Technische Mechanik
151-0223-10

- **Basisprüfung** -
Musterlösung

Dr. Paolo Tiso

07. Februar 2022

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

151-0223-10 Technische Mechanik
Basisprüfung 07.02.2022
Dr. Paolo Tiso

Antwortblatt

Nachname:

Vorname:

Legi-Nummer:

Musterlösung

Legi-Nummer

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Antworten

1.	●	B	C	D	E
2.	A	B	●	D	E
3.	A	B	●	D	E
4.	A	B	C	●	E
5.	A	●	C	D	E
6.	A	B	C	●	E
7.	●	B	C	D	E
8.	A	B	C	●	E
9.	●	B	C	D	E
10.	A	●	C	D	E
11.	A	B	C	D	●
12.	A	B	C	●	E
13.	A	B	●	D	E
14.	●	B	C	D	E
15.	A	B	C	D	●

<u>Wie man das Antwortblatt richtig ausfüllt:</u>

Ja:

~~A~~	B	C	D	E
A	●	C	D	E

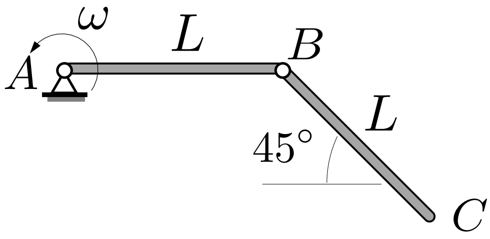
Nein

~~A~~	B	C	D	E
A	~~B~~	C	D	E

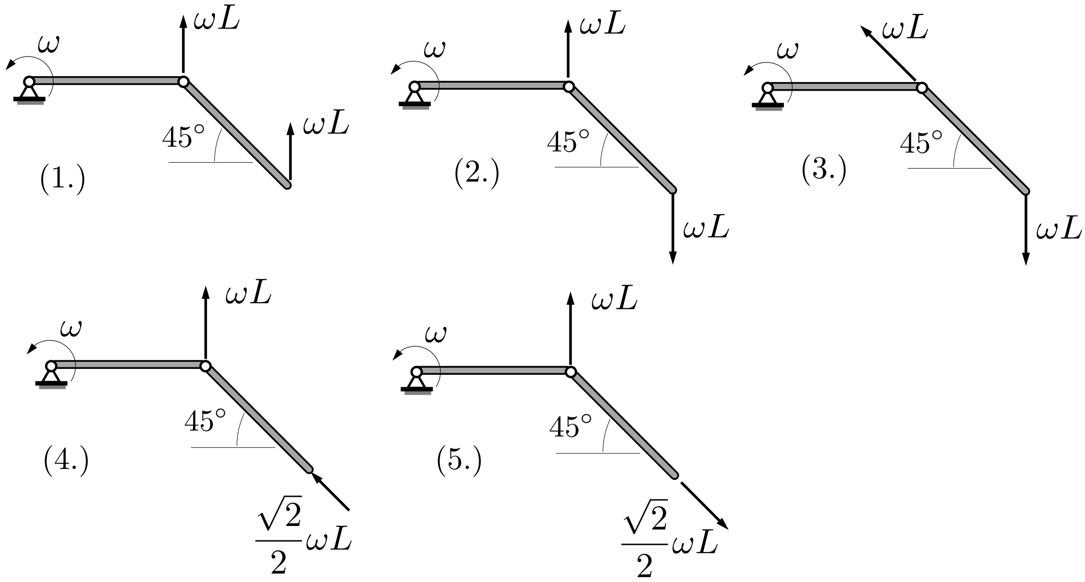
Diese Seite muss am Ende abgegeben werden!

Teil I - Multiple-Choice **(1 richtige Antwort)**

1. Das abgebildete System besteht aus zwei Stäben AB und BC von gleicher Länge L. Der Endpunkt A ist am Boden angelenkt, während AB und BC im Punkt B gelenkig verbunden sind. Im dargestellten Zeitpunkt ist AB horizontal gerichtet und rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω. Der Stab BC schliesst einen Winkel von 45° mit der Horizontalen ein.



Welche(r) der folgenden Fälle stellt/stellen mögliche korrekte Geschwindigkeitsvektoren von B und C dar? Alle Pfeile zeigen positive Richtungen an.



► (a) Nur 1. und 4.

(b) Alle.

(c) Nur 1.

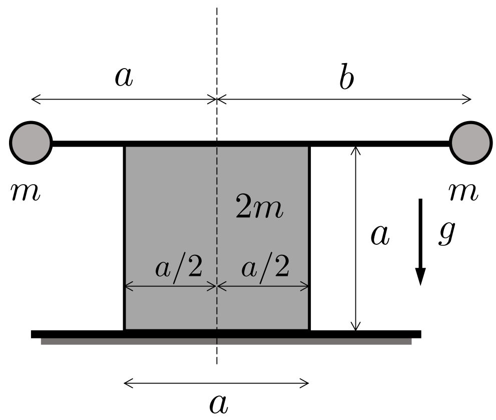
(d) Nur 1. und 5.

(e) Nur 2. und 3.

Lösung:

Es ist ersichtlich, dass (2.), (3.) und (5.) unmögliche Konfigurationen darstellen, da der SdpG nicht erfüllt wird.

2. Ein Block der Masse $2m$ mit den Seiten der Länge a liegt auf einem horizontalen, reibungsfreien Boden. Zwei gleiche Punktmassen m sind an der Oberseite des Blocks in den Abständen a bzw. b von der Mittellinie des Blocks starr befestigt, wie gezeigt. Die Schwerkraft g wirkt nach unten.



Was ist der maximale Wert für b, damit der Block nicht kippt?

(a) $b = \frac{3}{2}a$

(b) $b = a$

► (c) $b = 3a$

(d) $b = \frac{5}{2}a$

(e) $b = 2a$

Lösung:

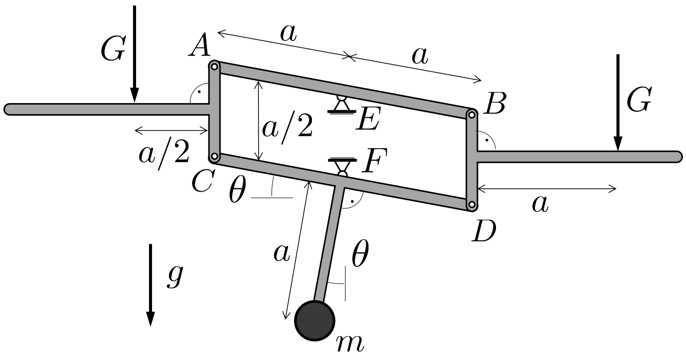
Schwerpunkt:

$$x_M = \frac{-am + bm}{4m} = \frac{b-a}{4} \tag{1}$$

Bedingung sodass der Körper nicht kippt:

$$x_M < \frac{a}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{b-a}{4} < \frac{a}{2} \quad \Rightarrow \quad b < 3a. \tag{2}$$

3. Die dargestellte parallele Waage besteht aus vier masselosen Elementen, die an den Punkten A, B, C und D angelenkt sind. Das System ist dann an den Punkten E und F am Boden angelenkt. Eine Punktmasse m ist im Abstand a vom Gelenk F am unteren Element starr befestigt. Zwei gleiche, nach unten wirkende Kräfte G werden im Abstand $a/2$ bzw. a auf die horizontalen Elemente ausgeübt. Die Schwerkraft g wirkt nach unten.



Wie gross ist der Winkel θ bei Gleichgewicht? (*Hinweis: Wenden Sie das PdvL an*)

(a) $\theta = \arcsin \frac{1}{2}$

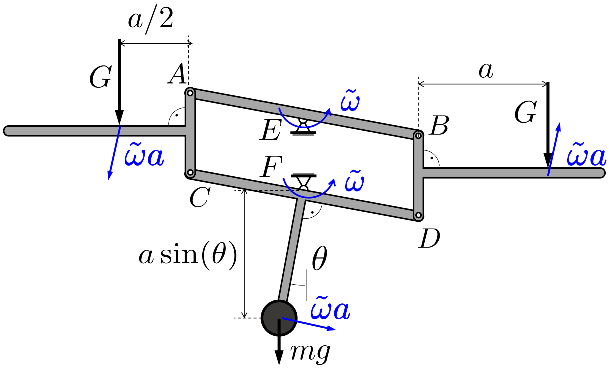
(b) $\theta = \arctan \frac{1}{4}$

► (c) $\theta = 0$

(d) $\theta = \arccos \frac{2}{3}$

(e) $\theta = \arccos \frac{1}{2}$

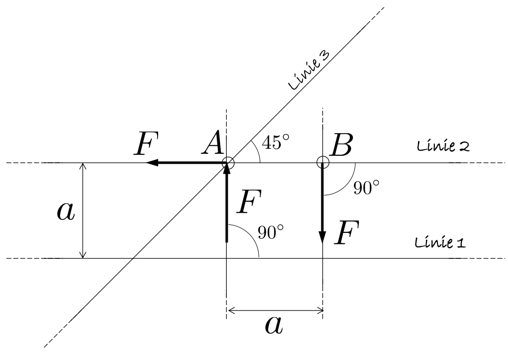
Lösung:



$$\tilde{P} = mga\sin\theta\tilde{\omega} + Ga\cos\theta\tilde{\omega} - Ga\cos\theta\tilde{\omega} = 0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow \quad \sin\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = 0. \quad (2)$$

4. Die gezeigte Kraftgruppe besteht aus drei Kräften gleiches Betrags F. Zwei dieser Kräfte wirken im Punkt A und die dritte im Punkt B, und sind wie gezeigt horizontal und vertikal ausgerichtet. Der Abstand zwischen den Punkten A und B wird mit a bezeichnet.



In Bezug auf welche(n) Punkt(e) ist die dargestellte Kraftgruppe eine Einzelkraft?

(a) Bezüglich aller Punkte auf der Linie 3.

(b) Bezüglich aller Punkte auf der Linie 2.

(c) Nur bezüglich B.

► (d) Bezüglich aller Punkte auf der Linie 1.

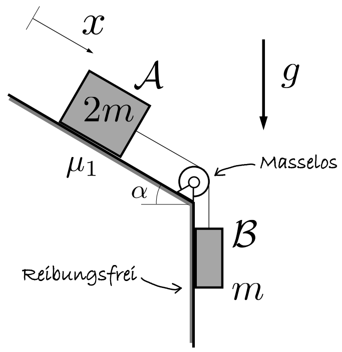
(e) Nur bezüglich A.

Lösung:

Die vertikale Kräfte sind gleich gross, zueinander parallel und entgegengesetzt, daher ein Kräftepaar, das ein Moment vom Betrag $M = Fa$ erzeugt, mit Richtung senkrecht zur Ebene. Da es sich in diesem Fall um ein ebenes Problem handelt, lässt sich die Kräftegruppe auf eine Einzelkraft reduzieren, in Bezug auf jeden Punkt, für den das Gesamtmoment gleich Null ist, also bezüglich allen Punkten, die einen Abstand a von der horizontalen Kraft haben, was der Linie 1 entspricht.

Bemerkung: Im allgemeinsten Fall kann eine Kräftegruppe auf eine Einzelkraft reduziert werden, falls $\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$ *und* $I_2 = \mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O = 0$. *In diesem Fall ist das Problem jedoch eben, daher lässt es sich in Bezug auf allen Punkte, für die das Gesamtmoment Null ist, auf eine Einzelkraft reduzieren (siehe Vorlesungsfolien 6, Folie 11). Wir haben festgestellt, dass sich die Frage als mehrdeutig erweisen könnte und das bei der Korrektur berücksichtigt.*

5. Ein Block $\mathcal{A}$ der Masse $2m$ gleitet auf einer schiefen, rauen Ebene mit dem Gleitreibungskoeffizienten μ_1 und dem Neigungswinkel α. Der Block $\mathcal{A}$ ist mit einem zweiten Block $\mathcal{B}$ der Masse m durch ein masseloses, nicht dehnbares Seil verbunden. Das Seil ist, wie gezeigt, auf eine masselose Rolle gewickelt. Der Block $\mathcal{B}$ gleitet auf einer vertikalen, reibungsfreien Wand. Die Schwerkraft wirkt nach unten. Die Koordinate x gibt die Lage von $\mathcal{A}$ auf der schiefen Ebene an.



Wie gross ist die Beschleunigung $\ddot{x}$?

(a) $\ddot{x} = \dfrac{g(1 + \mu_1 \cos\alpha + \sin\alpha)}{3}$

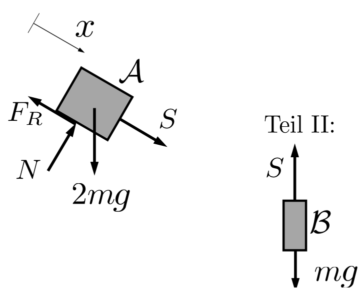
► (b) $\ddot{x} = \dfrac{g(1 - 2\mu_1 \cos\alpha + 2\sin\alpha)}{3}$

(c) $\ddot{x} = \dfrac{g(1 + 2\sin\alpha)}{2}$

(d) $\ddot{x} = \dfrac{g(1 - 2\mu_1 \sin\alpha + 2\cos\alpha)}{3}$

(e) $\ddot{x} = \dfrac{g(1 - \mu_1 \cos\alpha)}{3}$

Lösung:



Teil I:

$$2m\ddot{x} = S + 2mg\sin\alpha - \mu_1 N \tag{1}$$

$$N = 2mg\cos\alpha \tag{2}$$

Teil II:

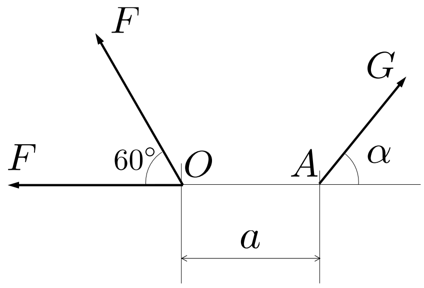
$$m\ddot{x} = mg - S \quad \Rightarrow \quad S = m(g - \ddot{x}) \tag{3}$$

In (1) einsetzen:

$$2m\ddot{x} = m(g - \ddot{x}) + 2mg\sin\alpha - \mu_1 2mg\cos\alpha \tag{4}$$

$$2\ddot{x} + \ddot{x} = g(1 - 2\mu_1\cos\alpha + 2\sin\alpha) \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = \frac{g(1 - 2\mu_1\cos\alpha + 2\sin\alpha)}{3}. \tag{5}$$

6. Die dargestellte Kräftegruppe besteht aus drei Kräften. Zwei Kräfte wirken im Punkt O, haben den gleichen Betrag F und ihre Wirkungslinien umschliessen einen Winkel von 60°, wie dargestellt. Eine dritte Kraft von Betrag G wirkt auf den Punkt A, der in einem horizontalen Abstand a von O liegt. Der von G eingeschlossene Winkel gegenüber der Horizontalrichtung ist mit α bezeichnet.



Was sind die Werte von G und α, so dass die resultierende Kraft gleich Null ist?

(a) $G = Fa,\ \alpha = -\pi/6$

(b) $G = \sqrt{3}Fa,\ \alpha = -\pi/3$

(c) $G = F,\ \alpha = -\pi/3$

► (d) $G = \sqrt{3}F,\ \alpha = -\pi/6$

(e) $G = \sqrt{3}F,\ \alpha = 0$

Lösung:

x-Richtung:

$$F + F\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - G\cos\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad G = \frac{3F}{2\cos\alpha} \tag{1}$$

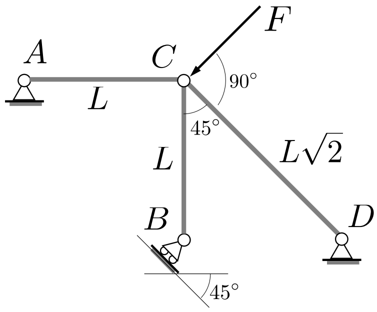
y-Richtung:

$$G\sin\alpha + F\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \tag{2}$$

$$\frac{3}{2}F\tan\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}F = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\frac{\pi}{6} \tag{3}$$

$$G = \frac{3F}{2\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3}F. \tag{4}$$

7. Das dargestellte Fachwerk besteht aus drei Stäben AC, CB und CD, der Länge L, bzw. L und $\sqrt{2}L$. Die Stäbe sind an ihren Spitzen im Punkt C angelenkt. Die Bindungen an den Punkten A und D sind drehbare Gelenke, während sich Punkt B auf einer schiefen Ebene mit einem Neigungswinkel von 45° bewegen kann, wie gezeigt. Am Punkt C wirkt eine Kraft F, die orthogonal zu CD steht.



Was ist der Betrag S_{CB} der inneren Kraft vom Stab CB?

► (a) $S_{CB} = 0$

(b) $S_{CB} = \dfrac{F}{\sqrt{2}}$

(c) $S_{CB} = 2F$

(d) $S_{CB} = \dfrac{F}{2}$

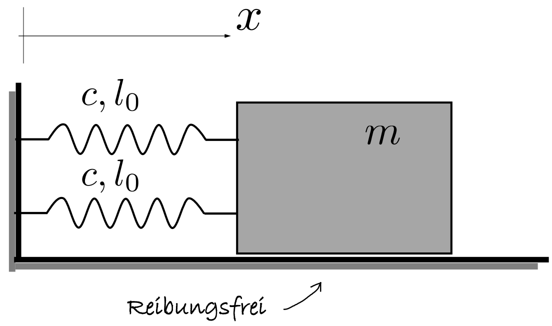
(e) $S_{CB} = \dfrac{4F}{\sqrt{3}}$

Lösung:

Aus den Komponentenbedingungen von Punkt B können wir bemerken, dass S_{BC} gerade Null ist, da die Reaktionskraft des Auflagers B nur auf einer Linie wirken kann, die um 45° ausgerichtet ist.

Alternativ kann man feststellen, dass die Stäbe AC und CD eine Struktur bilden, die sich nicht bewegen kann. Die gesamte Last F wird von AC und CD getragen, daher ist BC ein Nullstab.

8. Ein Block der Masse m ist durch zwei Federn mit Elastizitätskonstante c und ungedehnten Länge l_0 an einer Wand befestigt und gleitet auf einer horizontalen, reibungsfreien Ebene. Bezeichnen Sie mit x die Position der Masse.



Wie lautet die Bewegungsgleichung des Systems?

(a) $m\ddot{x} - cx = l_0$

(b) $2m\ddot{x} + cx = 0$

(c) $m\ddot{x} - 2cx = 0$

► (d) $m\ddot{x} + 2cx = 2cl_0$

(e) $m\ddot{x} + cx = cl_0$

Lösung:

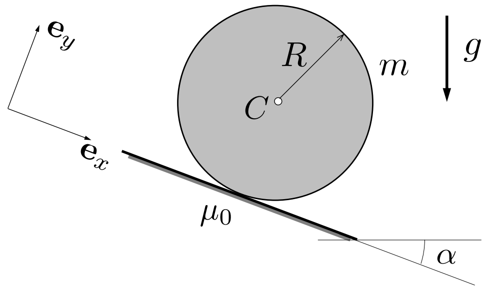
Die Federkraft ist

$$F_{Feder} = -c\Delta x = -c(x - l_0). \tag{1}$$

Da wir zwei Feder haben, der Impulssatz kann gerade geschrieben werden als

$$\Rightarrow \quad m\ddot{x} = -2cx + 2cl_0. \tag{2}$$

9. Eine homogene Scheibe der Masse m und des Radius R rollt ohne zu gleiten auf einer schiefen Ebene mit dem Neigungswinkel α. Die Scheibe wird aus der Ruhelage gelöst und bewegt sich unter der Wirkung der Schwerkraft g nach unten. Der Haftreibungskoeffizient zwischen der Ebene und der Scheibe ist μ_0.



Was ist der minimale Wert von μ_0, damit Rollen ohne Gleiten gewährleistet ist?

► (a) $\mu_0 = \frac{1}{3}\tan\alpha$

(b) $\mu_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\tan\alpha$

(c) $\mu_0 = 1$

(d) $\mu_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\alpha$

(e) $\mu_0 = \frac{1}{2}\cos\alpha$

Lösung:

Der Drallsatz bezüglich dem Berührungspunkt O wischen Scheibe und Ebene ist

$$I_O\ddot{\theta} = \sum M_O. \tag{1}$$

Setzen wir $\ddot{\theta} = \frac{\ddot{x}}{R}$ und $M_O = mgR\sin\alpha$ ein, so erhalten wir

$$I_O\ddot{x} = mgR^2\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = \frac{mgR^2\sin\alpha}{I_O}. \tag{2}$$

Mit $I_O = \frac{3}{2}mR^2$ ergibt sich

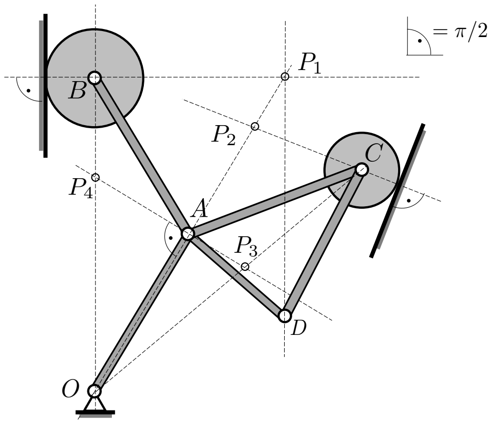
$$m\ddot{x} = \frac{2}{3}mg\sin\alpha. \tag{3}$$

$$\textit{x-Richtung}: \qquad m\ddot{x} = mg\sin\alpha - F_R \quad \Rightarrow \quad F_R = \frac{1}{3}mg\sin\alpha \tag{4}$$

$$\textit{y-Richtung}: \qquad 0 = -mg\cos\alpha + N \quad \Rightarrow \quad N = mg\cos\alpha \tag{5}$$

$$F_R \leq \mu_0 N \quad \Rightarrow \quad \mu_0 \geq \frac{1}{3}\tan\alpha. \tag{6}$$

10. Das gezeigte System besteht aus fünf Stäben und zwei Scheiben, die gelenkig miteinander verbunden sind, wie abgebildet. Die beiden Scheiben rollen ohne zu gleiten auf den entsprechenden festen Wänden.



Was ist das Momentanzentrum des Stabes CD?

(a) P_1

► (b) P_2

(c) P_3

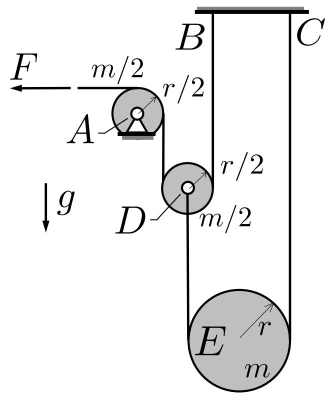
(d) P_4

(e) D

Lösung:

Die Stäbe AC, AD, CD bilden einen starrer Körper, daher ist P_2 das Momentanzentrum.

11. Das dargestellte System besteht aus drei Rollen mit den Radien r und $r/2$, und Masse $m/2$ und m, die durch undehnbare Seile verbunden sind. Die Seile sind um die Rollen gewickelt und rutschen nicht. Die obere Rolle ist in ihrem Mittelpunkt A gelenkig gelagert, während die Seile in den Punkten B und C an der Decke befestigt sind. Die Schwerkraft g wirkt nach unten.



Wie gross ist der Betrag der Kraft F, die auf das Seil ausgeübt werden muss, so dass das Gleichgewicht erfüllt ist?

(a) $F = 2mg$

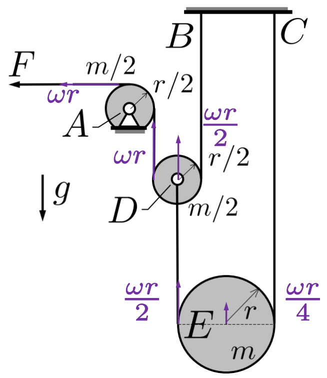
(b) $F = mg$

(c) $F = \dfrac{mg}{4}$

(d) $F = \dfrac{mg}{3}$

▶ (e) $F = \dfrac{mg}{2}$

Lösung:



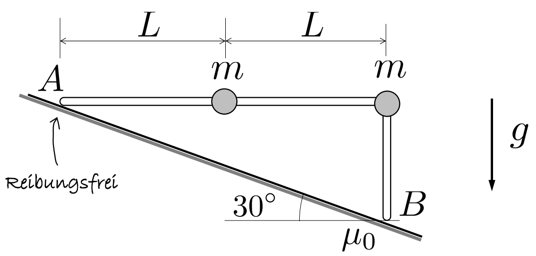
Wir benutzen den PdvL auf dem ganzen System und finden

$$\tilde{P}_{tot} = F\omega r - mg\frac{\omega r}{4} - \frac{\omega r}{2}\frac{mg}{2} = 0 \tag{1}$$

Daraus finden wir

$$F = \frac{mg}{2}. \tag{2}$$

12. Zwei Punktmassen gleicher Masse m sind wie gezeigt an einem starren, masselosen Rahmen befestigt. Der Rahmen liegt auf einer schiefen Ebene mit einem Neigungswinkel von 30°. Im Punkt A ist der Kontakt reibungsfrei, während der Kontakt im Punkt B einen Haftreibungskoeffizienten von μ_0 hat. Die Schwerkraft wirkt nach unten.



Was ist der minimale Wert von μ_0, um das Gleichgewicht zu erzwingen?

(a) $\mu_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

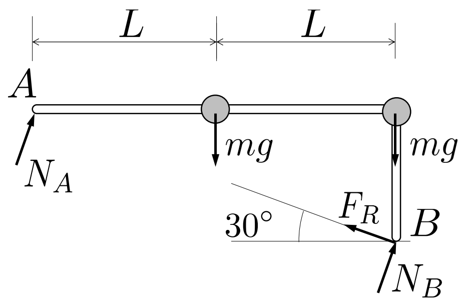
(b) $\mu_0 = \frac{1}{2}$

(c) $\mu_0 = \frac{2}{3\sqrt{3}}$

► (d) $\mu_0 = \frac{4}{3\sqrt{3}}$

(e) $\mu_0 = 0$

Lösung:



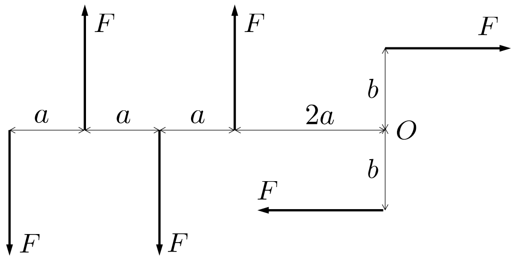
$$|F_R| \leq \mu_0 |N_B| \tag{1}$$

$$F_R = -2mg\sin(30°) = -mg \tag{2}$$

$$\begin{aligned} MB(A): \quad & N_B \frac{2L}{\cos(30°)} - mgL - mg2L = 0 \\ & N_B = \frac{3mg\cos(30°)}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}mg \end{aligned} \tag{3}$$

$$mg \leq \mu_0 \frac{3\sqrt{3}}{4} mg \quad \Rightarrow \quad \mu_{min} = \frac{4}{3\sqrt{3}}. \tag{4}$$

13. Betrachten Sie die abgebildete ebene Kräftegruppe. Alle Kräfte haben den gleichen Betrag F und sind entweder in horizontaler oder vertikaler Richtung gerichtet, wie gezeigt. Die Abstände zwischen ihren Angriffspunkten sind aus der Figur zu entnehmen.



Unter welcher Bedingung ist die Dyname $\mathcal{D}$ im Bezug auf Punkt O $\mathcal{D} = \{\mathbf{0}, \mathbf{0}\}$?

(a) $b = 0$

(b) $b = 4a$

► (c) $b = a$

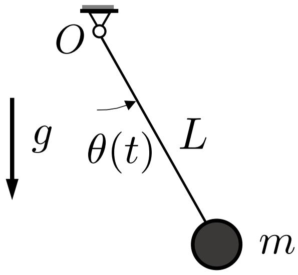
(d) $b = \frac{a}{2}$

(e) $b = 2a$

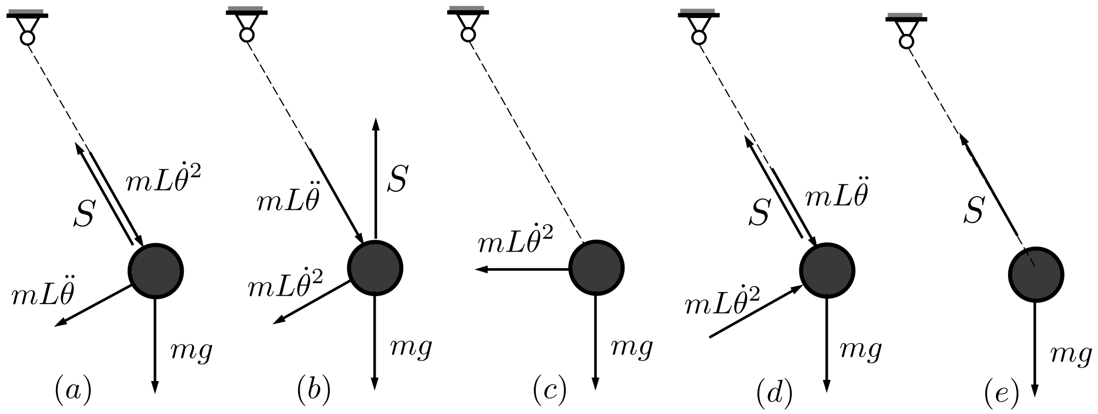
Lösung:

$$MB(O,z): \quad (-2bF - 2aF + 3aF - 4aF + 5aF) = 0$$
$$2b = 2a \quad \Rightarrow \quad b = a. \tag{1}$$

14. Das dargestellte Pendel besteht aus einer Punktmasse m, die an einem nicht dehnbaren, masselosen Seil der Länge L an einem festen Punkt O hängt. Die Bewegung des Pendels wird mit dem Winkel $\theta(t)$ bezeichnet. Das Pendel erhält beliebige Anfangsbedingungen und schwingt unter der Wirkung der Schwerkraft g.



Der Betrag der Seilkraft ist mit S bezeichnet. Welche der folgenden Abbildungen stellt die auf die Masse wirkenden äusseren Kräfte und Trägheitskräfte richtig dar?



► (a)

(b)

(c)

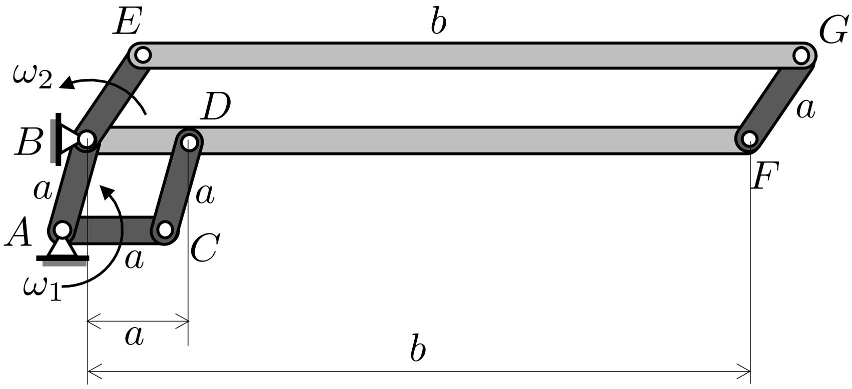
(d)

(e)

Lösung:

Abbildung (a) ist die einzige Möglichkeit, wo die Trägheitskrafte in radialer bzw. tangentialer Richtung $F_r = mL\dot{\theta}^2$ und $F_t = mL\ddot{\theta}$ richtig eingezeichnet sind.

15. Das dargestellte ebene System besteht aus fünf Stäben der Länge a (dunkel dargestellt) bzw. zwei Stäbe der Länge b (hell dargestellt). Alle Stäbe sind miteinander gelenkig verbunden. Das System ist dann an den Punkten A und B am Boden gelagert. Betrachten Sie zwei Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2, die auf die Stäbe AC bzw. BE wirken, und bezeichnen Sie mit $\mathbf{v}_P$ den Geschwindigkeitsvektor eines beliebigen Punktes P des Systems.



Welche der folgenden Aussagen ist *nicht* richtig?

(a) $|\mathbf{v}_F| = \omega_1 b$

(b) $|\mathbf{v}_D| = \omega_1 a$

(c) $\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_D$

(d) $|\mathbf{v}_E| = \omega_2 a$

► (e) $\mathbf{v}_F = \mathbf{v}_G$

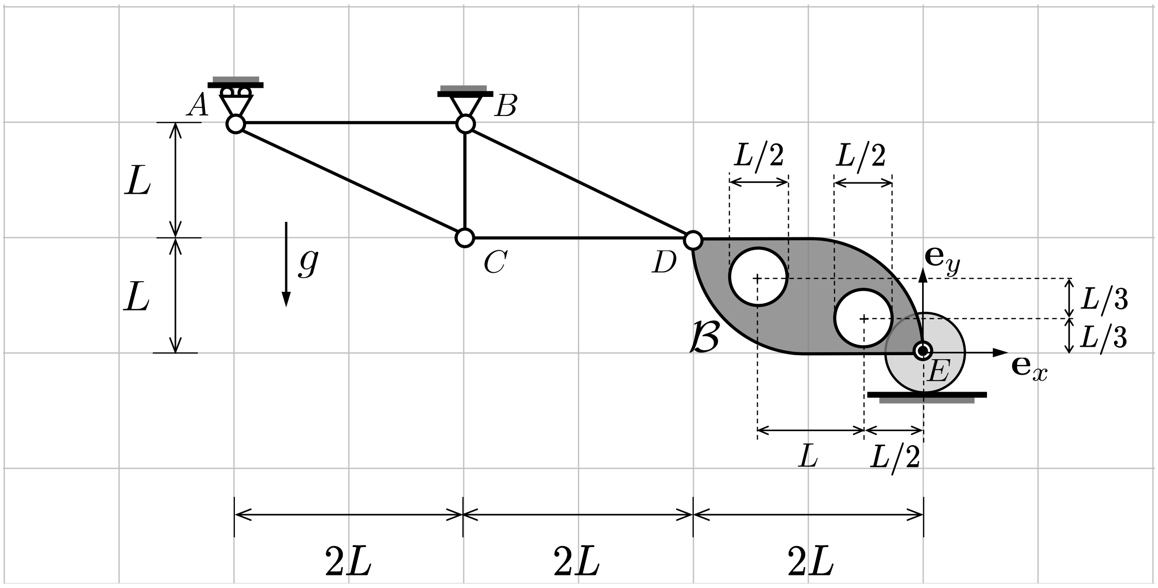
Lösung:

Aus der Parallelogrammregel wissen wir, dass BF die gleiche Winkelgeschwindigkeit wie AC hat (ω_1), ausserdem bewegen sich die Punkte A und B nicht. Daraus kann man die Geschwindigkeiten an allen Gelenkpunkten erschliessen, wobei alle Aussagen ausser (e) richtig sind.

Teil II - Rechenteil

AUFGABE 1. *[7 Punkte]*

Betrachten Sie das abgebildete System, das aus masselosen, miteinander gelenkig verbundenen Stäben mit gegebener Länge besteht. Im Punkt B ist das System fest gelagert, während es in A horizontal verschiebbar gelagert ist. Im Punkt D sind die Stäbe mit einem starren Körper von homogener Dichte $\rho = 2m/(L^2\pi)$ [kg/m^2] verbunden, wobei m ein gegebener Kennwert mit der Einheit [kg] ist. Der Körper besteht aus zwei zusammengesetzten Viertelkreisen mit dem Radius L, und hat zwei Löcher mit dem Radius $L/4$, deren Mittelpunkte bei $(-L/2, L/3)$ bzw. $(-3/2L, 2/3L)$ liegen. Zusätzlich ist er im Punkt E mit einem homogenen, masselosen Rad gelenkig verbunden, das auf der gezeichneten Ebene rollt ohne zu gleiten. Die Schwerkraft g wirkt nach unten, wie gezeigt.



1. Berechnen Sie den Freiheitsgrad des Systems (geben Sie die Anzahl der Körper und Bindungen genau an). *[1 Punkt]*

3 Körper: $ABCD$. $\mathcal{B}$ und das Rad

$$n = 3 \cdot 3 = 9; \tag{1}$$

Bindungen:

$$b = 2 \cdot 4 + 1 = 9 \tag{2}$$

Das System hat den Freiheitsgrad

$$f = n - b = 0. \tag{3}$$

Alternativ: der Kreis ist mit einer Auflage vergleichbar. Deshalb haben wir 2 Körper und 6 Bindungen (1 in A, 2 in B, 2 in D und 1 in E). $f = 6 - 6 = 0$.

2. Zeigen Sie, dass die Masse und Schwerpunkt vom Körper $\mathcal{B}$ sind

$$M = \frac{3}{4}m; \qquad (x_s,\ y_s) = (-L,\ \frac{L}{2})$$

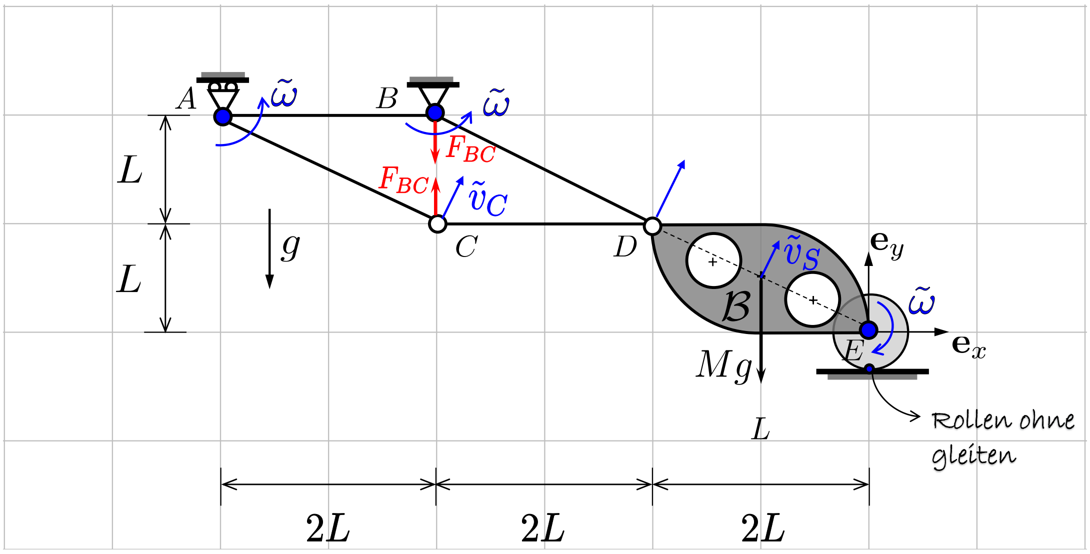
Hinwies: Sie dürfen Ihre Antwort mit Symmetrien begründen. *[2 Punkte]*

$$A = \frac{l^2\pi}{2} - 2\left(\frac{l}{4}\right)^2\pi = \frac{3}{8}l^2\pi \tag{4}$$

$$M = A\rho = \frac{3}{4}m \qquad \text{mit} \qquad \rho = 2m/(L^2\pi). \tag{5}$$

Der Körper ist deutlich punktsymmetrisch, daher liegt seiner Schwerpunkt genau in der Mitte.

3. Finden Sie die Stabkraft BC und geben Sie an, ob es sich um eine Zug- oder Druckstab handelt. (*Hinweis: Benutzen Sie den PdvL.)* *[2 Punkte]*



Virtuelle Rotationsgeschwindigkeit $\tilde{\omega}$ im Punkt B einführen (siehe Skizze). Demzufolge muss auch der Punkt A unbeweglich bleiben (SdpG) und wir finden die Geschwindigkeit im C als

$$\tilde{\mathbf{v}}_C = \begin{pmatrix} L\tilde{\omega} \\ 2L\tilde{\omega} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Die Geschwindigkeit im Punkt D ist (Parallelogrammregel)

$$\tilde{\mathbf{v}}_D = \tilde{\mathbf{v}}_C \tag{7}$$

und steht also senkrecht zu BD (und folglich zu DE) . Wir wissen, dass das Rad ohne zu gleiten rollt, also ist die Geschwindigkeit im Berührungspunkt gleich Null. Aus dem SdpG folgt, dass $\tilde{\mathbf{v}}_E = \mathbf{0}$, und somit steht die Geschwindigkeit $\tilde{\mathbf{v}}_S$ des Schwerpunkts von Körper $\mathcal{B}$ auch senkrecht zu DE. Da der Schwerpunkt genau in der Mitte zwischen D und E liegt, lässt sich seine Geschwindigkeit leicht ermitteln:

$$\tilde{\mathbf{v}}_S = \begin{pmatrix} \frac{L}{2}\tilde{\omega} \\ L\tilde{\omega} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Jetzt können wir den PdvL anwenden als

$$\tilde{P} = -L\tilde{\omega}\frac{3}{4}mg + 2L\tilde{\omega}F_{BC} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{BC} = \frac{3}{8}mg; \quad \text{Zugkraft.} \tag{9}$$

4. Geben Sie die Reaktionskräfte im Punkt E vektoriell an. *[2 Punkte]*

Resultante x-Richtung für das Rad:

$$E_x = 0 \tag{10}$$

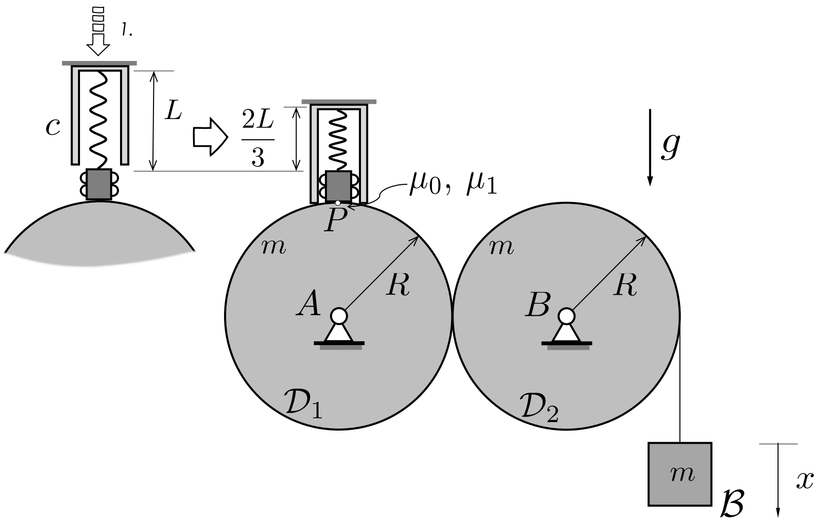
Moment bezüglich D für den homogenen Körper:

$$MB(D,z): \qquad 2LE_y - \frac{3}{4}Lmg = 0 \tag{11}$$

$$E_y = \frac{3}{8}mg \tag{12}$$

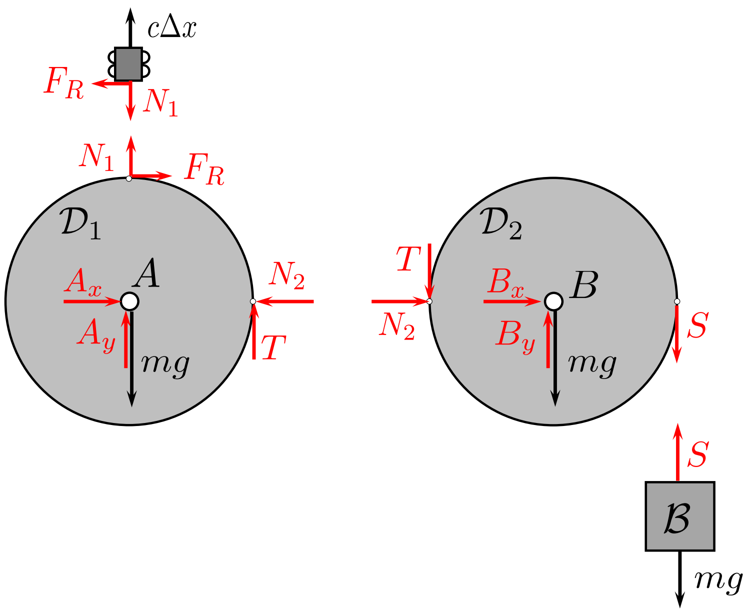
Aufgabe 2. *[8 Punkte]*

Das abgebildete ebene System besteht aus zwei Kreisscheiben $\mathcal{D}_1$ und $\mathcal{D}_2$ mit Radius R und Masse m, deren Mittelpunkten A bzw. B gelenkig gelagert sind. Die Scheiben berühren sich und sind wie zwei Zahnräder verbunden, d.h. es kein gleiten kann zwischen die Scheiben passieren. Über $\mathcal{D}_2$ wird ein masseloses, undehnbares Seil geführt, an dessen Ende ein Block von Masse m befestigt ist. Zudem befindet sich $\mathcal{D}_1$ in Kontakt mit einem masselosen beweglichen Block, der mit einer Feder mit der elastischen Konstante c verbunden ist. Die Feder ist so zusammengedrückt, dass sie eine Länge von $\frac{2}{3}L$ hat, wobei die ungedehnte Länge der Feder L beträgt. Der Scheibe $\mathcal{D}_1$ und der masselose Block berühren sich mit dem gegebenen Haftreibungskoeffizient μ_0 und Gleitreibungskoeffizient μ_1. Die Schwerkraft g wirkt nach unten.



1. Schneiden Sie das System frei und führen Sie alle Reaktionskräfte in der folgenden Abbildung ein. *[1 Punkte]*

   Hinweis: Beim oberen Block sind nur die Reaktionskräfte bezüglich das Rad nötig (Interaktion zwischen Block, Feder und Halterung kann vernachlässigt werden).



2. Wie gross muss die Federkonstante c_0 mindestens sein, damit das System in Ruhe bleibt? *[2 Punkte]*

Haftreibungsgesetz:

$$F_R \leq \mu_0 N_1 \tag{1}$$

Resultante in y-Richtung für den masselosen Block:

$$N_1 = c_0 \Delta x = c_0 \frac{L}{3} \tag{2}$$

Moment bezüglich A für die Scheibe $\mathcal{D}_1$:

$$RF_R = RT \rightarrow F_R = T \tag{3}$$

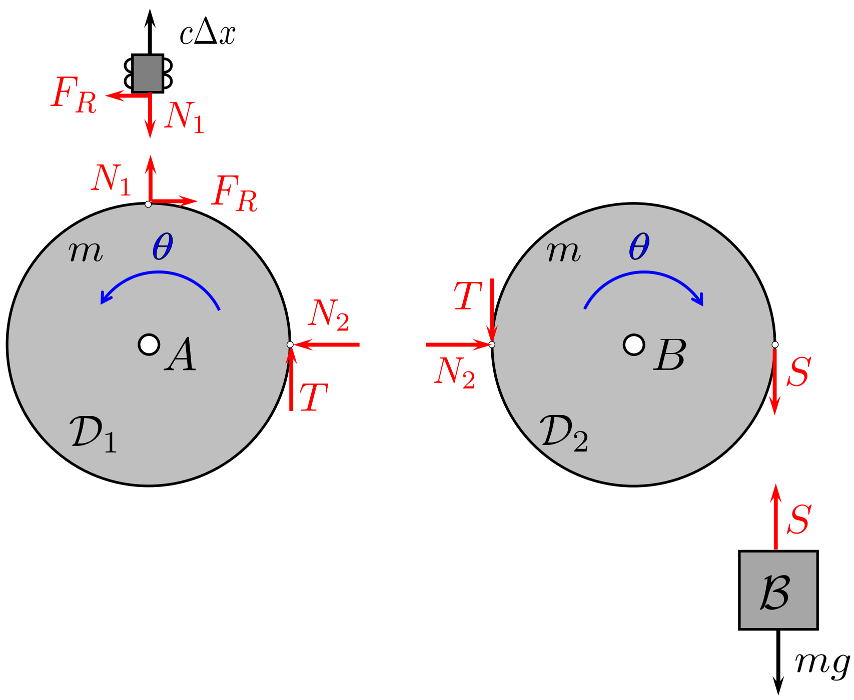
Resultante y-Richtung für die Masse $\mathcal{B}$:

$$S = mg \tag{4}$$

$$mg \leq \mu_0 \frac{L}{3} c_0 \quad \Rightarrow \quad c_0 \geq \frac{3mg}{\mu L}. \tag{5}$$

3. Jetzt wird die Feder durch eine schwächere ersetzt, und der Mechanismus setzt sich in Bewegung. Der Gleitreibungskoeffizient $\mu_1 < \mu_0$ und die neue Federkonstante $c_1 = \frac{mg}{\mu_1 L}$ sind gegeben. Stellen sie die Bewegungsgleichungen auf.

Hinweis: Zwei Gleichungen können mit dem Drallsatz und eine mit dem Impulssatz bestimmt werden. Der Trägheitsmoment einer homogenen Scheibe ist als $I = \frac{mR^2}{2}$ *gegeben.* *[3 Punkte]*



- Impulssatz $\mathcal{B}$:

$$\boxed{m\ddot{x} = mg - S} \tag{6}$$

- Drallsatz $\mathcal{D}_1$:

$$\boxed{\frac{1}{2}mR^2\ddot{\theta} = (T - F_R)R} \tag{7}$$

$$x = R\theta \quad \rightarrow \quad \frac{m}{2}\ddot{x} = T - F_R \tag{8}$$

Masseloser Block betrachten, um F_R zu finden:

$$N_1 = c_1 \Delta L = c_1 \frac{L}{3} \tag{9}$$

$$F_R = \mu_1 c_1 \frac{L}{3} = \mu_1 \frac{mg}{\mu_1 L}\frac{L}{3} \tag{10}$$

$$\Rightarrow \quad F_R = \frac{mg}{3}. \tag{11}$$

Einsetzen in (8) liefert

$$\frac{m}{2}\ddot{x} = T - \frac{mg}{3} \tag{12}$$

- Drallsatz $\mathcal{D}_2$:

$$\boxed{\frac{1}{2}mR^2\ddot{\theta} = (S - T)R} \tag{13}$$

und mit $x = R\theta$

$$\frac{m}{2}\ddot{x} = S - T. \tag{14}$$

4. Berechnen Sie die Seilkraft für den Fall mit der schwachen Feder (benutzen sie dafür die Gleichungen aus der Teilaufgabe 3). *[1 Punkt]*

Gleichsetzen von (12) und (14) :

$$T - \frac{mg}{3} = S - T \quad \Rightarrow \quad T = \frac{S}{2} + \frac{mg}{6} \tag{15}$$

Einsetzen in (14):

$$\frac{m}{2}\ddot{x} = S - \left(\frac{S}{2} + \frac{mg}{6}\right) \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} = S - \frac{mg}{3} \tag{16}$$

Einsetzen in (6):

$$S - \frac{mg}{3} = mg - S \quad \rightarrow \quad S = \frac{mg}{2} + \frac{mg}{6} \quad \Rightarrow \quad S = \frac{2}{3}mg. \tag{17}$$

Alternative:
Wenn man (6), (12) und (14) addiert, erhält man

$$\begin{aligned} 2m\ddot{x} &= T - T + S - S + mg - \frac{mg}{3} \\ \ddot{x} &= \frac{g}{2} - \frac{g}{6} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = \frac{1}{3}g. \end{aligned} \tag{18}$$

Einsetzen in (6) liefert

$$m\frac{1}{3}g = mg - S \quad \Rightarrow \quad S = \frac{2}{3}mg. \tag{19}$$

5. Geben Sie die Geschwindigkeit von Körper $\mathcal{B}$ abhängig von der Zeit t an. Es wird den Fall mit der schwache Feder berücksichtigt. Benutzen Sie die Seilkraft aus Teilaufgabe 4, falls Sie es nicht gelöst haben, lassen Sie die Seilkraft als unbekannte S. Das System befindet sich in Ruhe bei $t = 0$ und $x = 0$.

[1 Punkt]

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= mg - S \quad \rightarrow \quad m\ddot{x} = \frac{mg}{3} \\ \Rightarrow \quad \ddot{x} &= \frac{1}{3}g \end{aligned} \tag{20}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{x}(t) = \int \frac{1}{3}g \, d\tau = \frac{1}{3}gt + \dot{x}_0 \tag{21}$$

Unter Verwendung der Anfangsbedingung $x_0 = 0 \Rightarrow \dot{x}_0 = 0$ finden wir

$$\dot{x} = \frac{1}{3}gt. \tag{22}$$

Lösung Version n. 1

1. a
2. c
3. c
4. d
5. b
6. d
7. a
8. d
9. a
10. b
11. e
12. d
13. c
14. a
15. e