![ETH logo] Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

IMES Institut für Mechanische Systeme

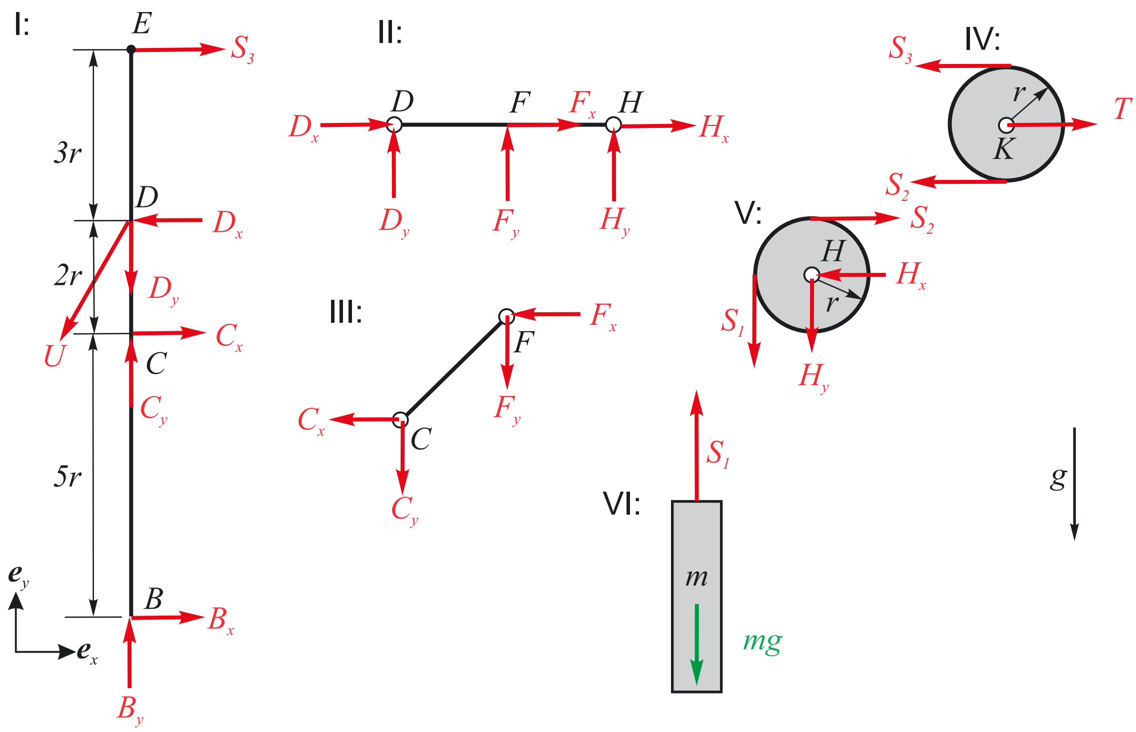
Technische Mechanik

Basisprüfung 7. August 2017, 09^{00}- 11^{00}

Dr. Stephan Kaufmann **Musterlösung** **Sommer 2017**

Aufgabe 1 *(19 Punkte)*

b) Freischnittskizze:



c) Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen:

System I:

KB(x):	$S_3 - D_x + C_x + B_x - U/2 = 0$	(1)
KB(y):	$B_y + C_y - D_y - (\sqrt{3}/2)U = 0$	(2)
MB(D,z):	$-3rS_3 + 2rC_x + 7rB_x = 0$	(3)

System II:

KB(x):	$D_x + F_x + H_x = 0$	(4)
KB(y):	$D_y + F_y + H_y = 0$	(5)
MB(F,z)	$2rH_y - 2rD_y = 0$	(6)

System III:

KB(x):	$-C_x - F_x = 0$	(7)
KB(y):	$-C_y - F_y = 0$	(8)
MB(C,z):	$2r(F_x - F_y) = 0$	(9)
	(oder Pendelstütze)	

System IV:

KB(x):	$-S_3 - S_2 + T = 0$	(10)
MB(K,z):	$r(S_3 - S_2) = 0$	(11)

System V:

KB(x):	$-H_x + S_2 = 0$	(12)
KB(y):	$-H_y - S_1 = 0$	(13)
MB(H,z):	$rS_1 - rS_2 = 0$	(14)

System VI:

KB(y):	$S_1 - mg = 0$	(15)

d) Auflösen des linearen Gleichungssystems:

(15):	$S_1 = mg$
(14):	$S_1 = S_2 = mg$
(13):	$H_y = -S_1 = -mg$
(12):	$H_x = S_2 = mg$
(11):	$S_3 = S_2 = mg$
(10):	$T = S_2 + S_3 = 2mg$
(6):	$D_y = H_y = -mg$
(5):	$F_y = -(D_y + H_y) = 2mg$
(9):	$F_x = F_y = 2mg$
(4):	$D_x = -(F_x + H_x) = -3mg$
(7):	$C_x = -F_x = -2mg$
(8):	$C_y = -F_y = -2mg$

(3): $$B_x = (3S_3 - 2C_x)/7 = mg$$

(1): $$U = 2(S_3 - D_x + C_x + B_x) = 6mg$$

(2): $$B_y = D_y + (\sqrt{3}/2)U - C_y = mg(1 + 3\sqrt{3})$$

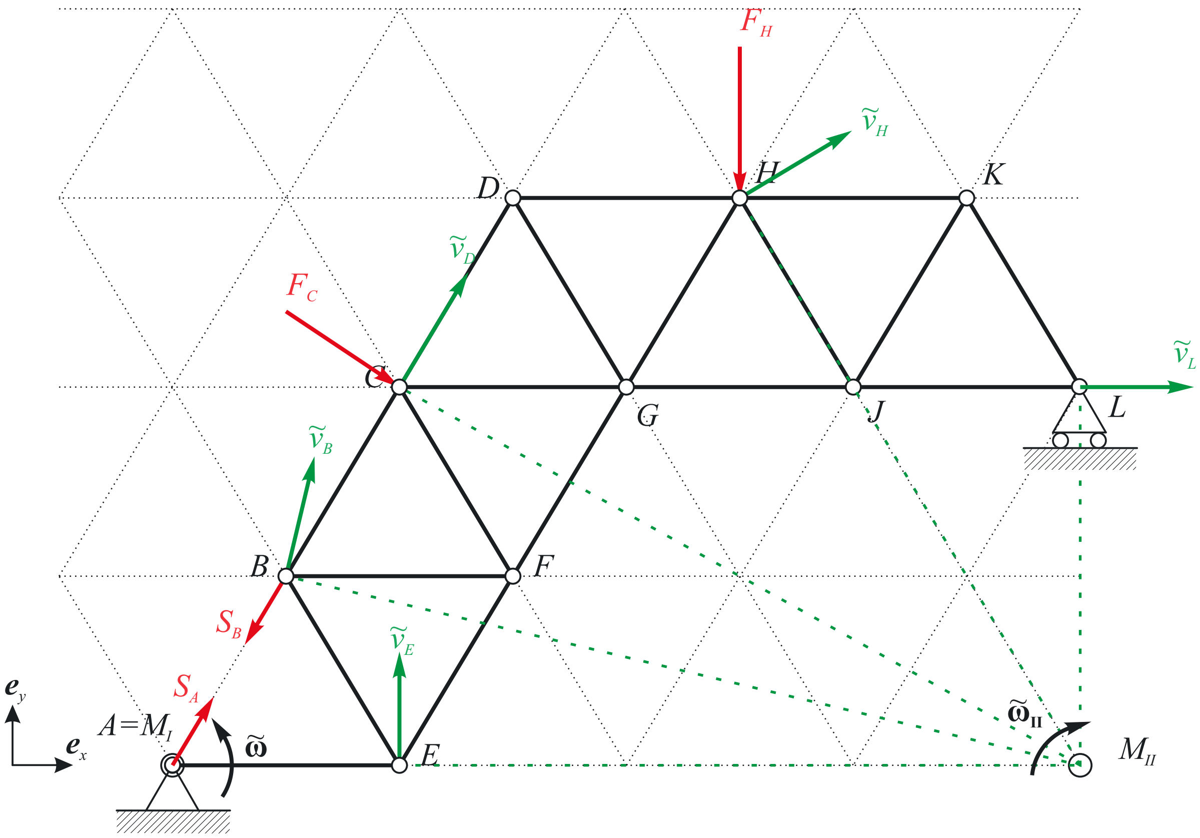
Technische Mechanik

Basisprüfung **7. August 2017, 09^{00} - 11^{00}**

Dr. Stephan Kaufmann **Musterlösung** **Sommer 2017**

Aufgabe 2 *(22+2 Punkte)*

a)



Das Momentanzentrum $M_{AE} = M_I$ befindet sich in A, da das Tragwerkselement dort gelenkig gelagert ist. Die Geschwindigkeit in A ist also 0.

$$\tilde{v}_A = 0$$

Dies ist insofern wichtig weil im Stab AE dadurch keine virtuellen Leistungen auftreten (Es würde also genügen direkt eine Rotationsgeschwindigkeit in M_{II} einzuführen um das Problem zu lösen).
Wir führen aber trotzdem die Rotationsgeschwindigkeit $\tilde{\omega}_{AE} = \tilde{\omega}$ im Stab AE ein. Die Geschwindigkeit in E beträgt:

$$\tilde{\boldsymbol{v}}_E = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} a\tilde{\omega} \text{ bzw. } \tilde{v}_E = a\tilde{\omega}.$$

Das Momentanzentrum $M_{B\ldots L} = M_{II}$ liegt im Schnittpunkt der Geraden AE (senkrecht zu $\tilde{\boldsymbol{v}}_E$) und senkrecht zum Auflager im Punkt L (senkrecht zu $\tilde{\boldsymbol{v}}_L$). Mit dem Satz vom Momentanzentrum ergibt sich:

$$\tilde{\omega}_{II} = \frac{1}{3}\tilde{\omega}$$

$$\tilde{\boldsymbol{v}}_B = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/6 \\ 7/6 \end{bmatrix} a\tilde{\omega} \text{ bzw. } \tilde{v}_B = (\sqrt{13}/3)a\tilde{\omega}.$$

$$\tilde{\boldsymbol{v}}_C = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/3 \\ 1 \end{bmatrix} a\tilde{\omega} \text{ bzw. } \tilde{v}_C = (2\sqrt{3}/3)a\tilde{\omega}$$

$$\tilde{\boldsymbol{v}}_H = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} a\tilde{\omega} \text{ bzw. } \tilde{v}_H = a\tilde{\omega}$$

Eingeprägte Kräfte und Stabkräfte im Stab AB:

$$\boldsymbol{F}_C = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} F_C, \qquad \boldsymbol{F}_H = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} F_H$$

$$\boldsymbol{S}_A = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} S_{AB}, \qquad \boldsymbol{S}_B = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix} S_{AB}$$

Prinzip der virtuellen Leistung:

$$\tilde{\mathcal{P}}_A = \boldsymbol{S}_A \cdot \tilde{\boldsymbol{v}}_A = 0$$

$$\tilde{\mathcal{P}}_B = \boldsymbol{S}_B \cdot \tilde{\boldsymbol{v}}_B = (-2\sqrt{3}/3)a\tilde{\omega}S_{AB}$$

$$\tilde{\mathcal{P}}_C = \boldsymbol{F}_C \cdot \tilde{\boldsymbol{v}}_C = 0$$

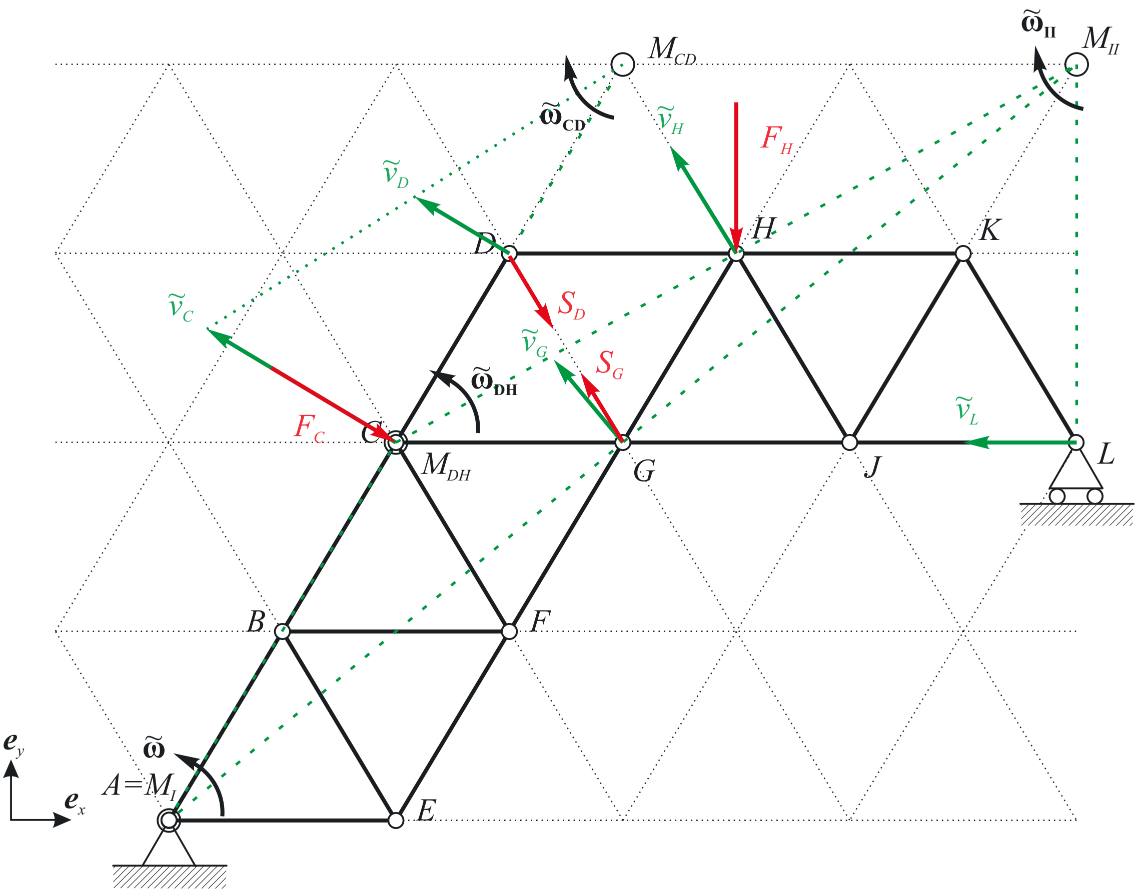
$$\tilde{\mathcal{P}}_H = \boldsymbol{F}_H \cdot \tilde{\boldsymbol{v}}_H = -F_H/2$$

$$\tilde{\mathcal{P}}_{tot} = \tilde{\mathcal{P}}_A + \tilde{\mathcal{P}}_B + \tilde{\mathcal{P}}_C + \tilde{\mathcal{P}}_H = a\tilde{\omega}\left(-\frac{F_H}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3}S_{AB}\right) = 0$$

$$S_{AB} = -\frac{\sqrt{3}}{4}F_H$$

$S_{AB} < 0$: Der Stab wird somit auf Druck beansprucht.

b)



Das Momentanzentrum $M_{ABCEFG} = M_I$ befindet sich in A, da das Tragwerkselement dort gelenkig gelagert ist. Führt man in diesem Starrkörper die Rotationsgeschwindigkeit $\tilde{\omega}_I = \tilde{\omega}$ ein so ergeben sich die Geschwindigkeiten:

$$\tilde{\boldsymbol{v}}_C = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} a\tilde{\omega} \text{ bzw. } \tilde{v}_C = 2a\tilde{\omega},$$

$$\tilde{\boldsymbol{v}}_G = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 2 \end{bmatrix} a\tilde{\omega} \text{ bzw. } \tilde{v}_G = \sqrt{7}a\tilde{\omega}$$

Das Momentanzentrum $M_{DHKGJL} = M_{II}$ liegt im Schnittpunkt der Geraden AG (senkrecht zu $\tilde{\boldsymbol{v}}_G$) und senkrecht zum Auflager im Punkt L (senkrecht zu $\tilde{\boldsymbol{v}}_L$). Mit dem Satz vom Momentanzentrum ergibt sich:

$$\tilde{\omega}_{II} = \tilde{\omega}_I,$$

$$\tilde{\boldsymbol{v}}_H = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 3 \end{bmatrix} \frac{a\tilde{\omega}}{2} \text{ bzw. } \tilde{v}_E = \sqrt{3}a\tilde{\omega}.$$

Wendet man den Satz der projizierten Geschwindigkeiten auf den Stab CD an, so ergibt sich folgende Geschwindigkeit für $\boldsymbol{v}_D$:

$$\tilde{\boldsymbol{v}}_D = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} \frac{a\tilde{\omega}}{2} \text{ bzw. } \tilde{v}_D = a\tilde{\omega}.$$

Grundsätzlich genügt die Information über die Geschwindigkeit in D um die Stabkraft im Stab DG zu bestimmen. Interessiert man sich zusätzlich für das Momentanzentrum des Stabs CD, so kann man erkennen, dass das Momentanzentrum auf der Geraden CD (senkrecht zu $\tilde{\boldsymbol{v}}_C$) liegen muss. Anhand der berechneten Schnelligkeiten von $\tilde{\boldsymbol{v}}_C$ und $\tilde{\boldsymbol{v}}_D$ lässt sich dann die exakte Position des Momentanzentrum bestimmen. Als letztes lässt sich nun auch das Momentanzentrum vom Stab DH bestimmen: das Momentanzentrum M_{DH} befindet sich im Schnittpunkt der Geraden CD (senkrecht zu $\tilde{\boldsymbol{v}}_C$) und $M_{II}H$ (senkrecht zu $\tilde{\boldsymbol{v}}_H$). Damit hat man auch das Momentanzentrum M_{DH} vom Stab DH gefunden. Mit dem Satz vom Momentanzentrum ergibt sich:

$$\tilde{\omega}_{CD} = \tilde{\omega}$$
$$\tilde{\omega}_{DH} = \tilde{\omega}$$

Stabkräfte im Stab DG:

$$\boldsymbol{S}_D = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix} S_{DG}, \qquad \boldsymbol{S}_G = \begin{bmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} S_{DG}$$

Prinzip der virtuellen Leistung:

$$\tilde{\mathcal{P}}_C = \boldsymbol{F}_C \cdot \tilde{\boldsymbol{v}}_C = -2F_C$$

$$\tilde{\mathcal{P}}_D = \boldsymbol{S}_D \cdot \tilde{\boldsymbol{v}}_D = -\frac{\sqrt{3}}{2} a\tilde{\omega} S_{DG}$$

$$\tilde{\mathcal{P}}_H = \boldsymbol{F}_H \cdot \tilde{\boldsymbol{v}}_H = -\frac{3}{2} a\tilde{\omega} F_H$$

$$\tilde{\mathcal{P}}_G = \boldsymbol{S}_G \cdot \tilde{\boldsymbol{v}}_G = \frac{3\sqrt{3}}{2} a\tilde{\omega} S_{DG}$$

$$\tilde{\mathcal{P}}_{tot} = \tilde{\mathcal{P}}_C + \tilde{\mathcal{P}}_D + \tilde{\mathcal{P}}_H + \tilde{\mathcal{P}}_G = a\tilde{\omega}\left(-2F_C - \frac{3}{2}F_H + \sqrt{3}S_{DG}\right) = 0$$

$$S_{DG} = \frac{2\sqrt{3}}{3} F_C + \frac{\sqrt{3}}{2} F_H$$

$S_{DG} > 0$: Der Stab wird somit auf Zug beansprucht.

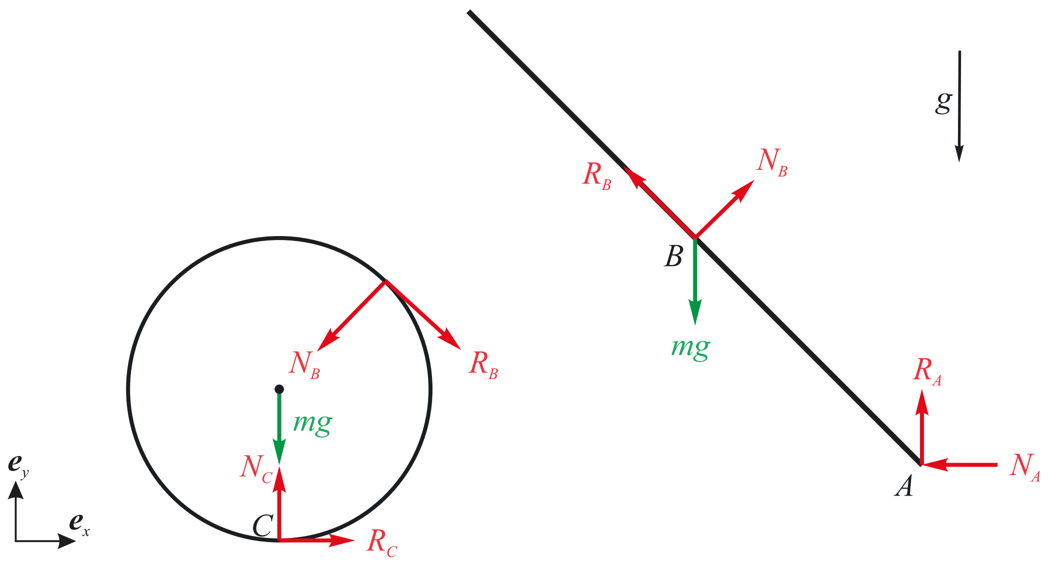
Technische Mechanik

Basisprüfung **7. August 2017, 09^{00} - 11^{0}**

Dr. Stephan Kaufmann **Musterlösung** **Sommer 2017**

Aufgabe 3 *(22 Punkte)*

a) Freischnitt:



Zylinder:

KB(x): $$R_C + \frac{\sqrt{2}}{2}R_B - \frac{\sqrt{2}}{2}N_B = 0 \qquad (1)$$

KB(y): $$N_C - \frac{\sqrt{2}}{2}R_B - \frac{\sqrt{2}}{2}N_B - mg = 0 \qquad (2)$$

MB(D): $$rR_C - rR_B = 0 \qquad (3)$$

Balken:

KB(x): $\frac{\sqrt{2}}{2}N_B - \frac{\sqrt{2}}{2}R_B - N_A = 0$ (4)

KB(y): $R_A + \frac{\sqrt{2}}{2}R_B + \frac{\sqrt{2}}{2}N_B - mg = 0$ (5)

MB(A): $\frac{\sqrt{2}}{2}Lmg - LN_B = 0$ (6)

aus (3): $R_B = R_C$ (7)

aus (6): $N_B = \frac{\sqrt{2}}{2}mg$ (8)

aus (1) mit (7) und (8): $R_B = R_C = \dfrac{\sqrt{2}mg}{2(1+\sqrt{2})} = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)mg$ (9)

aus (2) mit (8) und (9): $N_C = \dfrac{(4+3\sqrt{2})mg}{2(1+\sqrt{2})} = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)mg$ (10)

aus (4) mit (8) und (9): $N_A = \dfrac{\sqrt{2}mg}{2(1+\sqrt{2})} = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)mg$ (11)

aus (5) mit (8) und (9): $R_A = \dfrac{\sqrt{2}mg}{2(1+\sqrt{2})} = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)mg$ (12)

b) Bedingungen für Ruhe: $|R_A| \le \mu_0 N_A$, $|R_B| \le \mu_0 N_B$ und $|R_C| \le \mu_0 N_C$.

Kontakt A:

$$\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)mg \le \mu_0\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)mg \quad \Rightarrow \quad \mu_0 \ge 1$$

Kontakt B:

$$\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)mg \le \mu_0\frac{\sqrt{2}}{2}mg \quad \Rightarrow \quad \mu_0 \ge \sqrt{2} - 1$$

Kontakt C:

$$\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)mg \le \mu_0\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)mg \quad \Rightarrow \quad \mu_0 \ge 3-2\sqrt{2}$$

Kontakt A ist der kritischste. Die Bedingung für Ruhe kann dort als erste nicht eingehalten werden.

Technische Mechanik

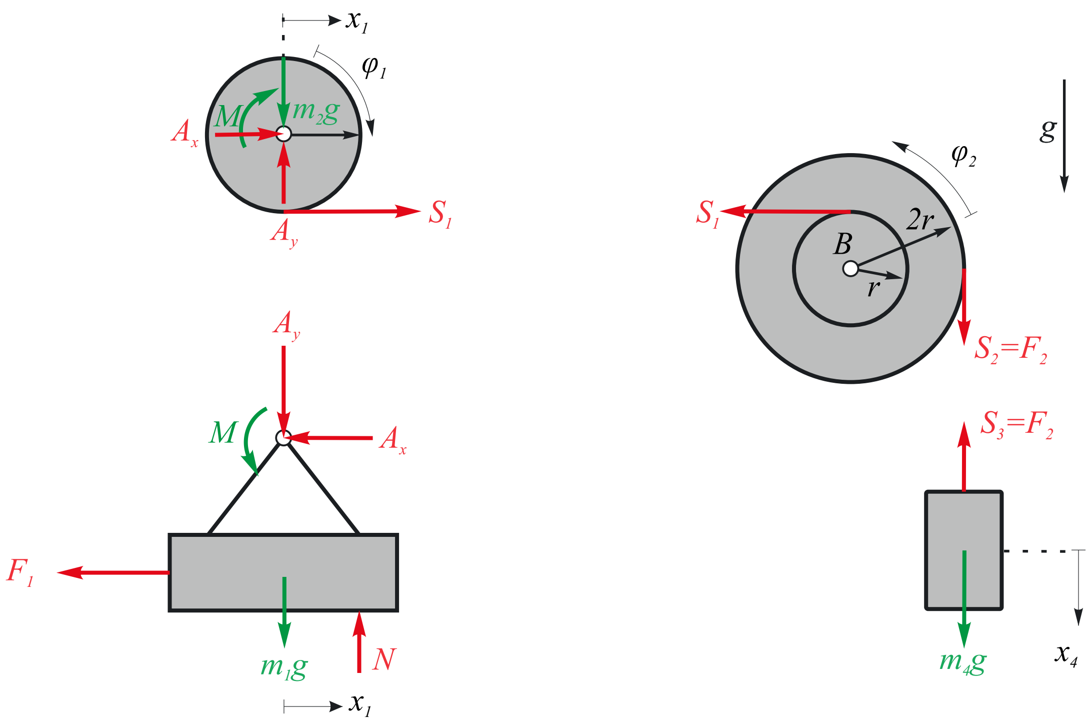
Basisprüfung **7. August 2017, 09^{00}- 11^{00}**

Dr. Stephan Kaufmann **Musterlösung** **Sommer 2017**

Aufgabe 4 *(18 Punkte)*

a) Das System hat den Freiheitsgrad 3. Das heisst die Lage des Systems kann mit drei Koordinaten (z.B. x_1, x_2 und x_4) eindeutig beschrieben werden.

b) Freischnittskizze:



c) Bewegungsgleichungen

Motorblock:

$$m_1\ddot{x}_1 = -F_1 - A_x \tag{1}$$

Seilrolle:

$$m_2\ddot{x}_1 = A_x + S_1 \tag{2}$$

$$I_A\ddot{\varphi}_1 = -rS_1 + M \tag{3}$$

Stufenrolle:

$$I_B\ddot{\varphi}_2 = rS_1 - 2rF_2 \tag{4}$$

Quader:

$$m_4\ddot{x}_4 = m_4 g - F_2 \tag{5}$$

d) Kinematische Relationen:

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_1 - r\dot{\varphi}_1 \tag{6}$$

$$\dot{x}_2 = -r\dot{\varphi}_2 \tag{7}$$

$$\dot{x}_3 = -2r\dot{\varphi}_2 \tag{8}$$

$$\dot{x}_3 = 2\dot{x}_2,$$

mit den gewählten Koordinaten:

$$x_3 = 2x_2 \tag{9}$$

e) Kraftgesetze der Federn:

$$F_1 = c_1 x_1 \tag{10}$$

$$F_2 = c_2(x_4 - x_3) \tag{11}$$

f) Zusammenfassen der Differentialgleichungen:

(1) + (2) :

$$\ddot{x}_1(m_1 + m_2) = S_1 - F_1 \tag{12}$$

(3) mit (6):

$$S_1 = \frac{Mr - I_A(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2)}{r^2} \tag{13}$$

(12) mit (13) und (10):

$$\ddot{x}_1(m_1 + m_2) = \frac{Mr - I_A(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2)}{r^2} - c_1 x_1$$

$$\ddot{x}_1\left(m_1 + m_2 + \frac{I_A}{r^2}\right) - \frac{I_A\ddot{x}_2}{r^2} + c_1 x_1 = \frac{M}{r} \tag{14}$$

(11) mit (9):

$$F_2 = c_2(x_4 - 2x_2) \tag{15}$$

(4) mit (8),(13) und (15):

$$\frac{-I_B\ddot{x}_2}{r^2} = \frac{Mr - I_A(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2)}{r^2} - 2c_2(x_4 - 2x_2)$$

$$\frac{I_A\ddot{x}_1}{r^2} - \frac{(I_A + I_B)\ddot{x}_2}{r^2} + 2c_2(x_4 - 2x_2) = \frac{M}{r} \tag{16}$$

(5) mit (10):

$$m_4\ddot{x}_4 = m_4 g - c_2(x_4 - 2x_2)$$

$$m_4\ddot{x}_4 + c_2(x_4 - 2x_2) = m_4 g \tag{17}$$