

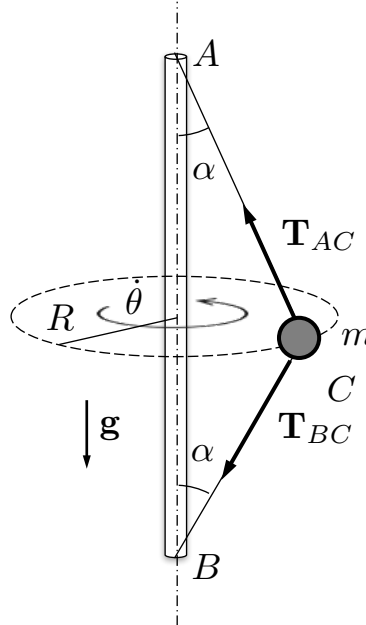
Technische Mechanik
151-0223-10

- Übung 11 -

Dr. Paolo Tiso

12. Dezember 2023

1. Die Seile AC und BC verbinden eine Kugel der Masse m mit einer senkrechten Welle, wie gezeigt. Die Schwerkraft wirkt nach unten. Wenn die Welle mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\dot{\theta}$ rotiert, bewegt sich die Kugel auf einem horizontalen Kreis, wobei die Seile unter einem Winkel α zur Welle geneigt sind. Die Kräfte in den Seilen werden mit \mathbf{T}_{AC} und \mathbf{T}_{BC} bezeichnet.



Was ist der minimale Wert von $\dot{\theta}$, so dass das Seil BC entspannt wird (das heisst $|\mathbf{T}_{BC}| = 0$)?

- (a) $\dot{\theta} = \sqrt{\frac{g}{R} \tan \alpha}$
 (b) $\dot{\theta} = \sqrt{\frac{4g}{3R} \cos^2 \alpha}$
 (c) $\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{R} \sin \alpha}$
 (d) $\dot{\theta} = 0$
 (e) $\dot{\theta} = \sqrt{\frac{3g}{R} \cos \alpha}$

Lösung: Da es sich um eine krummlinige Bewegung handelt, ist es sinnvoll, sich auf ein zylindrisches Koordinatensystem zu beziehen.

Das Teilchen bewegt sich auf einer Kreisbahn mit konstanter Geschwindigkeit $v = \dot{\theta}R$. Es liegt also nur eine Normalbeschleunigung vor. Der Impulssatz (in zylindrischen Komponenten geschrieben) ergibt

$$\dot{\mathbf{P}} = -mR\dot{\theta}^2 \mathbf{e}_r = -(T_{AC} + T_{BC}) \sin \alpha \mathbf{e}_r + ((T_{AC} - T_{BC}) \cos \alpha - mg) \mathbf{e}_z. \quad (1)$$

Wenn man die Komponenten gleichsetzt, erhält man folgende Gleichungen

$$mR\dot{\theta}^2 = (T_{AC} + T_{BC}) \sin \alpha \quad (2)$$

$$0 = (T_{AC} - T_{BC}) \cos \alpha - mg \quad (3)$$

aus denen T_{BC} berechnet werden kann. Aus (3) bekommt man

$$T_{AC} = \frac{mg}{\cos \alpha} + T_{BC} \quad (4)$$

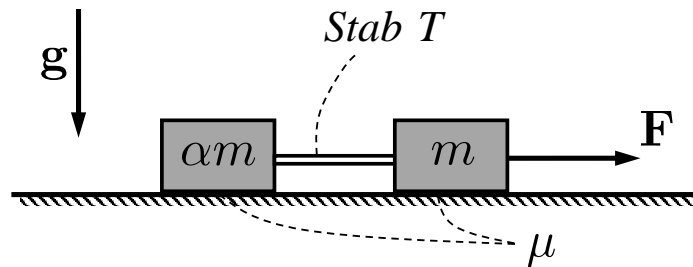
Einsetzen in (2) gibt uns

$$\begin{aligned} mR\dot{\theta}^2 &= \left[\frac{mg}{\cos \alpha} + 2T_{BC} \right] \sin \alpha \\ \Rightarrow T_{BC} &= \frac{1}{2} \left[\frac{mR\dot{\theta}^2}{\sin \alpha} - \frac{mg}{\cos \alpha} \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Wenn wir verlangen, dass $|T_{BC}| = 0$, erhalten wir

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{g}{R} \tan \alpha}. \quad (6)$$

2. Zwei Teilchen der Masse αm und m sind durch einen starren, masselosen Stab verbunden und werden durch eine konstante Kraft \mathbf{F} aus der Ruhelage gezogen. Das System gleitet auf einer horizontalen, rauen Oberfläche mit dem Gleitreibungskoeffizienten μ . Die Schwerkraft wirkt nach unten. Bezeichnen Sie den Betrag der Zugkraft im Stab während des Gleitens mit T .



Für welchen Wert von α gilt $T = \frac{1}{3} F$?

- (a) $\alpha = \frac{1}{2}$
 (b) $\alpha = \frac{2}{3}$
 (c) $\alpha = 1$
 (d) $\alpha = \sqrt{2}$
 (e) $\alpha = 3$

Lösung: Der Impulssatz für das gesamte System lautet

$$m(1 + \alpha)\ddot{x} = F - \mu(1 + \alpha)mg \Rightarrow \ddot{x} = \frac{F}{m(1 + \alpha)} - \mu g. \quad (1)$$

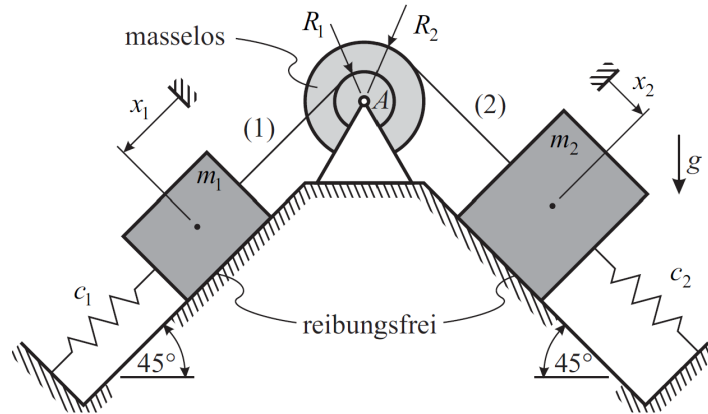
Der Impulssatz für die Masse αm lautet dann

$$\alpha m\ddot{x} = T - \mu\alpha mg \Rightarrow T = \frac{\alpha}{1 + \alpha}F, \quad (2)$$

wobei wir (1) für \ddot{x} eingesetzt haben. Wir verlangen, dass

$$T = \frac{\alpha}{1 + \alpha}F = \frac{1}{3}F \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}. \quad (3)$$

- 3.¹ Zwei Körper mit den Massen m_1 bzw. m_2 sind gemäss Skizze mit einem Seil über eine masselose Doppelrolle mit den Radien R_1 und R_2 verbunden. Beide Körper sind mittels zweier Federn mit den Federsteifigkeiten c_1 bzw. c_2 an einer Wand befestigt. Beide Körper gleiten reibungsfrei entlang zweier um 45° geneigter Ebenen. Die Federn seien im Anfangszustand ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$) ungespannt.



1. Bestimmen Sie den Freiheitsgrad des Systems.
2. Schneiden Sie beide Körper und die Rolle frei und führen Sie alle wirkenden Kräfte ein.
3. Stellen Sie die Gleichgewichtsbedingungen für die Rolle auf und bestimmen Sie den Zusammenhang zwischen den Seilkräften in den Seilabschnitten (1) und (2).
4. Formulieren Sie die Beziehungen zwischen den Federkräften und den gegebenen Koordinaten und stellen Sie die Bewegungsdifferentialgleichungen der beiden Körper bezüglich der gegebenen Koordinaten auf, ohne sie zu lösen.
5. Bestimmen Sie die kinematische Relation zwischen den Koordinaten x_1 und x_2 .
6. Es gelten die Verhältnisse: $m_2/m_1 = 1/2$, $R_2/R_1 = 2$ und $c_2/c_1 = 2$. Eliminieren Sie alle unbekannten Kräfte aus den Gleichungen und reduzieren Sie das Gleichungssystem auf möglichst wenige Gleichungen.

¹Aufgabe aus der Übungserie 11 der Vorlesung «151-0223-10 Technische Mechanik», HS 2019, Prof. Dual/Prof. Glocker.

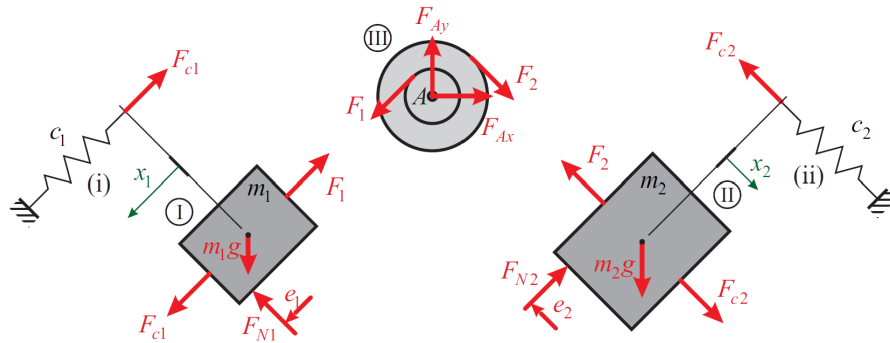
Lösung:

1. Der Freiheitsgrad ist die Anzahl der Minimalkoordinaten, die nötig ist, um die Lage des Systems eindeutig zu beschreiben. Hier können zum Beispiel

$$\mathbf{q} = [x_1] \quad \text{oder} \quad \mathbf{q} = [x_2]$$

als Minimalkoordinaten gewählt werden. Demnach ist der Freiheitsgrad $f = 1$.

2. Freischnittsskizze:



3. Wir stellen die GGB für die Stufenrolle (III) wie folgt auf:

$$KB(x) : \quad 0 = F_{Ax} - \frac{\sqrt{2}}{2}F_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}F_2 \quad (1)$$

$$KB(y) : \quad 0 = F_{Ay} - \frac{\sqrt{2}}{2}F_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}F_2 \quad (2)$$

$$MB(A, z) : \quad 0 = R_1F_1 - R_2F_2 \quad (3)$$

Aus der Momentenbedingung (3) folgt die Beziehung zwischen den Seilkräften (1) und (2)

$$F_2 = \frac{R_1}{R_2}F_1. \quad (4)$$

4. Die Kraftgesetze der Federn lauten

$$(i) : \quad F_{c1} = -c_1x_1 \quad (5)$$

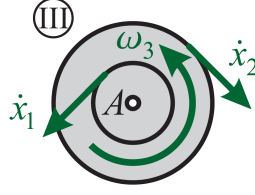
$$(ii) : \quad F_{c2} = -c_2x_2; \quad (6)$$

die Bewegungsdifferentialgleichungen in Richtung der Koordinaten (Massenmittelpunktsatz) werden formuliert als

$$(I) : \quad m_1\ddot{x}_1 = F_{c1} - F_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}m_1g \quad (7)$$

$$(II) : \quad m_2\ddot{x}_2 = F_{c2} - F_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}m_2g. \quad (8)$$

5. Wir bestimmen die kinematische Relation zwischen den Koordinaten x_1 und x_2



$$\omega_3 = \frac{\dot{x}_1}{R_1} = -\frac{\dot{x}_2}{R_2} \Rightarrow \dot{x}_2 = -\frac{R_2}{R_1} \dot{x}_1 \Rightarrow x_2 = -\frac{R_2}{R_1} x_1 + k. \quad (9)$$

In der ungespannten Lage gilt

$$0 = x_1 = x_2 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{R_2}{R_1} x_1. \quad (10)$$

6. Die Elimination der Federkräfte und Bindungskraft F_2 erfolgt durch Einsetzen der Kraftgesetze (5),(6) und der Relation (4) in die Bewegungsdifferentialgleichungen (7), (8) und Substitution der überzähligen Koordinate (10)

$$(7) \Rightarrow m_1 \ddot{x}_1 = -c_1 x_1 - F_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} m_1 g \quad (11)$$

$$(8) \Rightarrow -m_2 \frac{R_2}{R_1} \ddot{x}_1 = -c_2 x_2 - \frac{R_1}{R_2} F_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} m_2 g = c_2 \frac{R_2}{R_1} x_1 - \frac{R_1}{R_2} F_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} m_2 g. \quad (12)$$

Wir eliminieren die Bindungskraft F_1 durch Addieren der Bewegungsgleichungen (11), (12)

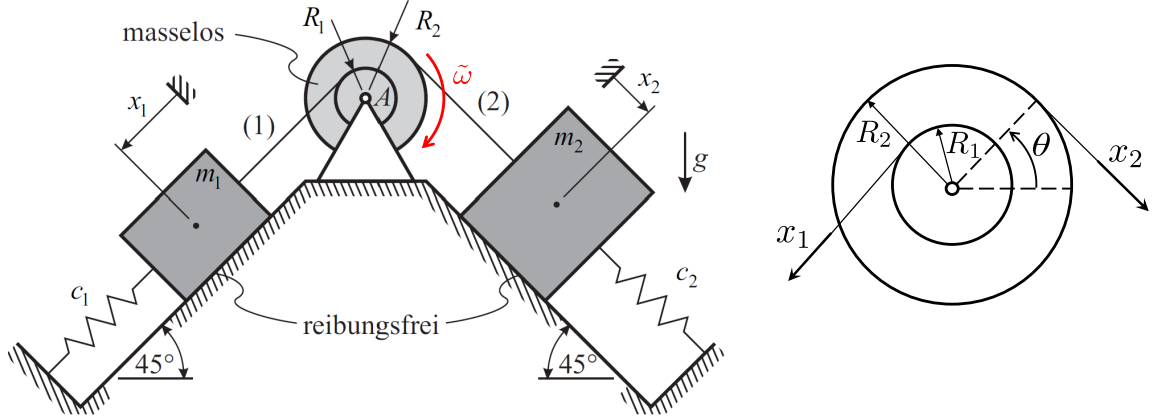
$$\begin{aligned} (11) - \frac{R_2}{R_1} (12) &\Rightarrow \left(m_1 + \frac{R_2^2}{R_1^2} m_2 \right) \ddot{x}_1 = - \left(c_1 + \frac{R_2^2}{R_1^2} c_2 \right) x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} m_1 - \frac{R_2}{R_1} m_2 g \\ &\Rightarrow \left(1 + \frac{R_2^2}{R_1^2} \frac{m_2}{m_1} \right) m_1 \ddot{x}_1 + \left(1 + \frac{R_2^2}{R_1^2} \frac{c_2}{c_1} \right) c_1 x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 - \frac{R_2}{R_1} \frac{m_2}{m_1} \right) m_1 g. \end{aligned} \quad (13)$$

Mit den Verhältnissen $m_2/m_1 = 1/2$, $R_2/R_1 = 2$ und $c_2/c_1 = 2$ wird (13) zu

$$3m_1 \ddot{x}_1 + 9c_1 x_1 = 0. \quad (14)$$

Alternative Lösung mit PdvL

Wir führen eine virtuelle Rotationssgeschwindigkeit $\tilde{\omega}$ an der Doppelrolle ein.



Aus der Kinematik erhalten wir die Beziehung zwischen x_1 und x_2 :

$$\begin{aligned} \theta R_2 &= -x_2 \\ \theta R_1 &= x_1 \\ \Rightarrow -\frac{x_2}{R_2} &= \frac{x_1}{R_1} \quad \Rightarrow \quad x_2 = -\frac{R_2}{R_1} x_1. \end{aligned} \quad (1)$$

Die entsprechenden virtuellen Geschwindigkeiten sind

$$\tilde{v}_1 = -\tilde{\omega} R_1 \quad \text{und} \quad \tilde{v}_2 = \tilde{\omega} R_2; \quad (2)$$

Wir wenden den PdvL an

$$-m_1 \ddot{x}_1 \tilde{v}_1 - m_2 \ddot{x}_2 \tilde{v}_2 + m_1 g \frac{\sqrt{2}}{2} \tilde{v}_1 + m_2 g \frac{\sqrt{2}}{2} \tilde{v}_2 - c_1 x_1 \tilde{v}_1 - c_2 x_2 \tilde{v}_2 = 0 \quad (3)$$

Wenn man (2) und (1) einsetzt und durch $\tilde{\omega}$ teilt, erhält man

$$m_1 \ddot{x}_1 R_1 - m_2 \ddot{x}_2 R_2 - m_1 g \frac{\sqrt{2}}{2} R_1 + m_2 g \frac{\sqrt{2}}{2} R_2 + c_1 x_1 R_1 + c_2 \frac{R_2}{R_1} x_1 R_2 = 0 \quad (4)$$

Mit $\ddot{x}_2 = -\frac{R_2}{R_1} \ddot{x}_1$ und wenn wir durch R_1 teilen

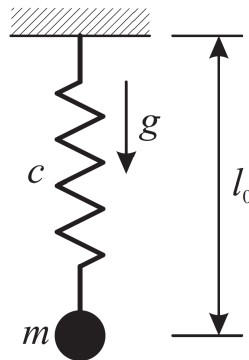
$$m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \frac{R_2^2}{R_1^2} \ddot{x}_1 - m_1 g \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{R_2}{R_1} + c_1 x_1 + c_2 \frac{R_2^2}{R_1^2} x_1 = 0 \quad (5)$$

Mit $c_2 = 2c_1$, $R_2 = 2R_1$ und $m_2 = m_1/2$

$$m_1 \ddot{x}_1 + 2m_1 \ddot{x}_1 - m_1 g \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} m_1 g \frac{\sqrt{2}}{2} + c_1 x_1 + 2c_1 4x_1 = 0 \quad (6)$$

$$\Rightarrow 3m_1 \ddot{x}_1 + 9c_1 x_1 = 0. \quad (7)$$

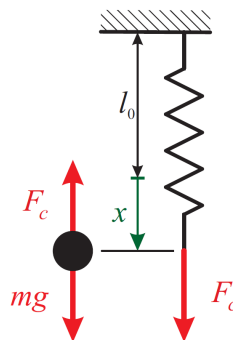
- 4.² Ein Massenpunkt (Masse m) hängt an einer Feder. Diese ist in vertikaler Lage am oberen Ende befestigt. Die Federkonstante ist c und die Feder besitzt die ungespannte Länge l_0 . Finde die Bewegung des Massenpunktes, wenn dieser bei ungespannter Feder aus der Ruhe losgelassen wird.



1. Nehmen Sie an, dass die Feder während der Bewegung vertikal bleibe und führen Sie in einer allgemeinen Lage die Kräfte am Massenpunkt ein.
2. Formulieren Sie das Newtonsche Bewegungsgesetz und finden Sie die Bewegungsdifferentialgleichung.
3. Formulieren Sie das Anfangswertproblem für die Bewegung des Massenpunktes.
4. Bestimmen Sie die Bewegung des Massenpunktes. Dieser führt eine Schwingung aus. Wie gross sind die Amplitude und die Kreisfrequenz dieser Schwingung?

Lösung:

1. Wir schneiden das System frei und prägen die Gewichtskraft mg sowie die Federkraft F_c ein wie in der Figur. Die Koordinate x misst die Auslenkung aus der ungespannten Ausgangslage.



2. Das Newtonsche Bewegungsgesetz (Massenmittelpunktsatz) lautet

$$m\ddot{x} = mg - F_c; \quad (1)$$

während der Kraftgesetz der Feder mit ungespannter Lage bei $x = x_0 = 0$ ist

$$F_c = cx. \quad (2)$$

²Aufgabe aus der Übungsserie 11 der Vorlesung «151-0223-10 Technische Mechanik», HS 2019, Prof. Dual/Prof. Glocker.

Wenn wir (2) ins (1) einsetzen, erhalten wir die Bewegungsdifferentialgleichung

$$m\ddot{x} + cx = mg. \quad (3)$$

Bemerkung: Bewegungsdifferentialgleichung (3) ist eine lineare, gewöhnliche, inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung.

3. Das Anfangswertproblem mit Bewegungsdifferentialgleichung (3) und Anfangsbedingungen an Lage und Geschwindigkeit ist

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega^2 x &= g \quad \text{mit } \omega = \sqrt{\frac{c}{m}} \\ x(0) &= x_0 = 0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

4. Wir benutzen den allgemeinen Lösungsansatz

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t + \frac{g}{\omega^2}; \quad (5)$$

einsetzen der Anfangsbedingungen (4) liefert die Konstanten c_1, c_2 als

$$0 = x(0) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t + \frac{g}{\omega^2} \Big|_{t=0} = c_1 + \frac{g}{\omega^2} \Rightarrow c_1 = -\frac{g}{\omega^2} \quad (6)$$

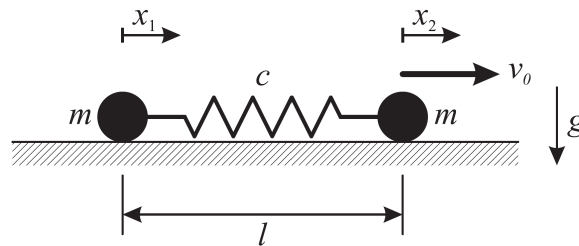
$$0 = \dot{x}(0) = -c_1 \omega \sin \omega t + c_2 \omega \cos \omega t \Big|_{t=0} = c_2 \omega \Rightarrow c_2 = 0. \quad (7)$$

Einsetzen in (5) liefert die Lösung des Anfangswertproblems

$$x(t) = \frac{g}{\omega^2}(1 - \cos \omega t) = \frac{mg}{c} \left(1 - \cos \sqrt{\frac{c}{m}} t\right). \quad (8)$$

Die Lösung beschreibt eine Schwingung mit Kreisfrequenz $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$ und Amplitude $c_1 = -\frac{g}{\omega^2} = -\frac{mg}{c}$ um die Gleichgewichtslage $x_g = \frac{mg}{c}$.

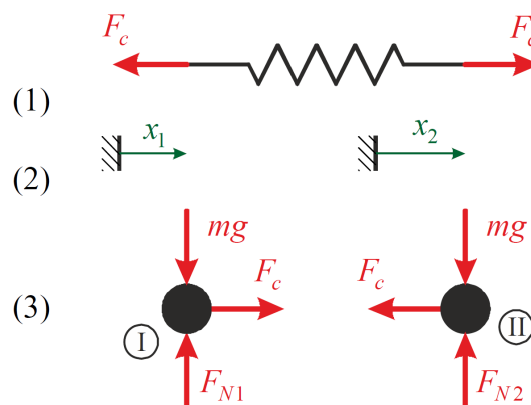
- 5.³ Zwei Massenpunkte (Masse m) befinden sich auf einer reibungsfreien Horizontalebene und sind durch eine Feder (Federkonstante c , ungespannte Länge l) verbunden. Zur Zeit $t = 0$ (siehe Skizze) ist die Feder ungespannt, der linke Massenpunkt in Ruhe und der rechte Massenpunkt bewegt sich mit der Schnelligkeit v_0 .



1. Formulieren Sie für beide Massen einzeln das Newtonsche Gesetz.
2. Bestimmen Sie die Bewegung der beiden Massenpunkte für die gegebenen Anfangsbedingungen.
3. Berechnen Sie die Federkraft in Funktion der Zeit.

Tipp: Die Bewegungsdifferentialgleichungen vereinfachen sich, wenn man die neuen Koordinaten $q_1 = x_1 + x_2$, $q_2 = x_2 - x_1$ verwendet.

Lösung:



1. Das Newtonsche Bewegungsgesetz für Masse (I) bzw. (II) lautet

$$(I) : \quad m\ddot{x}_1 = F_c \quad (1)$$

$$(II) : \quad m\ddot{x}_2 = -F_c. \quad (2)$$

Das Kraftgesetz der Feder ist

$$F_c = c(x_2 - x_1). \quad (3)$$

Das Anfangswertproblem in (x_1, x_2) lautet

$$m\ddot{x}_1 + c(x_1 - x_2) = 0 \quad (4)$$

³Aufgabe aus der Übungsserie 11 der Vorlesung «151-0223-10 Technische Mechanik», HS 2019, Prof. Dual/Prof. Glocker.

$$m\ddot{x}_2 + c(x_2 - x_1) = 0 \quad (5)$$

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = 0, \quad \dot{x}_2(0) = v_0 \quad (6)$$

Bemerkung: Das System der Bewegungsgleichungen (4),(5) in (x_1, x_2) ist gekoppelt.

2. Wir wenden die Koordinatentransformation

$$q_1 = x_1 + x_2; \quad q_2 = x_2 - x_1 \quad (7)$$

um die Bewegungsgleichungen wie folgt zu entkoppeln

$$(4) + (5) \Rightarrow m\ddot{q}_1 = 0 \Rightarrow \ddot{q}_1 = 0 \quad (8)$$

$$(5) - (4) \Rightarrow m\ddot{q}_2 = -2cq_2 \Rightarrow \ddot{q}_2 + \omega^2 q_2 = 0 \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{2c}{m}} \quad (9)$$

$$(6) \Rightarrow q_1(0) = 0, \quad q_2(0) = 0, \quad \dot{q}_1(0) = v_0, \quad \dot{q}_2(0) = v_0 \quad (10)$$

Das Anfangswertproblem in den neuen Koordinaten (q_1, q_2) lautet

$$\ddot{q}_1 = 0 \quad (11)$$

$$\ddot{q}_2 + \omega^2 q_2 = 0 \quad (12)$$

$$q_1(0) = 0, \quad q_2(0) = 0, \quad \dot{q}_1(0) = v_0, \quad \dot{q}_2(0) = v_0 \quad (13)$$

Bemerkung: Das System der Bewegungsgleichungen (11),(12) in (q_1, q_2) ist entkoppelt.

Wir finden die Lösung für(11), (13) durch zweifache Integration von (11) und Anwenden der Anfangsbedingungen (13) :

$$q_1(t) = \int \int \ddot{q}_1 dt dt = c_1 t + c_2 \Rightarrow c_2 = 0, c_1 = v_0 \Rightarrow q_1(t) = v_0 t; \quad (14)$$

die Lösung für(12), (13) wird durch den harmonischen Ansatz und Anwenden der Anfangsbedingungen (13) erhalten :

$$q_2(t) = c_3 \cos \omega t + c_4 \sin \omega t \Rightarrow c_3 = 0, c_4 = \frac{v_0}{\omega} \Rightarrow q_2(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t. \quad (15)$$

Abschliessend transformieren wir (q_1, q_2) zurück zu den ursprünglichen Koordinaten (x_1, x_2) :

$$x_1(t) = \frac{q_1 - q_2}{2} = \frac{v_0}{2} \left(t - \frac{\sin \omega t}{\omega} \right) \quad (16)$$

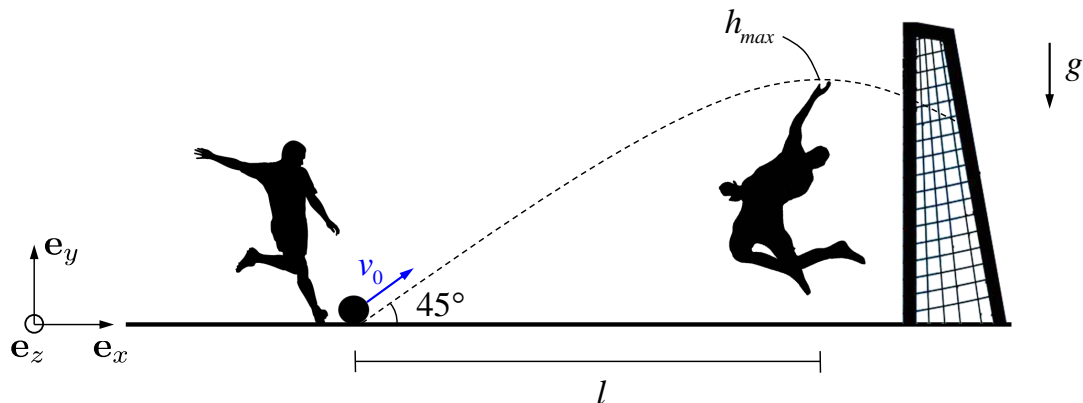
$$x_2(t) = \frac{q_1 + q_2}{2} = \frac{v_0}{2} \left(t + \frac{\sin \omega t}{\omega} \right). \quad (17)$$

3. Durch einsetzen von (16) und (17) ins Kraftgesetz der Feder (3) erhalten wir

$$F_c = c(x_2 - x_1) = cq_2 = \frac{cv_0}{\omega} \sin \omega t, \quad (18)$$

wobei $\omega = \sqrt{\frac{2c}{m}}$.

6. Ronaldo ist bereit, einen Strafstoss auszuführen. Er entscheidet sich für einen Winkel von 45° , ist sich aber noch unsicher über die benötigte Anfangsgeschwindigkeit v_0 . Um das Fußballtor zu treffen, muss der Ball die maximale Höhe in der Entfernung l von Ronaldo erreichen (siehe Skizze).



Wie hoch muss die Geschwindigkeit v_0 sein, damit Ronaldo ein Tor schießen kann?

- (a) $v_0 = \sqrt{2gl}$
 (b) $v_0 = 2gl$
 (c) $v_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{gl}$
 (d) $v_0 = \frac{gl}{2}$
 (e) Ronaldo trifft auch ohne Physik

Lösung:

Die Höhe des Fußballs kann durch die y -Komponente der Wurfbahn beschrieben werden. Das Maximum einer Funktion kann gefunden werden, indem man ihre Ableitung gleich Null setzt.

y kann durch zweimaliges Integrieren der Beschleunigungsgleichung und Einsetzen der Anfangsbedingungen bestimmt werden. Die Beschleunigung \ddot{y} kann aus dem Impulsatz in \mathbf{e}_y -Richtung bestimmt werden (wobei die angenommene Masse m des Fußballs weggelassen wird):

$$m\ddot{y} = -mg \quad \Rightarrow \quad \ddot{y} = -g \quad (1)$$

Durch Integrieren und Einsetzen der Anfangsbedingungen erhält man \dot{y} :

$$\int_0^t \ddot{y} d\tau = \int_0^t -g d\tau \quad \Rightarrow \quad \dot{y}(t) = \dot{y}(0) - gt = v_0 \cdot \sin 45^\circ - gt = \frac{\sqrt{2}}{2}v_0 - gt \quad (2)$$

Die zweite Integration ergibt dann y :

$$\int_0^t \dot{y}(\tau) d\tau = \int_0^t \left(\frac{\sqrt{2}}{2}v_0 - g\tau \right) d\tau \quad (3)$$

$$\Rightarrow y(t) = y(0) + \frac{\sqrt{2}}{2}v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (4)$$

Dasselbe Verfahren kann in x -Richtung angewendet werden:

$$\ddot{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = v_0 \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} v_0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\sqrt{2}}{2} v_0 t \quad (5)$$

Aus der x -Komponente kann die Zeit t_{max} bis h_{max} bestimmt werden:

$$x(t_{max}) = l \quad \Rightarrow \quad t_{max} = \frac{\sqrt{2} x(t_{max})}{v_0} = \frac{\sqrt{2} l}{v_0} \quad (6)$$

Beim Nullsetzen der Ableitung in Gleichung 2 und Einsetzen von t_{max} bekommt man die gewünschte Geschwindigkeit v_0 :

$$0 = \frac{\sqrt{2}}{2} v_0 - g t_{max} \quad (7)$$

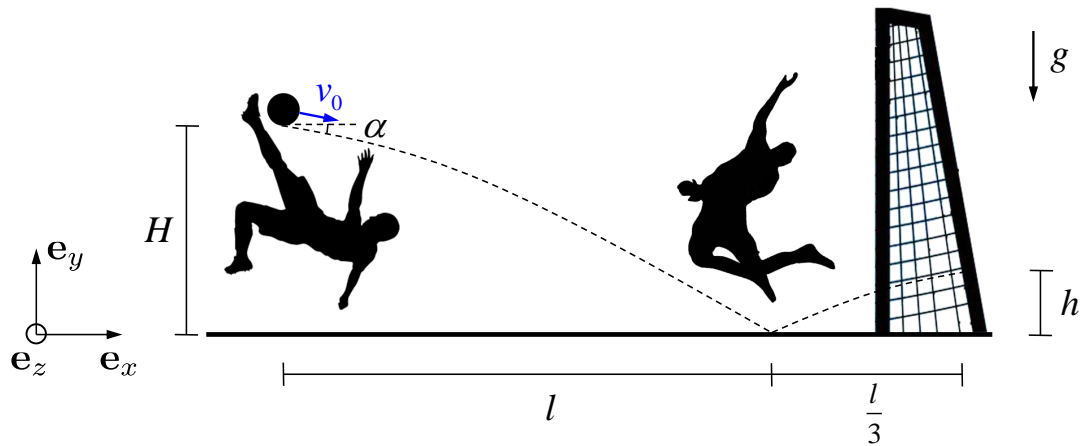
$$0 = \frac{\sqrt{2}}{2} v_0 - g \frac{\sqrt{2} l}{v_0} \quad (8)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} v_0 = g \frac{\sqrt{2} l}{v_0} \quad (9)$$

$$v_0^2 = 2gl \quad (10)$$

$$v_0 = \sqrt{2gl} \quad (11)$$

7. Als Alternative zum vorherigen direkten Schuss überlegt Ronaldo, einen Fallrückzieher zu machen. In diesem Fall wird der Ball aus der Höhe H geschossen, trifft im Abstand l unter dem Torhüter auf den Boden und landet in der Höhe h im Tor (siehe Skizze).



1. Unter welchem Winkel α berührt der Fussball den Boden nach $t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$?
 - (a) $\alpha = 0^\circ$
 - (b) $\alpha = 15^\circ$
 - (c) $\alpha = 30^\circ$
 - (d) $\alpha = 45^\circ$
 - (e) $\alpha = 60^\circ$
2. In welcher Höhe h landet der Fussball im Tor? Der Winkel α kann aus Teilaufgabe 1 entnommen werden.
 - (a) $h = \frac{1}{3}l$
 - (b) $h = \frac{4}{9}H$
 - (c) $h = \frac{1}{2}gl^2$
 - (d) $h = \frac{5}{9}H$
 - (e) $h = \frac{8}{9}H$

Hinweis: Es kann davon ausgegangen werden, dass der Sprung des Balles am Boden vollständig elastisch ist, so dass die Geschwindigkeit nach dem Stoss wie folgt aussieht:

$$\mathbf{v}_{nach} = \begin{pmatrix} v_{x,nach} \\ v_{y,nach} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{x,vor} \\ -v_{y,vor} \end{pmatrix}$$

Lösung:

1. Die Höhe des Fußballs kann durch zweimaliges Integrieren der Beschleunigungsgleichung und Einsetzen der Anfangsbedingungen bestimmt werden:

$$\ddot{y} = -g \quad (1)$$

$$\dot{y} = -v_0 \sin \alpha - gt \quad (2)$$

$$y = H - v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (3)$$

Nach der gegebenen Zeit $t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$ ist die Höhe $y = 0$. Daraus kann der Winkel α bestimmt werden:

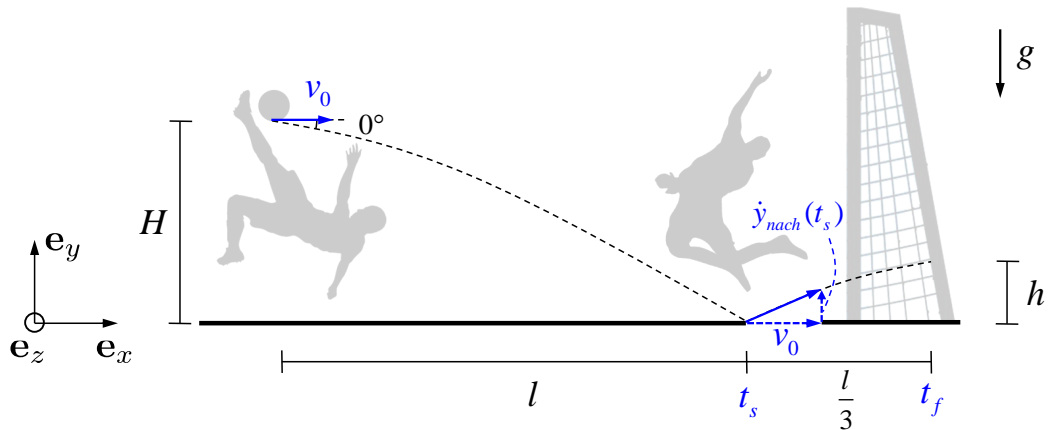
$$0 = H - v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (4)$$

$$0 = H - v_0 \sin \alpha \sqrt{\frac{2H}{g}} - \frac{1}{2}g \left(\frac{2H}{g} \right) \quad (5)$$

$$0 = H - v_0 \sin \alpha \sqrt{\frac{2H}{g}} - H \quad (6)$$

$$0 = -v_0 \sin \alpha \sqrt{\frac{2H}{g}} \Rightarrow \sin \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0^\circ \quad (7)$$

2. Die Skizze zeigt die Position der im folgenden Abschnitt berechneten Variablen:



Aus der x -Komponente kann die Stosszeit t_s und die Landezeit im Tor t_f bestimmt werden:

$$\ddot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x} = v_0 \Rightarrow x = v_0 t \quad (8)$$

$$x(t_s) = l \Rightarrow t_s = \frac{l}{v_0} \quad (9)$$

$$x(t_f) = \frac{4}{3}l \Rightarrow t_f = \frac{4}{3} \frac{l}{v_0} \quad (10)$$

Die gegebene Zeit $t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$ fällt mit der Stosszeit t_s zusammen. t_s und t_f können daher wie folgt umgeschrieben werden:

$$t_s = \frac{l}{v_0} = \sqrt{\frac{2H}{g}} \quad (11)$$

$$t_f = \frac{4}{3} \frac{l}{v_0} = \frac{4}{3} t_s = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2H}{g}} \quad (12)$$

Aus Gleichung 2 (mit $\alpha = 0^\circ$) kann die Geschwindigkeit vor dem Stoss berechnet werden:

$$\dot{y}_{vor}(t_s) = -gt_s = -g\sqrt{\frac{2H}{g}} = -\sqrt{2gH} \quad (13)$$

Dank des Hinweises wissen wir, dass die Geschwindigkeit nach dem Stoss wie folgt berechnet werden kann:

$$\dot{y}_{nach}(t_s) = -\dot{y}_{vor}(t_s) = \sqrt{2gH} \quad (14)$$

Somit kann die Höhe nach dem Stoss wie folgt bestimmt werden:

$$\ddot{y}_{nach} = -g \quad (15)$$

$$\dot{y}_{nach} = \dot{y}_{nach}(t_s) - g(t - t_s) = \sqrt{2gH} - g(t - t_s) \quad (16)$$

$$y_{nach} = \sqrt{2gH}(t - t_s) - \frac{1}{2}g(t - t_s)^2 \quad (17)$$

Dabei sind die neuen Gleichungen 15 bis 17 um die Zeit t_s gegenüber der zuvor verwendeten Zeitreferenz verschoben. Aus diesem Grund wurde $(t - t_s)$ als Zeit verwendet.

Beim Einsetzen der Landezeit im Tor t_f liefert Gleichung 17 die gewünschte Höhe h :

$$h = y_{nach}(t_f) = \sqrt{2gH}(t_f - t_s) - \frac{1}{2}g(t_f - t_s)^2 \quad (18)$$

$$h = \sqrt{2gH} \cdot \left(\frac{4}{3} \sqrt{\frac{2H}{g}} - \sqrt{\frac{2H}{g}} \right) - \frac{1}{2}g \cdot \left(\frac{4}{3} \sqrt{\frac{2H}{g}} - \sqrt{\frac{2H}{g}} \right)^2 \quad (19)$$

$$h = \sqrt{2gH} \cdot \left(\frac{1}{3} \sqrt{\frac{2H}{g}} \right) - \frac{1}{2}g \cdot \left(\frac{1}{3} \sqrt{\frac{2H}{g}} \right)^2 \quad (20)$$

$$h = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{4gH^2}{g}} - \frac{1}{18}g \sqrt{\frac{2H}{g}}^2 \quad (21)$$

$$h = \frac{2}{3}H - \frac{1}{9}H \quad (22)$$

$$h = \frac{6-1}{9}H \quad (23)$$

$$h = \frac{5}{9}H \quad (24)$$