ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Technische Mechanik

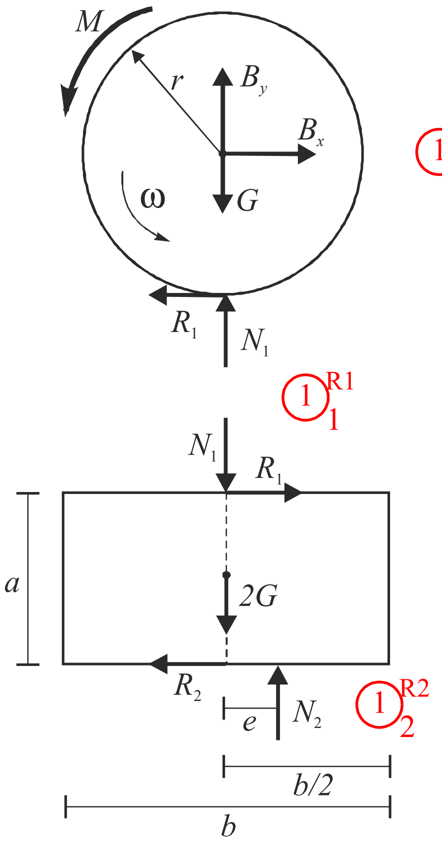
IMES
Institut für Mechanische Systeme

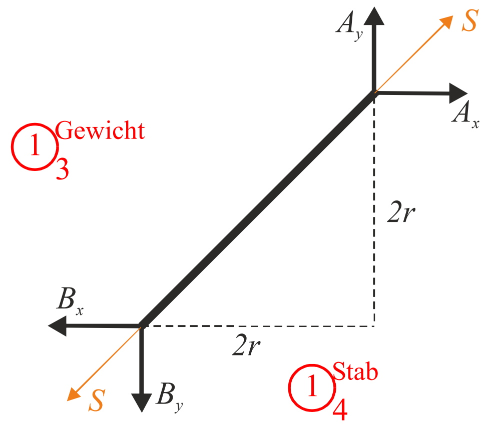
Klausur III — 11. Dezember 2012, 08^{15} - 09^{15}

Dr. Stephan Kaufmann **Musterlösung** **Herbstsemester 2012**

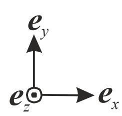
Aufgabe 1 (24 Punkte)

a) Freigeschnittenes System





(oder direkt als Pendelstütze mit Kraft S)



b) *Körper: Quader*

KB(x):	1 KR 5	$R_1 - R_2 = 0$	$\Rightarrow$	$R_2 = R_1$	(I)
KB(y):		$N_2 - N_1 - 2G = 0$	$\Rightarrow$	$N_1 = N_2 - 2G$	(II)
MB(C,z):	1 KR 6	$\frac{a}{2}R_1 + \frac{a}{2}R_2 - eN_2 = 0$	$\Rightarrow$	$N_2 = \frac{a}{2e}(R_1 + R_2)$	(III)

Körper: Rad

KB(x):	1 KR 7	$B_x - R_1 = 0$	$\Rightarrow$	$B_x = R_1$	(IV)
KB(y):		$B_y + N_1 - G = 0$	$\Rightarrow$	$B_y = G - N_1$	(V)
MB(B,z):	1 KR 8	$M - rR_1 = 0$	$\Rightarrow$	$M = rR_1$	(VI)

Körper: Stab

KB(x): $A_x - B_x = 0 \quad\Rightarrow\quad A_x = B_x$ (VII)

KB(y): $A_y - B_y = 0 \quad\Rightarrow\quad A_y = B_y$ (VIII)

MB(A,z): $2rB_y - 2rB_x = 0 \quad\Rightarrow\quad B_x = B_y$ (IX)

Es folgt: $A_x = A_y = B_x = B_y$ oder direkt aus Pendelstütze $\frac{\sqrt{2}}{2}S$. 1_{9} (X)

Alle Unbekannte als Funktion von R_1 ausdrucken:

(I) in (III): $N_2 = \frac{a}{2e}(R_1 + R_1) \quad\Rightarrow\quad N_2 = \frac{a}{e}R_1$ (XI)

(IX),(IV) in (V): $G - N_1 = R_1 \quad\Rightarrow\quad N_1 = G - R_1$ (XII)

Gleitreibungsgesetz: $R_1 = \mu_1 N_1 = \frac{1}{3}N_1$ 1_{10} *(XIII)*

(XIII) in (XII): $N_1 = G - \frac{1}{3}N_1 \quad\Rightarrow\quad N_1 = \frac{3}{4}G$ 1_{11} *(XIV)*

(XIV) in (XIII): $R_1 = \frac{G}{4}$ 1_{12} *(XV)*

(XV) in (IV): $A_x = A_y = B_x = B_y = \frac{G}{4}$ 1_{13} *(XVII)*

(XV) in (VI): $M = \frac{rG}{4}$ 1_{14} *(XVIII)*

c) Damit das System in Ruhe bleibt, muss die Haftbedingung $|R_2| \le \mu_0 |N_2|$ erfüllt sein.

(XV) in (I): $R_2 = \frac{G}{4}$ 1_{16} (XIV) in (II): $N_2 = \frac{11}{4}G$ 1_{15}

Bekannte Grössen einsetzen: $\frac{G}{4} \le \mu_0 \frac{11}{4}G$ bzw. $\mu_0 \ge \frac{1}{11}$ 1_{18}

1^{KR}_{17}

d) Der Quader kippt nicht, falls die Bedingung $e \le \frac{b}{2}$ erfüllt ist.

aus (III): $e = \frac{aR_1}{N_2} = a\frac{G}{4}\left(\frac{4}{11G}\right) = \frac{a}{11} \quad\Rightarrow\quad \frac{a}{b} \le \frac{11}{2}$ 1^{KR}_{20}

1_{19}

e) Das Rad dreht sich jetzt im Uhrzeigersinn mit konstantem Rotationsschnelligkeit ω. Bei der Systemtrennung bleibt alles gleich ausser die Reibungskraft R_1. 1 Idee 21

(Immer noch ein Pendelstütze: $A_x = A_y = B_x = B_y$)

Körper: Rad

KB(x):	$B_x + R_1 = 0$	$\Rightarrow$	$B_x = -R_1$	(1)
KB(y):	$B_y + N_1 - G = 0$	$\Rightarrow$	$N_1 = G + R_1$	(2)
MB(B,z):	$M + rR_1 = 0$	$\Rightarrow$	$M = -rR_1$	(3)

Gleitreibungsgesetz: $R_1 = \mu_1 N_1 = \frac{1}{3}N_1$ (4)

(4) in (2):	$N_1 = G + \frac{1}{3}N_1$	$\Rightarrow$	$N_1 = \frac{3}{2}G$	(5)
(5) in (4):	$R_1 = \frac{1}{2}G$			

Körper: Quader

KB(x):	$R_1 + R_2 = 0$	$\Rightarrow$	$R_2 = -\frac{1}{2}G$ 1 22	(6)
KB(y):	$N_2 - N_1 - 2G = 0$	$\Rightarrow$	$N_2 = \frac{7}{2}G$ 1 23	(7)

Für $\mu_0 = \frac{1}{10}$ ist die Haftbedingung $|R_2| \le \mu_0 |N_2|$ nicht erfüllt. $\frac{1}{2}G > \frac{7}{20}G$ 1 KR 24

Der Quader gleitet!

1 [1] Normal- und Reibungskraft zwischen *Rad* und *Quader*

1 [2] Normal- und Reibungskraft zwischen *Quader* und *Boden* (mit Abstand e)

1 [3] Gewichtskräfte für beide Körper korrekt eingeführt (mit G_i oder G bzw. $2G$)

1 [4] Stab korrekt freigeschnitten

1 [KR, 5] Komponentenbedingungen *Quader* konsequent richtig bezüglich Skizze

1 [KR, 6] Momentenbedingung *Quader* konsequent richtig bezüglich Skizze

1 [KR, 7] Komponentenbedingungen *Rad* konsequent richtig bezüglich Skizze

1 [KR, 8] Momentenbedingung *Rad* konsequent richtig bezüglich Skizze

1 [9] Lagerkräfte in A und B: $A_x = A_y = B_x = B_y$ oder $\frac{\sqrt{2}}{2}S$

1 [10] Gleitreibungsgesetz R_1 richtig (μ_1 eingesetzt)

1 [11] Normalkraft N_1 richtig

1 [12] Reibungskraft R_1 richtig

1 [13] Lagerkräfte in A richtig

1 [14] Antriebsmoment M richtig

1 [15] Reibungskraft R_2 richtig

1 [16] Normalkraft N_2 richtig

1 [KR, 17] Haftbedingung konsequent richtig bezüglich R_2 und N_2 angewendet

1 [18] Bedingung für μ_0 richtig

1 [19] Abstand e richtig

1 [KR, 20] Kippbedingung konsequent richtig bezüglich e

1 [21] Idee: alles gleich bis auf die Reibungskraft R_1

1 [22] Reibungskraft R_2 richtig

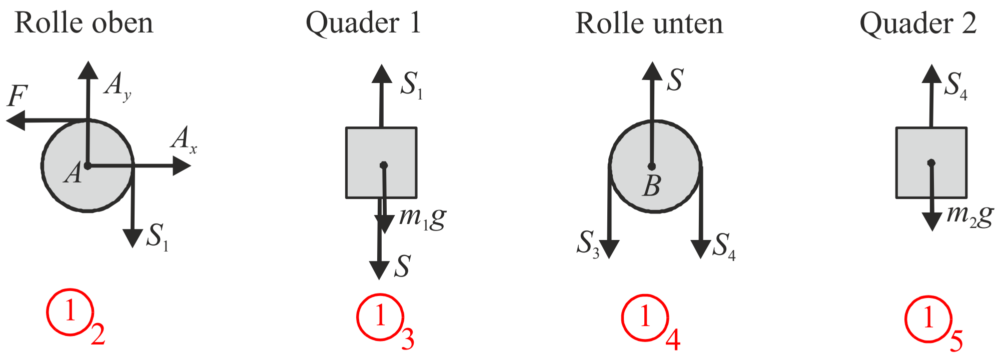
1 [23] Normalkraft N_2 richtig

1 [KR, 24] Schlussfolgerung aus der Haftbedingung konsequent richtig bezüglich R_2 und N_2

Aufgabe 2 *(17 Punkte)*

a) Der Freiheitsgrad des Systems ist 1. 1_{1}

b) Freigeschnittenes System



c) Die Massen des Quaders 1 und 2 werden im Schwerpunkt angreifend eingeführt und die Dynamik wird anhand eines Punktmassenmodells hergeleitet. Es handelt sich hier um Problem der Dynamik. Eigentlich müsste für die Rolle der Drallsatz aufgestellt werden. Da diese aber masselos ist, verschwindet der Drall und es kann mit den Methoden der Statik gearbeitet werden.

Rolle oben

KB(x): $A_x = F$

KB(y): $A_y = S_1$

MB(A,z): 1^{KR}_{6} $RF - RS_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad S_1 = F \qquad \text{(I)}$

Rolle unten

KB(y): 1^{KR}_{7} $S - S_3 - S_4 = 0$

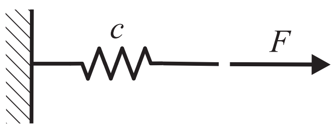
MB(B,z): 1^{KR}_{8} $RS_3 - RS_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad S_3 = S_4 = \frac{S}{2}$ 1^{KR}_{9} $\qquad \text{(II)}$

Bewegungsdifferentialgleichungen

Quader 1: 1^{KR}_{10} $m_1\ddot{x}_1 = m_1g + S - S_1 \quad \Rightarrow \quad m_1\ddot{x}_1 = m_1g + S - F \qquad \text{(III)}$

Quader 2: 1^{KR}_{11} $m_2\ddot{x}_2 = m_2g - S_4 \quad \Rightarrow \quad m_2\ddot{x}_2 = m_2g - \frac{S}{2} \qquad \text{(IV)}$

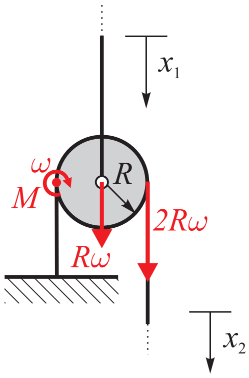
Federkraft:



$$F = cx_1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + cx_1 = m_1g + S \\ m_2\ddot{x}_2 = m_2g - \frac{S}{2} \end{cases} \qquad \text{(V)}$$

1^{KR}_{12} $\qquad 1^{KR}_{13}$

d) Zulässiger momentaner Bewegungszustand:



$$\dot{x}_1 = R\omega$$

$$\dot{x}_2 = 2R\omega$$

Damit wird die kinematische Relation:

$$2\dot{x}_1 = \dot{x}_2 \quad 1_{14} \qquad \text{(VI)}$$

und deren Ableitung:

$$2\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 \quad 1_{15} \qquad \text{(VII)}$$

e) Mithilfe der kinematischen Relation lassen sich die beiden Bewegungsdifferentialgleichungen koppeln.

(VII) in (IV): $m_2 2\ddot{x}_1 = m_2 g - \dfrac{S}{2} \quad \Rightarrow \quad S = -4m_2\ddot{x}_1 + 2m_2 g \quad 1_{16}$ (VIII)

(VIII) in (V): $m_1\ddot{x}_1 + cx_1 = m_1 g - 4m_2\ddot{x}_1 + 2m_2 g$

$$\Rightarrow \quad (m_1 + 4m_2)\ddot{x}_1 + cx_1 = (m_1 + 2m_2)g \quad 1_{17}$$

Anfangsbedingung:

$$x_1(0) = 0$$

$$\dot{x}_1(0) = 0$$

Punkteschema Aufgabe 2

$\textcircled{1}_{1}$ Freiheitsgrad des Systems richtig

$\textcircled{1}_{2}$ *Rolle oben* richtig freigeschnitten

$\textcircled{1}_{3}$ *Quader 1* richtig freigeschnitten

$\textcircled{1}_{4}$ *Rolle unten* richtig freigeschnitten

$\textcircled{1}_{5}$ *Quader 2* richtig freigeschnitten

$\textcircled{1}_{6}^{KR}$ Momentenbedingung für *Rolle oben* konsequent richtig bezüglich Skizze

$\textcircled{1}_{7}^{KR}$ Komponentenbedingungen für *Rolle unten* konsequent richtig bezüglich Skizze

$\textcircled{1}_{8}^{KR}$ Momentenbedingung für *Rolle unten* konsequent richtig bezüglich Skizze

$\textcircled{1}_{9}^{KR}$ Beziehung zwischen Seilkräften S - S_3 - S_4 richtig, KR bezüglich Skizze

$\textcircled{1}_{10}^{KR}$ Bewegungsdifferentialgleichung für *Quader 1* konsequent richtig bezüglich Skizze

$\textcircled{1}_{11}^{KR}$ Bewegungsdifferentialgleichung für *Quader 2* konsequent richtig bezüglich Skizze

$\textcircled{1}_{12}^{KR}$ Federkraft konsequent richtig bezüglich Skizze

$\textcircled{1}_{13}$ Korrekte Bewegungsdifferentialgleichungen des Systems

$\textcircled{1}_{14}$ Kinematische Relation richtig

$\textcircled{1}_{15}$ Kinematische Relation korrekt abgeleitet (oder implizit verwendet)

$\textcircled{1}_{16}$ Seilkraft S korrekt auf bekannte Grössen reduziert

$\textcircled{1}_{17}$ System richtig auf eine Gleichung reduziert (Bewegungsgleichung nur Funktion von x oder nur Funktion von y)