{mR} t \quad (10)$$

Und damit kann die Bremszeit t berechnet werden:

$$\dot{x}_C = 0 = v_0 - \frac{2}{3} \frac{M_B}{mR} t \Rightarrow t = \frac{3}{2} \frac{v_0 m R}{M_B} \quad (11)$$

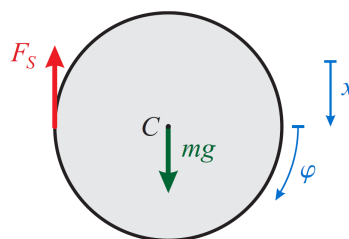
3. ¹Eine Jo-Jo-Spule (Masse m , Radius R , Trägheitsmoment in Achsenrichtung im Massenmittelpunkt $I_C = mR^2/2$) ist mit einem vertikalen Faden in A aufgehängt und wird zum Zeitpunkt $t = 0$ aus der Ruhe losgelassen. Die Spule ist mit genügend Faden umwickelt.



1. Stellen Sie alle zur Bestimmung der Bewegung und der Fadenkraft nötigen Gleichungen auf.
2. Bestimmen Sie die Bewegung und die Fadenkraft für die gegebenen Anfangsbedingungen.
3. Wie viel Zeit vergeht, bis die Spule um $10R$ gefallen ist?
4. Vergleichen Sie diese Zeit mit derjenigen für den freien Fall.

Lösung:

1. Wir schneiden die Spule frei:



Der Massenmittelpunktsatz lautet

$$m\ddot{x} = mg - F_S \quad (1)$$

und der Drallsatz bezüglich des (bewegten) Massenmittelpunkts C ist

$$\dot{L}_C = M_C \Rightarrow I_C \ddot{\varphi} = RF_S. \quad (2)$$

¹Aufgabe aus der Übungsserie 13 der Vorlesung «151-0223-10 Technische Mechanik», HS 2019, Prof. Dual/Prof. Glocker.

Wir stellen die kinematische Relation zwischen x und φ auf

$$\dot{x} = R\dot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = R\ddot{\varphi} \quad (3)$$

und finden die Bewegungsdifferentialgleichung durch Elimination der Bindungskraft F_S und der Koordinate φ

$$\begin{aligned} (1) + \frac{1}{R}(2) &\Rightarrow m\ddot{x} + \frac{I_C}{R}\ddot{\varphi} = mg - F_S + F_S \\ &\Rightarrow \left(m + \frac{mR^2}{2R} \frac{1}{R}\right) \ddot{x} = mg \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = \frac{2}{3}g \end{aligned} \quad (4)$$

Die Anfangsbedingungen lauten

$$x(0) = x_0 = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0 = 0, \quad (5)$$

da die Spule zum $t = 0$ aus der *Ruhe* losgelassen wird.

2. Die Lösung der Bewegungsdifferentialgleichung (4) wird durch Integration und Berücksichtigung der Anfangsbedingungen (5) erhalten

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) = \frac{2}{3}g &\Rightarrow \dot{x}(t) = \frac{2}{3}gt + v_0 \Rightarrow x(t) = \frac{1}{3}gt^2 + v_0t + x_0 \\ &\Rightarrow x(t) = \frac{1}{3}gt^2 \end{aligned} \quad (6)$$

Die Fadenkraft ist dann

$$(1) \Rightarrow F_S(t) = mg - m\ddot{x} = m\left(g - \frac{2}{3}g\right) = \frac{1}{3}mg. \quad (7)$$

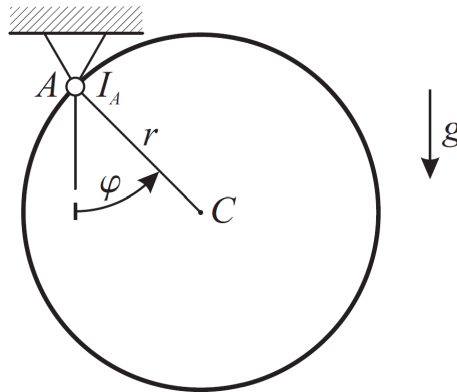
3. Die Zeit t_1 bis $x(t_1) = x_1 = 10R$ wird so berechnet, indem man Gleichung (6) mit $10R$ gleichsetzt und nach t_1 auflöst:

$$x(t_1) = \frac{1}{3}gt_1^2 = 10R \quad \Rightarrow \quad t_1 = \sqrt{\frac{30R}{g}} \quad (8)$$

4. Für den freien Fall gilt

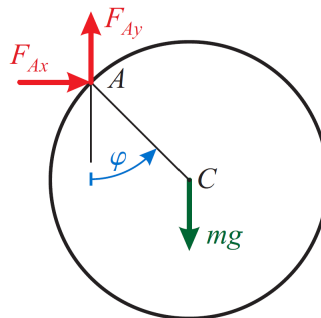
$$y(t) = \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad y(t_2) = \frac{1}{2}gt_2^2 = 10R \quad \Rightarrow \quad t_2 = \sqrt{\frac{20R}{g}} = \frac{\sqrt{6}}{3}t_1. \quad (9)$$

4. ²Ein homogener Reifen ist im Punkt A gelenkig gelagert und schwingt in einer Vertikalebene. Der Reifen hat die Masse m und den Radius r . Das Massenträgheitsmoment des Reifens bezüglich des Punktes A beträgt $I_A = 2mr^2$.



1. Finden Sie die Bewegungsdifferentialgleichung. Kommt sie Ihnen bekannt vor?
2. Linearisieren Sie die Bewegungsdifferentialgleichung und bestimmen Sie die Kreisfrequenz einer kleinen Schwingung.

Lösung:



1. Der Drallsatz bezüglich des ruhenden Punkts A lautet

$$\dot{L}_A = M_A \quad \Rightarrow \quad I_A \ddot{\varphi} = -mgr \sin \varphi; \quad (1)$$

Einsetzen des Trägheitsmomentes $I_A = 2mr^2$ liefert die nichtlineare Bewegungsdifferentialgleichung

$$2mr^2 \ddot{\varphi} + mgr \sin \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} + \frac{g}{2r} \sin \varphi = 0 \quad (2)$$

Die Bewegungsdifferentialgleichung des klassischen mathematischen Pendels lautet

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0. \quad (3)$$

Der Vergleich von (1) mit (2) zeigt, dass die Gleichungen für $l = 2r$ identisch sind.

²Aufgabe aus der Übungsserie 13 der Vorlesung «151-0223-10 Technische Mechanik», HS 2019, Prof. Dual/Prof. Glocker.

2. Wir linearisieren der Bewegungsdifferentialgleichung für kleine Auslenkungen um $\varphi = 0$ durch Anwenden der Taylor-Reihenentwicklung:

$$\begin{aligned}\sin \varphi &= \sin(0 + \varphi) = \sin(0) + \sin'(0)\varphi + \frac{1}{2}\sin''(0)\varphi^2 + (\dots) \\ &= \sin(0) + \cos(0)\varphi - \frac{1}{2}\sin(0)\varphi^2 + (\dots) \\ &= 0 + 1\varphi - 0\varphi^2 + (\dots) \approx \varphi\end{aligned}\tag{4}$$

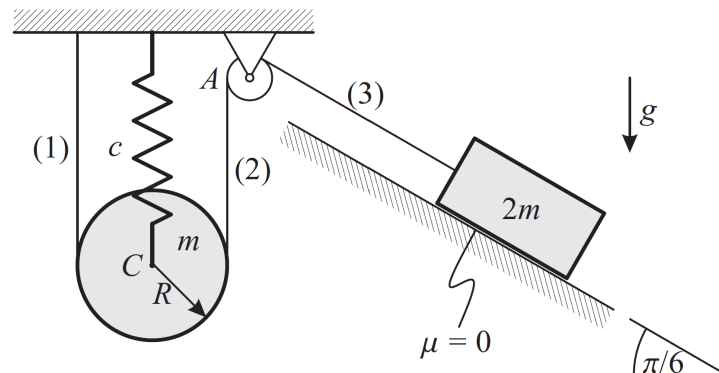
für $\varphi \ll 1$. Die lineare Bewegungsgleichung für *kleine* Auslenkungen φ lautet

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0\tag{5}$$

mit der Kreisfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{2r}}.\tag{6}$$

5. ³Eine Rolle (Masse m und Radius R) und ein Quader (Masse $2m$) sind gemäss der Skizze über ein masseloses, undehnbares Seil miteinander verbunden. Eine Feder (deren ungespannte Länge null ist) ist im Punkt C an der Spule befestigt. Der Quader liegt auf einer schiefen Ebene und gleitet reibungsfrei.



Annahmen:

- Trägheit der Rolle in A vernachlässigbar
- Rollenlager reibungsfrei
- kein Gleiten zwischen Seil und Rolle
- keine Reibung zwischen Quader und Eben
- Feder masselos

Hinweis: Massenträgheitsmoment der Rolle: $I_C = mR^2/2$

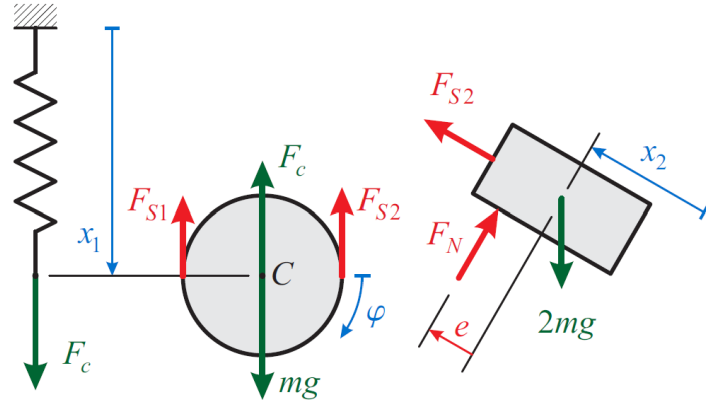
1. Bestimmen Sie den Freiheitsgrad des Systems.
2. Schneiden Sie die zwei Körper frei und formulieren Sie an ihnen den Massenmittelpunktsatz und wo nötig den Drallsatz.
3. Sofern in 2) mehr Koordinaten verwendet wurden, als der Freiheitsgrad des Systems ist: Welche Beziehungen gelten zwischen diesen Koordinaten?
4. Stellen Sie die Bewegungsdifferentialgleichung für den Quader auf (ohne sie zu lösen). Bestimmen Sie die Seilkräfte in den Abschnitten (1), (2) und (3) als Funktion der Koordinate und der Beschleunigung des Quaders, die Kreisfrequenz der Bewegung des Quaders und die Gleichgewichtslage des Systems.

³Aufgabe aus der Übungserie 13 der Vorlesung «151-0223-10 Technische Mechanik», HS 2019, Prof. Dual/Prof. Glocker.

Lösung:

1. Das System hat den Freiheitsgrad $f = 1$.

2. Freischnitt:



Der Massenmittelpunktsatz für den Quader lautet

$$2m\ddot{x}_2 = F_{S2} - \frac{1}{2}2mg \quad (1)$$

während der Massenmittelpunktsatz für die Rolle

$$m\ddot{x}_1 = mg - F_C - F_{S1} - F_{S2}. \quad (2)$$

Der Drallsatz an der Rolle bezüglich des (bewegten) Massenmittelpunkts ist

$$I_C\ddot{\varphi} = RF_{S1} - RF_{S2} \quad (3)$$

mit $I_C = mR^2/2$.

3. Die kinematische Relationen zwischen \dot{x}_1 , \dot{x}_2 und $\dot{\varphi}$ werden ausgedrückt als

$$\dot{x}_1 = R\dot{\varphi} \quad (4)$$

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_1 + R\dot{\varphi} = 2\dot{x}_1. \quad (5)$$

4. Der Kraftgesetz für Feder c lautet

$$F_C = cx_1. \quad (6)$$

Wir eliminieren die Zwangskräfte F_{S1} , F_{S2} und die Federkraft F_C

$$(1)+(2) \Rightarrow 2m\ddot{x}_2 + m\ddot{x}_1 = F_{S2} - mg + mg - F_C - F_{S1} - F_{S2} = -F_C - F_{S1} \quad (7)$$

$$(1) + \frac{(3)}{R} \Rightarrow 2m\ddot{x}_2 + \frac{I_C}{R}\ddot{\varphi} = F_{S2} - mg + F_{S1} - F_{S2} = F_{S1} - mg \quad (8)$$

$$(7)+(8) \Rightarrow 4m\ddot{x}_2 + m\ddot{x}_1 + \frac{I_C}{R}\ddot{\varphi} = -F_C - F_{S1} + F_{S1} - mg = -cx_1 - mg \quad (9)$$

Die Elimination der Koordinaten x_1 , φ liefert die Bewegungsgleichung in x_2 als

$$(9) \quad \Rightarrow \quad 4m\ddot{x}_2 + m\frac{\ddot{x}_2}{2} + \frac{mR^2}{2R} \frac{\ddot{x}_2}{2R} = -c\frac{x_2}{2} - mg \quad \Rightarrow \quad \frac{19}{2}m\ddot{x}_2 + cx_2 = -2mg. \quad (10)$$

Die Seilkräfte sind dann

$$(1) \quad \Rightarrow \quad F_{S2} = 2m\ddot{x}_2 + mg \quad (11)$$

$$(3) \quad \Rightarrow \quad F_{S1} = F_{S2} + \frac{I_C}{R}\ddot{\varphi} = 2m\ddot{x}_2 + mg + \frac{mR^2}{2R} \frac{\ddot{x}_2}{2R} = \frac{9}{4}m\ddot{x}_2 + mg \quad (12)$$

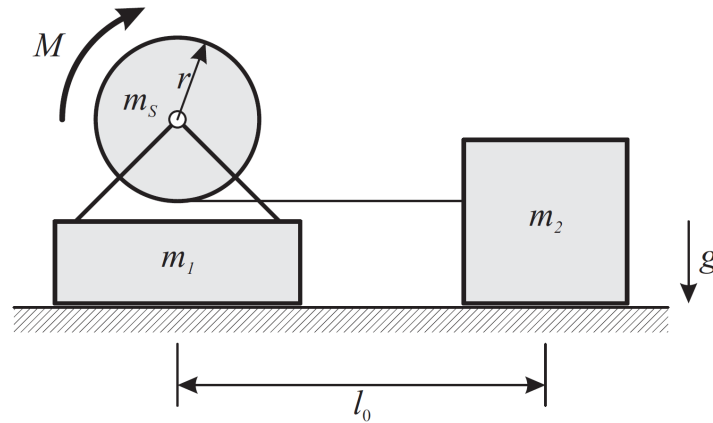
Die Kreisfrequenz ω der Bewegung des Quader ist

$$(10) \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 = -\frac{4}{19}g \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{2c}{19m}}. \quad (13)$$

Die Bedingung für das Gleichgewicht lautet

$$\ddot{x}_2^0 = \dot{x}_2^0 = 0 \quad \Rightarrow \quad cx_2^0 = -2mg \quad \Rightarrow \quad x_2^0 = -\frac{2mg}{c}. \quad (14)$$

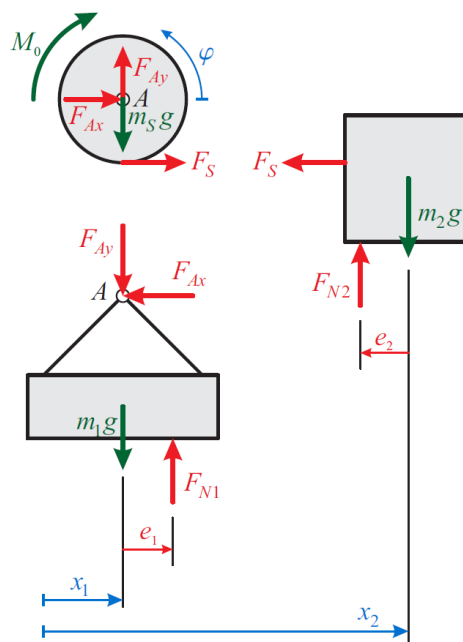
6. ⁴Zwei Quader bewegen sich reibungsfrei auf einer horizontalen Ebene. Der Anfangs-
abstand ist l_0 . Auf dem linken Quader (Masse m_1) ist reibungsfrei eine Seilspule
(homogener Zylinder mit Masse m_s und Radius r) angebracht. Das Ende des um die
Spule gewickelten Seiles ist am rechten Quader (Masse m_2) befestigt. Ein Motor übt
ab dem Zeitpunkt $t = 0$ ein konstantes Moment M auf die Seilspule aus. Die Quader
setzen sich dadurch in Bewegung, ohne zu kippen.



1. Was ist der Freiheitsgrad des Systems? Stellen Sie die Bewegungsdifferentialgleichungen auf.
2. Wie bewegt sich das System? Wie gross ist die Seilkraft?

Lösung:

1. Das System hat den Freiheitsgrad $f = 2$.
Freischnitt:



⁴Aufgabe aus der Übungserie 13 der Vorlesung «151-0223-10 Technische Mechanik», HS 2019, Prof. Dual/Prof. Glocker.

Der Massenmittelpunktsatz für Quader 1 ist

$$m_1 \ddot{x}_1 = -F_{Ax} \quad (1)$$

bzw. für Quader 2

$$m_2 \ddot{x}_2 = -F_S \quad (2)$$

und für die Spule

$$m_S \ddot{x}_1 = F_{Ax} + F_S. \quad (3)$$

Der Drallsatz an der Spule bezügl. des (bewegten) Massenmittelpunkts A lautet

$$I_A \ddot{\varphi} = r F_s - M_0 \quad (4)$$

mit $I_A = \frac{m_s r^2}{2}$.

Aus der Kinematischen Relation

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_1 + r \dot{\varphi}$$

erhält man

$$\Rightarrow \quad \ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1}{r}. \quad (5)$$

Wir eliminieren die Zwangskräfte F_{Ax} , F_{Ay} , F_S und die überzähligen Koord. φ

$$\begin{aligned} (1) + (2) + (3) &\Rightarrow m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 + m_S \ddot{x}_1 = -F_{Ax} - F_S + F_{Ax} + F_S = 0 \\ &\Rightarrow (m_1 + m_S) \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} (2) + \frac{(4)}{r} &\Rightarrow m_2 \ddot{x}_2 + \frac{I_A}{r} \ddot{\varphi} = -F_S + F_S - \frac{M_0}{r} \\ &\Rightarrow m_s \ddot{x}_1 - (2m_2 + m_S) \ddot{x}_2 = 2 \frac{M}{r}. \end{aligned} \quad (7)$$

Die Bewegungsdifferentialgleichungen zusammengefasst lauten

$$\begin{pmatrix} m_1 + m_S & m_2 \\ m_S & -2m_2 - m_S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2M_0/r \end{pmatrix}. \quad (8)$$

2. Durch Elimination

$$(8) \Rightarrow \begin{pmatrix} m_1 + m_S & m_2 \\ 0 & -2m_2 - m_S - \frac{m_2 m_S}{m_1 + m_S} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2M_0/r \end{pmatrix} \quad (9)$$

Rückwärtseinsetzen ergibt die entkoppelten Bewegungsdifferentialgleichungen

$$(8) \Rightarrow \ddot{x}_2 = -2 \frac{M_0}{r} \frac{m_1 + m_S}{2m_2m_1 + 3m_2m_S + m_1m_S + m_S^2} =: a_2 \quad (10)$$

$$(8) \Rightarrow \ddot{x}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_S} \ddot{x}_2 = 2 \frac{M_0}{r} \frac{m_2}{2m_2m_1 + 3m_2m_S + m_1m_S + m_S^2} =: a_1 \quad (11)$$

Lösen von (10) und (11) durch Integration und Berücksichtigung der Anfangsbedingungen $x_1(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = 0$, $x_2(0) = l_0$, $\dot{x}_2(0) = 0$ liefert

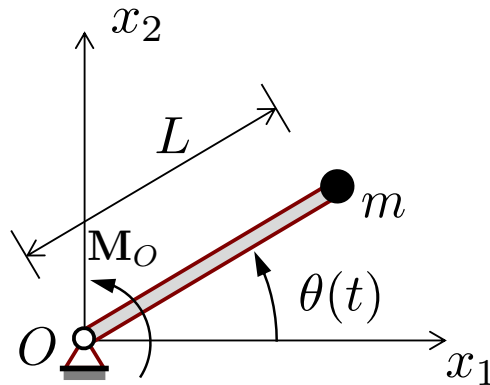
$$(11) \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} a_1 t^2 \quad (12)$$

$$(12) \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2} a_2 t^2 + l_0 \quad (13)$$

Die Seilkraft ist dann

$$(2) \Rightarrow F_S = -m_2 \ddot{x}_2 = 2 \frac{M_0}{r} \frac{m_2(m_1 + m_S)}{2m_2m_1 + 3m_2m_S + m_1m_S + m_S^2}. \quad (14)$$

7. Ein Teilchen der Masse m wird an der Spitze eines Stabes der Länge L mit vernachlässigbarer Masse befestigt. Es dreht um den festen Punkt O mit dem Winkel $\theta(t) = a \cos^2(\Omega t)$, wobei $\Omega = \text{konst.}$ Das System bewegt sich in der $x_1 - x_2$ Ebene. Auf das System wirkt *keine* Schwerkraft.



Was ist der Betrag des Moments M_O , das auf den Punkt O ausgeübt werden muss, um das gegebene $\theta(t)$ zu erzeugen?

- (a) $M_O = 2maL^2\Omega^2 \sin^2(2\Omega t)$
- (b) $M_O = 2maL^2\Omega^2(\sin^2(\Omega t) - \cos^2(\Omega t))$
- (c) $M_O = maL^2\Omega^2$
- (d) $M_O = mL^2\Omega^2 \tan(\Omega t)$
- (e) $M_O = maL^2\Omega^2(\sin^2(\Omega t) + 2\cos^2(\Omega t))$

Lösung:

Wir können den Drallsatz anwenden. Dieser lautet

$$I_O \ddot{\theta} = M_O. \quad (1)$$

Da die Masse des Stabs vernachlässigbar ist, beträgt das Massenträgheitsmoment

$$I_O = mL^2; \quad (2)$$

wir erhalten die Winkelgeschwindigkeit bzw. die Winkelbeschleunigung durch ein- bzw. zweifaches Ableiten des Winkels $\theta(t)$ nach der Zeit:

$$\dot{\theta} = -2a\Omega \sin(\Omega t) \cos(\Omega t) \quad \rightarrow \quad \ddot{\theta} = -2a\Omega^2(\cos^2(\Omega t) - \sin^2(\Omega t)). \quad (3)$$

Einsetzen von (2) und (3) in (1) liefert

$$M_O = 2maL^2\Omega^2(\sin^2(\Omega t) - \cos^2(\Omega t)). \quad (4)$$