ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

IMES
Institut für Mechanische Systeme

# Technische Mechanik

## Klausur I

**25. Oktober 2016, $08^{15}$ - $09^{15}$**

**Dr. Stephan Kaufmann**

**Musterlösung**

**Herbstsemester 2016**

### *Aufgabe 1* (10 Punkte)

a) Die Kräfte $\boldsymbol{F}_A$, $\boldsymbol{F}_B$, $\boldsymbol{F}_C$, $\boldsymbol{F}_D$ und das Kräftepaar $\boldsymbol{M}_E$ ergeben sich wie folgt aus der Zeichnung:

$1^{AR}_{1}$

$$\boldsymbol{F}_A = \frac{\sqrt{2}}{2}F\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{F}_B = \frac{\sqrt{2}}{2}F\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{F}_C = \frac{\sqrt{2}}{2}F\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{F}_D = \frac{\sqrt{2}}{2}F\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{M}_E = \begin{bmatrix}0\\M\\0\end{bmatrix}.$$

Gesucht ist die Dyname $\{\boldsymbol{R}, \boldsymbol{M}_O\}$:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{F}_A + \boldsymbol{F}_B + \boldsymbol{F}_C + \boldsymbol{F}_D = \frac{\sqrt{2}}{2}F\begin{bmatrix}0\\2\\3\end{bmatrix}$$ $1^{KR}_{2}$

$$\boldsymbol{M}_{OA} = \boldsymbol{r}_{OA}\times\boldsymbol{F}_A = \begin{bmatrix}4b\\-a\\-a\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}F = \frac{\sqrt{2}}{2}F\begin{bmatrix}0\\-4b\\4b\end{bmatrix}$$ $1^{KR}_{3}$

$$\boldsymbol{M}_{OD} = \boldsymbol{r}_{OD}\times\boldsymbol{F}_D = \begin{bmatrix}-4b\\a\\0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}F = \frac{\sqrt{2}}{2}F\begin{bmatrix}0\\0\\-4b\end{bmatrix}$$ $1^{KR}_{4}$

Wie aus der Skizze ersichtlich, kompensieren sich die Momente $\boldsymbol{M}_{OB}$ und $\boldsymbol{M}_{OC}$. Diese Erkenntnis ist gleichwertig wie die folgende Berechnung der Momente

$$\boldsymbol{M}_{OB} = \boldsymbol{r}_{OB}\times\boldsymbol{F}_B = \begin{bmatrix}3b\\0\\a\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}F = \frac{\sqrt{2}}{2}F\begin{bmatrix}0\\-a-3b\\0\end{bmatrix}$$

$1^{KR}_{5}$

$$\boldsymbol{M}_{OC} = \boldsymbol{r}_{OC}\times\boldsymbol{F}_C = \begin{bmatrix}-3b\\0\\a\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}F = \frac{\sqrt{2}}{2}F\begin{bmatrix}0\\a+3b\\0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{M}_{OA} + \boldsymbol{M}_{OB} + \boldsymbol{M}_{OC} + \boldsymbol{M}_{OD} + \boldsymbol{M}_E = \begin{bmatrix}0\\-2\sqrt{2}bF+M\\0\end{bmatrix}$$ $1^{AR}_{6}$



Bitte wenden!

b) Gesucht ist die Dyname $\{\boldsymbol{R}, \boldsymbol{M}_C\}$, wobei $\boldsymbol{R}$ schon bekannt ist und $\boldsymbol{M}_C$ am schnellsten mit der Transformationsregel berechnet werden kann:

$$\boldsymbol{M}_C = \boldsymbol{M}_O + \boldsymbol{r}_{CO} \times \boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2\sqrt{2}bF + M \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3b \\ 0 \\ -a \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} F \qquad 1^{KR}_{7}$$

$$\boldsymbol{M}_C = \frac{\sqrt{2}}{2} F \begin{bmatrix} 2a \\ -13b \\ 6b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ M \\ 0 \end{bmatrix} \qquad 1^{AR}_{8}$$

*Alternativer Lösungsweg:*

$$\boldsymbol{M}_{CA} = \boldsymbol{r}_{CA} \times \boldsymbol{F}_A = \begin{bmatrix} 7b \\ -a \\ -2a \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} F = \frac{\sqrt{2}}{2} F \begin{bmatrix} a \\ -7b \\ 7b \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}_{CB} = \boldsymbol{r}_{CB} \times \boldsymbol{F}_B = \begin{bmatrix} 6b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} F = \frac{\sqrt{2}}{2} F \begin{bmatrix} 0 \\ -6b \\ 0 \end{bmatrix} \qquad 1^{KR}_{7}$$

$$\boldsymbol{M}_{CD} = \boldsymbol{r}_{CD} \times \boldsymbol{F}_D = \begin{bmatrix} -b \\ a \\ -a \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} F = \frac{\sqrt{2}}{2} F \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ -b \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}_C = \boldsymbol{M}_{CA} + \boldsymbol{M}_{CB} + \boldsymbol{M}_{CD} + \boldsymbol{M}_E = \frac{\sqrt{2}}{2} F \begin{bmatrix} 2a \\ -13b \\ 6b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ M \\ 0 \end{bmatrix} \qquad 1^{AR}_{8}$$

d) Damit sich die Dyname auf eine Einzelkraft reduzieren lässt, muss die Resultierende verschieden von Null sein ($\boldsymbol{R} \neq 0$). Und die zweite Invariante muss Null sein ($I_2 = 0$).

$$I_2 = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{M}_O = \frac{\sqrt{2}}{2} F \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -2\sqrt{2}bF + M \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \qquad 1^{KR}_{9}$$

$$M = 2\sqrt{2}bF, \qquad 1^{AR}_{10}$$

**Punkteschlüssel**

| **Pt** | | Bedingung |
|---|---|---|
| **1** | *AR* | Kräfte und Moment richtig aufgestellt. |
| **2** | *KR* | $\boldsymbol{R}$ |
| **3** | *KR* | $\boldsymbol{M}_{OA}$ |
| **4** | *KR* | $\boldsymbol{M}_{OD}$ |
| **5** | *KR* | $\boldsymbol{M}_{OB} + \boldsymbol{M}_{OC} = 0$ |
| **6** | *AR* | $\boldsymbol{M}_{O}$ |
| **7** | *KR* | $\boldsymbol{M}_{C} = \boldsymbol{M}_{O} + \boldsymbol{r}_{CO} \times \boldsymbol{R}$ (Werte eingesetzt) |
| **8** | *AR* | $\boldsymbol{M}_{C}$ (Endergebnis) |
| **9** | *KR* | $\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{M}_{O} = 0$ (Werte eingesetzt) |
| **10** | *AR* | $M$ (Endergebnis) |

*AR: Absolut Richtig*
*KR: Konsequent Richtig*

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

# Technische Mechanik

IMES
Institut für Mechanische Systeme

## Klausur I

**25. Oktober 2016, 08[15] - 09[15]**

**Dr. Stephan Kaufmann** **Musterlösung** **Herbstsemester 2016**

### *Aufgabe 2* (*10 Punkte*)

a)
Das Momentanzentrum des Stabs $AC$ liegt in $A$. Die Schnelligkeit des Puntks $C$ beträgt somit:
$v_C = 3\sqrt{2}a\omega$ oder in Komponentenschreibweise: $\boldsymbol{v}_C = 3a\omega\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ $1^{\mathrm{AR}}_{1}$

b)
Finde Momentanzentrum $M_{BCDE}$: Schnittpunkt der Verlängerung der Geraden $AC$ mit der Vertikalen durch $B$. $1^{\mathrm{AR}}_{2}$
Die Rotationsschnelligkeit folgt aus dem *SvM*: $\omega_{BCDE} = 3\omega$. $1^{\mathrm{KR}}_{3}$

c)
Aus dem *SvM* folgt: $\boldsymbol{v}_B = 12a\omega\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $1^{\mathrm{KR}}_{4}$

$\boldsymbol{v}_E = 3a\omega\begin{bmatrix}-3\\-1\end{bmatrix}$, $\quad v_E = 3\sqrt{10}a\omega$ $1^{\mathrm{KR}}_{5}$

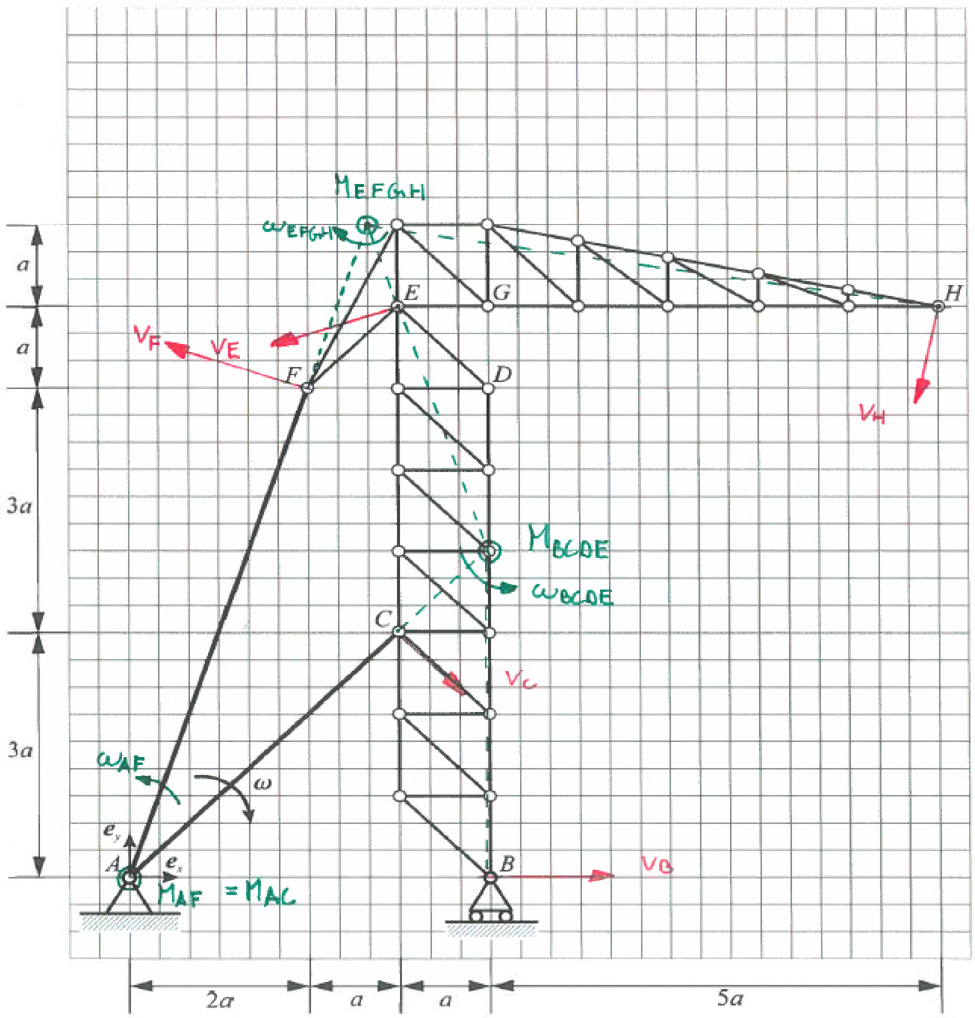
d)
Momentanzentrum $M_{EFGH}$: Schnittpunkt der Verlängerung der Geraden $M_{BCDE}E$ und der Verlängerung der Geraden durch $AF$. $1^{\mathrm{AR}}_{6}$
Die Rotationsschnelligkeit folgt aus dem *SvM*: $\omega_{EFGH} = 9\omega$ $1^{\mathrm{AR}}_{7}$

e)
Aus dem *SvM* folgt: $\boldsymbol{v}_F = a\omega\begin{pmatrix}-18\\6\end{pmatrix}$, $\quad v_F = 6\sqrt{10}a\omega$ $1^{\mathrm{AR}}_{8}$

Das Momentanzentrum des Stabs $AF$ ist in $F$.
Die Rotationsschnelligkeit folgt aus dem *SvM*: $\omega_{AF} = 3\omega$ $1^{\mathrm{AR}}_{9}$

f)
Aus dem *SvM* für $M_{EFGH}$ folgt:
$\boldsymbol{v}_H = 9\omega a\begin{pmatrix}-1\\-19/3\end{pmatrix}$, $\quad v_H = 3\sqrt{370}a\omega$ $1^{\mathrm{AR}}_{10}$

***Skizze:***


M_EFGH
ω_EFGH
a
a
3a
3a
E
G
H
F
D
V_F
V_E
V_H
M_BCDE
ω_BCDE
C
V_C
ω_AF
ω
e_y
e_x
A
B
V_B
M_AF = M_AC
2a
a
a
5a

**Punkteschlüssel**

| Pt | | Bedingung |
|---|---|---|
| **1** | *AR* | $\boldsymbol{v}_C$ |
| **2** | *AR* | $M_{BCDE}$ |
| **3** | *KR* | $\omega_{BCDE}$ |
| **4** | *KR* | $\boldsymbol{v}_B$ |
| **5** | *KR* | $\boldsymbol{v}_E$ |
| **6** | *AR* | $M_{EFGH}$ |
| **7** | *AR* | $\omega_{EFGH}$ |
| **8** | *AR* | $\boldsymbol{v}_F$ |
| **9** | *AR* | $\omega_{AF}$ |
| **10** | *AR* | $\boldsymbol{v}_H$ |

*AR: Absolut Richtig*
*KR: Konsequent Richtig*