ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

IMES
Institut für Mechanische Systeme

Technische Mechanik

Klausur II

22. November 2016, 08[15] - 09[15]

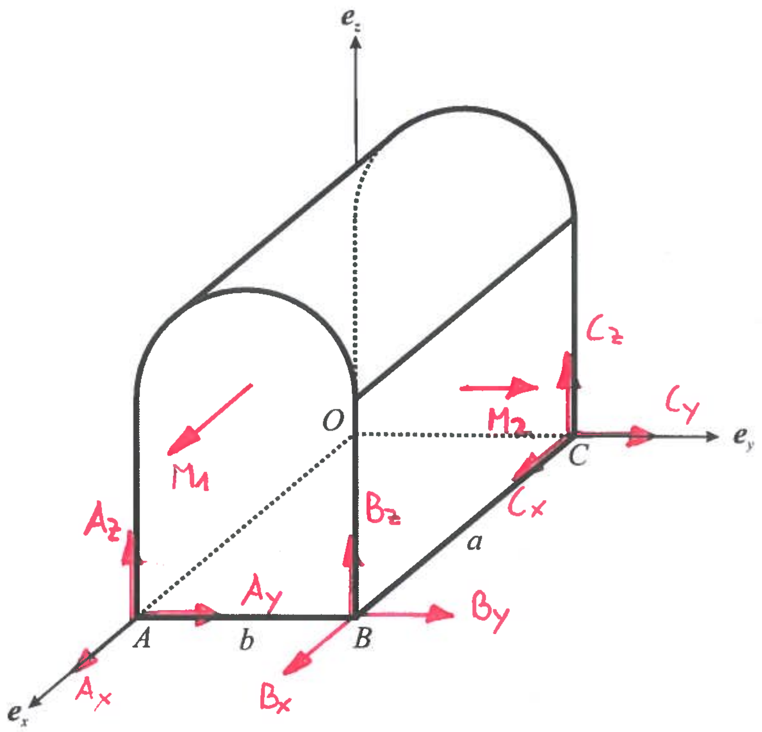
Dr. Stephan Kaufmann | Musterlösung | Herbstsemester 2016

Aufgabe 1

a) Ja, das System ist statisch unbestimmt gelagert. Es besitzt 9 unbekannte Lagerreaktionen denen nur 6 Gleichgewichtsbedingungen gegenüber stehen.

$①_1^{AR}$

b)



3 Lagerreaktionen in x- Richtung: $①_2^{AR}$

3 Lagerreaktionen in y- Richtung: $①_3^{AR}$

3 Lagerreaktionen in z- Richtung: $①_4^{AR}$

2 Momente in pos. x- Richtung und pos. y- Richtung: $①_5^{AR}$

c) $\underline{R} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} = \underline{0}$ 1_{6}^{KR}

$$\underline{M_A} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{0}$$ 1_{7}^{KR}

$$\underline{M_A} = \begin{pmatrix} b B_z \\ 0 \\ -b B_x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b C_z \\ a C_z \\ -a C_y - b C_x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{0}$$

Gleichgewichtsbedingungen für z-Komponenten:

(1): $b(B_z + C_z) = -M_1$

(2): $a C_z = -M_2 \quad \Leftrightarrow \quad C_z = -\frac{M_2}{a}$ 1_{8}^{AR}

(3): $A_z + B_z + C_z = 0$

(2) in (1): $B_z - \frac{M_2}{a} = -\frac{M_1}{b} \quad \Leftrightarrow \quad B_z = -\frac{M_1}{b} + \frac{M_2}{a}$ (4) 1_{9}^{AR}

(3) mit (2) und (4): $A_z = -B_z - C_z = \frac{M_1}{b} - \frac{M_2}{a} + \frac{M_2}{a} = \frac{M_1}{b}$ 1_{10}^{AR}

d) Nein, die Lagerreaktionen in x- und y-Richtung lassen sich nicht eindeutig bestimmen, da das System statisch unbestimmt ist. 1_{11}^{AR}

Punkteschlüssel:

Punkt		Bedingung
1	AR	stat. Bestimmtheit richtig, inkl. Begründung
2	AR	Lagerreaktionen in x-Richtung
3	AR	Lagerreaktionen in y-Richtung
4	AR	Lagerreaktionen in z-Richtung
5	AR	Momente M_1, M_2 in x- und y-Richtung
6	KR	Aufstellen und einsetzen in Resultierende
7	KR	Aufstellen und einsetzen in Momentenbedingung
8	AR	z-Komponente von C
9	AR	z-Komponente von B
10	AR	z-Komponente von A
11	AR	stat. Bestimmtheit richtig, inkl. Begründung

Technische Mechanik

Klausur II 22. November 2016, 08^{15} - 09^{15}

Dr. Stephan Kaufmann **Musterlösung** **Herbstsemester 2016**

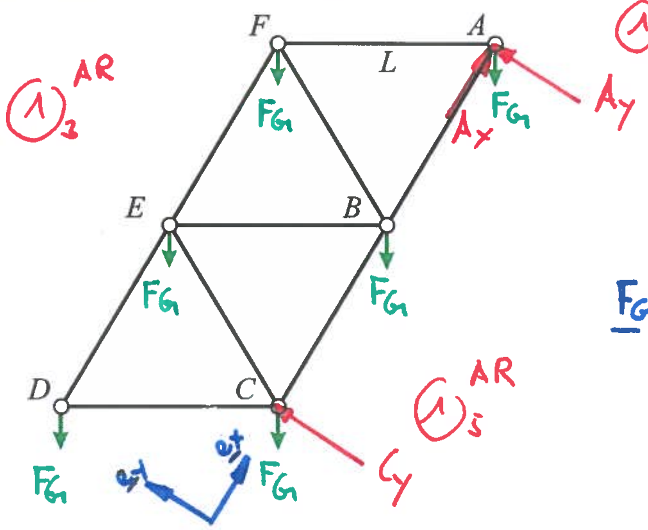
Aufgabe 2

a) Nein, das System ist nicht statisch unbestimmt gelagert. Die Anzahl unbekannter Lagerkräfte ist gleich gross wie die Anzahl der Gleichgewichtsbedingungen, welche linear unabhängig sind. $①_1^{AR}$

Nein, das System ist nicht kinematisch unbestimmt, da es sich nicht bewegen lässt ($f = 0$). $①_2^{AR}$

b)

$①_3^{AR}$ $①_4^{AR}$ $①_5^{AR}$



$$\underline{F_G} = F_G \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

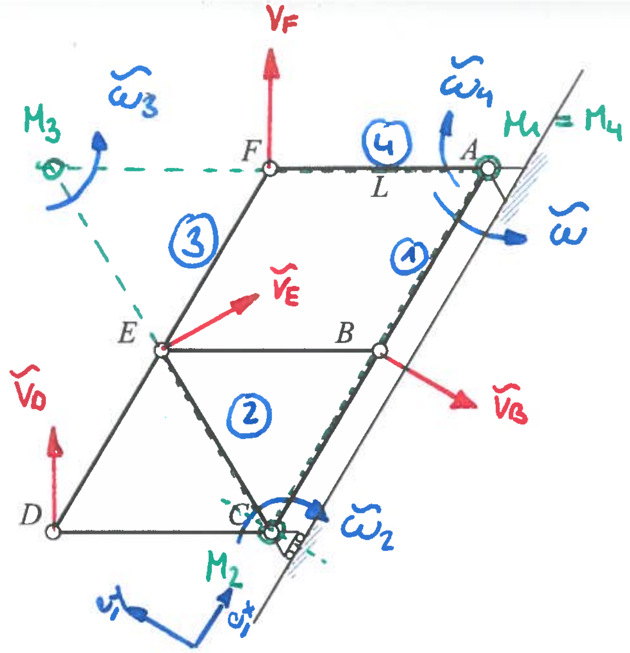
$$KB(x): \quad A_x - 6\frac{\sqrt{3}}{2}F_G = 0 \qquad ①_6^{KR}$$

$$KB(y): \quad A_y + C_y - 6\frac{F_G}{2} = 0 \qquad ①_7^{KR}$$

$$MB(A,z): \quad \frac{L}{2}F_G + LF_G + LF_G + \frac{3}{2}LF_G + 2LF_G - 2LC_y = 0 \qquad ①_8^{KR}$$

$$C_y = 3F_G, \quad A_x = 3\sqrt{3}F_G, \quad A_y = 3F_G - C_y = 0 \qquad ①_9^{AR}$$

c) * Kinematik:



$$\text{i) SvM: } A \to B \Rightarrow \breve{v}_B = \breve{\omega} L \;, \; \underline{\breve{v}}_B = \breve{\omega} L \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \;, \; \underline{\breve{v}}_A = \underline{0} \quad \text{AR } (1)_{10}$$

$$\text{ii) SvM: } B \to M_2 \Rightarrow \breve{v}_B = \breve{\omega}_2 L = \breve{\omega} L \Rightarrow \breve{\omega}_2 = \breve{\omega} \;, \; \underline{\breve{v}}_C = \underline{0} \quad (1)_{11}$$

$$\text{iii) SvM: } M_2 \to D \Rightarrow \underline{\breve{v}}_D = \breve{\omega} L \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \quad \text{KR } (1)_{12}$$

$$\text{iv) SvM: } M_2 \to E \Rightarrow \breve{v}_E = \breve{\omega} L \;, \; \underline{\breve{v}}_E = \breve{\omega} L \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \quad \text{KR } (1)_{13}$$

$$\text{v) SvM: } A \to F \Rightarrow \breve{v}_F = \breve{\omega}_4 L \;, \; \underline{\breve{v}}_F = \breve{\omega}_4 L \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \quad \text{AR } (1)_{14}$$

$$\text{vi) SvM: } E, F \to M_3 \Rightarrow \breve{v}_E = \breve{\omega}_3 L = \breve{\omega} L \Rightarrow \breve{\omega}_3 = \breve{\omega} \quad \text{AR } (1)_{15}$$

$$\text{vii) SvM: } M_3 \to F \Rightarrow \breve{v}_F = \breve{\omega}_3 L = \breve{\omega} L = \breve{\omega}_4 L \Rightarrow \breve{\omega}_4 = \breve{\omega}$$

Zusammengefasst:

$$\underline{\breve{v}}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;, \; \underline{\breve{v}}_B = \breve{\omega} L \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \;, \; \underline{\breve{v}}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\breve{v}}_D = \breve{\omega} L \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \;, \; \underline{\breve{v}}_E = \breve{\omega} L \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \;, \; \underline{\breve{v}}_F = \breve{\omega} L \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

* Kräfte:

$$\underline{F_G} = F_G \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$ ① 16 AR

$$\underline{S_B} = S \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

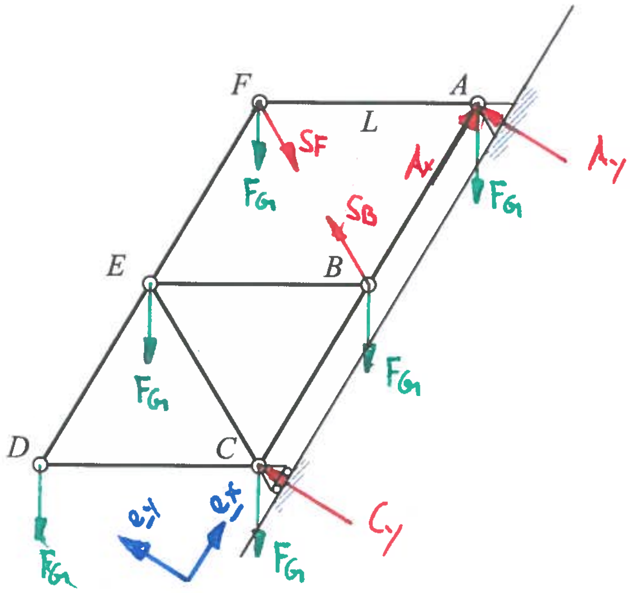
$$\underline{S_F} = S \begin{pmatrix} -1/2 \\ -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

$\}$ ① 17 AR

$$A_x = 3\sqrt{3}\, F_G$$

$$A_y = 0$$

$$C_y = 3F_G$$



* Anwenden PdvL: $\underline{\delta v_A} = \underline{\delta v_C} = \underline{0}$ ① 18 KR

$$\delta P = \underline{\delta v_B} \cdot \left(\underline{S_B} + \underline{F_G}\right) + \underline{\delta v_D} \cdot \underline{F_G} + \underline{\delta v_E} \cdot \underline{F_G} + \underline{\delta v_F}\left(\underline{S_F} + \underline{F_G}\right) = 0$$

$$\delta P = \cancel{\delta\varphi L}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S\frac{1}{2} - F_G\frac{\sqrt{3}}{2} \\ S\frac{\sqrt{3}}{2} - F_G/2 \end{pmatrix} + \cancel{\delta\varphi L}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -F_G\sqrt{3}/2 \\ -F_G 1/2 \end{pmatrix}$$

$$+ \cancel{\delta\varphi L}\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} F_G \\ -1/2\, F_G \end{pmatrix} + \cancel{\delta\varphi L}\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/2\, S - \sqrt{3}/2\, F_G \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} S - 1/2\, F_G \end{pmatrix} = 0$$

$$\delta P = -\frac{\sqrt{3}}{2} S + \frac{F_G}{2} - \frac{3}{4} F_G \cancel{- \frac{1}{4} F_G} - \frac{3}{4} F_G \cancel{+ \frac{1}{4} F_G} - \frac{\sqrt{3}}{4} S - \frac{3}{4} F_G - \frac{\sqrt{3}}{4} S - \frac{1}{4} F_G = \ldots$$ ① 19 KR

$$= -2F_G - \sqrt{3}\, S = 0$$

$$S = -\frac{2F_G}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} F_G$$ ① 20 AR

d) Der Stab BF ist auf <u>Druck</u> beansprucht, da beim Freischneiden die Stabkraft S als Zugkraft eingeführt wurde. $(S < 0)$ ① 21 AR

Punkt		Bedingung
1	AR	stat. Bestimmtheit richtig, inkl. Begründung
2	AR	kin. Bestimmtheit richtig, inkl. Begründung
3	AR	Alle Gewichtskräfte eingezeichnet
4	AR	Lagerkräfte im Punkt A
5	AR	Lagerkräfte im Punkt C
6	KR	KB (x)
7	KR	KB (y)
8	KR	MB
9	AR	Endergebniss A_x, A_y, C_y
10	AR	$\underline{\tilde{v}}_B$
11	AR	Momentanzentrum M_2 und $\tilde{\omega}_2$
12	KR	$\underline{\tilde{v}}_D$
13	KR	$\underline{\tilde{v}}_E$
14	AR	$\underline{\tilde{v}}_F$
15	AR	Momentanzentrum M_3 und $\tilde{\omega}_3$
16	AR	$\underline{\dot{F}}_G$
17	AR	Stabkräfte in den Punkten B und F
18	KR	Aufstellen PdvL
19	KR	Berechnung der Skalarprodukte
20	AR	Stabkraft Resultat
21	AR	Druckstab inkl. Begründung