

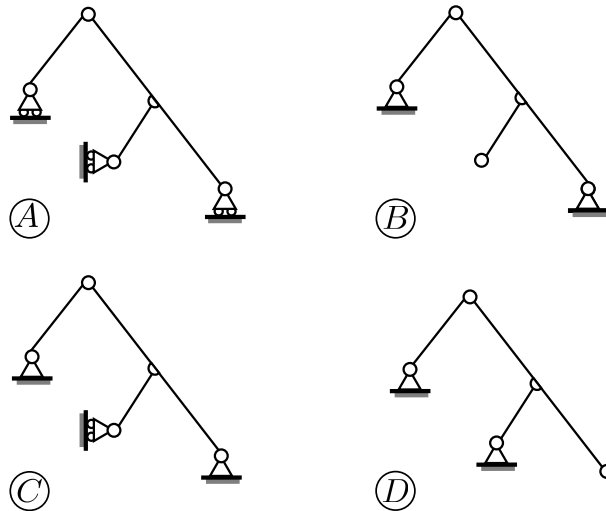
Technische Mechanik  
151-0223-10

**- Übung 3 -**

Dr. Paolo Tiso

10. Oktober 2023

1. Die gezeigten Systeme bestehen aus denselben 3 gelenkig verbundenen Stäben. Der einzige Unterschied zwischen den Systemen liegt in den unterschiedlichen Lagern.



Welche der gezeigten Systeme haben den Freiheitsgrad 2?

- (a) Nur A.  
 (b) Nur D.  
 (c) Nur B und C.  
 (d) Nur A, B und D.  
 (e) Alle.

*Lösung:*

Wir bezeichnen mit  $n$  die Summe der Freiheitsgrade der einzelnen Körper und mit  $b$  die Anzahl der (linear unabhängigen) Bindungsgleichungen. Dann erhalten wir den Freiheitsgrad jedes Systems als

$$f = n - b. \quad (1)$$

Alle Einzelkörper der Mehrkörpersysteme liegen in der Ebene, also besitzt jeder Körper 3 Freiheitsgrade (2 translatorisch, 1 rotatorisch). Da jedes System aus 3 Körpern besteht, ergibt sich die Summe der Freiheitsgrade als

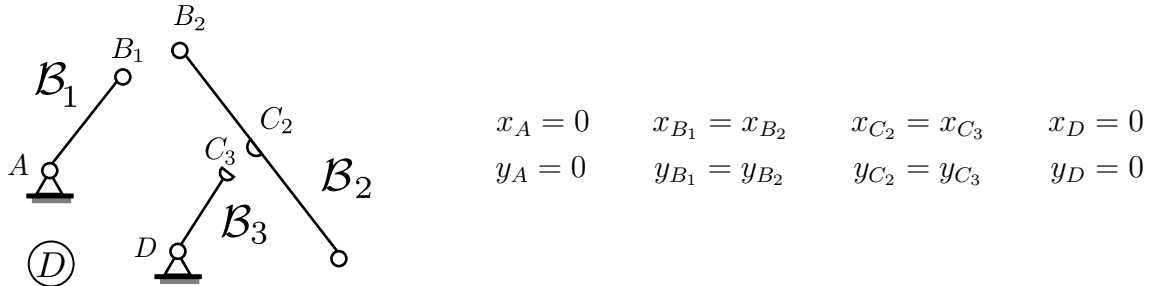
$$n = 3 \cdot 3 = 9. \quad (2)$$

Durch die Verbindungen der einzelnen Elemente reduzieren sich die Bewegungsmöglichkeiten im System, d.h. die Freiheitsgrade verringern sich um die Anzahl der kinematischen Bindungen  $b$ .

- System A:  $b = 7 \quad \Rightarrow \quad f = 9 - 7 = 2$
- System B:  $b = 8 \quad \Rightarrow \quad f = 9 - 8 = 1$
- System C:  $b = 9 \quad \Rightarrow \quad f = 9 - 9 = 0$

- System  $D$ :  $b = 8 \quad \Rightarrow \quad f = 9 - 8 = 1$

*Beispiel:* Für System  $D$  können die Bindungsgleichungen wie folgt aufgestellt werden



wobei  $B_1$ ,  $B_2$  und  $C_2$ ,  $C_3$  zu  $\mathcal{B}_1$ ,  $\mathcal{B}_2$  bzw. zu  $\mathcal{B}_2$ ,  $\mathcal{B}_3$  gehören.

*Alternative:* Man kann das in der vorherigen Übung erklärte Verfahren für Fachwerke benutzen:

1. Das System besteht aus 3 Stäben:

$$n = 3 \cdot 3 = 9 \tag{3}$$

2. Das System ist zweimal gelenkig gelagert:

$$b_{Lager} = 2 \cdot b_{Gelenklager} = 2 \cdot 2 = 4 \tag{4}$$

3. Es gibt 2 Gelenke mit jeweils 2 Stäben (das gilt auch für Punkt C, da ein Stab einfach durchgehend ist und darum als 1 Körper bezeichnet werden kann):

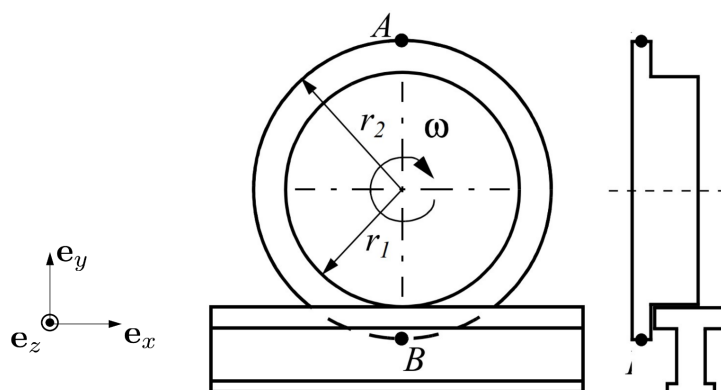
$$b_{Gelenk} = 2 \cdot b_{2\text{ Stäbe}} = 2 \cdot ((2 - 1) \cdot 2) = 4 \tag{5}$$

4. Somit erhalten wir insgesamt:

$$f = n - b_{Lager} - b_{Gelenk} = 9 - 4 - 4 = 1 \tag{6}$$

Die weiteren Systeme können mit dem selben Verfahren berechnet werden.

2. Ein Eisenbahnrad rollt mit der Rotationsschnelligkeit  $\omega$  ohne zu gleiten. Die Radien  $r_1$  und  $r_2$  sind gemäss Abbildung gegeben.



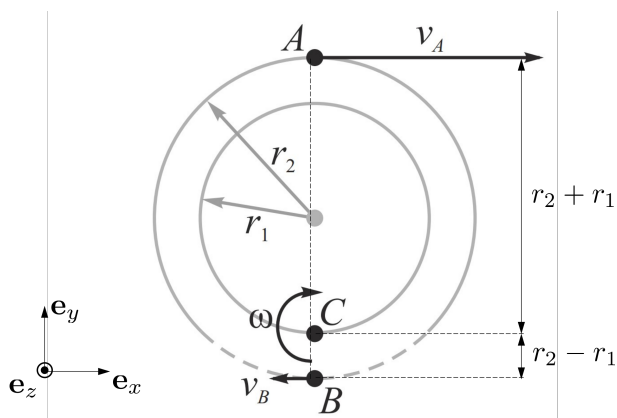
Was ist die Geschwindigkeit des obersten Punktes  $A$  bzw. des untersten Punktes  $B$  des Radkranzes?

- (a)  $\mathbf{v}_A = 2r_2\omega \mathbf{e}_x$ ;  $\mathbf{v}_B = -r_1\omega \mathbf{e}_x$
- (b)  $\mathbf{v}_A = (r_2 + r_1)\omega \mathbf{e}_x$ ;  $\mathbf{v}_B = (r_2 + r_1)\omega \mathbf{e}_x$
- (c)  $\mathbf{v}_A = 2r_2\omega \mathbf{e}_x$ ;  $\mathbf{v}_B = -2r_2\omega \mathbf{e}_x$
- (d)  $\mathbf{v}_A = r_2\omega \mathbf{e}_x + r_2\omega \mathbf{e}_y$ ;  $\mathbf{v}_B = -r_1\omega \mathbf{e}_x + r_1\omega \mathbf{e}_y$
- (e)  $\mathbf{v}_A = (r_2 + r_1)\omega \mathbf{e}_x$ ;  $\mathbf{v}_B = -(r_2 - r_1)\omega \mathbf{e}_x$

*Lösung:*

Da das Eisenbahnrad rollt, ist die Geschwindigkeit im Berührungspunkt  $C$  null und daher ist  $C$  das Momentanzentrum.

Der Abstand zwischen  $B$  und  $C$  ist einfach  $r_2 - r_1$ , während der Abstand zwischen  $A$  und  $C$   $r_2 + r_1$  ist. Die Geschwindigkeiten sind entsprechend der Rotationsgeschwindigkeit in Richtung  $\mathbf{e}_x$  bzw.  $-\mathbf{e}_x$ , wie in der Skizze dargestellt.



Daraus ergibt sich

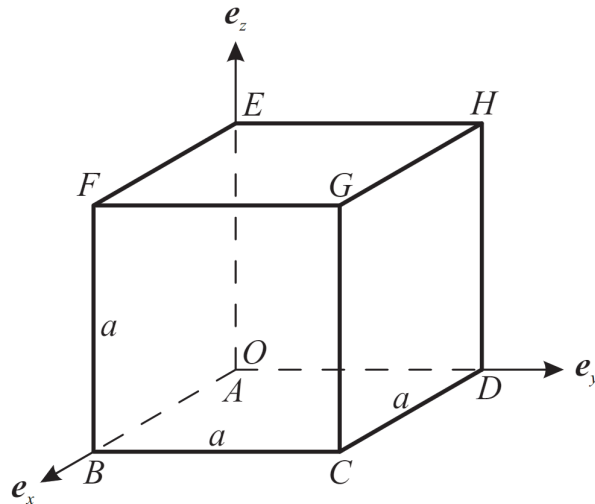
$$\mathbf{v}_A = (r_2 + r_1)\omega \mathbf{e}_x; \quad \mathbf{v}_B = -(r_2 - r_1)\omega \mathbf{e}_x, \quad (1)$$

somit ist Aussage (e) richtig.

3. <sup>1</sup> Ein Würfel führt eine reine Rotation bezüglich des Bezugssystems  $\{O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$  aus. In der gezeichneten speziellen Lage des Würfels fallen die Kanten  $AB$ ,  $AD$  und  $AE$  mit den Achsen  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$ , bzw.  $\mathbf{e}_z$  des Bezugssystems zusammen. In dieser speziellen Lage sind die Geschwindigkeiten der Punkte  $G$  bzw.  $H$  in kartesischen Komponenten gegeben:

$$\mathbf{v}_G = \begin{pmatrix} -v \\ v \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{v}_H = \begin{pmatrix} v_{Hx} \\ 0 \\ -v \end{pmatrix}$$

wobei die x-Komponente von  $\mathbf{v}_H$  unbekannt ist.



1. Bestimmen Sie die x-Komponente von  $\mathbf{v}_H$ .
2. Bestimmen Sie die Rotationsgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}$  und die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_A$  des Punktes  $A$ .

*Lösung:*

1. Die x-Komponente von  $\mathbf{v}_H$  kann mit dem SdpG ( $G \rightarrow H$ ) bestimmt werden:

$$0 = (\mathbf{v}_G - \mathbf{v}_H) \cdot \mathbf{e}_{HG} = \left( \begin{pmatrix} -v \\ v \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_{Hx} \\ 0 \\ -v \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -v - v_{Hx}$$

$$\Rightarrow v_{Hx} = -v \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_H = \begin{pmatrix} -v \\ 0 \\ -v \end{pmatrix}.$$
(1)

*Bemerkung:* Alternativ kann die x-Komponente von  $\mathbf{v}_H$  auch mittels Starrkörperformel mit noch unbekannter Rotationsgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}$  bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_H &= \mathbf{v}_G + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{GH} \\ &= \begin{pmatrix} -v \\ v \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ v - a\omega_z \\ a\omega_y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$
(2)

---

<sup>1</sup>Aufgabe aus der Übungsserie 3 der Vorlesung «151-0223-10 Technische Mechanik», HS 2019, Prof. Dual/Prof. Glocker.

Vergleichen von (2) mit der gegebenen Koordinaten von  $\mathbf{v}_H$  liefert  $v_{Hx} = -v$  und folglich dasselbe Ergebnis als (1).

2. Zur Bestimmung der Rotationsgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}$  wir benutzen die Starrkörperformel:

$$\mathbf{v}_H = \mathbf{v}_G + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{GH} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -v \\ 0 \\ -v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ v \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ v - a\omega_z \\ a\omega_y \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Aus (3) können die Komponenten  $\omega_y$  und  $\omega_z$  berechnet werden als

$$\begin{aligned} 0 = v - a\omega_z &\Rightarrow \omega_z = \frac{v}{a}; \\ -v = a\omega_y &\Rightarrow \omega_y = -\frac{v}{a}. \end{aligned} \quad (4)$$

Der Würfel führt eine reine Rotation aus, hat also keine Geschwindigkeitskomponente in Rotationsrichtung. Die zweite Invariante  $I_2$  muss demnach verschwinden, womit die Komponente  $\omega_x$  festgelegt werden kann

$$\begin{aligned} 0 = I_2 = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v}_G &= \begin{pmatrix} \omega_x \\ -v/a \\ v/a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -v \\ v \\ 0 \end{pmatrix} = -v\omega_x - \frac{v^2}{a} \\ \Rightarrow \omega_x &= -\frac{v}{a}. \end{aligned} \quad (5)$$

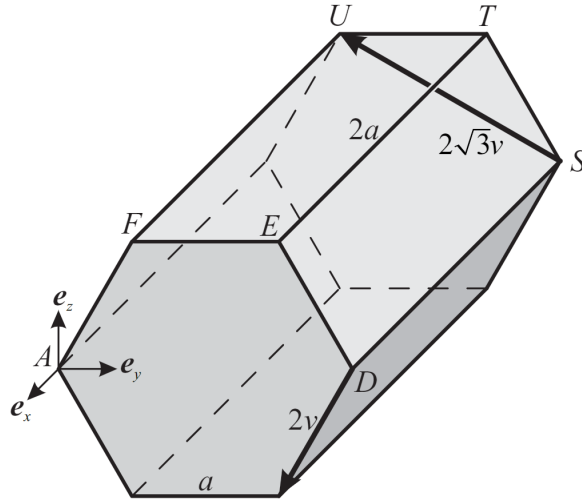
Die Rotationsgeschwindigkeit ist also

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{v}{a}. \quad (6)$$

Die Geschwindigkeit in  $A$  wird aus der Starrkörperformel erhalten als

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_G + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{GA} = \begin{pmatrix} -v \\ v \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a \\ -a \\ -a \end{pmatrix} \frac{v}{a} = \begin{pmatrix} -v + 2v \\ v - 2v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -v \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

- 4.<sup>2</sup> Es sei ein gerades, hexagonales Prisma gegeben. Die Länge des Prismas beträgt  $2a$  und die Seitenlängen der hexagonalen Grundfläche betragen  $a$ . Zu einem gewissen Zeitpunkt hat die Geschwindigkeit des Punktes  $S$  den Betrag  $2\sqrt{3}v$  und zeigt in Richtung  $\mathbf{r}_{SU}$ , und die Geschwindigkeit im Punkt  $D$  hat den Betrag  $2v$  und zeigt in Richtung  $\mathbf{r}_{DC}$ . Zusätzlich ist zu diesem Zeitpunkt bekannt, dass in  $E$  die Geschwindigkeitskomponente in  $z$ -Richtung verschwindet und die Ebene  $FETU$  parallel zur  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ -Ebene liegt.



1. Bestimmen Sie mit Hilfe des Satzes der projizierten Geschwindigkeiten für diesen momentanen Bewegungszustand die Geschwindigkeit im Punkt  $E$ .
2. Bestimmen Sie die Kinematik im Punkt  $E$ .
3. Von welchem Typ ist dieser momentane Bewegungszustand? Geben Sie eine mathematische Begründung an.

*Lösung:*

1. Unter Anwendung vom SdpG ( $D \rightarrow E$ ) erhalten wir

$$\begin{aligned}
 0 &= (\mathbf{v}_E - \mathbf{v}_D) \cdot \mathbf{r}_{DE} = \left( \begin{pmatrix} v_{Ex} \\ v_{Ey} \\ 0 \end{pmatrix} - 2v \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} a \\
 &= \begin{pmatrix} v_{Ex} \\ v_{Ey} + v \\ \sqrt{3}v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} a = \frac{1}{2}a(2v - v_{Ey}) \Rightarrow v_{Ey} = 2v.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Wenden wir nochmals den SdpG an ( $S \rightarrow E$ ), dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
 0 &= (\mathbf{v}_E - \mathbf{v}_S) \cdot \mathbf{r}_{SE} = \left( \begin{pmatrix} v_{Ex} \\ 2v \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2\sqrt{3}v}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ -3/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} a \\
 &= \begin{pmatrix} v_{Ex} \\ 2v + 3v \\ -\sqrt{3}v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} a = a(2v_{Ex} - 4v) \Rightarrow v_{Ex} = 2v.
 \end{aligned} \tag{2}$$

<sup>2</sup>Aufgabe aus der Übungserie 3 der Vorlesung « 151-0223-10 Technische Mechanik », HS 2019, Prof. Dual/Prof. Glocker.

Aus (1) and (2) und unter Berücksichtigung von  $v_{Ez} = 0$  erhalten wir

$$\mathbf{v}_E = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} v. \quad (3)$$

2. Wir wenden die Starrkörperformel für die Punkte  $S$  und  $D$  an, welche wie folgt lautet:

$$\mathbf{v}_S = \mathbf{v}_D + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{DS} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v}_S - \mathbf{v}_D = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{DS}, \quad (4)$$

also ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_D - \mathbf{v}_S = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{SD} &\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -v + 3v \\ -\sqrt{3}v - \sqrt{3}v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} a \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2v \\ -2\sqrt{3}v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2a\omega_z \\ -2a\omega_y \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \omega_y = \sqrt{3}\frac{v}{a}; \quad \omega_z = \frac{v}{a}. \end{aligned} \quad (5)$$

Analog für Punkte  $D$  und  $E$  bekommen wir

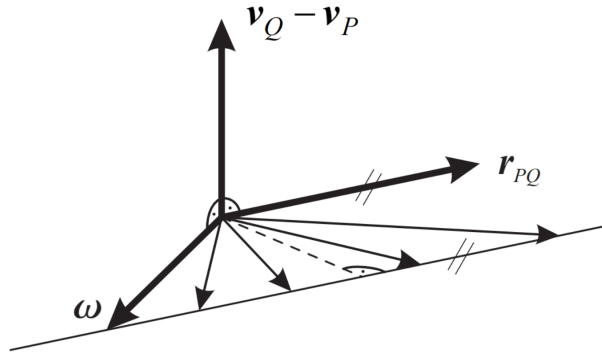
$$\begin{aligned} \mathbf{v}_E - \mathbf{v}_D = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{DE} &\Rightarrow \begin{pmatrix} 2v \\ 2v + v \\ \sqrt{3}v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \sqrt{3}v/a \\ v/a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} a \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} 2v \\ 3v \\ \sqrt{3}v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3v/2 + v/2 \\ -a\omega_x\sqrt{3}/2 \\ -2a\omega_x \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \omega_x = -2\sqrt{3}\frac{v}{a}. \end{aligned} \quad (6)$$

Aus (5) und (6) erhalten wir die Rotationsgeschwindigkeit als

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \frac{v}{a}. \quad (7)$$

Die Kinematik in  $E$  ist dann  $\{\mathbf{v}_E, \boldsymbol{\omega}\}$ .

*Hinweis: Es ist nicht möglich mit gegebenen  $\mathbf{v}_Q - \mathbf{v}_P$  und  $\mathbf{r}_{PQ}$  die Rotationsgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}$  eindeutig zu bestimmen, da verschiedene  $\boldsymbol{\omega}$  Gleichung (4) erfüllen, wie in der folgenden Abbildung dargestellt ist. Darum muss (4) mehrfach angewendet werden.*

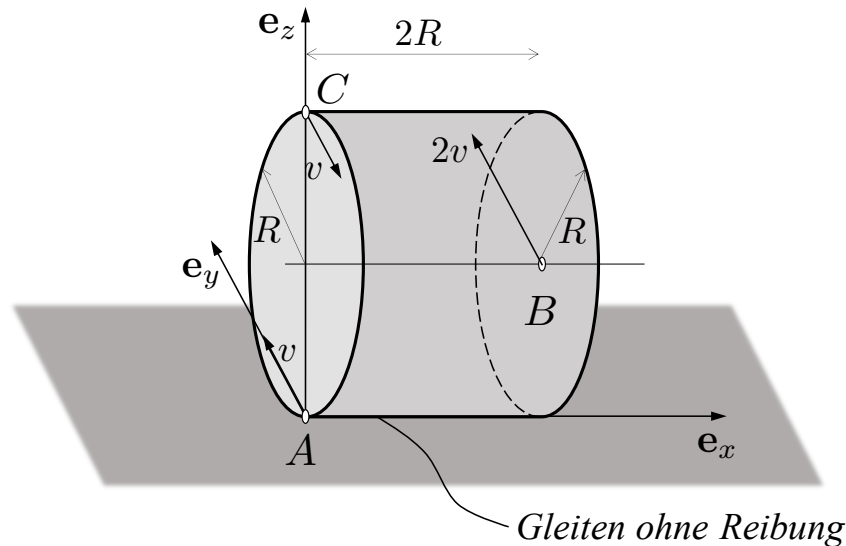


3. Die zweite Invariante wird berechnet als

$$I_2 = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v}_E = \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{v^2}{a} = -\frac{2\sqrt{3}v^2}{a} \quad (8)$$

Also ist der momentane Bewegungszustand eine Schraubung, da  $\boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0}$  und  $I_2 \neq 0$ .

5. Auf der Ebene  $z = 0$  (kartesisches Koordinatensystem) gleitet ein starrer Drehzylinder (Radius  $R$ , Länge  $2R$ ) so, dass der Zylinder auf seiner Mantelfläche aufliegt. Der Bewegungszustand wird durch die Geschwindigkeiten  $\mathbf{v}_A = v\mathbf{e}_y$ ,  $\mathbf{v}_B = 2v\mathbf{e}_y$  und  $\mathbf{v}_C = -v\mathbf{e}_y$  der Punkte  $A$ ,  $B$  und  $C$  beschrieben. Der Punkt  $A$  stimmt mit dem Ursprung des Koordinatensystems überein.



1. Zeigen Sie, dass die Rotationsgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}$  keine  $y$ -Komponente haben kann und daher die Bewegung eine momentane Rotation ist.
2. Welches  $\boldsymbol{\omega}$  und welche momentane Rotationsachse hat der Zylinder?

*Lösung:*

1. Wir benutzen die Starrkörperformel für die Punkte  $A$  und  $C$  bzw.  $B$  und  $A$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_A &= \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{CA} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -v \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2R\omega_y \\ -v + 2R\omega_x \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \quad \omega_x &= \frac{v}{R}; \quad \omega_y = 0\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_A &= \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{BA} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 2v \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{v}{R} \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2R \\ 0 \\ -R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2v - 2R\omega_z + v \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \quad \omega_z &= \frac{v}{R}.\end{aligned}\tag{2}$$

Die Rotationsgeschwindigkeit ist dann

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{v}{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.\tag{3}$$

2. Die Geschwindigkeit auf der Rotationsachse ist

$$v_\omega = \mathbf{v}_A \cdot \frac{\boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad I_2 = \mathbf{v}_A \cdot \boldsymbol{\omega} = 0. \quad (4)$$

Diese Bewegung entspricht einer Rotation, da die zweite Invariante  $I_2 = 0$  (keine Bewegung in Richtung der Rotationsachse).

Wir bezeichnen mit  $W$  einen Punkt auf der Rotationsachse mit  $\mathbf{r}_W = (r_x, r_y, r_z)^T$ . Dann ist  $\mathbf{v}_W$  gemäss Starrkörperformel

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_W &= \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AW} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{v}{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} = v \begin{pmatrix} -r_y/R \\ 1 + r_x/R - r_z/R \\ r_y/R \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \quad 0 &= 1 + \frac{r_x}{R} - \frac{r_z}{R} \quad \Rightarrow \quad r_z = R + r_x; \quad r_y = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Die Richtung der Rotationsachse kann aus  $\boldsymbol{\omega}$  hergeleitet werden als

$$\mathbf{e}_\omega = \frac{\boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}; \quad (6)$$

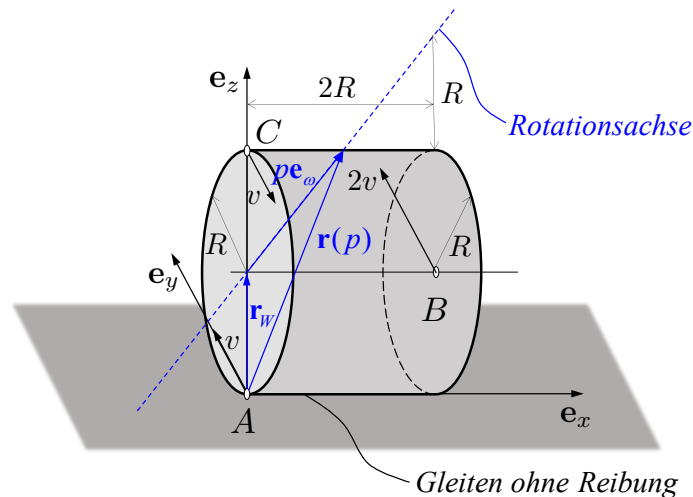
wir finden die Rotationsachse als

$$\mathbf{r}(p) = \mathbf{r}_W + p' \mathbf{e}_\omega = \begin{pmatrix} r_x \\ 0 \\ R + r_x \end{pmatrix} + p' \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_x \\ 0 \\ R + r_x \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ R \end{pmatrix}, \quad (7)$$

wobei im letzten Schritt der Faktor  $1/\sqrt{2}R$  ausgeklammert und in die neue Laufvariable  $p = p'/\sqrt{2}R$  miteinbezogen wurde. Wir dürfen in diesem Fall  $r_x$  beliebig wählen; wenn wir z.B.  $r_x = 0$  setzen, ergibt sich:

$$\mathbf{r}(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ R \end{pmatrix}. \quad (8)$$

und graphisch dargestellt (die Rotationsachse befindet sich in der x-z-Ebene):



*Alternative:* Für einen Punkt  $W$  auf der Rotationsachse muss gelten, dass

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_W = \mathbf{0}. \quad (9)$$

Wenn wir die Starrkörperformel (5) in (9) einsetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AW}) &= \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AW}) &= \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_A + (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_{AW})\boldsymbol{\omega} - \omega^2 \mathbf{r}_{AW} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (10)$$

Wir können jetzt den Punkt  $W$  so wählen, dass  $\boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{r}_{AW}$  gilt. Damit kann (10) nach  $\mathbf{r}_{AW}$  aufgelöst werden und wir erhalten

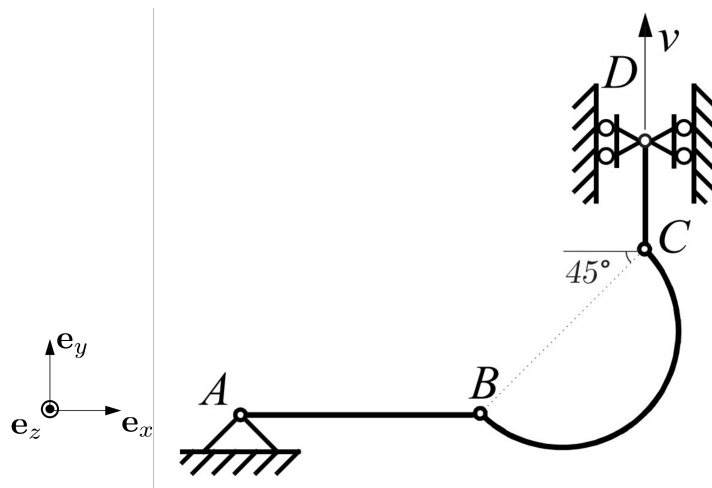
$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{AW} = \mathbf{r}_W &= \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_A}{\omega^2} \\ &= \frac{\frac{v}{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix}}{\frac{2v^2}{R^2}} = \frac{R}{2v} \begin{pmatrix} -v \\ 0 \\ v \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \quad \mathbf{r}_W &= \frac{R}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (11)$$

Die Parameterdarstellung der Rotationsachse kann konstruiert werden, indem wir zu  $\mathbf{r}_W$  den Vektor  $\mathbf{e}_\omega$  multipliziert mit einem Skalarparameter  $p$  addieren:

$$\mathbf{r}(p) = \mathbf{r}_W + p \mathbf{e}_\omega = \begin{pmatrix} -R/2 \\ 0 \\ R/2 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

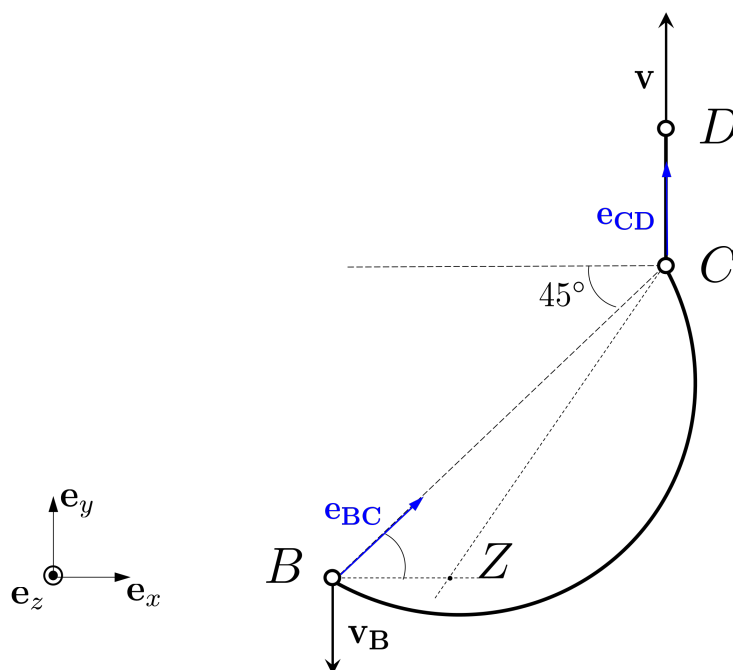
Es lässt sich leicht überprüfen, dass (12) der Rotationsachse in (8) entspricht.

6. Die drei starren Stäbe  $AB$ ,  $BC$  und  $CD$  sind reibungsfrei gelenkig miteinander verbunden und entsprechend der Skizze gelagert. Stab  $BC$  ist ein Halbkreis mit Radius  $R$ . Die Schnelligkeit von Punkt  $B$  beträgt  $|\mathbf{v}_B| = v$ . Vom Punkt  $D$  weiss man, dass er sich mit der Geschwindigkeit  $v$  nach oben bewegt. Alle Stäbe bleiben in der gezeichneten Ebene.



Was für eine Bewegung beschreibt der Stab  $BC$  momentan?

*Lösung:*



Wir bestimmen die Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_{BC}$  und  $\mathbf{e}_{CD}$  als

$$\mathbf{e}_{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{e}_{CD} = \mathbf{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Um jetzt  $\mathbf{v}_B$  und  $\mathbf{v}_C$  zu bestimmen, wenden wir den SdpG auf die Stäbe  $CD$  und  $BC$  an:

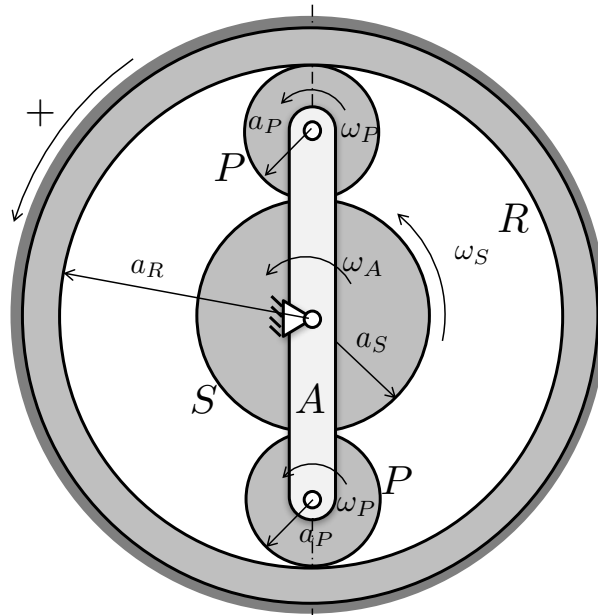
$$\begin{aligned}\mathbf{v}_C \cdot \mathbf{e}_{CD} &= \mathbf{v}_D \cdot \mathbf{e}_{CD} \\ \begin{pmatrix} v_{Cx} \\ v_{Cy} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow v_{Cy} &= v.\end{aligned}\tag{2}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_B \cdot \mathbf{e}_{BC} &= \mathbf{v}_C \cdot \mathbf{e}_{BC} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ v_B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} v_{Cx} \\ v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow v_B &= v + v_{Cx}.\end{aligned}\tag{3}$$

Wir können also 2 verschiedene Fälle unterscheiden:

- Falls  $v_{Cx} = 0$  und demzufolge  $v_B = v$ , führt  $BC$  eine momentane Translation aus;
- Falls  $v_{Cx} = -2v$  und daher  $v_B = -v$ , dann beschreibt  $BC$  eine momentane Rotation um Punkt  $Z$ .

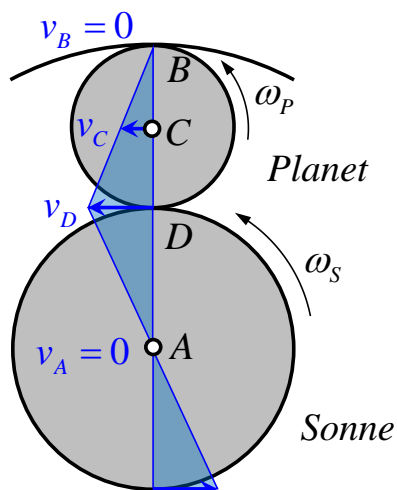
7. Betrachten Sie das unten skizzierte Planetengetriebe. Das Sonnen- (S), Planeten- (P) und Ringzahnrad (R) haben die entsprechenden Radii  $a_S, a_P$  und  $a_R$  (siehe Skizze). Der Stab A verbindet die zwei Planetenzahnräder und kann frei drehen. Das Ringzahnrad (R) ist fix und das Sonnenzahnrad (S) rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_S$ . Die Winkelgeschwindigkeiten sind im Gegenuhrzeigersinn positiv definiert (siehe Skizze).



1. Was ist der Zusammenhang  $\frac{\omega_P}{\omega_S}$  zwischen den Winkelgeschwindigkeiten des Planeten- und Sonnenzahnrades?
  - (a)  $\frac{\omega_P}{\omega_S} = -\frac{a_S}{2a_P}$
  - (b)  $\frac{\omega_P}{\omega_S} = \frac{a_S}{4a_P}$
  - (c)  $\frac{\omega_P}{\omega_S} = -\frac{a_S}{a_R + a_P}$
  - (d)  $\frac{\omega_P}{\omega_S} = \frac{a_P}{2a_S}$
  - (e)  $\frac{\omega_P}{\omega_S} = \frac{2a_R}{a_P}$
  
2. Was ist der Zusammenhang  $\frac{\omega_P}{\omega_A}$  zwischen den Winkelgeschwindigkeiten der Planetenzahnräder und Stab A?
  - (a)  $\frac{\omega_P}{\omega_A} = 2$
  - (b)  $\frac{\omega_P}{\omega_A} = -1$
  - (c)  $\frac{\omega_P}{\omega_A} = -\frac{a_P}{a_P + a_S}$
  - (d)  $\frac{\omega_P}{\omega_A} = -\frac{a_P + a_S}{a_P}$
  - (e)  $\frac{\omega_P}{\omega_A} = \frac{2a_P}{a_P + a_S}$

Lösung:

1. Um den Lösungsweg zu vereinfachen werden die Zahnräder in der abgebildeten Position betrachtet. In diesem Fall ist die Geschwindigkeit aller Punkte auf der vertikalen Mittelachse horizontal ausgerichtet (siehe untere Skizze). Das System kann logischerweise auch in jeder anderen Position vektoriell gelöst werden, der Berechnungsprozess wird aber deutlich komplizierter.



Die Geschwindigkeiten der Berührungspunkte können einfach durch die Starrkörperformel berechnet werden. Da es sich um Zahnräder handelt, muss rollen ohne gleiten an jedem Berührungspunkt gelten und damit müssen die Geschwindigkeiten an solchen Punkten auf beiden Körpern gleich sein.

Die Geschwindigkeit im Punkt D kann wie folgt durch  $\omega_S$  vom Sonnenzahnrad ermittelt werden (positiv nach links, siehe Skizze):

$$v_D = \omega_S a_S \quad (4)$$

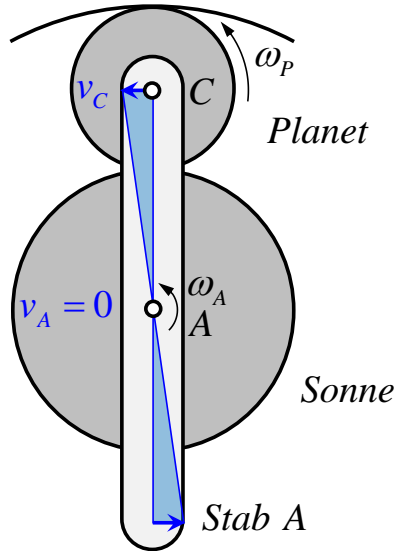
Mit B als Momentanzentrum vom Planetenzahnrad und  $\omega_P$  als Winkelgeschwindigkeit kann  $v_D$  in ähnlicher Art und Weise berechnet werden:

$$v_D = -\omega_P 2a_P \quad (5)$$

Beim Gleichsetzen von  $v_D$  kann man  $\frac{\omega_P}{\omega_S}$  erhalten:

$$-\omega_P 2a_P = \omega_S a_S \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega_P}{\omega_S} = -\frac{a_S}{2a_P} \quad (6)$$

2. Dasselbe Verfahren kann auch für Teil 2 angewendet werden:



Geschwindigkeit im Punkt C anhand Planetenzahnrad (positiv nach links, siehe Skizze):

$$v_C = -\omega_P a_P \quad (7)$$

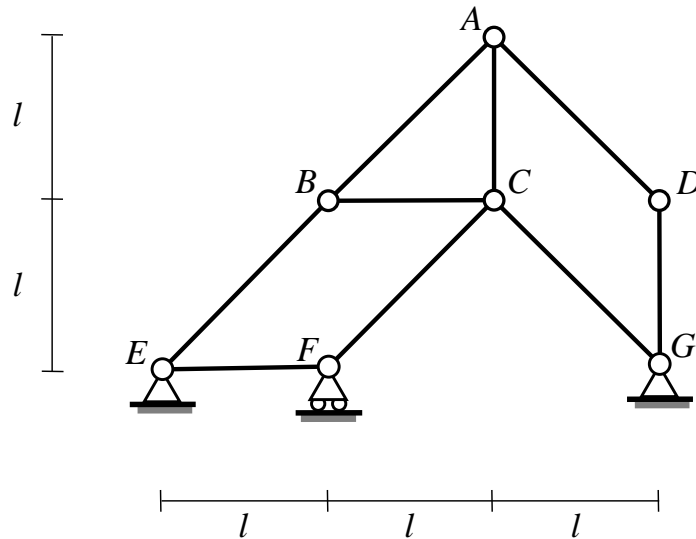
Geschwindigkeit im Punkt C anhand Stab A:

$$v_C = \omega_A (a_P + a_S) \quad (8)$$

Beim Gleichsetzen von  $v_C$  kann man  $\frac{\omega_P}{\omega_A}$  erhalten:

$$-\omega_P a_P = \omega_A (a_P + a_S) \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega_P}{\omega_A} = -\frac{a_P + a_S}{a_P} \quad (9)$$

8. Das folgende System besteht aus 9 gelenkig miteinander verbundenen Stäben, siehe Skizze. Die Punkte  $E$  und  $G$  sind fix und Punkt  $F$  kann sich nur horizontal bewegen. Die Längen der Stäbe sind in der Skizze angegeben.



Was ist der Freiheitsgrad des Systems?

- (a) 0  
(b) 1  
(c) 2  
(d) 3  
(e) 4

*Lösung:*

Wir bezeichnen mit  $n$  die Summe der Freiheitsgrade der einzelnen Körper und mit  $b$  die Anzahl der (linear unabhängigen) Bindungsgleichungen. Dann erhalten wir den Freiheitsgrad jedes Systems als

$$f = n - b \quad (1)$$

Bei Fachwerken wie in dieser Übung kann der Freiheitsgrad systematisch in 4 Schritten berechnet werden: Freiheitsgrade der Stäbe, Bindungen aus Lagern, Bindungen aus Gelenken, alles zusammenzählen.

1. Das System besteht aus 9 Stäben, wobei jeder 3 Freiheitsgrade (2 translatorisch, 1 rotatorisch) besitzt:

$$n = 9 \cdot 3 = 27 \quad (2)$$

2. Für die Lager in den Punkten E und G werden jeweils 2 Bindungen (horizontal + vertikal) berechnet:

$$b_{EG, \text{Lager}} = 2 \quad (3)$$

Für das Rollager im Punkt F wird 1 Bindung (vertikal) berechnet:

$$b_{F, \text{Lager}} = 1 \quad (4)$$

Das ergibt insgesamt für die Lager:

$$b_{Lager} = 2 * b_{EG,Lager} + 1 * b_{F,Lager} = 2 * 2 + 1 = 5 \quad (5)$$

3. Für jedes Gelenk werden dann  $(\text{Anzahl verbundene Stäbe} - 1) * 2$  Bindungen berechnet.

Das bedeutet für die Punkte D, E, F und G:

$$b_{DEFG} = (2 - 1) \cdot 2 = 2 \quad (6)$$

Für die Punkte A und B:

$$b_{AB} = (3 - 1) \cdot 2 = 4 \quad (7)$$

Und für Punkt C:

$$b_C = (4 - 1) \cdot 2 = 6 \quad (8)$$

Insgesamt erhält man für die Gelenke:

$$b_{Gelenk} = 4 * b_{DEFG} + 2 * b_{AB} + 1 * b_C = 4 * 2 + 2 * 4 + 1 * 6 = 22 \quad (9)$$

4. Für das ganze System kann dann der Freiheitsgrad durch Gleichung 1 berechnet werden:

$$f = n - b_{Lager} - b_{Gelenk} = 27 - 5 - 22 = 0 \quad (10)$$

*Bemerkung: Bei einfachen Systemen mit wenigen Freiheitsgraden (z.B. 0 bis 2) kann man die Aufgabe auch durch kurzes Überlegen lösen. In diesem Fall könnte man versuchen Punkt D horizontal zu bewegen, da Punkt G eine vertikale Bewegung einschränkt. Das ist vom Punkt A beschränkt. Dann versucht man Punkt A zu bewegen und so weiter bis man z.B. auf einem fixen Lager (wie in E in diesem Beispiel) landet oder auf einen freien Punkt stösst.*