ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

IMES
Institut für Mechanische Systeme

Technische Mechanik

Klausur I 22. Oktober 2013, 08^{15} - 09^{15}

Dr. Stephan Kaufmann **Musterlösung** **Herbstsemester 2013**

Aufgabe 1 (10 Punkte)

a) Geschwindigkeit in A

$$\vec{v}_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{v}{\sqrt{2}} \qquad 1^{a.r.}_{1}$$

Geschwindigkeit in B

$$\vec{v}_B = \begin{pmatrix} v_{Bx} \\ v_{Bx} \\ -v_{Bx} \end{pmatrix}$$

Satz der projizierten Geschwindigkeiten $A \rightarrow B$

$$0 \overset{!}{=} (\vec{v}_A - \vec{v}_B) \cdot \vec{r}_{AB} = \begin{pmatrix} v/\sqrt{2} - v_{Bx} \\ -v_{Bx} \\ v/\sqrt{2} + v_{Bx} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} a \qquad 1^{k.r.}_{2}$$

$$= a\left(\frac{2}{\sqrt{2}}v - 2v_{Bx} + 2v_{Bx} + \frac{1}{\sqrt{2}}v + v_{Bx}\right) = a\left(\frac{3}{\sqrt{2}}v + v_{Bx}\right)$$

$$\Rightarrow v_{Bx} = -\frac{3}{\sqrt{2}}v \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\vec{v}_B = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{3v}{\sqrt{2}}}} \qquad 1^{a.r.}_{3}$$

b) Rotationsgeschwindigkeit

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

Starrkörperformel

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{3v}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{v}{\sqrt{2}} + \begin{pmatrix} \omega_x \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} a \qquad 1^{k.r.}_{4}$$

$$= \begin{pmatrix} v/\sqrt{2} + 2a\omega_z \\ 2a\omega_z - a\omega_x \\ v/\sqrt{2} - 2a\omega_x \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \frac{4v}{\sqrt{2}} + 2a\omega_z = 0 & \Leftrightarrow \omega_z = -\sqrt{2}\frac{v}{a} \\ \frac{3v}{\sqrt{2}} + 2a\omega_z - a\omega_x = 0 & 1^{k.r.}_{5} \\ -\frac{2v}{\sqrt{2}} - 2a\omega_x = 0 & \Leftrightarrow \omega_x = -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{v}{a} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\vec{\omega} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \frac{v}{a}} \qquad 1^{a.r.}_{6}$$

Kinemate in B

$$\underline{\underline{\{\vec{v}_B, \vec{\omega}\}}}$$

c) Starrkörperformel $A \rightarrow C$

$$\underline{\vec{v}_C} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AC} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\frac{v}{\sqrt{2}} + \begin{pmatrix}-\sqrt{2}/2\\0\\-\sqrt{2}\end{pmatrix}\frac{v}{a} \times \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}a$$

$$= \begin{pmatrix} v/\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2}v + \sqrt{2}v/2 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}\frac{\sqrt{2}v}{2}}$$ ①$_7^{\text{a.r.}}$

Kinemate in C

$\underline{\underline{\{\vec{v}_C, \vec{\omega}\}}}$ ①$_8$

d) Erste Invariante

$$\underline{\vec{I}_1} = \vec{\omega} = \underline{\begin{pmatrix}-\sqrt{2}/2\\0\\\sqrt{2}\end{pmatrix}\frac{v}{a} \neq 0}$$

Zweite Invariante ①$_9^{\text{k.r.}}$

$$\underline{I_2} = \vec{v}_A \cdot \vec{\omega} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\frac{v}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix}-\sqrt{2}/2\\0\\-\sqrt{2}\end{pmatrix}\frac{v}{a} = \left(-\frac{1}{2} - 1\right)\frac{v^2}{a} = \underline{-\frac{3v^2}{2a} \neq 0}$$

$\Rightarrow$ Der momentane Bewegungszustand ist eine <u>Schraubung</u>, da $I_2 \neq 0$ ①$_{10}^{\text{k.r.}}$

Alternativer Lösungsweg für a), b)

Starrkörperformel

①$_1^{\text{a.r.}}$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB} \Rightarrow \begin{pmatrix}v_{Bx}\\v_{Bx}\\-v_{Bx}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\frac{v}{\sqrt{2}} + \begin{pmatrix}\omega_x\\0\\\omega_z\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}a$$ ①$_2^{\text{k.r.}}$ ①$_4^{\text{k.r.}}$

$$= \begin{pmatrix}\sqrt{2}v/2 + 2a\omega_z \\ 2a\omega_z - a\omega_x \\ 2v/2 - 2a\omega_x\end{pmatrix}$$

Lineares Gleichungssystem und Elimination

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc|c} v_{Bx} & \omega_x & \omega_z & \\ \hline 1 & 0 & -2a & \sqrt{2}v/2 \\ 1 & a & -2a & 0 \\ -1 & 2a & 0 & \sqrt{2}v/2 \end{array}
\end{array}
\Leftrightarrow
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc|c} v_{Bx} & \omega_x & \omega_z & \\ \hline 1 & 0 & -2a & \sqrt{2}v/2 \\ 0 & a & 0 & -\sqrt{2}v/2 \\ 0 & 2a & -2a & \sqrt{2}v \end{array}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} v_{Bx} & \omega_x & \omega_z & \\ \hline 1 & 0 & -2a & \sqrt{2}v/2 \\ 0 & a & 0 & -\sqrt{2}v/2 \\ 0 & 0 & -2a & 2\sqrt{2}v \end{array}
\Leftrightarrow
\begin{cases} \omega_z = -\sqrt{2}\frac{v}{a} \\ \omega_x = -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{v}{a} \\ v_{Bx} = \frac{\sqrt{2}}{2}v + 2a\left(-\sqrt{2}\frac{v}{a}\right) = -\frac{3v}{\sqrt{2}} \end{cases}$$ ①$_5^{\text{k.r.}}$

$$\Rightarrow \vec{v}_B = \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\frac{3v}{\sqrt{2}}$$ ①$_3^{\text{a.r.}}$

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix}-\sqrt{2}/2\\0\\-\sqrt{2}\end{pmatrix}\frac{v}{a}$$ ①$_6^{\text{a.r.}}$

Punkteschlüssel zu Aufgabe 1

$1^{\text{a.r.}}_{1}$ Geschwindigkeit $\vec{v}_A$ absolut richtig angegeben.

$1^{\text{k.r.}}_{2}$ Satz der projizierten Geschwindigkeiten oder Starrkörperformel konsequent richtig zu $\vec{v}_A$ eingesetzt.

$1^{\text{a.r.}}_{3}$ Geschwindigkeit $\vec{v}_B$ absolut richtig angegeben.

$1^{\text{k.r.}}_{4}$ Starrkörperformel konsequent richtig zu $\vec{v}_A$ und $\vec{v}_B$ eingesetzt.

$1^{\text{k.r.}}_{5}$ Konsequent richtig nach ω_x, ω_z aufgelöst.

$1^{\text{a.r.}}_{6}$ Rotationsgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ absolut richtig angegeben

$1^{\text{a.r.}}_{7}$ Geschwindigkeit $\vec{v}_C$ absolut richtig angegeben

1_{8} Erkannt, dass $\vec{\omega}$ invariant.

$1^{\text{k.r.}}_{9}$ Zweite Invariante I_2 konsequent richtig eingesetzt.

$1^{\text{k.r.}}_{10}$ Typ des Bewegungszustand konsequent richtig zu I_1, I_2 angegeben.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

a) Resultierende Kraft

$$\vec{R} = \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{F}_D + \vec{F}_S$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} F + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} F + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} F + \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} F + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} F = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} F \quad 1^{\text{a.r.}}_{1} \qquad (1)$$

Resultierendes Moment bezüglich O

$$\vec{M}_0 = \vec{r}_{OA} \times \vec{F}_A + \vec{r}_{OB} \times \vec{F}_B + \vec{r}_{OC} \times \vec{F}_C + \vec{r}_{OD} \times F_D + \vec{r}_{OS} \times \vec{F}_S$$

$$= \begin{pmatrix} 2b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} F + \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} F + \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} F + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} F + \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} F$$

$1^{\text{a.r.}}_{2}$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -2b \\ 6b \end{pmatrix} F + \begin{pmatrix} -4a \\ 0 \\ 3a \end{pmatrix} F + \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ -2a \end{pmatrix} F + \begin{pmatrix} 2a \\ -4a \\ 0 \end{pmatrix} F + \begin{pmatrix} 0 \\ 5b \\ 0 \end{pmatrix} F$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -4a+3b \\ a+6b \end{pmatrix} F \quad 1^{\text{k.r.}}_{3} \qquad (2)$$

Dyname in O

$$\{\vec{R}, \vec{M}_0\}$$

b) Resultierendes Moment bezüglich S

$$\underline{\vec{M}_S} = \vec{M}_0 + \vec{r}_{S0} \times \vec{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4a+3b \\ a+6b \end{pmatrix} F + \begin{pmatrix} -b \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} F \qquad \textcircled{1}^{\text{k.r.}}_{4}$$

$$= \begin{pmatrix} 4aF \\ -4aF+3bF-aF \\ aF+6bF-4bF \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 4a \\ -5a+3b \\ a+2b \end{pmatrix} F} \qquad \textcircled{1}^{\text{a.r.}}_{5} \qquad (3)$$

Dyname in S

$$\underline{\underline{\{\vec{R}, \vec{M}_S\}}} \qquad \textcircled{1}_{6}$$

c) Bedingung für Einzelkraft

$$0 \overset{!}{\neq} \vec{I}_1 = \vec{R} \quad \Rightarrow \quad F \neq 0$$

$$0 \overset{!}{=} I_2 = \vec{M}_0 \cdot \vec{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4a+3b \\ a+6b \end{pmatrix} F \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} F = 4F^2(-4a+3b) \qquad \textcircled{1}^{\text{k.r.}}_{7}$$

$$\Rightarrow -4a+3b=0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\frac{a}{b} = \frac{3}{4}}} \quad \textcircled{1}^{\text{a.r.}}_{8} \Rightarrow a = \frac{3}{4}b, \quad b = \frac{4}{3}a \qquad (4)$$

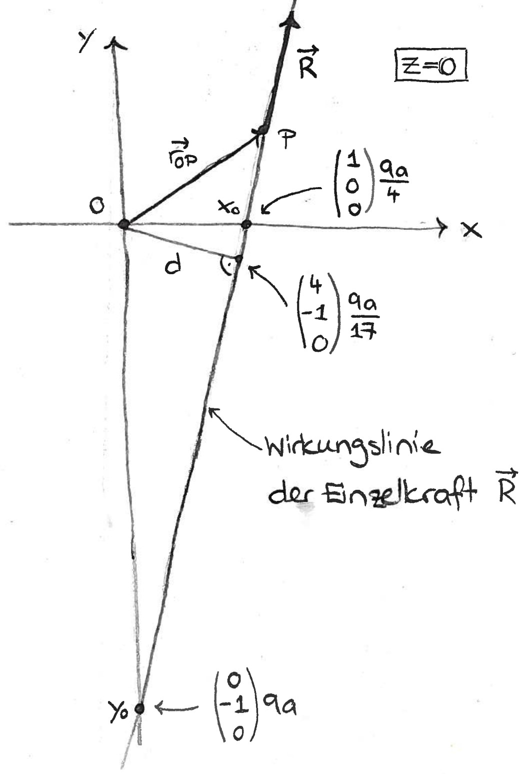
d) Resultierendes Moment der Einzelkraft bezüglich O

$$\vec{M}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4a+3b \\ a+6b \end{pmatrix} F \overset{(4)}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9a \end{pmatrix} F \overset{!}{=} \vec{r}_{0P} \times \vec{R} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} F = \begin{pmatrix} -4z \\ z \\ 4x-y \end{pmatrix} F \quad \textcircled{1}^{\text{k.r.}}_{9} \qquad (5)$$

Geradengleichung für Wirkungslinie

$$(5) \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ 9aF = (4x-y)F \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = 4x - 9a \end{cases} \Rightarrow \underline{\vec{r}_{0P}(x) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 4x-9a \\ 0 \end{pmatrix}} \qquad \textcircled{1}^{\text{a.r.}}_{10}$$

Skizze in $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$-Ebene



Alternativer Lösungsweg zu d)

$$\vec{M}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9a \end{pmatrix} F, \qquad \vec{R} = \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} F$$

i) $M_0 = x_0 R_y \Rightarrow \underline{x_0} = \frac{M_0}{R_y} = \underline{\frac{9a}{4}} \quad \textcircled{1}^{\text{k.r.}}_{9} \Rightarrow \vec{r}_{0P} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{9a}{4} \quad \textcircled{1}^{\text{a.r.}}_{10}$

ii) $M_0 = -y_0 R_x \Rightarrow \underline{y_0} = -\frac{M_0}{R_x} = \underline{-9a} \quad \textcircled{1}^{\text{k.r.}}_{9} \Rightarrow \vec{r}_{0P} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} 9a \quad \textcircled{1}^{\text{a.r.}}_{10}$

iii) $M_0 = dR \Rightarrow \underline{d} = \frac{M_0}{R} = \underline{\frac{9a}{\sqrt{17}}} \quad \textcircled{1}^{\text{k.r.}}_{9} \Rightarrow \vec{r}_{0P} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{9a}{17} \quad \textcircled{1}^{\text{a.r.}}_{10}$

Punkteschlüssel zu Aufgabe 2

$1_1^{a.r.}$ Resultierende Kraft $\vec{R}$ absolut richtig angegeben.

$1_2^{a.r.}$ Summe der Momente absolut richtig eingesetzt.

$1_3^{k.r.}$ Resultierendes Moment bezüglich 0 konsequent richtig angegeben.

$1_4^{k.r.}$ Transformationsformel richtig eingesetzt.

$1_5^{a.r.}$ Resultierendes Moment bezüglich S absolut richtig angegeben.

1_6 Erkannt, dass $\vec{R}$ invariant.

$1_7^{k.r.}$ Zweite Invariante I_2 konsequent richtig eingesetzt.

$1_8^{a.r.}$ Verhältnis $\frac{a}{b}$ absolut richtig angegeben.

$1_9^{k.r.}$ Ansatz für Punkt der Wirkungslinie konsequent richtig aufgestellt

$1_{10}^{a.r.}$ Punkt der Wirkungslinie $\vec{r}_{OP}$ absolut richtig angegeben.