

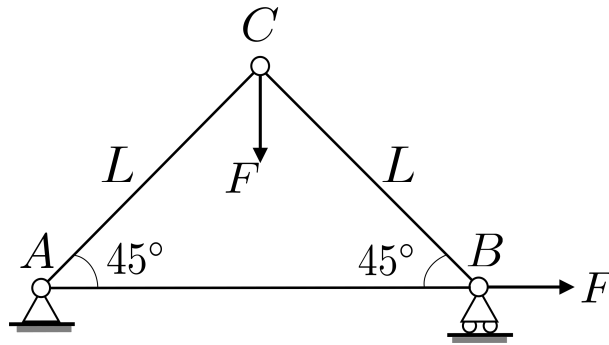
Technische Mechanik
151-0223-10

- Übung 7 -

Dr. Paolo Tiso

7. November 2023

1. Das skizzierte ideale Fachwerk ist durch die zwei eingezeichneten Kräfte belastet. Die Stäbe AC und BC haben die Länge L .

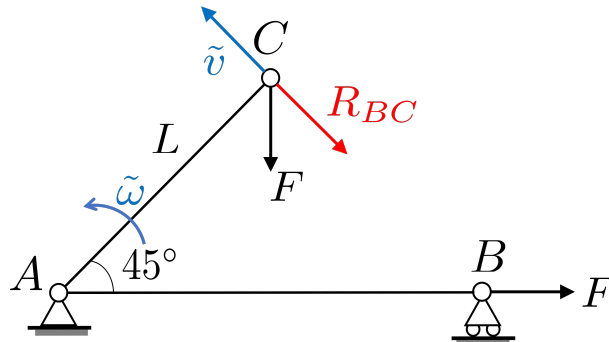


Wie gross ist die Stabkraft im Stab BC (positiv für einen Zugstab, negativ für einen Druckstab)?

- (a) $R_{BC} = -\frac{F}{\sqrt{2}}$
 (b) $R_{BC} = F$
 (c) $R_{BC} = 0$
 (d) $R_{BC} = \sqrt{2}F$
 (e) $R_{BC} = -\frac{F}{2}$

Lösung:

Wir führen einen partiellen Freischnitt aus: Der Stab BC wird entfernt und durch die Stabkraft R_{BC} ersetzt, wobei R_{BC} als Zugkraft eingeführt wird.



Der Punkt A ist das (virtuelle) Momentanzentrum vom System, mit Rotationsgeschwindigkeit $\tilde{\omega}$. Wir benutzen den SvM ($A \rightarrow C$) und erhalten die (virtuelle) Schnelligkeit im Punkt C als

$$\tilde{v}_C = \tilde{\omega}L \quad (1)$$

und im Punkt B muss gelten

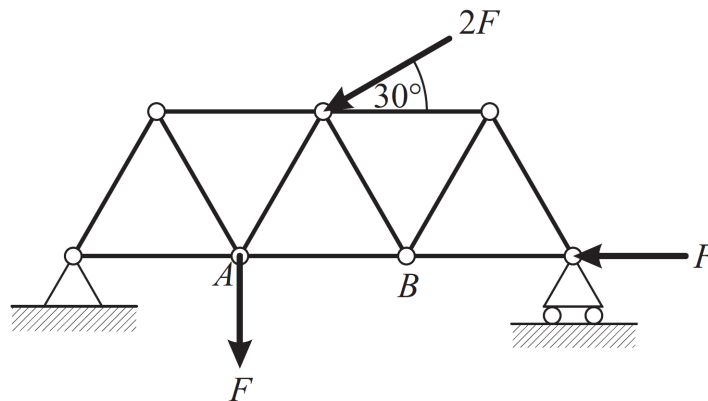
$$\tilde{v}_B = 0, \quad (2)$$

sodass die virtuelle Bewegung verträglich ist.

Wir können nun das PdvL anwenden und erhalten

$$\tilde{P} = -R_{BC}\tilde{\omega}L - \frac{F}{\sqrt{2}}\tilde{\omega}L = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{BC} = -\frac{F}{\sqrt{2}}. \quad (3)$$

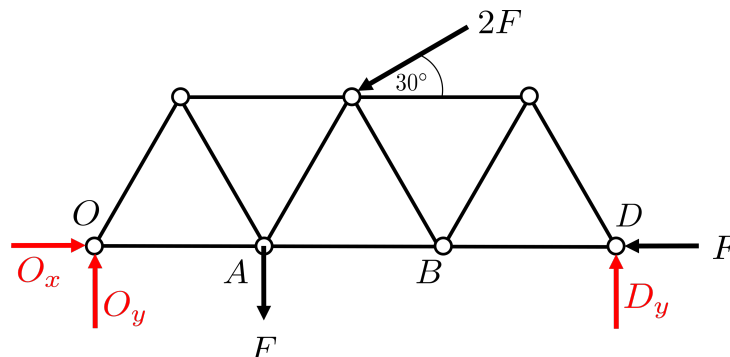
2. ¹Das skizzierte ideale Fachwerk ist durch die drei eingezeichneten Kräfte belastet. Alle Stäbe haben die Länge l .



1. Bestimmen Sie die Bindungskräfte in den Lagern.
2. Berechnen Sie mit dem Prinzip der virtuellen Leistungen (PdvL) die Stabkraft im Stab AB .
3. Ist es ein Zug- oder Druckstab?

Lösung:

1. Wir Bezeichnen die Lager als O und D , schneiden sie frei und tragen die entsprechenden, unbekannten Reaktionen auf.



Wir stellen die Gleichgewichtsbedingungen auf als

$$KB(x): \quad 0 = O_x - 2F \frac{\sqrt{3}}{2} - F \quad (1)$$

$$KB(y): \quad 0 = O_y + D - F - 2F \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$MB(O): \quad 0 = -Fl + 2F \frac{\sqrt{3}}{2} l \frac{\sqrt{3}}{2} - 2F \frac{1}{2} \frac{3}{2} l + D_y 3l \quad (3)$$

Durch auflösen der Gleichungen ergibt sich

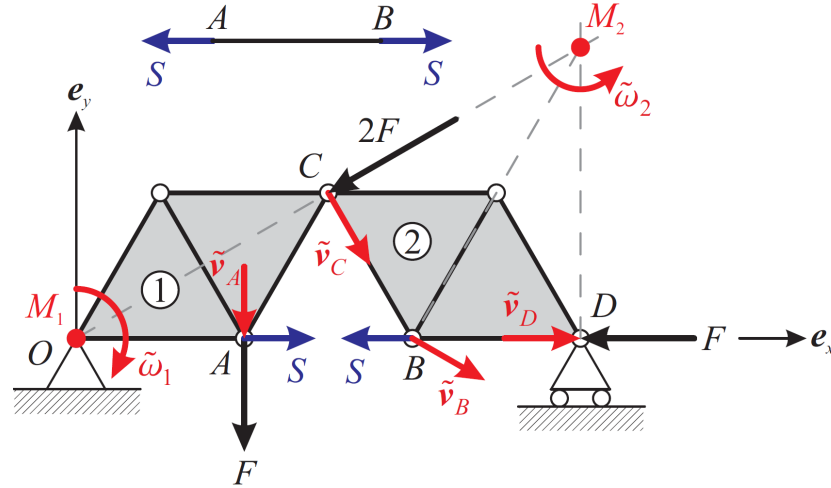
$$(3) \Rightarrow D_y = \left(F - \frac{3}{2}Fl + \frac{3}{2}Fl \right) \frac{1}{3} = \frac{F}{3}; \quad (4)$$

¹Aufgabe aus der Übungsserie 7 der Vorlesung « 151-0223-10 Technische Mechanik », HS 2019, Prof. Dual/Prof. Glocker.

$$(2) \Rightarrow O_y = 2F - D_y = \frac{5}{3}F; \quad (5)$$

$$(1) \Rightarrow O_x = F(1 + \sqrt{3}). \quad (6)$$

2. Wir führen einen partiellen Freischnitt aus: der Stab AB wird entfernt und durch die Stabkraft S ersetzt, wobei S als Zugkraft eingeführt wird. Die Fachwerke (1) und (2) bilden starre Körper.



M_1 ist (virtuelles) Momentanzentrum von Fachwerk (1). Wir benutzen den SvM ($M_1 \rightarrow A$) und erhalten die (virtuelle) Geschwindigkeit im Punkt A als

$$\tilde{\mathbf{v}}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \tilde{\omega}_1 l. \quad (7)$$

Analog erhalten wir die Geschwindigkeit im Punkt C als (SvM, $M_1 \rightarrow C$)

$$\tilde{\mathbf{v}}_C = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -3/2 \end{pmatrix} \tilde{\omega}_1 l. \quad (8)$$

Daraus können wir erschliessen, das Momentanzentrum M_2 von (2) liegt im Schnittpunkt von OC und der Vertikalen durch D . Da der Punkt C auch zum Fachwerk (2) gehört, und $|\mathbf{r}_{CM_1}| = |\mathbf{r}_{CM_2}|$, muss die Rotationsgeschwindigkeit von Fachwerk (2) den gleichen Betrag wie die Rotationsgeschwindigkeit von Fachwerk (1) haben, also

$$\omega_2 = \omega_1. \quad (9)$$

Die Geschwindigkeit im B ist dann (SvM, $M_2 \rightarrow B$)

$$\tilde{\mathbf{v}}_B = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} \tilde{\omega}_1 l; \quad (10)$$

die Geschwindigkeit in D wird durch den SdpG ($B \rightarrow D$) erhalten als

$$\tilde{\mathbf{v}}_D = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \tilde{\omega}_1 l. \quad (11)$$

Nun können wir das Prinzip der virtuellen Leistungen (PdvL) anwenden:

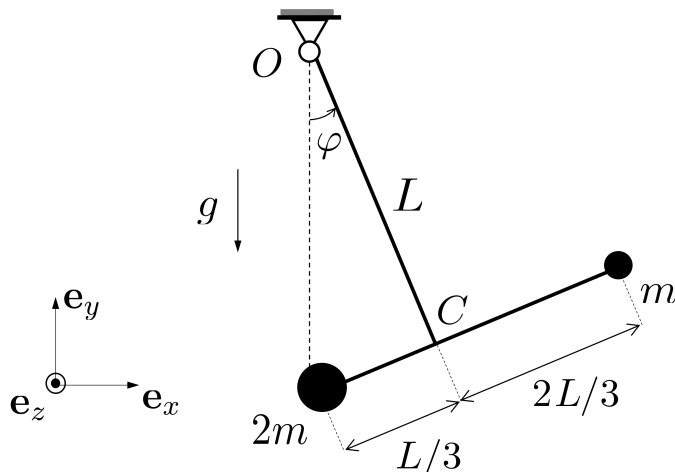
$$\begin{aligned}
\tilde{P} &= \tilde{\mathbf{v}}_A \cdot \begin{pmatrix} S \\ -F \end{pmatrix} + \tilde{\mathbf{v}}_B \cdot \begin{pmatrix} -S \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{\mathbf{v}}_C \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} 2F + \tilde{\mathbf{v}}_D \cdot \begin{pmatrix} -F \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\
&= \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S \\ -F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -S \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -3/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{3}F \\ -F \end{pmatrix} \right. \\
&\quad \left. + \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -F \\ 0 \end{pmatrix} \right] \tilde{\omega}_1 l = 0 \\
&= (F - \sqrt{3}S - \sqrt{3}F) \tilde{\omega}_1 l \quad \forall \tilde{\omega}_1 \\
&\Rightarrow [(1 - \sqrt{3})F - \sqrt{3}S] = 0;
\end{aligned} \tag{12}$$

Also ist die Stabkraft

$$S = -\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}F. \tag{13}$$

3. Angenommen $F > 0$, dann ist $S < 0$ und mit dem im Freischnitt gewählten Vorzeichen (Stabkraft S wurde als Zugkraft eingeführt) ist AB ein Druckstab.

3. Das dargestellte System besteht aus 2 Punktmassen der Masse $2m$ bzw. m , die durch masselose Stäbe verbunden sind und im Punkt O gelenkig gelagert sind.



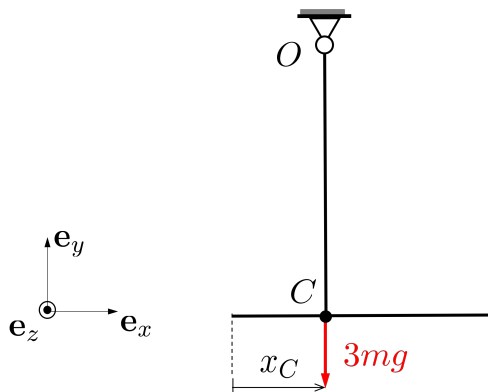
Unter welchem Winkel φ befindet sich das System in Ruhe?

- (a) $\varphi = 0$
 (b) $\varphi = \frac{\pi}{2}$
 (c) $\varphi = \frac{\pi}{3}$
 (d) $\varphi = \frac{\pi}{4}$
 (e) $\varphi = \frac{\pi}{6}$

Lösung:

Die Gewichtskräfte der Massen sind

$$\mathbf{F}_1 = -2mg \mathbf{e}_y \quad \text{und} \quad \mathbf{F}_2 = -mg \mathbf{e}_y. \quad (1)$$



Wir finden den Kräftemittelpunkt C als

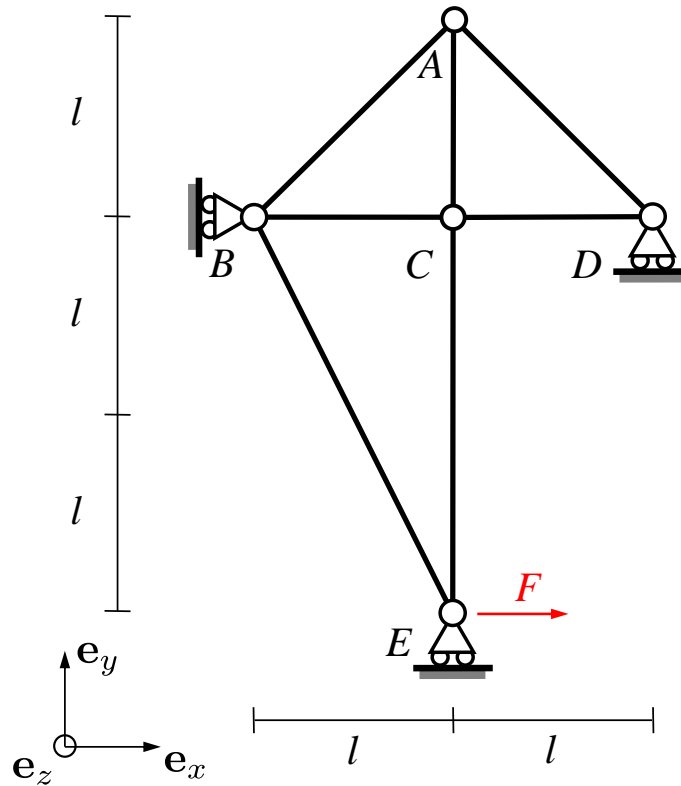
$$x_C = \frac{mgL}{3mg} = \frac{L}{3}. \quad (2)$$

Also befindet sich das System nur dann in Ruhe, wenn

$$\sin \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \pi \cdot n \quad | \quad n \in [0, 1, 2, 3, \dots], \quad (3)$$

da sonst die Resultierende ein Moment bezüglich O erzeugt. Also ist Antwort (a) $\varphi = 0$ korrekt.

4. Das unten skizzierte Fachwerk besteht aus 7 gelenkig miteinander verbundenen Stäben. Die entsprechenden Längen können aus der Skizze abgelesen werden. Eine Kraft F wirkt im Punkt E und die Punkte B , D und E sind mit Rollagern verbunden (siehe Skizze).



1. Wie gross ist der Freiheitsgrad des Systems?
2. Berechnen Sie die Reaktionskräfte in B , D und E .
3. Bestimmen Sie die Stabkraft CD . Handelt es sich um einen Druck- oder Zugstab?

Hinweis: Um die Stabkraft zu berechnen, verwenden Sie das PdvL.

Lösung:

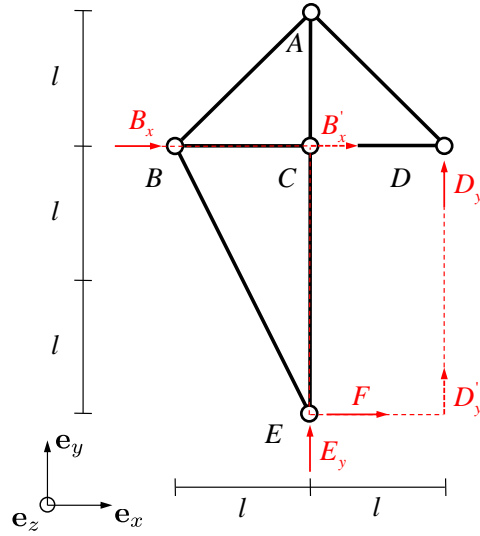
1. Das System besteht aus 3 angrenzenden Dreiecken. Da ein Dreieck ein starrer Körper ist, besteht das System aus einem einzelnen starren Körper $ABCDE$. Die Formel für den Freiheitsgrad lautet dann:

$$f = n - b_{\text{Lager}} - b_{\text{Gelenke}} = 1 \cdot 3 - 3 \cdot 1 - 0 = 0 \quad (1)$$

Wobei es einen 2D-Körper (3 Freiheitsgrade), 3 Rolllager (je eine Bindung) und kein Gelenk gibt.

Alternative: Der Freiheitsgrad kann anhand der einzelnen Stäbe berechnet werden. Das Verfahren wird in den vorherigen Serien ausführlich erklärt.

2. Die Reaktionskräfte können anhand der Gleichgewichtsbedingungen am Körper $ABCDE$ berechnet werden:



$$KB(x) : \quad 0 = B_x + F \quad \Rightarrow \quad B_x = -F \quad (2)$$

$$MB(E, z) : \quad 0 = -B_x \cdot 2l + D_y \cdot l \quad \Rightarrow \quad D_y = 2B_x = -2F \quad (3)$$

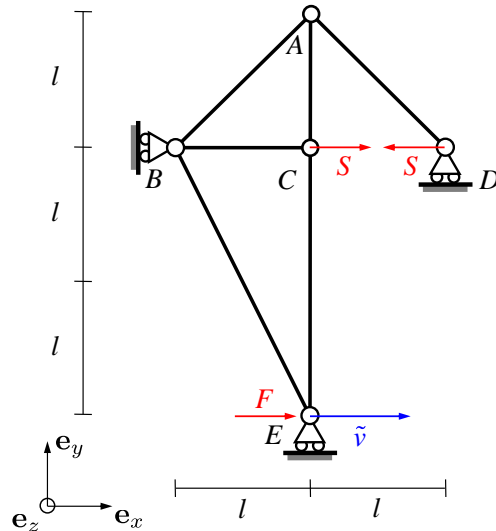
$$KB(y) : \quad 0 = E_y + D_y \quad \Rightarrow \quad E_y = -D_y = 2F \quad (4)$$

Wobei für die Berechnung des Moments die Kräfte B_x und D_y entlang ihrer Wirkungslinie verschoben wurden (siehe Skizze).

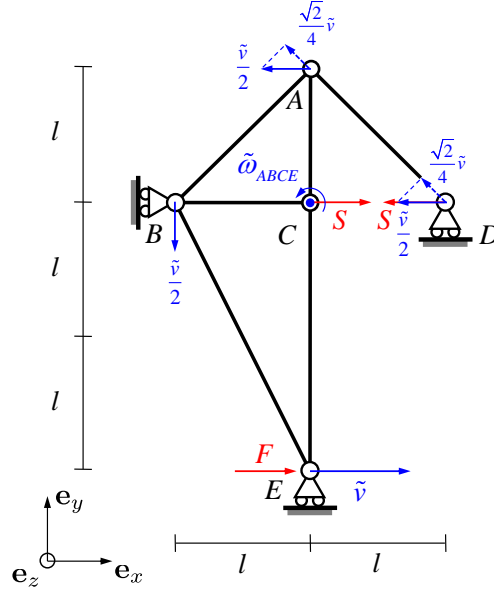
In Vektorform lautet die Lösung:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -F \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2F \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2F \end{pmatrix} \quad (5)$$

3. Der Stab CD wird entfernt und durch die Stabkraft S ersetzt. Der resultierende Mechanismus wird durch die eingeführte virtuelle Geschwindigkeit \tilde{v} im Punkt E beschrieben (siehe Skizze).



Um das PdvL zu verwenden, sind die virtuellen Geschwindigkeiten aller durch eine Kraft belasteten Punkte zu berechnen. In diesem Fall sind das die Punkte C , D und E . Der starre Körper $ABCE$ hat sein Momentanzentrum im Punkt C ($\mathbf{v}_C = \mathbf{0}$), das ist eine Konsequenz der Rolllager in B und E (siehe Skizze).



$\tilde{\omega}_{ABCE}$ kann wie folgt berechnet werden:

$$\tilde{\omega}_{ABCE} = \frac{\tilde{v}_E}{2l} = \frac{\tilde{v}}{2l} \quad (6)$$

Und somit folgt die Geschwindigkeit in A und D , da der Stab AD eine reine Translation durchführt (beide Punkte können sich nur horizontal bewegen, siehe Skizze):

$$\tilde{v}_D = \tilde{v}_A = \tilde{\omega}_{ABCE} \cdot l = \frac{\tilde{v}}{2} \quad (7)$$

Wobei \tilde{v}_A und \tilde{v}_D die Beträge der Geschwindigkeiten sind und die Richtungen aus der Skizze abgelesen werden können.

Alternative: \tilde{v}_D kann auch durch den SdpG aus \tilde{v}_A berechnet werden:

$$\tilde{v}_D = \frac{\tilde{v}_{D\parallel}}{\cos 45^\circ} = \frac{\tilde{v}_{A\parallel}}{\cos 45^\circ} = \frac{\tilde{v}_A \cdot \cos 45^\circ}{\cos 45^\circ} = \tilde{v}_A \quad (8)$$

Nach dem PdvL lautet die Stabkraft dann:

$$\tilde{P} = \tilde{\mathbf{v}}_C \cdot \begin{pmatrix} S \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{\mathbf{v}}_D \cdot \begin{pmatrix} -S \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{\mathbf{v}}_E \cdot \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (9)$$

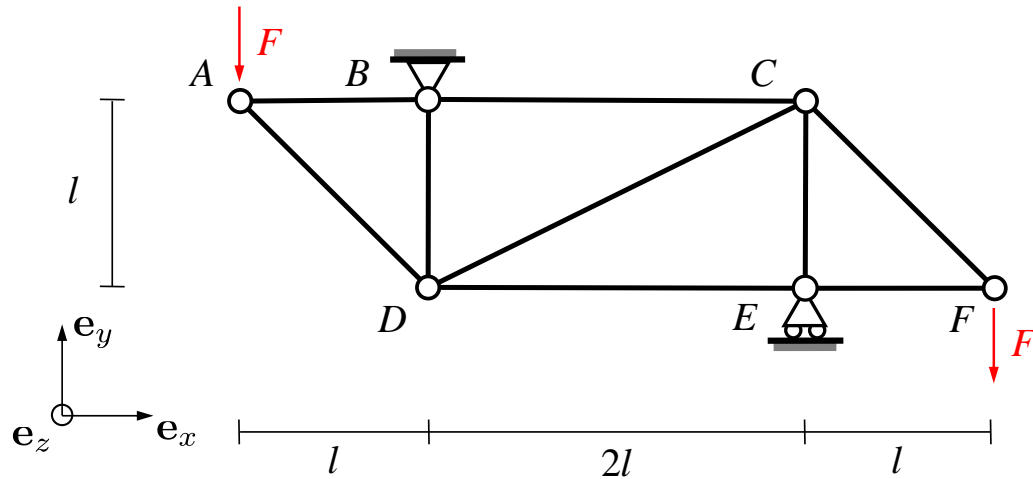
$$0 = \mathbf{0} \cdot \begin{pmatrix} S \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\tilde{v}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -S \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{v} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$0 = 0 + \frac{\tilde{v}}{2}S + \tilde{v}F \Rightarrow S = -2F \quad (11)$$

Das bedeutet, dass der Stab eine Kraft von $2F$ nach aussen ausüben muss. Er wird deshalb mit einer Kraft von $2F$ zusammengedrückt und ist somit ein Druckstab.

5. Das unten skizzierte Fachwerk besteht aus 9 gelenkig miteinander verbundenen Stäben. Die entsprechenden Längen können aus der Skizze abgelesen werden. Zwei gleich grosse Kräfte F wirken in den Punkten A und F senkrecht nach unten. Punkt B ist gelenkig gelagert und Punkt E ist auf eine horizontale Bewegung beschränkt.

Hinweis: Um diese Aufgabe zu lösen, verwenden Sie das PdvL

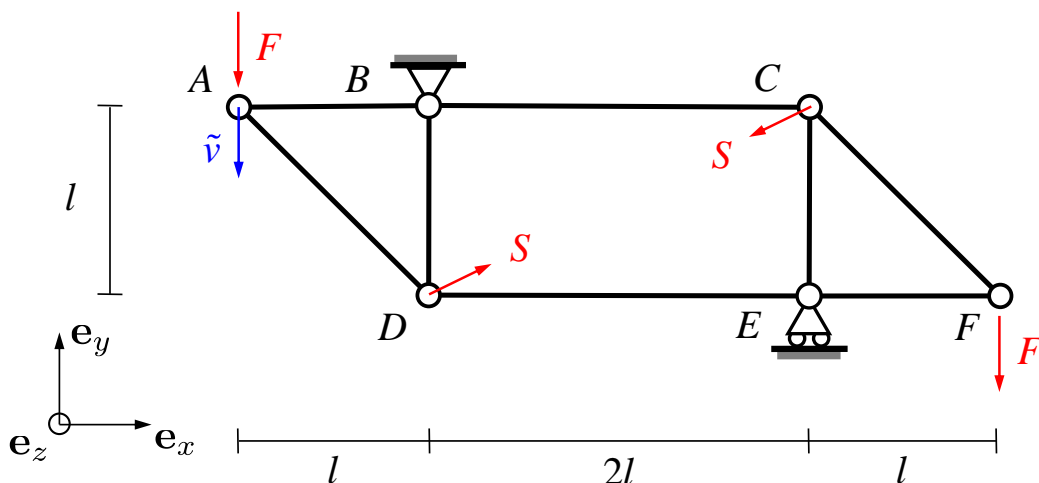


Wie gross ist die Stabkraft CD? Handelt es sich um einen Zug- (positiver Wert) oder Druckstab (negativer Wert)?

- (a) $S_{CD} = 0$
- (b) $S_{CD} = \frac{\sqrt{5}}{2} F$
- (c) $S_{CD} = -\frac{\sqrt{5}}{2} F$
- (d) $S_{CD} = \sqrt{5} F$
- (e) $S_{CD} = -\sqrt{5} F$

Lösung:

Um das Prinzip der virtuellen Leistungen (PdvL) anzuwenden, wird der Stab CD aus dem System entfernt und durch die Kraft S ersetzt (siehe Skizze). Nun wird dem neu geschaffenen Mechanismus ein virtueller Bewegungszustand verliehen, indem am Punkt A eine vertikale virtuelle Geschwindigkeit \tilde{v} eingeführt wird (siehe Skizze).



[illegible]
$$\tilde{\omega}_{ABD} = \frac{\tilde{v}}{l} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mathbf{v}}_D = \begin{pmatrix} \tilde{\omega}_{ABD} \cdot l \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{v} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$
$$\tilde{\mathbf{v}}_F = \begin{pmatrix} \tilde{\omega}_{CEF} \cdot l \\ \tilde{\omega}_{CEF} \cdot l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\omega}_{ABD} \cdot l \\ \tilde{\omega}_{ABD} \cdot l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{v} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} \quad (2)$$
$$\tilde{P} = \tilde{\mathbf{v}}_A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -F \end{pmatrix} + \tilde{\mathbf{v}}_D \cdot \frac{S}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \tilde{\mathbf{v}}_C \cdot \frac{S}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \tilde{\mathbf{v}}_F \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -F \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\tilde{v} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{v} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{S}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbf{0} \cdot \frac{S}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{v} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -F \end{pmatrix} \quad (4)$$

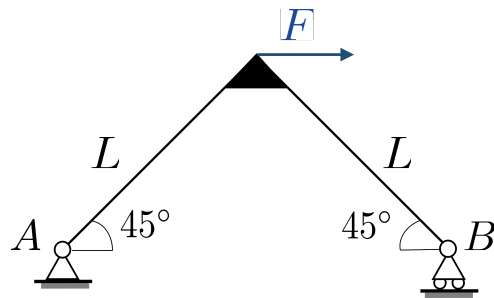
$$\tilde{P} = \tilde{v}F + \frac{2}{\sqrt{5}}\tilde{v}S + 0 - \tilde{v}F \quad (5)$$

$$\tilde{P} = \frac{2}{\sqrt{5}} \tilde{v} S \quad (6)$$

$$\tilde{P} = 0 = \frac{2}{\sqrt{5}}\tilde{v}S \quad \Rightarrow \quad S = 0 \quad (7)$$

11

6. Betrachten Sie das abgebildete System, das aus zwei zusammengeschweissten Stäben besteht und reibungsfrei gemäss Skizze gelagert ist. Beide Stäbe haben die Länge L .

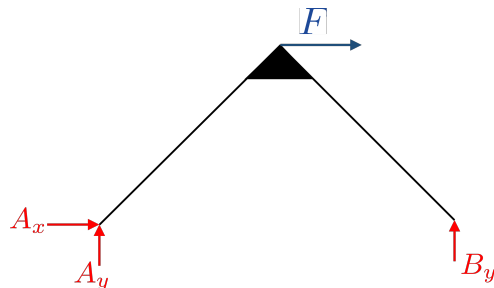


Was sind die Bindungskräfte in A und B ?

- (a) $A_x = -F$; $A_y = -\frac{F}{2}$; $B_y = \frac{F}{2}$
 (b) $A_x = -F$; $A_y = -\frac{F}{\sqrt{2}}$; $B_y = \frac{F}{\sqrt{2}}$
 (c) $A_x = -F$; $A_y = 2F$; $B_y = -2F$
 (d) $A_x = 2F$; $A_y = \sqrt{2}F$; $B_y = -\sqrt{2}F$
 (e) $A_x = F$; $A_y = -F$; $B_y = F$

Lösung:

Wir schneiden das System frei



und stellen die Gleichgewichtsbedingungen auf:

$$KB(x) : \quad 0 = F + A_x \quad (1)$$

$$KB(y) : \quad 0 = A_y + B_y \quad (2)$$

$$MB(A) : \quad 0 = -F \frac{L}{\sqrt{2}} + B_y 2 \frac{L}{\sqrt{2}} \quad (3)$$

Durch Auflösen der Gleichungen erhalten wir

$$(1) \Rightarrow A_x = -F \quad (4)$$

$$(3) \Rightarrow B_y = \frac{F}{2} \quad (5)$$

$$(2) \Rightarrow A_y = -B_y = -\frac{F}{2} \quad (6)$$