

Prüfungsvorbereitungskurs

Aufgaben

Erstellt von Maximilian Stralz in Kollaboration mit Lina Dehwindt

Für die Vorlesung "Technische Mechanik" von Dr. P. Tiso

ETH Zürich

Herbstsemester 2022

Revidiert & ergänzt für HS23

Wer diesen PVK hält

⇒ Lina de Windt, ldewindt@student.ethz.ch

↳ Unterlagen: <http://n.ethz.ch/~ldewindt>

⇒ Maximilian Stralz, mstralz@student.ethz.ch

↳ Unterlagen: <https://polybox.ethz.ch/index.php/s/s6UrI7YqqAGfSHG>

Übersicht der TechMech-PVK-Materialien:

- Manuskript mit Lücken zum ausfüllen
- Manuskript (mit Lösungen)
- Quizzes & Beispielaufgaben
- • Quizzes & Beispielaufgaben mit ausführliche Lösungswege ← **You are here**
- Kompakte Übersicht von TechMech

Themen aus der Vorlesung, die wir nicht im PVK besprechen werden:

- Parallele Kräfte

Latest Updates:

10.01.2023 Publikation

02.01.2024 Revision & Bearbeitung

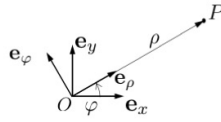
Quizzes

Quiz 1

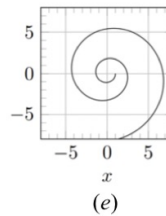
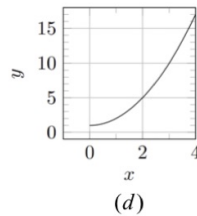
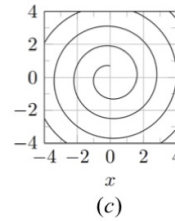
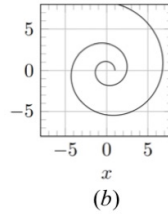
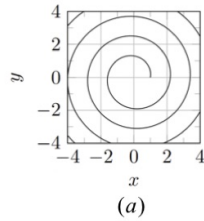
1. Eine Bahnkurve in der Ebene ist durch folgende Parametrisierung in Polarkoordinaten gegeben.

$$\begin{aligned}\rho(t) &= 1 + t^2, \\ \varphi(t) &= at,\end{aligned}\quad (1)$$

wobei $a = \frac{5}{3}\pi$ und $t \geq 0$. Die Polarkoordinaten sind in dem folgenden Diagramm definiert:



Welches der folgenden Diagramme ist die richtige Darstellung der Bahnkurve?



→ aus Zwischenprüfung HS22,
MC-Teil Aufgabe 1

1. Schritt: Gegebene Größen verstehen:

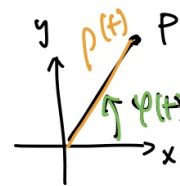
$$\begin{cases} \rho(t) = 1 + t^2 \\ \varphi(t) = at \end{cases}$$

→ Polarkoordinaten

→ $\rho(t)$: Radius vom Ursprung

→ $\varphi(t)$: Winkel von x-Achse aus

→ beide abhängig vom Zeit-Parameter t



2. Schritt: einige Werte für t einsetzen & die Werte analysieren

① $t=0$: $\rho(t=0) = 1$

↑
Startpunkt! $\varphi(t=0) = 0$

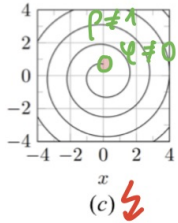
③ $t=2$: $\rho(t=2) = 5$

$\varphi(t=2) = 2a = \frac{10}{3}\pi \quad (\hat{=} \frac{4}{3}\pi)$

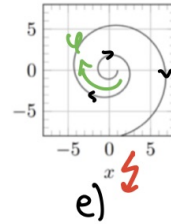
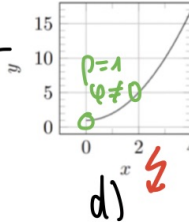
② $t=1$: $\rho(t=1) = 2$

$\varphi(t=1) = a = \frac{5}{3}\pi$

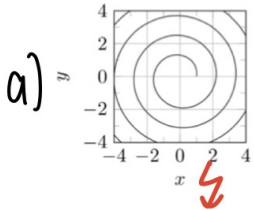
- Winkel φ wird immer grösser
- Radius ρ wird immer grösser
- wegen den Term t^2 in $\rho(t)$ wird der Radius "schneller" grösser mit wachsendem t



→ Startpunkt ist falsch

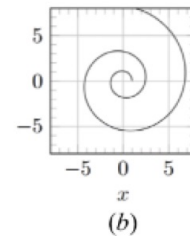
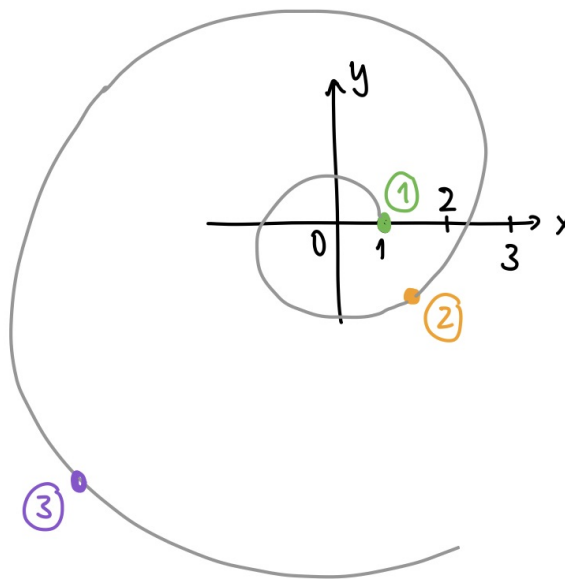


→ φ wächst in die math. negative Richtung → falsch



→ Startwert richtig, aber Radius wächst "zu langsam" & einheitlich (sollte schneller wachsen mit zunehmender Entfernung zum Ursprung!)

(3. Schritt: Punkte einzeichnen (evtl. mehr t -Werte einsetzen falls nötig))



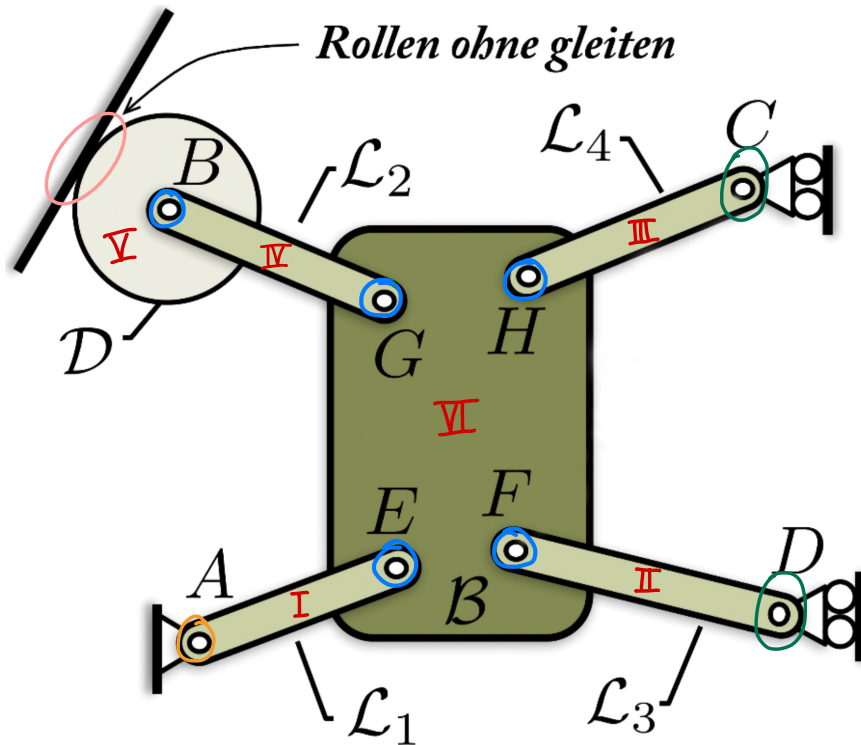
It's a match! :)

⇒ lö b) ist richtig

Quiz 2

4. Kolloquium HS 2022

Nie viele Freiheitsgrade hat das System?



Lösung:

$$b = ?$$

$$\Rightarrow b = 5 \cdot 2 + 2 + 2 \cdot 1 + 2 = 16$$

$$\text{Gelenke: } b_g = 5 \cdot 2$$

$$\Rightarrow n = 6 \cdot 3 = 18$$

$$\text{Festlager: } b_{FL} = 2$$

$$\Rightarrow f = n - b = 18 - 16 = 2$$

$$\text{Auflager: } b_{AL} = 2 \cdot 1$$

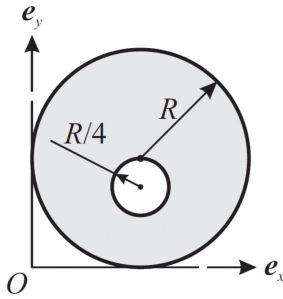
$$\hookrightarrow f = \underline{2}$$

$$\text{Rollen ohne gleiten: } b_{Rog} = 2$$

Quiz 3

Serie 6 HS 2022, Aufgabe 9

Finden Sie den Schwerpunkt des unten skizzierten, homogenen, ebenen Körpers.



Annahme: Der Körper ist eben und hat eine homogene Massenverteilung.

Lösung:

⇒ Wir stellen fest: Der Körper ist aus zwei Körpern zusammengesetzt
 $\Downarrow$
 2 Kreise

⇒ Da wir von Kreisen die Schwerpunkte kennen und wir den Körper als eben und mit homogener Massenverteilung annehmen dürfen, können wir die Formel 2.14 aus dem Skript (S.45) bzw. aus der Übungstheorie verwenden:

Falls ein Körper aus Teilen mit einfach zu bestimmenden Schwerpunkten zusammengesetzt ist, so lässt sich folgende Formel für die auf die Schwerpunkte der Teile reduzierten Gewichtskräfte herleiten:

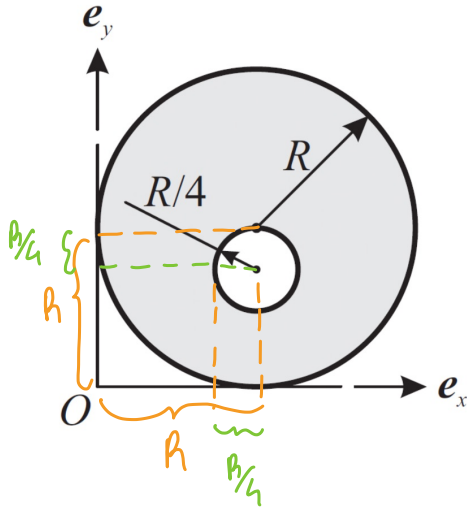
$$\vec{r}_C = \frac{1}{G} \cdot \sum_i G_i \cdot \vec{r}_i$$

wobei G das Gesamtgewicht und G_i das Gewicht des i -ten Körpers ist.

⇒ Da wir uns in 2D befinden, sind G_i und G die Flächen der einzelnen Körper bzw. die Gesamtfläche des Körpers.

⇒ Schwerpunkte und Flächen der einzelnen Körper finden:

⇒ Der Schwerpunkt von einem Kreis, liegt in dessen Zentrum



⇒ Großer Kreis: $\vec{r}_{OS_1} = \begin{pmatrix} R \\ R \end{pmatrix} = R \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$A_1 = R^2 \cdot \pi$$

⇒ Kleiner Kreis: $\vec{r}_{OS_2} = \begin{pmatrix} R \\ R - R/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \\ 3R/4 \end{pmatrix} = R \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3/4 \end{pmatrix}$

$$A_2 = \left(\frac{R}{4}\right)^2 \cdot \pi = \frac{R^2 \cdot \pi}{16}$$

⇒ **ACHTUNG:** Der zusammengesetzte Körper ist wie folgt definiert:

zusammengesetzter Körper = Großer Kreis - Kleiner Kreis

⇒ Der kleine Kreis geht als **NEGATIVE FLÄCHE** in die Rechnung ein.

⇒ Gesamtfläche: $A = A_1 - A_2 = R^2 \cdot \pi - \frac{R^2 \cdot \pi}{16} = \frac{15 \cdot R^2 \cdot \pi}{16}$

⇒ Formel anwenden: $\vec{r}_C = \frac{1}{G} \cdot \sum_i G_i \cdot \vec{r}_i = \frac{1}{A} \cdot (A_1 \cdot \vec{r}_{OS_1} - A_2 \cdot \vec{r}_{OS_2}) =$

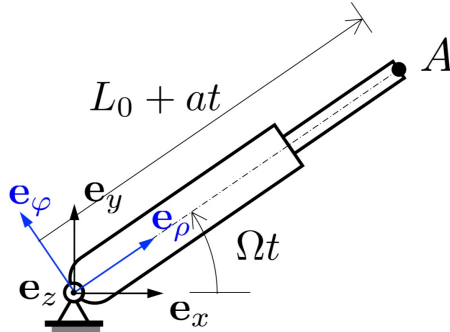
$$= \frac{16}{15 \cdot R^2 \cdot \pi} \cdot \left(\cancel{R^2 \cdot \pi} \cdot R \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\cancel{R^2 \cdot \pi}}{16} \cdot R \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3/4 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{15} \cdot \left(\begin{pmatrix} 16R \\ 16R \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R \\ \frac{3}{4}R \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} 15R \\ 64R - 3R \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} 15R \\ \frac{61R}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \\ \frac{61}{60}R \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{r}_C = \begin{pmatrix} R \\ \frac{61}{60}R \end{pmatrix}}$$

Quiz 4

Serie 1 HS 2022, Aufgabe 3

Ein Antrieb, der im Gelenk O drehbar gelagert wird, rotiert um die $\mathbf{e}_z$ Achse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω und verlängert sich gleichzeitig gemäss dem Ausdruck $L(t) = L_0 + at$, wie in der folgenden Skizze dargestellt.



- Bestimmen Sie die Geschwindigkeit $\mathbf{v}_A$ des Punktes A in Polar- und kartesischen Koordinaten.
- Bestimmen Sie die Schnelligkeit v_A des Punktes A .

Lösung:

1.) Lage von A : $\vec{r}_A = \rho \cdot \vec{e}_\rho = (L_0 + at) \cdot \vec{e}_\rho$

$\Rightarrow$ Für $\vec{e}_\rho$ gilt: $\vec{e}_\rho = \cos(\varphi) \cdot \vec{e}_x + \sin(\varphi) \cdot \vec{e}_y$

$\varphi = \varphi(t) = \Omega \cdot t \Rightarrow \vec{e}_\rho = \cos(\Omega \cdot t) \cdot \vec{e}_x + \sin(\Omega \cdot t) \cdot \vec{e}_y$

$\Rightarrow$ „Geschwindigkeit ist die Ableitung des Ortes“:

$$\vec{v}_A = \dot{\vec{r}}_A = \frac{d}{dt} (L_0 + at) \cdot \vec{e}_\rho = (L_0 + at) \cdot \dot{\vec{e}}_\rho + \underbrace{\left(\frac{d}{dt} (L_0 + at) \right)}_a \cdot \vec{e}_\rho =$$

$$\dot{\vec{e}}_\rho = \frac{d}{dt} \left(\cos(\Omega \cdot t) \cdot \vec{e}_x + \sin(\Omega \cdot t) \cdot \vec{e}_y \right) = -\Omega \cdot \sin(\Omega \cdot t) \cdot \vec{e}_x + \Omega \cdot \cos(\Omega \cdot t) \cdot \vec{e}_y$$

$$\dot{\vec{e}}_\rho = -\sin(\varphi) \cdot \vec{e}_x + \cos(\varphi) \cdot \vec{e}_y \Rightarrow \dot{\vec{e}}_\rho = \Omega \cdot \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{v}_A = \dot{\vec{r}}_A = \frac{d}{dt} (L_0 + \alpha \cdot t) \cdot \vec{e}_\rho = (L_0 + \alpha \cdot t) \cdot \dot{\vec{e}}_\rho + \underbrace{\left(\frac{d}{dt} (L_0 + \alpha \cdot t) \right)}_{\alpha} \cdot \vec{e}_\rho =$$

$$= (L_0 + \alpha \cdot t) \cdot \Omega \cdot \vec{e}_\varphi + \alpha \cdot \vec{e}_\rho$$

ODER

$$\vec{v}_A = \dot{x} \cdot \vec{e}_x + \dot{y} \cdot \vec{e}_y + \dot{z} \cdot \vec{e}_z = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \cdot \dot{\varphi} \cdot \vec{e}_\varphi + \dot{z} \cdot \vec{e}_z = \alpha \cdot \vec{e}_\rho + (L_0 + \alpha \cdot t) \cdot \Omega \cdot \vec{e}_\varphi$$

$$\rho(t) = L_0 + \alpha \cdot t \Rightarrow \dot{\rho}(t) = \alpha$$

$$\varphi(t) = \Omega \cdot t \Rightarrow \dot{\varphi}(t) = \Omega$$

$\Rightarrow$ in kartesischen Koordinaten:

$$\vec{e}_\rho = \cos(\varphi) \cdot \vec{e}_x + \sin(\varphi) \cdot \vec{e}_y$$

$$\vec{e}_\varphi = -\sin(\varphi) \cdot \vec{e}_x + \cos(\varphi) \cdot \vec{e}_y$$

$$\Rightarrow \vec{v}_A = \alpha \cdot (\cos(\varphi) \cdot \vec{e}_x + \sin(\varphi) \cdot \vec{e}_y) + (L_0 + \alpha \cdot t) \cdot \Omega \cdot (-\sin(\varphi) \cdot \vec{e}_x + \cos(\varphi) \cdot \vec{e}_y) =$$

$$= \left(\underset{\downarrow}{\alpha \cdot \cos(\varphi)} - \underset{\downarrow}{(L_0 + \alpha \cdot t) \cdot \Omega \cdot \sin(\varphi)} \right) \cdot \vec{e}_x + \left(\underset{\downarrow}{\alpha \cdot \sin(\varphi)} + \underset{\downarrow}{(L_0 + \alpha \cdot t) \cdot \Omega \cdot \cos(\varphi)} \right) \cdot \vec{e}_y$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $= \Omega \cdot t \quad = \Omega \cdot t \quad = \Omega \cdot t \quad = \Omega \cdot t$

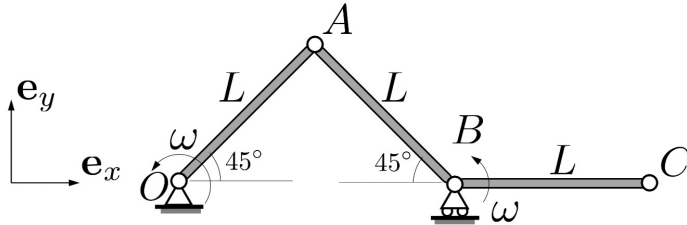
2.) Schnelligkeit = Betrag der Geschwindigkeit

$$\Rightarrow v_A = |\alpha \cdot \vec{e}_\rho + (L_0 + \alpha \cdot t) \cdot \Omega \cdot \vec{e}_\varphi| = \sqrt{\alpha^2 + (L_0 + \alpha \cdot t)^2 \cdot \Omega^2}$$

Quiz 5

Basisprüfung FS 2022, Aufgabe 5 (Mc)

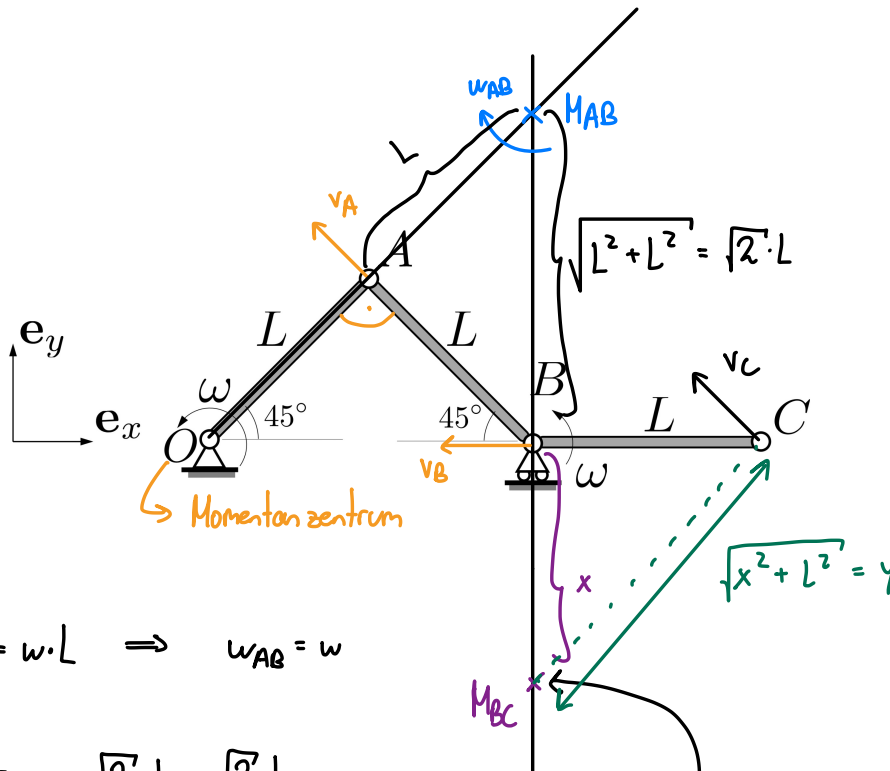
Das dargestellte System besteht aus drei Stäben gleicher Länge L , die an den Punkten A und B wie gezeigt gelenkig miteinander verbunden sind. Das System ist in Punkt O gelenkig gelagert und in Punkt B aufgelegt. Zum dargestellten Zeitpunkt stehen die Stäbe OA und AB senkrecht zueinander, während der Stab BC horizontal liegt. Die Stäbe OA und BC drehen sich mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit ω .



Was ist die Geschwindigkeit $\mathbf{v}_C$?

- (a) $\mathbf{v}_C = -\sqrt{2}\omega L\mathbf{e}_x$
- (b) $\mathbf{v}_C = -\sqrt{2}\omega L\mathbf{e}_x + \omega L\mathbf{e}_y$
- (c) $\mathbf{v}_C = \omega L\mathbf{e}_x + \omega L\mathbf{e}_y$
- (d) $\mathbf{v}_C = \sqrt{3}\omega L\mathbf{e}_x + \sqrt{2}\omega L\mathbf{e}_y$
- (e) $\mathbf{v}_C = \sqrt{2}\omega L\mathbf{e}_x - \sqrt{2}\omega L\mathbf{e}_y$

Lösung:



$$\omega_{AB} \cdot L = v_A = \omega \cdot L \Rightarrow \omega_{AB} = \omega$$

$$\Rightarrow v_B = \omega_{AB} \cdot \sqrt{2} \cdot L = \sqrt{2} \cdot L \cdot \omega$$

$\Rightarrow$ Orientierung von ω : M_{BC} muss hier liegen

$$\Rightarrow \omega \cdot x = v_B = \sqrt{2} \cdot L \cdot \omega \Rightarrow x = \sqrt{2} \cdot L$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{2L^2 + L^2} = \sqrt{3L^2} = \sqrt{3} \cdot L$$

$$\Rightarrow \text{Satz der projizierten Geschwindigkeiten: } v_{Cx} = -v_B = -\sqrt{2} \cdot L \cdot \omega$$

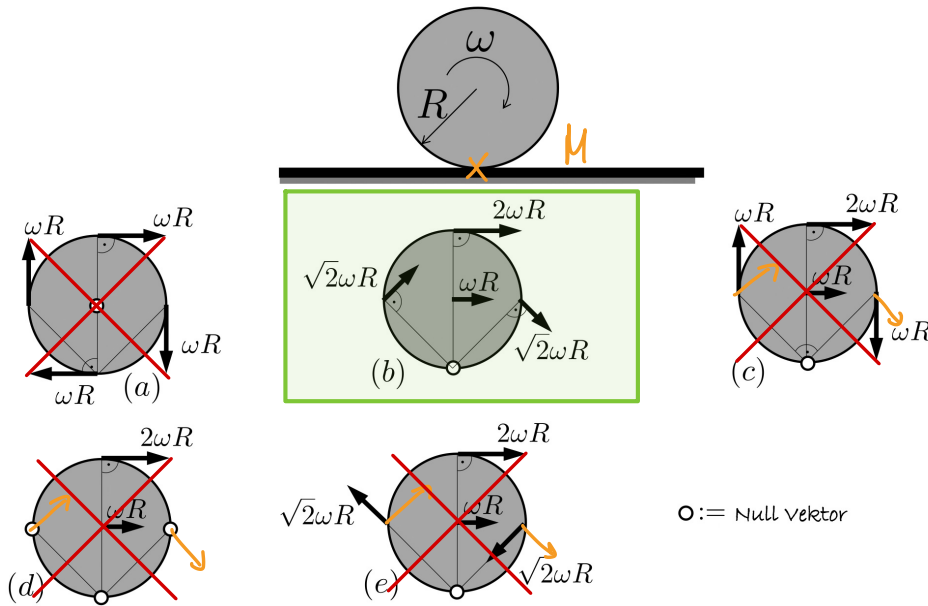
$$\Rightarrow v_C = y \cdot \omega = \sqrt{v_{Cx}^2 + v_{Cy}^2} \Rightarrow v_{Cy} = \sqrt{y^2 \omega^2 - v_{Cx}^2} = \sqrt{3L^2 \omega^2 - 2L^2 \omega^2} = L\omega$$

$$\Rightarrow \vec{v}_C = v_{Cx} \cdot \vec{e}_x + v_{Cy} \cdot \vec{e}_y = -\sqrt{2} \cdot L \cdot \omega \cdot \vec{e}_x + L\omega \cdot \vec{e}_y \Rightarrow b) \text{ ist korrekt}$$

Quiz 6

Basisprüfung FS 2022, Aufgabe 1 (MC)

Eine Scheibe mit dem Radius R rollt ohne zu gleiten auf einer horizontalen Ebene mit der Winkelgeschwindigkeit ω . Welches der folgenden Diagramme stellt die Geschwindigkeiten der markierten Punkte richtig dar? Beachten Sie, dass ein weisser Kreis den Nullvektor darstellt.



Lösung:

⇒ Rollen ohne Gleiten: Der Berührungspunkt von Boden und Scheibe hat Geschwindigkeit $\vec{0}$.

↳ Antwort a muss also falsch sein

⇒ Satz vom Momentanzentrum verwenden:

Bei der Rotation steht die Geschwindigkeit $\vec{v}_P$ des Punktes P senkrecht auf der Verbindungsgeraden durch P und das Momentanzentrum M . Die Schnelligkeit ist proportional zum Abstand:

$$|\vec{v}_P| = v_P = \omega \cdot r_P$$

⇒ Das Momentanzentrum in diesem Fall ist **M**.

⇒ Nur in b) sehen alle Geschwindigkeiten senkrecht auf die Verbindungsgeraden durch M und die entsprechenden Punkte

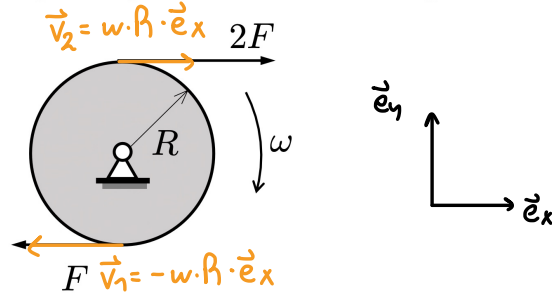
⇒

Antwort b) ist korrekt

Quiz 7

Zwischenprüfung HS 2022, Aufgabe 6 (MC)

Eine Scheibe mit dem Radius R ist in ihrem Mittelpunkt gelenkig gelagert und dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω im Uhrzeigersinn. Zwei horizontale Kräfte der Beträge $2F$ und F wirken auf den oberen und unteren Punkt der Scheibe in entgegengesetzter Richtung, wie gezeigt. Wie gross ist die Gesamtleistung $\mathcal{P}$?



Was ist die Gesamtleistung $\mathcal{P}$?

- (a) $\mathcal{P} = F\omega R$
- (b) $\mathcal{P} = 0$
- (c) $\mathcal{P} = -F\omega R$
- (d) $\mathcal{P} = 3F\omega R$
- (e) $\mathcal{P} = 5F\omega R$

Lösung:

2 Möglichkeiten: $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$ oder $\mathcal{P} = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$ (weil eine Rotation vorliegt)

$$\text{SVM: } \left. \begin{array}{l} \vec{v}_1 = -\omega \cdot R \cdot \vec{e}_x \\ \vec{v}_2 = \omega \cdot R \cdot \vec{e}_x \end{array} \right\} \mathcal{P}_{\text{tot}} = -\vec{v}_1 \cdot F \cdot \vec{e}_x + \vec{v}_2 \cdot 2F \cdot \vec{e}_x = 3F\omega R$$

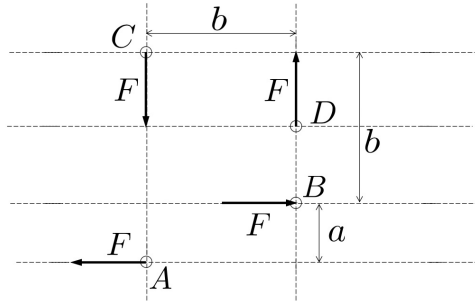
$$\vec{M}_{\text{tot}} = (-F \cdot R - 2F \cdot R) \cdot \vec{e}_z = -3FR \cdot \vec{e}_z \Rightarrow \mathcal{P}_{\text{tot}} = -3FR \cdot \vec{e}_z \cdot (-\omega) \cdot \vec{e}_z = 3F\omega R$$

$\Rightarrow$ Somit lautet die korrekte Antwort: $\mathcal{P}_{\text{tot}} = 3F\omega R$.

Quiz 8

Basisprüfung FS 2022, Aufgabe 12 (16)

Die gezeigte Kräftegruppe besteht aus vier Kräften gleiches Betrags F , deren Wirkungslinien vertikal und horizontal liegen, wie dargestellt. Die Abstände zwischen den Wirkungslinien der Kräfte sind aus der Abbildung ersichtlich.



Welche Beziehung muss zwischen a und b bestehen, damit der Dynam $\mathcal{D}$ der Kräftegruppe für jeden Punkt in der Ebene $\mathcal{D} = \{0, 0\}$ ist?

- (a) $a = b$
- (b) $a = 2b$
- (c) $a = b/2$
- (d) $a = 0; b \neq 0$
- (e) $a = 3b/2$

Lösung:

Zunächst bemerken wir, dass die Resultierende immer $\vec{0}$ ist, da die Kräftegruppe aus 2 Kräftepaaren besteht.

Nun müssen wir noch herausfinden, was für a und b gelten muss, damit das resultierende Moment gleich $\vec{0}$ ist. Die Momente der Kräftepaare sind unabhängig vom Bezugspunkt. Mit Kräftegruppe 1 $\{F_A, F_B\}$ und Kräftegruppe 2 $\{F_C, F_D\}$ gilt also:

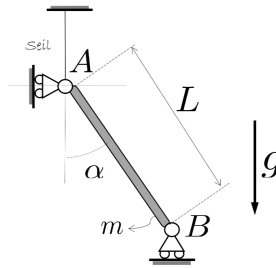
$$M_1 = -a \cdot F, \quad M_2 = b \cdot F \quad (\text{wobei das Vorzeichen aus der Rechte-Hand-Regel folgt})$$

$$\Rightarrow M_1 + M_2 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow -a \cdot F + b \cdot F = 0 \Rightarrow a = b$$

$\Rightarrow$ Somit lautet die richtige Antwort $a = b$.

Quiz 9'

Der Stab AB mit Länge L und Masse m steht auf einer vertikalen Ebene und unterliegt der Schwerkraft g . Die Spitzen des Stabes A und B sind verschiebbar gelagert, wobei die horizontale bzw. vertikale Bewegung eingeschränkt wird. Ausserdem wird der Punkt A durch ein vertikales Seil mit vernachlässigbarer Masse gehalten, wie gezeigt.

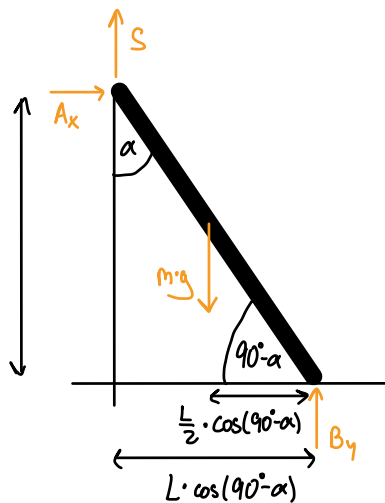


Wie gross ist der Betrag der Seilkraft S ?

- (a) $S = \frac{mg}{3}$
- (b) $S = \frac{mg}{4}$
- (c) $S = 0$
- (d) $S = \frac{mg}{2}$
- (e) $S = mg$

Lösung:

$\Rightarrow$ Freischneiden:



$$\Rightarrow \text{KB}(x): A_x = 0$$

$$\text{KB}(y): S + B_y - m \cdot g = 0$$

$$\text{MB}(B, z): m \cdot g \cdot \frac{L}{2} \cdot \cos(90^\circ - \alpha) - S \cdot L \cdot \cos(90^\circ - \alpha) - \underbrace{A_x \cdot y}_{=0} = 0$$

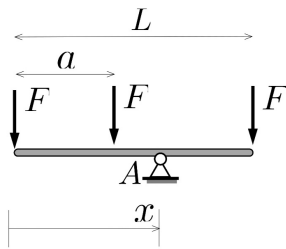
$$\Rightarrow m \cdot g \cdot \frac{L}{2} \cdot \cos(90^\circ - \alpha) = S \cdot L \cdot \cos(90^\circ - \alpha) \Rightarrow$$

$$S = \frac{m \cdot g}{2} \Rightarrow \text{Antwort d ist korrekt}$$

Quiz 9"

Basisprüfung FS 2022, Aufgabe 9 (MC)

Drei Kräfte der gleichen Grösse F wirken vertikal auf einen horizontalen Balken. Die Lagen der Angriffspunkte sind auf der Abbildung dargestellt.



In welchem Abstand x von der linken Spitze des Balkens muss ein Auflager angebracht werden, um das Gleichgewicht zu gewährleisten?

(a) $x = \frac{L-a}{3}$

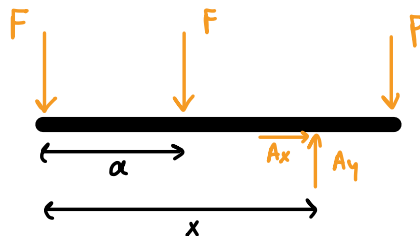
(b) $x = \frac{L}{2}$

(c) $x = \frac{L+a}{2}$

(d) $x = \frac{L-a}{2}$

(e) $x = \frac{L+a}{3}$

Lösung:



⇒ Momentenbedingung in A aufstellen (nur eine Unbekannte: x)

$$M_B(A, z): F \cdot x + (x-a) \cdot F - (L-x) \cdot F = 0$$

$$\Rightarrow x + x - a - L + x = 0$$

$$3x = L + a$$

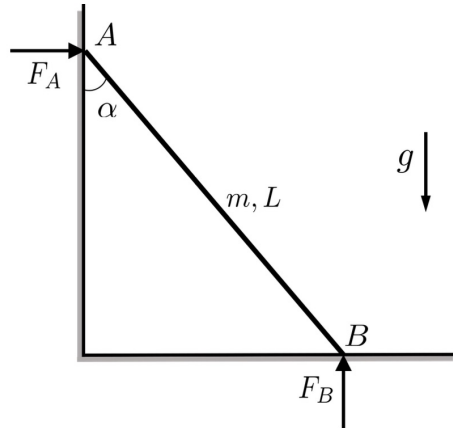
⇒

$$x = \frac{L+a}{3} \Rightarrow \text{Somit ist Antwort e) korrekt}$$

Quiz 9'''

Basisprüfung FS 2022, Aufgabe 15 (Mc)

Ein homogener Stab mit der Masse m und der Länge L stützt sich an den Punkten A bzw. B auf eine glatte Wand bzw. auf eine glatte Ebene. Der Stab bildet einen Winkel α mit der Wand, und die Schwerkraft g wirkt nach unten, wie gezeigt. Die Reaktionskräfte an den Punkten A und B sind auf der Abbildung dargestellt.

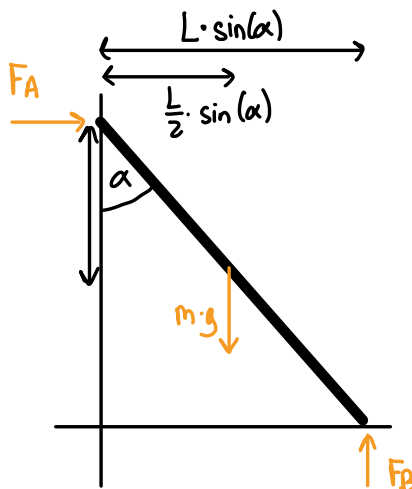


Welche der unteren Bedingungen muss für die Beträge der Reaktionskräfte $|\mathbf{F}_A|$ bzw. $|\mathbf{F}_B|$ gelten, damit sich das System im Gleichgewicht befindet?

- (a) Nur wenn $|\mathbf{F}_B| = mg$ und $|\mathbf{F}_A| = 0$.
- (b) Nur wenn $|\mathbf{F}_B| = \frac{mg}{2}$ und $|\mathbf{F}_A| = \frac{mg}{2} \tan \alpha$.
- (c) Nur wenn $|\mathbf{F}_B| = mg$.
- (d) Das System befindet sich unter *keiner* Bedingung im Gleichgewicht.
- (e) Nur wenn $|\mathbf{F}_A| = |\mathbf{F}_B|$, mit $|\mathbf{F}_A| \neq 0$ und $|\mathbf{F}_B| \neq 0$.

Lösung:

$\Rightarrow$ Freischnitt:



$\Rightarrow$ Hauptsatz der Statik anwenden: $\sum \mathbf{F}_A = 0$

$\sum \mathbf{F}_B = m \cdot g$

$\sum \mathbf{M}_A(z): - m \cdot g \cdot \frac{L}{2} \cdot \sin(\alpha) + F_B \cdot L \cdot \sin(\alpha) = 0 \Rightarrow F_B = \frac{mg}{2}$

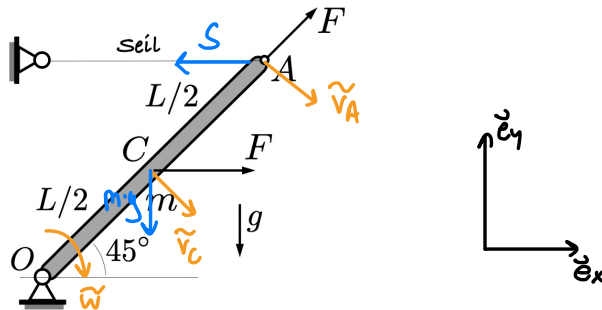
$\Rightarrow$ ⚡ Wir haben einen Widerspruch gefunden

$\Rightarrow$ Antwort d muss korrekt sein

Quiz 10

Zwischenprüfung HS 2022, Aufgabe 10 (Mc)

Ein Stab OA der Länge L und der Masse m ist in O gelenkig gelagert und wird durch ein horizontales Seil in einem Winkel von 45° zur Horizontalrichtung gehalten. Die Schwerkraft g wirkt, wie gezeigt, nach unten. An der Spitze des Stabes A und dem Mittelpunkt C wirken zwei Kräfte von gleichem Betrag F in Richtung des Stabes bzw. in horizontaler Richtung, wie dargestellt.



Wie gross ist der Betrag S der Seilkraft, die das Gleichgewicht gewährleistet?

- (a) $S = \frac{mg}{2} - \frac{F}{2}$
- (b) $S = \frac{mg}{2} + \frac{F}{2}$
- (c) $S = \frac{mg}{2} + \frac{2F}{\sqrt{2}}$
- (d) $S = mg$
- (e) $S = mg + \frac{\sqrt{2}F}{2}$

Lösung:

PdVL anwenden:

$$\vec{v}_C = \vec{\omega} \cdot \frac{L}{2} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \cdot L \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\vec{P}_{\text{tot}} = \vec{v}_C \cdot \begin{pmatrix} F \\ -mg \end{pmatrix} + \vec{v}_A \cdot \begin{pmatrix} -S \\ 0 \end{pmatrix} = \cancel{\vec{\omega} \cdot \frac{L}{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (F + mg) - \cancel{\vec{\omega} \cdot \frac{L}{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot S \stackrel{!}{=} 0$$

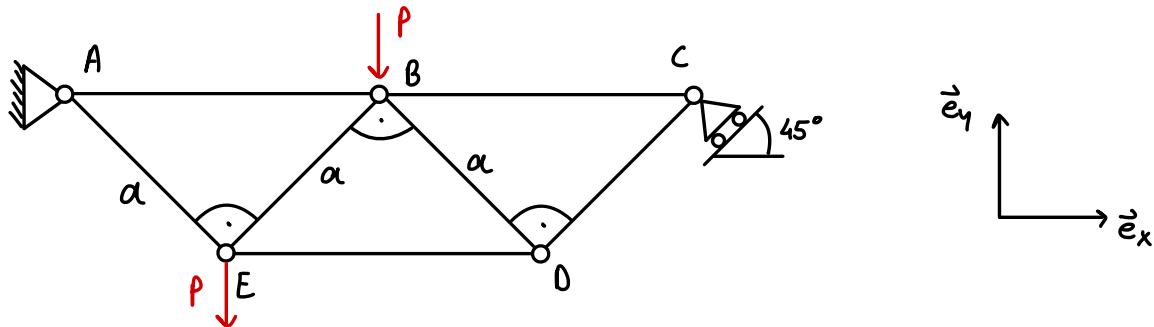
$\Rightarrow$

Somit lautet die richtige Antwort: $S = \frac{1}{2} \cdot (F + mg)$

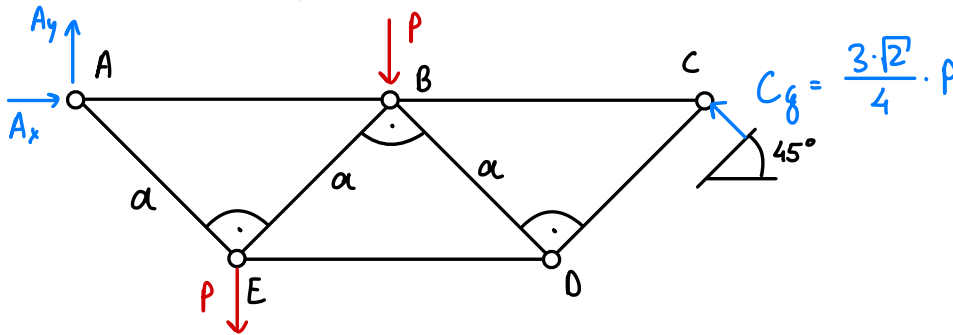
Quiz 11

Adaptiertes Beispiel aus der Vorlesung HS 2022

Gegeben sei folgende Konstruktion:



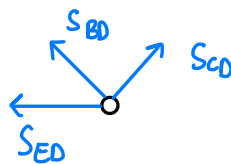
Und der Freischnitt, wobei C_g bekannt ist:



Berechne die Stabkraft S_{BD} .

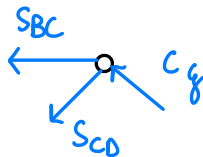
Lösung:

Knodelgleichgewicht im Knoten D:



↳ 3 Unbekannte, 2 Gleichungen $\Rightarrow$ zusätzliche Knodelgleichung aufstellen

Knodelgleichgewicht im Knoten C:



$$\Rightarrow \text{KB(y): } -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot S_{CD} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot C_g = 0 \Rightarrow$$

$$S_{CD} = C_g = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{4} \cdot P$$

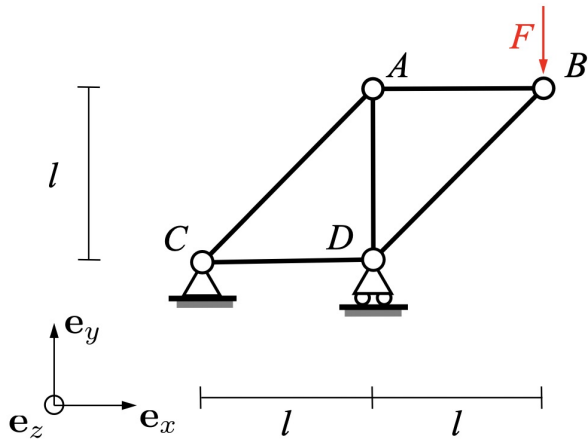
KB(y) im Knoten D: $KB(y): \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot S_{BD} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot S_{CD} = 0 \Rightarrow S_{BD} = -S_{CD}$

$\Rightarrow$ Somit lautet die korrekte Antwort: $S_{BD} = -S_{CD} = -\frac{3 \cdot \sqrt{2}}{4} \cdot p$

Quiz 12

Serie 8 HS 2022, Aufgabe 3

Das unten skizzierte Fachwerk besteht aus 5 masselosen gelenkig miteinander verbundenen Stäben. Die entsprechenden Längen können aus der Skizze abgelesen werden. Eine Kraft F wirkt im Punkt B in negativer $\mathbf{e}_y$ Richtung, Punkt C ist gelenkig gelagert und Punkt D ist mit einem Rolllager verbunden (siehe Skizze).



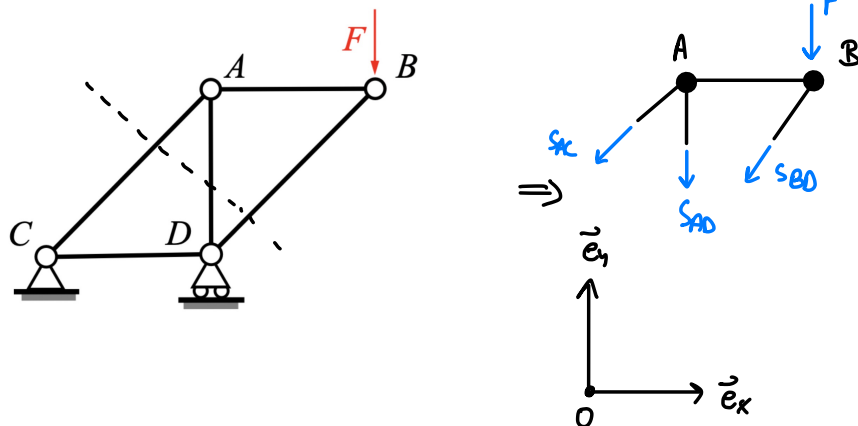
Welche der folgenden Aussagen über die Stabkräfte ist richtig (positive Werte sind Zugstäbe und negative Druckstäbe)?

- (a) $S_{AC} = S_{BD} = 2F$
- (b) $S_{AC} = \frac{1}{2} S_{BD} = -F$
- (c) $S_{AC} = -S_{BD} = \sqrt{2}F$
- (d) $S_{AC} = S_{BD} = -\sqrt{2}F$
- (e) $S_{AC} = -\sqrt{2} S_{BD} = F$

Hinweis: Benutzen Sie den 3-Kräftechnitt

Lösung:

3-Kräftechnitt:



$$KB(x): -\frac{B}{2} \cdot S_{AC} - \frac{B}{2} S_{BD} = 0 \Rightarrow S_{AC} = -S_{BD} = \sqrt{2} \cdot F$$

$$KB(y): -\frac{B}{2} \cdot S_{AC} - S_{AD} - \frac{B}{2} S_{BD} - F = 0$$

$$MB(A, z): -F \cdot l - S_{BD} \cdot \frac{B}{2} \cdot l = 0 \Rightarrow S_{BD} = -F \cdot l \cdot \frac{2 \cdot B}{B \cdot l \cdot B} = -\sqrt{2} \cdot F$$

$$S_{AD} = -\underbrace{\frac{B}{2} \cdot (S_{AC} + S_{BD})}_{=0} - F = -F$$

⇒

Somit lautet die korrekte Lösung:

$$S_{AD} = -F$$

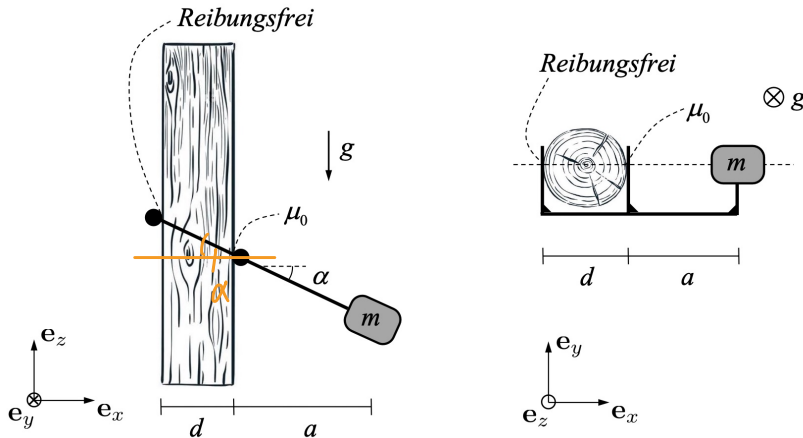
$$S_{AC} = \sqrt{2} \cdot F$$

$$S_{BD} = -\sqrt{2} \cdot F$$

Quiz 13'

Serie 9 HS 2022, Aufgabe 5

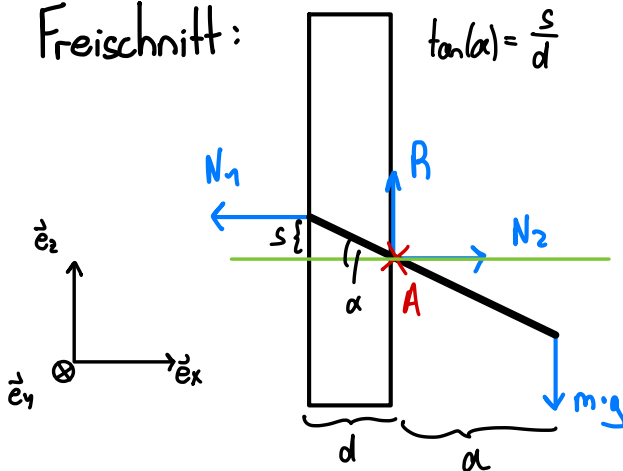
Man betrachtet einen Holzstrommast. Um Wartungsarbeiten durchzuführen, klettert das Fachpersonal mit speziellen Schuhen auf den Holzmast. Diese Schuhe klemmen sich durch das Gewicht des Benutzers an den Mast. Eine schematische Darstellung eines Schuhs ist in der folgenden Skizze zu sehen. Der Einfachheit halber sind die Schuhe durch eine Stabkonstruktion ersetzt worden. Die Vorderseite des Schuhs hat den Reibungswert μ_0 und die Rückseite ist reibungsfrei. Alle erforderlichen Abmessungen und Richtungen sind in der Skizze angegeben.



1. Wie gross muss der Abstand a des Schuhs vom Mast gewählt werden, damit ein Mitarbeiter mit Masse m sicher auf den Mast klettern kann?
2. Welche Änderungen müssen an den Schuhen vorgenommen werden, wenn ein doppelt so schwerer Mitarbeiter ($2m$) die Schuhe benutzt?

Lösung:

1.) Freischnitt:



$$KB(x): N_2 - N_1 = 0 \Rightarrow N_1 = N_2$$

$$KB(z): R - m \cdot g = 0 \Rightarrow R = m \cdot g$$

$$MB(A, y) - N_1 \cdot d \cdot \tan(\alpha) + m \cdot g \cdot a = 0$$

$$\Rightarrow N_1 = \frac{m \cdot g \cdot a}{\tan(\alpha) \cdot d} = N_2$$

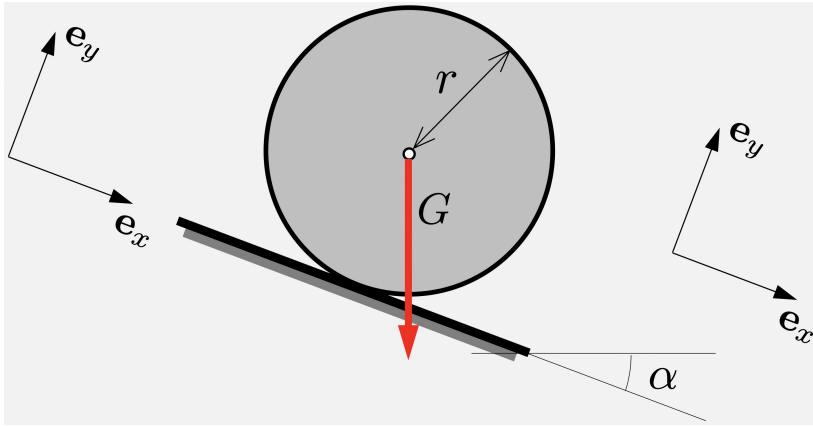
$$\Rightarrow \text{Haftreibungsgesetz: } |\vec{F}| \leq \mu_0 \cdot |\vec{N}| \Rightarrow m \cdot g \leq \mu_0 \cdot \frac{m \cdot g \cdot a}{\tan(\alpha) \cdot d} \Rightarrow \frac{d \cdot \tan(\alpha)}{\mu_0} \leq a$$

2.) $\frac{d \cdot \tan(\alpha)}{\mu_0} \leq a$ ist unabhängig von der Masse $\Rightarrow$ Keine Änderungen nötig.

Quiz 13"

Beispiel aus der Vorlesung HS 2022

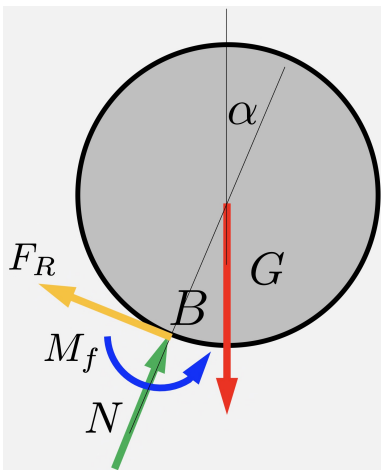
Gegeben sei ein Rad im Gleichgewicht auf einer schrägen Ebene (siehe Skizze):



Was müssen μ_0 und μ_z für Bedingungen für Ruhe erfüllen?

Lösung:

Zunächst schneiden wir das System frei (achtet auf Reibungskräfte und -momente):



$\Rightarrow$ Gleichgewichtsbedingungen:

$$P_x = 0: -F_R + G \cdot \sin(\alpha) = 0 \Rightarrow F_R = G \cdot \sin(\alpha)$$

$$P_y = 0: N - G \cdot \cos(\alpha) = 0 \Rightarrow N = G \cdot \cos(\alpha)$$

$$M_B = 0: M_f - r \cdot G \cdot \sin(\alpha) = 0 \Rightarrow M_f = r \cdot G \cdot \sin(\alpha)$$

$\Rightarrow$ Zusatzbedingungen der Reibung:

$\hookrightarrow$ Für Haftreibung (also Raden ohne zu gleiten) muss gelten: $|\vec{F}_R| \leq \mu_0 \cdot |\vec{N}|$

$$G \cdot \sin(\alpha) \leq \mu_0 \cdot G \cdot \cos(\alpha) \Rightarrow \mu_0 \geq \tan(\alpha)$$

↳ Für kein Polkn muss gelten: $|\vec{M}_F| \leq \mu_2 \cdot |\vec{N}|$

$$r \cdot g \cdot \sin(\alpha) \leq \mu_2 \cdot g \cdot \cos(\alpha)$$

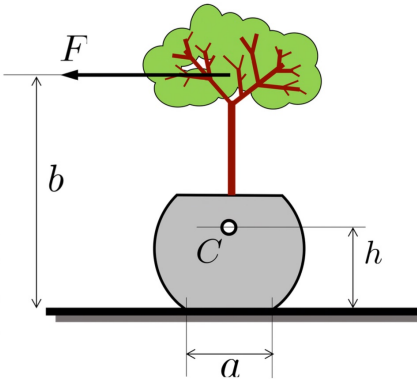
$$\mu_2 \geq r \cdot \tan(\alpha)$$

⇒ Nur wenn gilt: $\left\{ \begin{array}{l} \mu_0 \geq \tan(\alpha) \\ \mu_2 \geq r \cdot \tan(\alpha) \end{array} \right\}$ (also beide Bedingungen erfüllt sind), ist das Pod in Ruhe.

Quiz 14

Basisprüfung FS 2022, Aufgabe 2 (MC)

Betrachten Sie den kleinen Baum und den Topf, die hier skizziert sind. Der Massenschwerpunkt des gesamten Systems (d.h. Topf + Baum) liegt im Punkt C , auf einer Höhe h über dem Boden. Die Breite der Basis vom Topf ist a und die Masse des gesamten Systems wird durch M bezeichnet. Der Wind übt eine horizontale Kraft F in einer Höhe b über dem Boden aus. Nehmen Sie an, dass es keine Relativbewegung zwischen dem Baum und dem Topf gibt, d.h. das ganze System verhält sich wie ein starrer Körper.

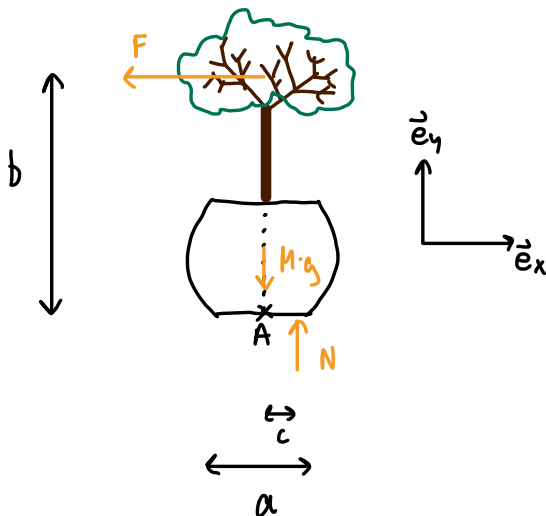


Welche Bedingung muss F erfüllen, damit das System nicht kippt?

- (a) $F < Mg \frac{a}{b}$
- (b) $F < Mg \frac{hb}{a^2}$
- (c) $F < Mg \frac{a}{2b}$
- (d) $F < Mg \frac{h}{b}$
- (e) $F < Mg$

Lösung:

⇒ Freischnitt:



⇒ Hauptsatz der Statik anwenden:

$$KB(y): N - M \cdot g = 0 \Rightarrow N = M \cdot g$$

$$MB(A, z): c \cdot N + F \cdot b = 0 \Rightarrow c = - \frac{F \cdot b}{M \cdot g}$$

$$\text{Kippbedingung: } |c| < \frac{a}{2}$$

$$\frac{F \cdot b}{M \cdot g} < \frac{a}{2} \Leftrightarrow F < M \cdot g \cdot \frac{a}{2b}$$

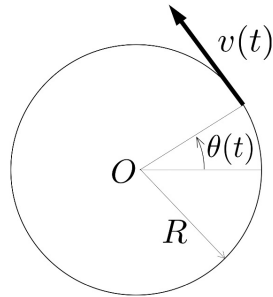
⇒

$$F < M \cdot g \cdot \frac{a}{2b} \Leftrightarrow \text{Somit ist Antwort c korrekt}$$

Quiz 15

Basisprüfung FS 2022, Aufgabe 7 (MC)

Ein materieller Punkt durchläuft die dargestellte Kreisbahn mit dem Radius R und dem Mittelpunkt O mit einer Geschwindigkeit, deren Betrag durch die Funktion $|\mathbf{v}(t)| = at$ gegeben ist, wobei a eine Konstante der Einheit $[a] = m/s^2$ ist. Die Ausgangslage ($t = 0$) entspricht einem Winkel $\theta(0) = 0$.



Was ist der Betrag der radialen Beschleunigung a_ρ wenn $\theta = 2\pi$, d.h. wenn der Punkt eine ganze Umdrehung durchgeführt hat?

- (a) $a_\rho = \frac{\pi a}{4}$
- (b) $a_\rho = 2\pi a$
- (c) $a_\rho = \pi a$
- (d) $a_\rho = 4\pi a$
- (e) $a_\rho = \frac{\pi a}{2}$

Lösung:

Für die Beschleunigung in ebenen Polarkoordinaten gilt:

$$\vec{a} = \underbrace{(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)}_{\ddot{a}_\rho} \cdot \vec{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi$$

$$R \cdot \frac{a^2}{R^2} \cdot \frac{4\pi R}{a}$$

$\Rightarrow$ Wir müssen also $\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$ berechnen, wenn $\theta = 2\pi$

$\Rightarrow$ Radius konstant: $r(t) = R \Rightarrow \ddot{r} = 0$

$\Rightarrow$ Für die tangentielle Geschwindigkeit gilt: $|\vec{v}(t)| = a \cdot t = R \cdot \dot{\theta}(t)$

$$\hookrightarrow \dot{\theta}(t) = \frac{a}{R} \cdot t$$

$\Rightarrow t_c$ finden, wenn $\theta(t_c) = 2\pi \Rightarrow \theta(t) = \int \dot{\theta}(\tau) d\tau + k = \frac{a}{2R} \cdot t^2 + k$

$$\theta(0) = 0 \Rightarrow \frac{a}{2R} \cdot 0^2 + k = 0 \Rightarrow k = 0$$

$$\Rightarrow \theta(t) = \frac{\alpha}{2R} \cdot t^2$$

$$\frac{\alpha}{2R} \cdot t_c^2 = 2\pi \Rightarrow t_c = \sqrt{\frac{4\pi R}{\alpha}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{\pi R}{\alpha}}$$

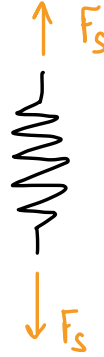
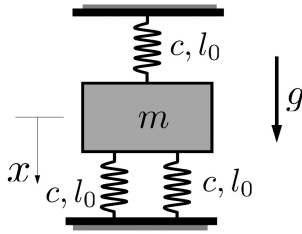
$$\Rightarrow |\vec{a}_p(t_c)| = a_p(t_c) = \left| 0 - R \cdot \frac{\alpha^2}{R^2} \cdot \frac{4\pi R}{\alpha} \right| = 4\pi\alpha$$

$$\Rightarrow a_p = 4\pi\alpha \Rightarrow \text{Somit ist die korrekte Lösung d.}$$

Quiz 16

Basisprüfung FS 2022, Aufgabe 10 (MC)

Ein Block der Masse m befindet sich in der vertikalen Ebene. Er ist an drei Federn mit Elastizitätskonstante c und ungestreckter Länge l_0 aufgehängt. Die Position des Blockes wird mit x bezeichnet; bei $x = 0$ sind alle Federn ungespannt. Die Schwerkraft g wirkt nach unten.



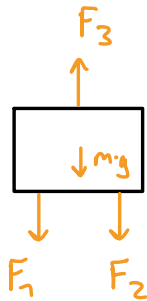
Wie lautet die Bewegungsgleichung des Systems?

- (a) $m\ddot{x} + 3c(x - l_0) = 0$
- (b) $m\ddot{x} - cl_0 + 3cx = mg$
- (c) $m\ddot{x} - c(x + l_0) = 3mg$
- (d) $m\ddot{x} - cx = mg$
- (e) $m\ddot{x} + 3cx = mg$

Lösung:

⇒ Freischnitt in allgemeiner Lage:

Hookssches Gesetz: $F_C = \Delta x \cdot c$, wobei $c \dots$ Federkonstante
 $\Delta x = x - x_0$



$$F_1 = F_2 = -x \cdot c$$

$$F_3 = +x \cdot c$$

⇒ Massenmittelpunktsatz anwenden: $m \cdot \ddot{x} = m \cdot g + F_1 + F_2 - F_3$

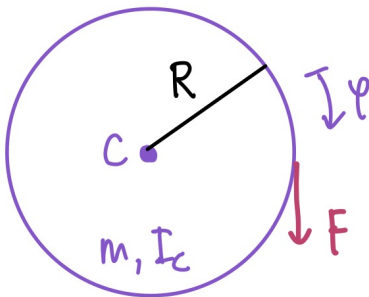
↳ Formeln für F_i einsetzen: $m \cdot \ddot{x} = m \cdot g - 3cx$

⇒ Die Bewegungsgleichung des Systems lautet: $m \cdot \ddot{x} + 3cx = m \cdot g$.
 Somit ist die richtige Lösung e.

Quiz 17

Beispiele Drallsatz aufstellen:

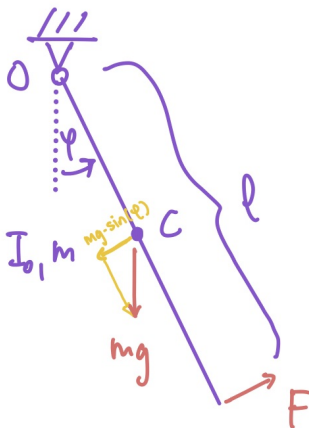
①



$$\dot{L}_C = I_C \ddot{\psi} = M_C = RF$$

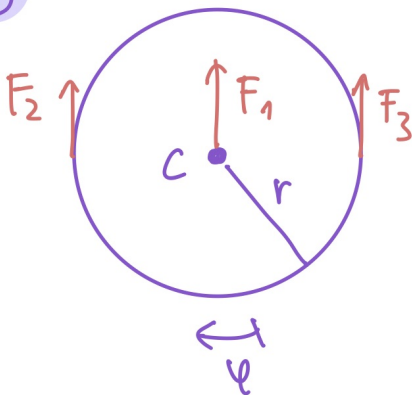
Drall und Moment in dieselbe Richtung positiv rechnen!

②



$$\dot{L}_O = I_O \ddot{\psi} = M_O = lF - \frac{l}{2} mg \sin(\psi)$$

③



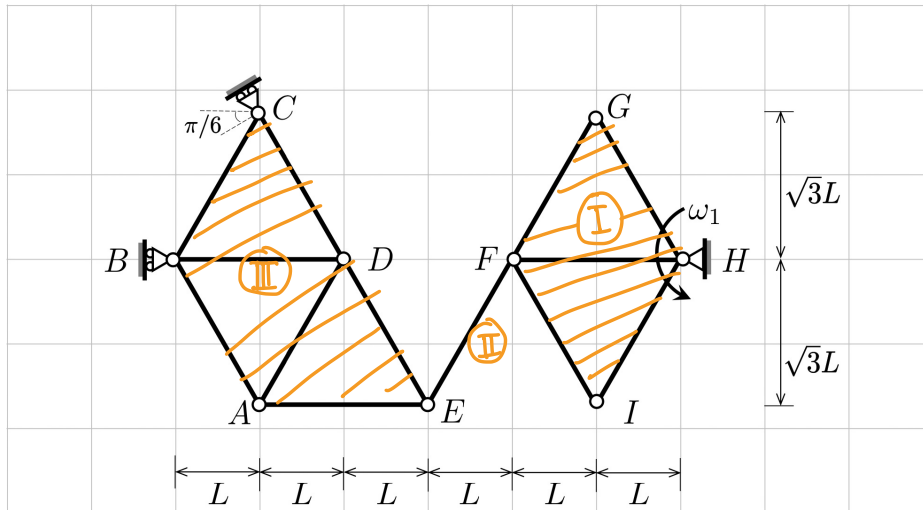
$$\dot{L}_C = I_C \ddot{\psi} = M_C = rF_2 - rF_3$$

Beispielaufgaben

Beispielaufgabe 1

Basisprüfung FS 2022, Aufgabe 1 (Rechenteil) (Subaufgaben 1, 2, 3)

Betrachten Sie das abgebildete Fachwerk, das aus masselosen, miteinander gelenkig verbundenen Stäben mit gegebener Länge $2L$ besteht. Alle Stäbe schliessen einen Winkel von $\pi/3$ ein. Im Punkt H ist das Fachwerk fest gelagert, im Punkt B ist es vertikal verschiebbar, während es im Punkt C durch ein verschiebbares Auflager gelagert ist, wobei es einen Winkel von $\pi/6$ mit der Horizontalen einschliesst. Die Winkelgeschwindigkeit ω_1 sei gegeben.



1. Berechnen Sie den Freiheitsgrad des Fachwerks (geben Sie die Anzahl der Körper und Bindungen genau an). [1 Punkt]

Lösung:

$$3 \text{ SK} \Rightarrow n = 3 \cdot 3 = 9$$

Bindungen: 2 Auflager: $b_1 = 2 \cdot 1 = 2$

2 Gelenke, die 2 SKs miteinander verbinden: $b_2 = 2 \cdot 2 = 4$

1 Festlager: $b_3 = 2$

$$\Rightarrow b = b_1 + b_2 + b_3 = 8$$

$$\Rightarrow f = n - b = 9 - 8 = 1$$

Lösung:

Der Stab muss zwischen E und I eingesetzt werden.

$\Rightarrow v_E$ müsste dann in die gezeigte Richtung zeigen.

$\hookrightarrow$ Der SolpG gibt uns allerdings, dass $v_E = 0$ sein muss (wegen der Richtung von v_C).

$\Rightarrow$ Somit ist $v_E = 0$ und v_E sowohl MZ von I als auch von II.

$\hookrightarrow$ Da I zwei Punkte mit Geschwindigkeit 0 besitzt, hat der gesamte SK I Geschwindigkeit 0

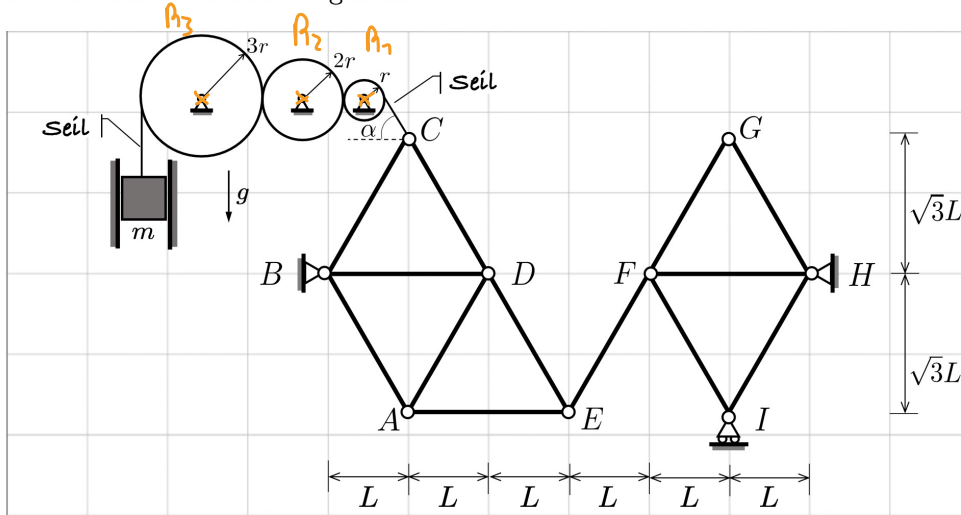
$\hookrightarrow$ Da die Richtung von v_B mit dem Auflager nicht vereinbar ist, hat auch SK II zwei Punkte mit Geschwindigkeit 0 und die gleiche Argumentation wie für I hält.

$\Rightarrow$ Somit ist das System blockiert, falls der Stab zwischen E und I eingebaut wird.

Beispielaufgabe 2

Basisprüfung FS 2022, Aufgabe 1 (Rechenteil) (Subaufgaben 4.5)

Betrachten Sie nun das geänderte System, das aus zwei Teilen besteht, nämlich aus einem Fachwerk und einer Gruppe von Rollen. In den Punkten B bzw. H ist das Fachwerk fest gelagert, während es in I horizontal verschiebbar gelagert ist. Im Punkt C ist es mit der Gruppe von Rollen durch ein Seil verbunden, wobei das Seil einen Winkel $\alpha = \pi/3$ mit der Horizontalen einschliesst. Dieses Teilsystem besteht aus drei masselosen Rollen mit Radius r , $2r$ bzw. $3r$. Eine dimensionslose Masse, die sich nur vertikal bewegen kann, ist über ein zweites Seil mit der grössten Rolle verbunden. Beide Seile sind dimensionslos und wickeln sich um die Rolle ohne zu gleiten.

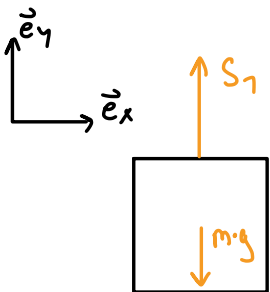


4. Finden Sie die Seilkraft, die im Punkt C auswirkt.
Hinweis: Betrachten Sie nur die Gruppe von Rollen.

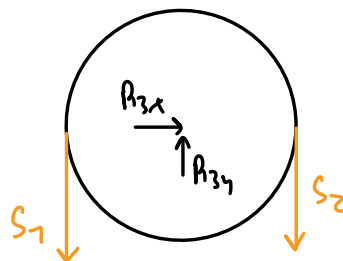
[1 Punkt]

Lösung:

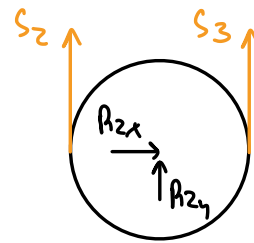
⇒ Freischneiden der Rollen und der Masse:



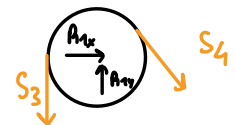
$$KB(y): S_1 = m \cdot g$$



$$MB(A_3, z) \Rightarrow S_1 = S_2$$



$$MB(A_2, z) \Rightarrow S_2 = S_3$$



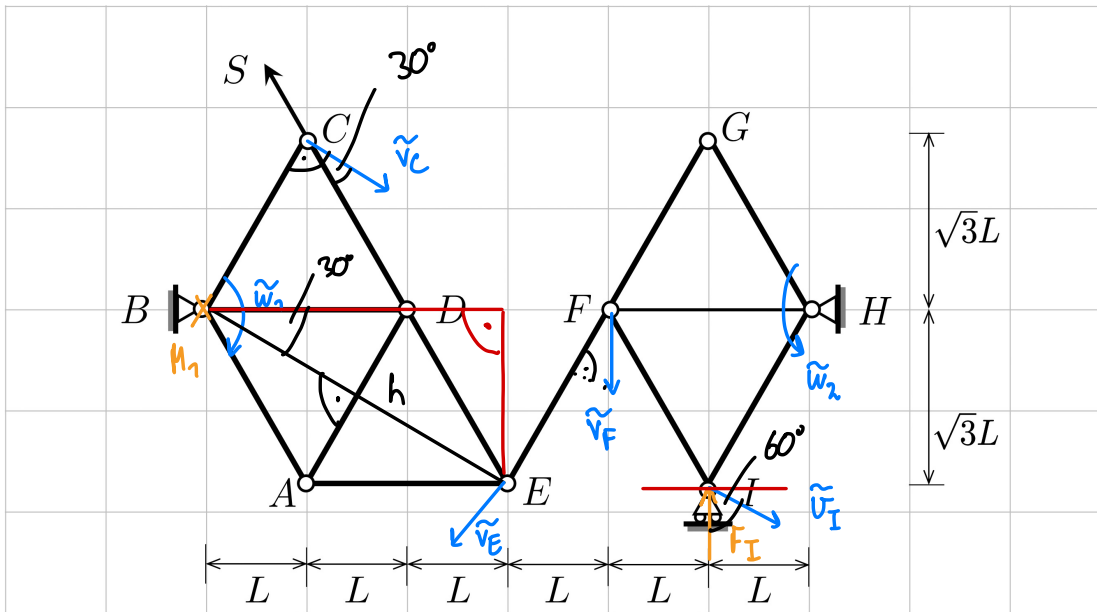
$$MB(A_1, z) \Rightarrow S_3 = S_4$$

$$\Rightarrow S := S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = m \cdot g \Rightarrow$$

Die Seilkraft, die in Punkt C wirkt, lautet: $S = m \cdot g$

5. Finden Sie die Reaktionskraft im Punkt I mit dem PdvL.

[2 Punkte]



Lösung:

⇒ Wir müssen einen virtuellen Bewegungszustand finden

↳ Sinnvoll, einen zulässigen virtuellen Bewegungszustand zu wählen: z.B.: Rotation um B mit Winkelgeschwindigkeit $\tilde{w}_1$

$$\Rightarrow \tilde{v}_c = 2L \cdot \tilde{w}_1 \Rightarrow \tilde{P}_S = -\cos(30^\circ) \cdot \tilde{v}_c \cdot S$$

$$\Rightarrow \cos(30^\circ) = \frac{3L}{h} \Rightarrow h = \frac{3L}{\cos(30^\circ)} \Rightarrow \tilde{v}_E = h \cdot \tilde{w}_1 = \frac{3L}{\cos(30^\circ)} \cdot \tilde{w}_1$$

$$\Rightarrow \text{Solgly: } \cos(30^\circ) = \frac{\tilde{v}_E}{\tilde{v}_F} \Rightarrow \tilde{v}_F = \frac{\tilde{v}_E}{\cos(30^\circ)} = \frac{3L}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \tilde{w}_1 = 4L \tilde{w}_1$$

$$\Rightarrow \tilde{v}_F = 2 \cdot L \cdot \tilde{w}_2 \Rightarrow \tilde{w}_2 = \frac{\tilde{v}_F}{2L} = 2 \cdot \tilde{w}_1$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \tilde{v}_I = 2L \cdot \tilde{w}_2 = 4L \tilde{w}_1 \\ \cos(60^\circ) = \frac{\tilde{v}_{I,y}}{\tilde{v}_I} \end{array} \right\} \Rightarrow P_I = -\tilde{v}_{I,y} \cdot F_I = -\cos(60^\circ) \cdot \tilde{v}_I \cdot F_I$$

$$\Rightarrow \text{PdvL: } \tilde{P}_{\text{tot}} \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow -\cos(60^\circ) \cdot \tilde{v}_I \cdot F_I - \cos(30^\circ) \cdot \tilde{v}_c \cdot S = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \cdot 4L \cdot \tilde{\omega}_p \cdot F_I - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2L \cdot \tilde{\omega}_p \cdot S = 0$$

$$F_I = -\frac{\sqrt{3} \cdot \lambda \cdot S}{2\lambda} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot S = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot mg$$

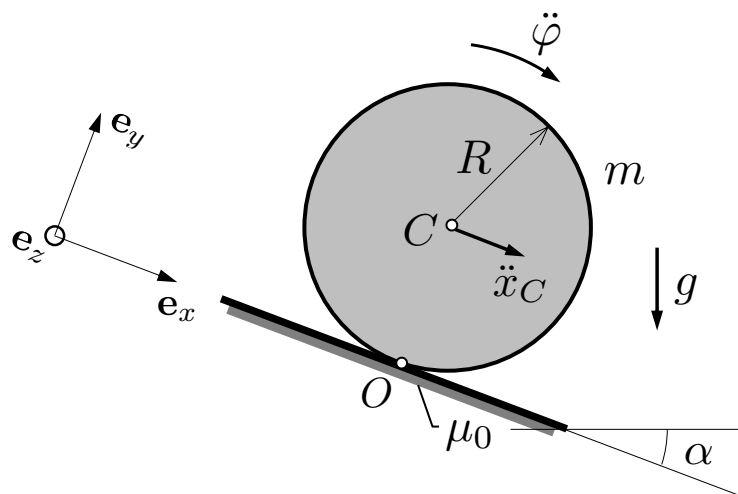
$$\Rightarrow \boxed{F_I = -\frac{\sqrt{3}}{2} mg}$$

Beispielaufgabe 3

– Basisprüfung HS22 Aufgabe 2 (Rechenteil)

[8 Punkte]

Betrachten Sie eine homogene Scheibe mit dem Radius R , der Masse m und dem Trägheitsmoment $I_C = \frac{1}{2}mR^2$ bezüglich ihres Schwerpunkts C . Die Scheibe rollt ohne zu gleiten auf einer schiefen Ebene mit dem Neigungswinkel α und Haftreibungskoeffizient μ_0 . Die Schwerkraft wirkt nach unten. Die Winkelbeschleunigung ist im Uhrzeigersinn als positiv angenommen, sodass $\ddot{x}_C = R\ddot{\varphi}$, wo $\ddot{x}_C$ die Beschleunigung des Schwerpunktes C ist.



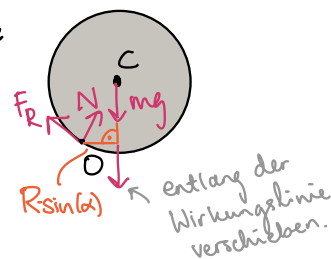
- Bestimmen Sie durch Anwendung des Drallsatzes bezüglich des Berührungspunktes O die Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}$ der Scheibe. [2 Punkte]

Lösung:

Drallsatz bezüglich Inertialpunkt O : $I_O \ddot{\varphi} = M_O^{\text{tot}}$

Freischnitt (für Momentberechnung):

$$M_O^{\text{tot}} = R \cdot \sin(\alpha) \cdot mg$$



Trägheitsmoment bezüglich O bestimmen:

aus Aufgabentext: $I_C = \frac{1}{2}mR^2$ (Wir wollen I_O !)

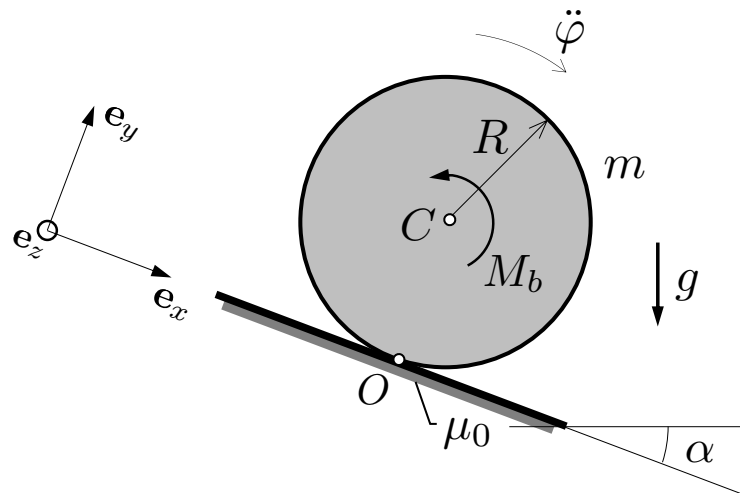
$$\begin{aligned} \text{Satz von Steiner: } I_O &= m \cdot r_{Oc}^2 + I_C \\ &= m \cdot R^2 + \frac{1}{2}mR^2 = \frac{3}{2}mR^2 \end{aligned}$$

Alles im Drallsatz einsetzen:

$$\frac{3}{2}mR^2 \ddot{\varphi} = R \cdot \sin(\alpha) \cdot mg$$

$$\text{Nach } \ddot{\varphi} \text{ auflösen: } \ddot{\varphi} = \frac{R \sin(\alpha) \cdot mg}{\frac{3}{2}mR^2} = \underline{\underline{\frac{2g \sin(\alpha)}{3R}}}$$

In den folgenden Teilaufgaben wirkt ein zusätzliches Bremsmoment $\mathbf{M}_b$ (bzw. $2\mathbf{M}_b$ für die Teilaufgaben 3, 4 und 5) auf die Scheibe. Das Bremsmoment greift im Punkt C an (siehe Skizze).



2. Bestimmen Sie das Moment $\mathbf{M}_b = M_b \mathbf{e}_z$, das auf die Scheibe ausgeübt werden muss, damit die Winkelgeschwindigkeit konstant bleibt. [1 Punkt]

Lösung:

Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ konstant heißt: $\ddot{\varphi} = 0$

Wir verwenden den in Teilaufgabe 1 aufgestellten Drallsatz:

$$I_O \ddot{\varphi} = M_O^{\text{tot}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} m R^2 \ddot{\varphi} = R \cdot \sin(\alpha) \cdot m g - M_b \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{M_b = R \cdot \sin(\alpha) \cdot m g}}$$

3. Das Bremsmoment wird nun auf $2M_b$ erhöht. Was ist die resultierende Winkelbeschleunigung? [1 Punkt]

Lösung:

Wir verwenden wieder unseren Drallsatz:

$$I_0 \ddot{\psi} = M_0^{\text{tot}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} m R^2 \ddot{\psi} = R \cdot \sin(\alpha) \cdot mg - 2M_b \quad / M_b = R \cdot \sin(\alpha) \cdot mg \text{ einsetzen.}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} m R^2 \ddot{\psi} = R \sin(\alpha) \cdot mg - 2 \cdot R \sin(\alpha) \cdot mg = -R \sin(\alpha) \cdot mg$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\psi} = - \frac{2}{3} \frac{g \sin(\alpha)}{R}$$

$\Rightarrow \dot{\psi}(0) = +\Omega_0$ (in gleiche Richtung positiv zählen!)

4. Betrachten Sie nun eine Anfangsgeschwindigkeit $\dot{\psi}(0) = -\Omega_0 \mathbf{e}_z$ und das in Teilaufgabe 3 eingeführte Bremsmoment $2M_b$. Wie lange dauert es, bis die Scheibe zum Stillstand kommt? [2 Punkte]

Lösung: Stillstand heißt: $\dot{\psi} = 0$ (keine Geschwindigkeit)

$$\text{Wir haben } \ddot{\psi} = - \frac{2}{3} \frac{g \sin(\alpha)}{R} \text{ (aus Teilaufgabe 3)}$$

Wir integrieren es ein Mal nach t um $\dot{\psi}$ zu erhalten:

$$\dot{\psi} = \int \ddot{\psi} dt = \int - \frac{2}{3} \frac{g \sin(\alpha)}{R} dt = - \frac{2}{3} \frac{g \sin(\alpha)}{R} t + C$$

mit der Anfangsbedingung $\dot{\psi}(0) = +\Omega_0$ erhalten wir:

$$\dot{\psi}(0) = C = \Omega_0$$

$$\text{Also haben wir } \dot{\psi}(t) = - \frac{2}{3} \frac{g \sin(\alpha)}{R} t + \Omega_0$$

Wir setzen das $\stackrel{!}{=} 0$ und lösen nach t auf, um den Zeitpunkt vom Stillstand zu bestimmen:

$$\dot{\psi}(t) = - \frac{2}{3} \frac{g \sin(\alpha)}{R} t + \Omega_0 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow t = \frac{3}{2} \frac{\Omega_0 R}{g \sin(\alpha)}$$

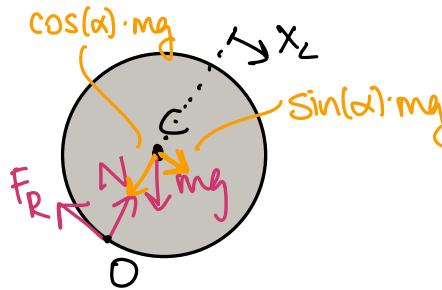
5. Wie lautet bei dem in Teilaufgabe 3 eingeführten Bremsmoment $2M_b$ die Bedingung für μ_0 (Haftreibungskoeffizient zwischen Scheibe und Ebene), damit Rollen ohne Gleiten gewährleistet ist? [2 Punkte]

Lösung:

- $M_b = R \cdot \sin(\alpha) \cdot mg$
- Rollen ohne gleiten: die Bedingung $\ddot{x}_C = R\ddot{\varphi}$ muss gelten!

Aus Teilaufgabe 3 haben wir $\ddot{\varphi} = -\frac{2}{3} \frac{g \sin(\alpha)}{R}$

Um $\ddot{x}_C$ zu bestimmen wenden wir den Newton'schen Bewegungsgesetz an: $m\ddot{x}_C = R$



$$m\ddot{x}_C = \sin(\alpha) \cdot mg - F_R$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x}_C = \sin(\alpha) \cdot g - \frac{F_R}{m}$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_C = \sin(\alpha) \cdot g - \frac{F_R}{m} \stackrel{!}{=} R\ddot{\varphi} = -\frac{2}{3} g \sin(\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \sin(\alpha) \cdot g - \frac{F_R}{m} \stackrel{!}{=} -\frac{2}{3} g \sin(\alpha)$$

$$\Leftrightarrow F_R = \frac{2}{3} mg \sin(\alpha) + mg \sin(\alpha) = \frac{5}{3} mg \sin(\alpha)$$

Aus der Haftreibungsgleichung $F_R \leq \mu_0 N$ erhalten wir schlussendlich:

$$\frac{5}{3} mg \sin(\alpha) \leq \mu_0 \cdot mg \cos(\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{\mu_0 \geq \frac{5}{3} \tan(\alpha)}}$$