Technische Mechanik
151-0223-10

- **Zwischenprüfung** -
Musterlösung

Dr. Paolo Tiso

30. November 2021

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

151-0223-10 Technische Mechanik

Zwischenprüfung 30.11.2021

Dr. Paolo Tiso

Antwortblatt
Musterlösung

Nachname:

Vorname:

Legi-Nummer:

Legi-Nummer

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Antworten

1.	A	B	C	●	E
2.	●	B	C	D	E
3.	A	B	C	●	E
4.	A	●	C	D	E
5.	A	●	C	D	E
6.	A	B	C	D	●
7.	A	B	C	●	E
8.	A	B	C	D	●
9.	A	B	C	D	●
10.	A	●	C	D	E
11.	A	B	C	D	●
12.	A	B	C	●	E

Wie man das Antwortblatt richtig ausfüllt:

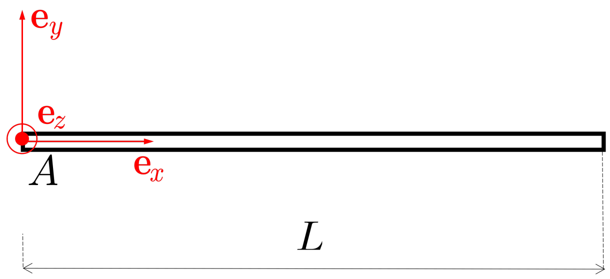
Ja:	~~A~~	B	C	D	E
	A	●	C	D	E
Nein:	~~A~~	B	C	D	E
	A	B	C	D	E

Diese Seite muss am Ende abgegeben werden!

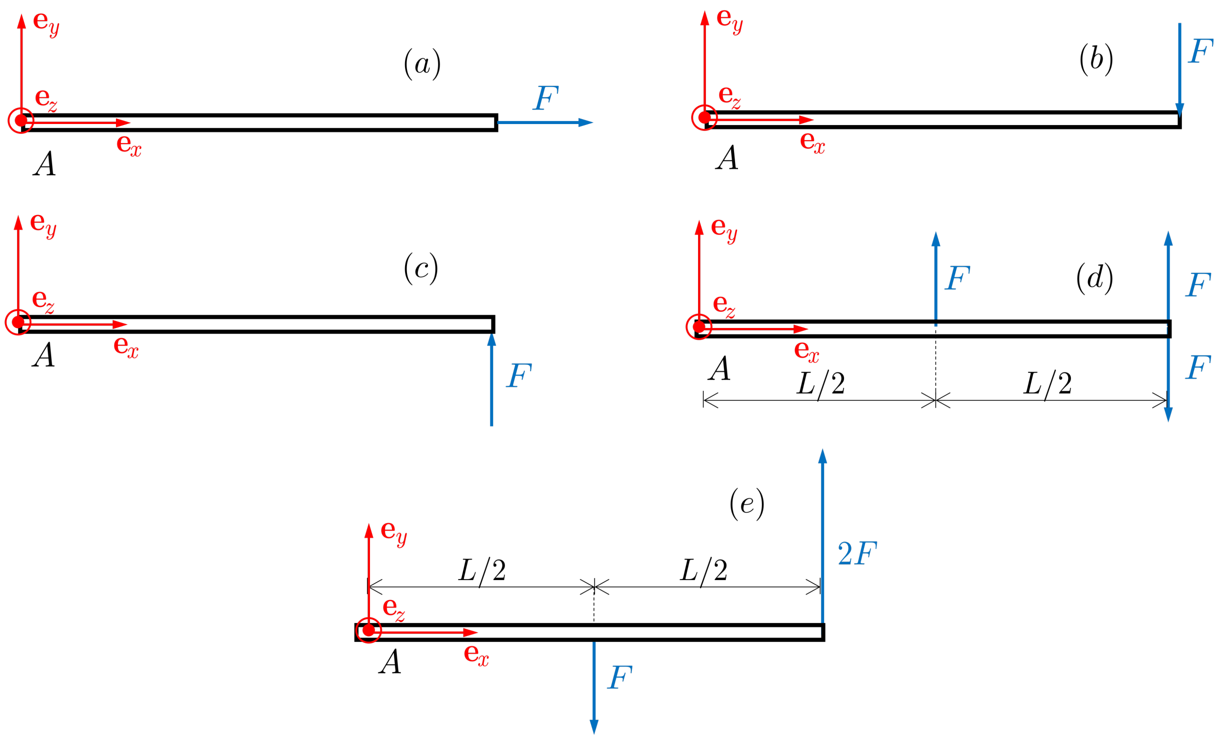
Teil I - Multiple-Choice **(1 richtige Antwort)**

1. Betrachten Sie einen masselosen Balken der Länge L. Die Dyname bezüglich Punkt A ist gegeben als

$$\{\mathbf{R} = F\mathbf{e}_y,\ \mathbf{M}_A = \frac{L}{2}F\mathbf{e}_z\}.$$



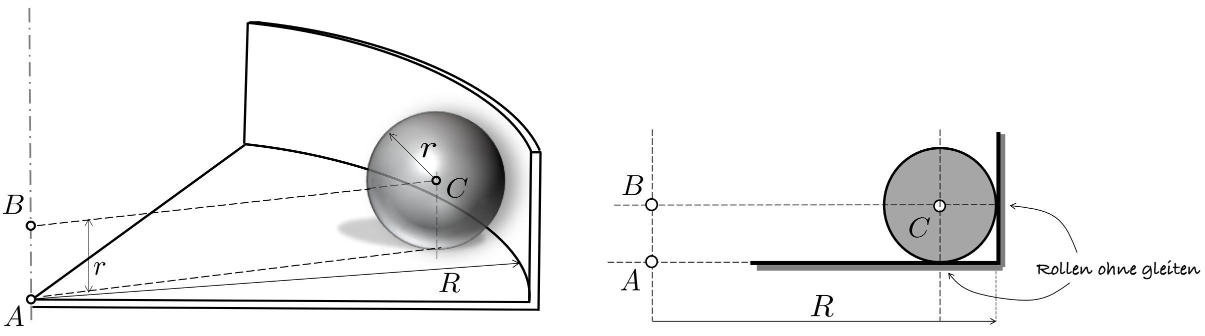
Welcher Kräftegruppe entspricht diese Dyname?



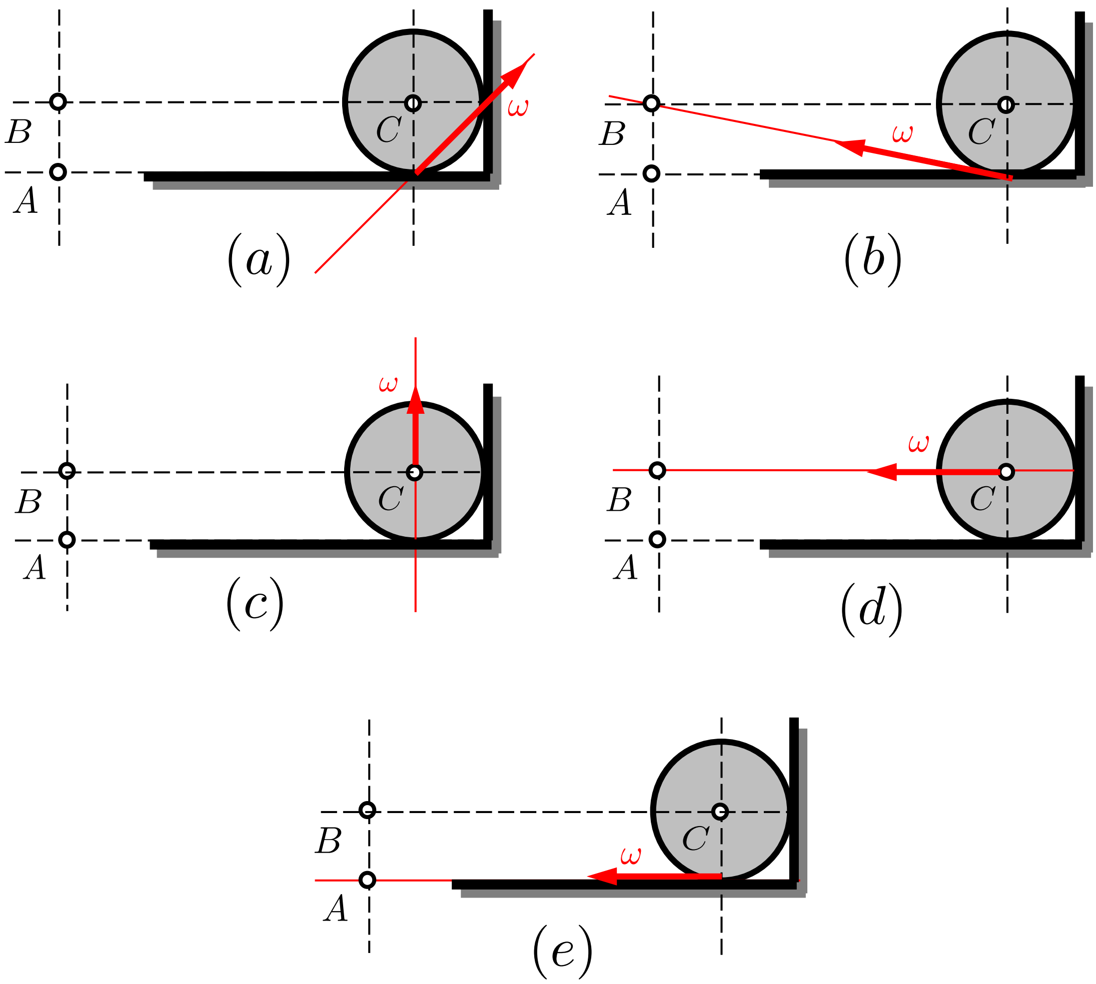
Lösung:

Man kann (a) und (b) sofort ausschliessen, da ihre Resultante die gegebene Dyname nicht entspricht. System (c) erzeugt ein Moment $M_A = FL\mathbf{e}_z$, während System (e) $M_A = 2FL - F\frac{L}{2} = \frac{3}{2}FL$. Daher ist (d) die richtige Antwort.

2. Eine Kugel mit dem Radius r rollt ohne zu gleiten auf einer kreisförmigen Ebene mit Radius R. Gleichzeitig rollt die Kugel (ohne zu gleiten) an einer senkrechten Wand mit demselben Radius R.



In welcher Abbildung ist die Richtung der Rotationsgeschwindigkeit der Kugel richtig dargestellt?



Lösung: Die Bedingung des Rollens (ohne zu gleiten) impliziert, dass die Geschwindigkeit im Berührungspunkt null ist. Daraus kann man schliessen, dass die Rotationsachse durch diese Punkte gehen muss. Abbildung (a) ist die einzige, die das erfüllt.

3. Ein starrer Körper $\mathcal{B}$ bewegt sich auf der Ebene $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y\}$. Zum dargestellten Zeitpunkt haben die Punkte A und B die Geschwindigkeiten $\mathbf{v}_A = a\mathbf{e}_x + 2a\mathbf{e}_y$ bzw. $\mathbf{v}_B = 3a\mathbf{e}_x + 2a\mathbf{e}_y$, wobei a eine Konstante der Einheit $[a] = [m/s]$. Die Ortsvektoren $\mathbf{r}_{OA}$ und $\mathbf{r}_{OB}$ sind gegeben durch $\mathbf{r}_{OA} = 1\mathbf{e}_y$ bzw. $\mathbf{r}_{OB} = 4\mathbf{e}_y$.

Was ist die Lage $\mathbf{r}_{OM}$ des Momentanzentrums?

(a) $\mathbf{r}_{OM} = -\frac{3}{2}\mathbf{e}_x + 3\mathbf{e}_y$

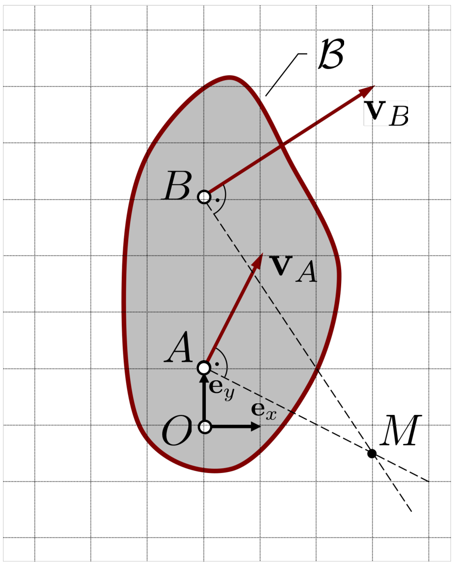
(b) $\mathbf{r}_{OM} = \mathbf{0}$

(c) $\mathbf{r}_{OM} = -\frac{5}{2}\mathbf{e}_x$

▶ (d) $\mathbf{r}_{OM} = 3\mathbf{e}_x - \frac{1}{2}\mathbf{e}_y$

(e) $\mathbf{r}_{OM} = 3\mathbf{e}_y$

Lösung: Man kann das Momentanzentrum grapisch finden wie dargestellt



Alternativ, aus der Starrkörperformel ergibt sich

$$\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}, \tag{1}$$

was dazu führt, dass

$$2a\mathbf{e}_x = \boldsymbol{\omega} \times 3\mathbf{e}_y \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} = -\frac{2}{3}a\mathbf{e}_z. \tag{2}$$

Definitionsgemäss ist die Geschwindigkeit des Momentanzentrums $\mathbf{v}_\pi = \mathbf{0}$. Wenn wir also wieder die Starrkörperformel verwenden, ergibt sich

$$\mathbf{0} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A\pi}, \tag{3}$$

die in Komponenten geschrieben lautet

$$\mathbf{0} = a\mathbf{e}_x + 2a\mathbf{e}_y + \left(-\frac{2}{3}a\right)\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}_{A\pi}. \tag{4}$$

Löst man also nach $\mathbf{r}_{A\pi}$ auf, so erhält man schliesslich

$$\mathbf{r}_{A\pi} = \mathbf{r}_{OM} - \mathbf{r}_{OA} = 3\mathbf{e}_x - \frac{3}{2}\mathbf{e}_y \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}_{OM} = 3\mathbf{e}_x - \frac{1}{2}\mathbf{e}_y. \tag{5}$$

4. Die Rotationsgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ und die Geschwindigkeit $\mathbf{v}_P$ eines Punktes P eines beliebigen starren Körper seien gegeben als

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; [1/s]; \qquad \mathbf{v}_P = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \; [m/s]. \tag{6}$$

Unter welcher Bedingung führt der Körper momentan eine reine Rotation aus?

(a) $v_x = 2v_y$

► (b) $v_x = -v_y$

(c) $v_x = v_y$

(d) $v_x = \sqrt{2}v_y$

(e) $v_z = 0$

Lösung:

Die Rotationsgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ ist gegeben und ungleich Null, also ist die einzige Bedingung, die noch erfüllt werden muss, dass die zweite Invariante verschwinden muss

$$I_2 = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v}_P = 0 \quad \Rightarrow \quad v_x + v_y = 0 \quad \Rightarrow \quad v_x = -v_y. \tag{1}$$

5. Gegeben sei die Bahnkurve $y(t) = \sin^2 x(t)$. Zur Zeit $t_1 = 1$ $[s]$ sind $x(t_1)$ und $\dot{x}(t_1)$ gegeben als

$$x(t_1) = \frac{\pi}{4}\,[m]; \qquad \dot{x}(t_1) = 1\,[m/s].$$

Was ist die Schnelligkeit $v(t_1)$?

(a) $v(t_1) = 1$

▶ (b) $v(t_1) = \sqrt{2}$

(c) $v(t_1) = -\frac{1}{2}$

(d) $v(t_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(e) $v(t_1) = 2\sqrt{2}$

Lösung:

Beim Ableiten der Bahnkurve nach der Zeit t ergibt sich

$$\dot{y}(t) = \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = 2\dot{x}(t)\sin x(t)\cos x(t), \tag{1}$$

wobei man die Kettenregel beachten muss, da $x = x(t)$ eine Funktion der Zeit ist.

Laut Definition ist die Geschwindigkeit in kartesischen Koordinaten

$$\mathbf{v}(t) = \dot{x}(t)\mathbf{e}_x + \dot{y}(t)\mathbf{e}_y \tag{2}$$

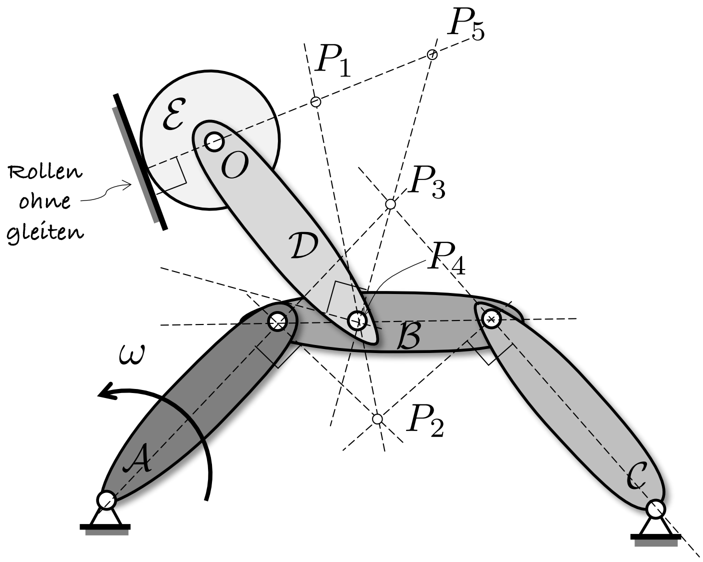
Die Schnelligkeit $v(t)$ wird aus dem Betrag der Geschwindigkeit erhalten als

$$v(t) = |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{\dot{x(t)}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{\dot{x(t)}^2 + (2\dot{x}(t)\sin x(t)\cos x(t))^2}. \tag{3}$$

Wenn $x(t_1)$ und $\dot{x}(t_1)$ in (3) eingesetzt werden, erhält man

$$\Rightarrow \quad v(t_1) = \sqrt{1 + \cancel{2}\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}}\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}}1} = \sqrt{2}. \tag{4}$$

6. Das in der Abbildung dargestellte ebene Mehrkörpersystem besteht aus 5 starren Körpern $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ und $\mathcal{E}$, die über Drehgelenke miteinander verbunden sind, wie dargestellt. Die Körper $\mathcal{A}$ und $\mathcal{C}$ sind an einer ihrer Spitzen mit dem Boden gelenkig verbunden, während die Kreisscheibe $\mathcal{E}$ auf einer Ebene rollt, ohne zu gleiten. Zum dargestellten Zeitpunkt dreht sich der Körper $\mathcal{A}$ um sein Gelenk mit der Rotationsgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$.



Was ist das Momentanzentrum vom Körper $\mathcal{D}$?

(a) P_1

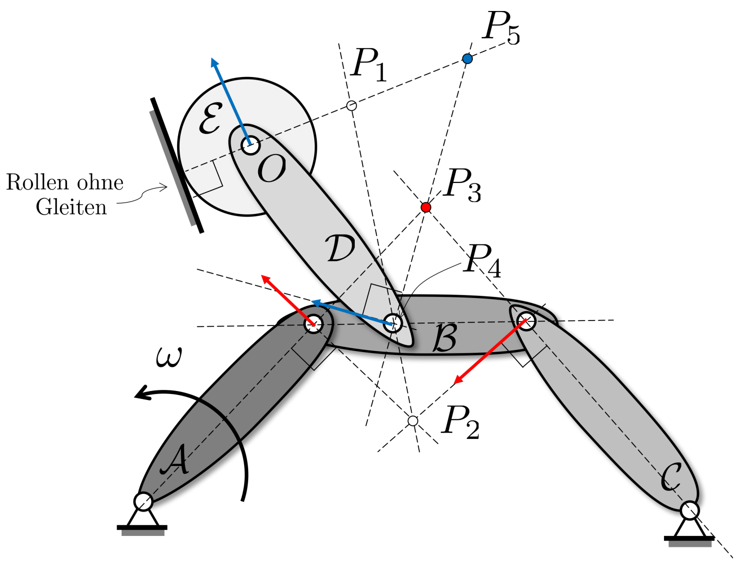
(b) P_2

(c) P_3

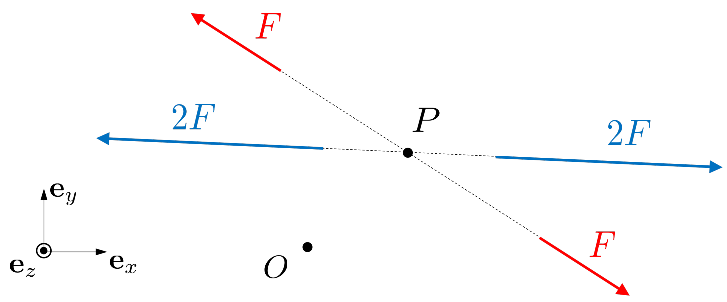
(d) P_4

▶ (e) P_5

Lösung:
Der Punkt P_3 ist das Momentanzentrum für $\mathcal{B}$. Daraus kann man die Richtung der Geschwindigkeit des gemeinsamen Gelenkpunkts zwischen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{D}$ erschliessen, der mit P_4 bezeichnet wird. Die Geschwindigkeit des Punktes O ist parallel zur Wand, da die Kreisscheibe $\mathcal{E}$ ohne zu gleiten rollt. Die richtige Antwort lautet daher P_5.



7. Betrachten Sie die Kräftegruppe auf der Skizze, die aus zwei Kräften vom Betrag F und zwei Kräften vom Betrag $2F$ besteht. Die Kräfte gleichen Betrags und entgegengesetzter Richtung haben die gleiche Wirkungslinie, wie dargestellt. Die zwei Wirkungslinien überschneiden sich im Punkt P.



Was ist die Dyname relativ zu einem beliebigen Punkt O?

(a) $\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$; $\mathbf{M}_O = \mathbf{0} \quad \forall\, O$

(b) $\mathbf{R} = \mathbf{0}$; $\mathbf{M}_O \neq \mathbf{0}$

(c) $\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$; $\mathbf{M}_O \neq \mathbf{0}$

► (d) $\mathbf{R} = \mathbf{0}$; $\mathbf{M}_O = \mathbf{0} \quad \forall\, O$

(e) $\mathbf{R} = \mathbf{0}$; $\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$ nur wenn $O = P$

Lösung:

Die Kräfte heben sich paarweise auf, also ist die Resultante

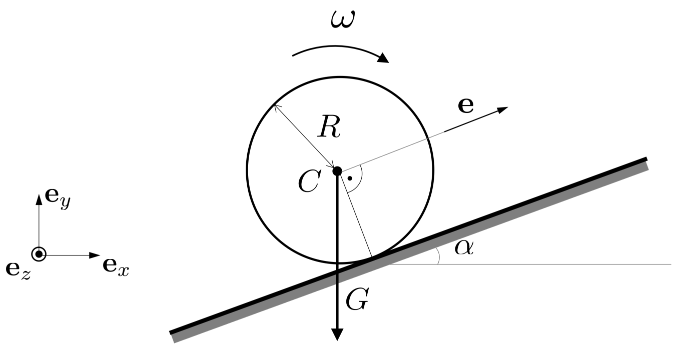
$$\mathbf{R} = \mathbf{0}. \tag{1}$$

Man kann ausserdem bemerken, die von den Kräften erzeugten Momente gleichen sich gegenseitig aus, da die Kräfte paarweise den gleichen Betrag und entgegengesetzter Richtung haben, also

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{0}. \tag{2}$$

Der Abstand zwischen dem Angriffspunkt der Kräfte und dem Punkt O ist für alle Kräfte gleich, unabhängig davon, wo sich O befindet.

8. Ein homogenes Rad mit Gewicht G, Radius R und Mittelpunkt C rollt ohne zu gleiten auf einer schiefen Ebene mit Neigungswinkel α. Die Rotationsgeschwindigkeit des Rades ist gegeben als $\boldsymbol{\omega} = -\omega\, \mathbf{e}_z$ wie dargestellt.



Was ist die Leistung im Punkt C?

(a) $P = G\omega R$

(b) $P = -G\omega R\cos\alpha$

(c) $P = G\omega$

(d) $P = 0$

► (e) $P = -G\omega R\sin\alpha$

Lösung:

Die Richtung der Geschwindigkeit im Mittelpunkt C ist gegeben als $\mathbf{e}$. Zusäztlich wissen wir, der Kontaktpunkt zwischen Rad und Ebene ist momentan in Ruhe, da das Rad auf der Ebene ohne zu gleiten rollt .

Die Geschwindigkeit im Mittelpunkt ist dann

$$\mathbf{v}_C = \omega R\mathbf{e}. \tag{1}$$

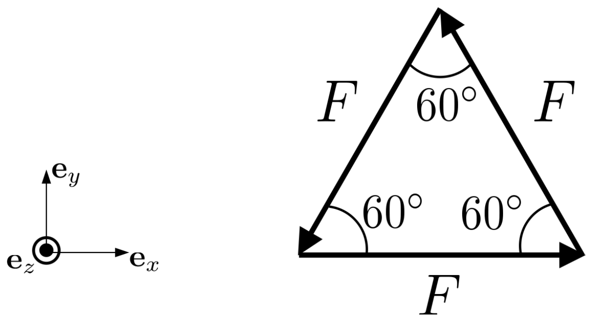
Die einzige Kraft die im Punkt C wirkt ist die Gewichtskraft

$$\mathbf{G} = -G\mathbf{e}_y. \tag{2}$$

Wir erhalten die Leistung als

$$\mathbf{P} = \mathbf{G}\cdot\mathbf{v} = G\mathbf{e}_y \cdot \omega R\sin\alpha\mathbf{e} = -G\omega R\sin\alpha. \tag{3}$$

9. Betrachten Sie die dargestellte Kräftegruppe, die aus drei Kräften vom Betrag F besteht. Die Kräfte schliessen miteinander einen Winkel von 60° ein.



Was ist die Resultante der Kräftegruppe ?

(a) $\mathbf{R} = \frac{1}{2}F\mathbf{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{e}_y$

(b) $\mathbf{R} = 2F\mathbf{e}_x$

(c) $\mathbf{R} = -2F\mathbf{e}_x$

(d) $\mathbf{R} = F\mathbf{e}_x + F\mathbf{e}_y$

► (e) $\mathbf{R} = \mathbf{0}$

Lösung:

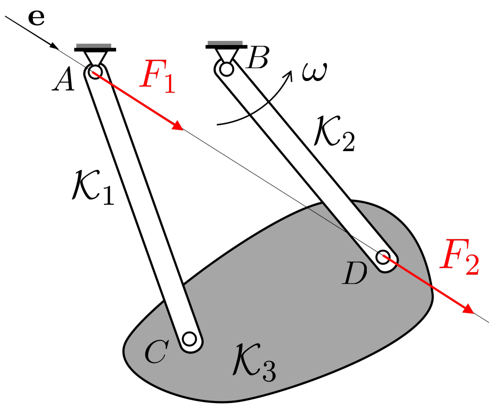
Es lässt sich leicht erkennen, dass die Kräfte sich gegenseitig aufheben. vektoriell ausgedrückt lauten die Kräfte

$$\mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} F; \quad \mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} F; \quad \mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} F \tag{1}$$

also ist die Resultante

$$\mathbf{R} = \left(F - \frac{F}{2} - \frac{F}{2} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}F - \frac{\sqrt{3}}{2}F \right) \mathbf{e}_y = \mathbf{0}. \tag{2}$$

10. Betrachten Sie das abgebildete System, das aus den 3 Starrkörpern $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$, $\mathcal{K}_3$ besteht. Die Körper $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_3$ bzw. $\mathcal{K}_2$ und $\mathcal{K}_3$ sind in C bzw. in D miteinander gelenkig verbunden. Das System ist in den Punkten A und B gelenkig gelagert. Die Kräfte $\mathbf{F}_1$ und $\mathbf{F}_2$, die an den Punkten A bzw. D greifen, besitzen *den gleichen Betrag* F und die gleiche Wirkungslinie. Wir wissen zusätzlich, dass Körper $\mathcal{K}_2$ die Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0}$ hat; ihre Richtung kann von der Abbildung abgelesen werden. Wir bezeichnen mit $\mathbf{R}$ die Resultante von $\mathbf{F}_1$ und $\mathbf{F}_2$ und mit $\mathbf{M}_A$ bzw. $\mathbf{M}_D$ das resultierende Moment bezüglich A bzw. D.



Welche der folgenden Aussagen ist *nicht* richtig?

(a) Die Gesamtleistung ist nicht null.

▶ (b) Die zwei Kräfte $\mathbf{F}_1$ und $\mathbf{F}_2$ sind statisch äquivalent.

(c) $\mathbf{R} = 2F\mathbf{e}$

(d) $\mathbf{M}_A = \mathbf{0}$

(e) $\mathbf{M}_D = \mathbf{0}$

Lösung:

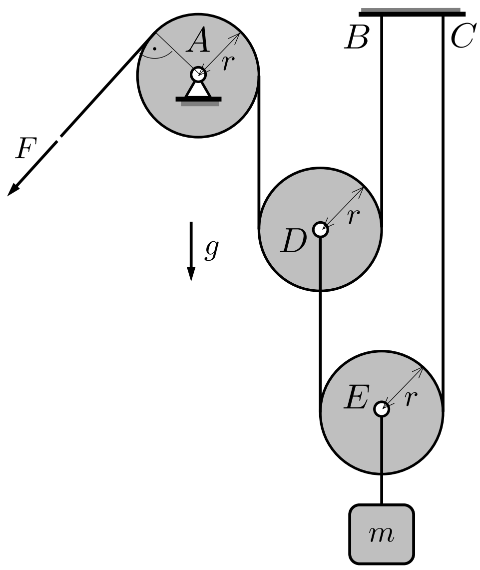
Laut Definition sind zwei Kräfte genau dann statisch äquivalent, wenn sie vektoriell gleich sind und ihre Wirkungslinien übereinstimmen. Das gilt aber nur dann, wenn die Kräfte am selben starren körper angreifen, was hier nicht der Fall ist. Also ist (b) die korrekte Antwort, da die Aussage falsch ist.

Die Gesamtleistung ist nicht null, da die Geschwindigkeit im Punkt A zwar null ist, aber im Punkt D nicht. Daher ist Aussage (a) richtig.

Die Resultante ist in Richtung der Wirkungslinie $\mathbf{e}$ und beträgt $2F$, also ist auch Aussage (c) nicht die gesuchte Antwort.

Die Kräfte erzeugen kein Moment bezüglich Punkt A bzw. D, da ihre Wirkungslinie durch beide Punkte geht. Also sind auch Aussagen (d) und (e) richtig.

11. Das dargestellte System besteht aus drei masselosen Rollen mit gleichem Radius r, die durch undehnbare Seile verbunden sind. Die Seile sind um die Riemenscheiben gewickelt und rutschen nicht. Die obere Rolle ist in ihrem Mittelpunkt A gelenkig gelagert, während die Seile in den Punkten B und C an der Decke befestigt sind. Ein Körper der Masse m hängt am Mittelpunkt E der unteren Rolle. Die Schwerkraft g wirkt nach unten.



Wie gross ist der Betrag der Kraft **F**, die auf das Seil ausgeübt werden muss, so dass das Gleichgewicht erfüllt ist?

(a) $F = 0$

(b) $F = mg$

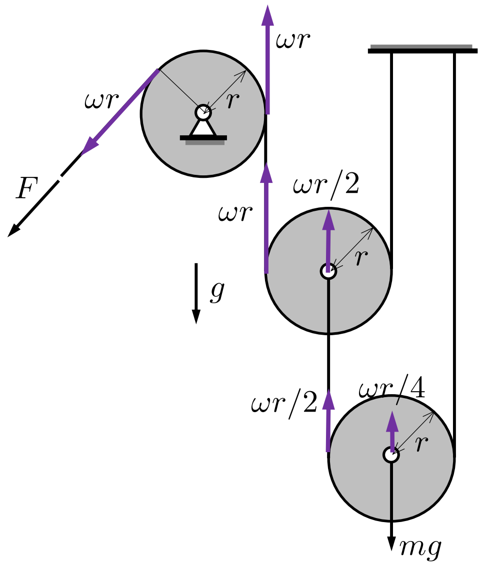
(c) $F = \dfrac{mg}{2}$

(d) $F = \dfrac{2mg}{3}$

► (e) $F = \dfrac{mg}{4}$

Lösung:

Die Geschwindigkeiten lassen sich wie in der Abbildung dargestellt leicht ermitteln:



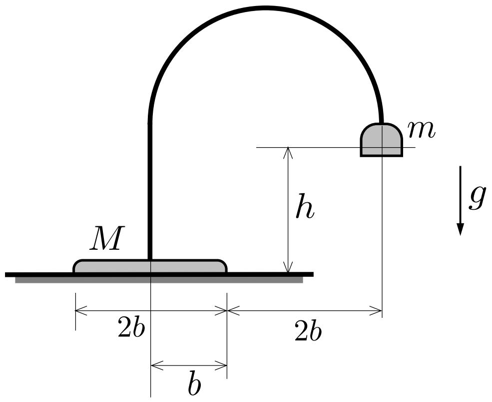
Wir benutzen den PdvL auf dem ganzen System und finden

$$\tilde{P}_{tot} = \omega r F - \frac{\omega}{4} r m g = 0 \tag{1}$$

Daraus finden wir

$$F = \frac{mg}{4}. \tag{2}$$

12. Das dargestellte System ist ein idealisiertes Modell einer Lampe. Es besteht aus einem Unterteil von Masse M und Breite $2b$, das mit einem Punkt von Masse m durch einen masselosen, starren gebogenen Körper verbunden ist. Die Geometrie des Verbindungselements ist so beschaffen, dass sich die Lampe in der Höhe h vom Boden und im Abstand $2b$ vom Rand des Unterteils befindet, wie dargestellt. Der Unterteil hat Kontakt mit dem Boden. Die Schwerkraft wirkt nach unten.



Wie lautet die Bedingung für m, damit die Lampe nicht kippt?

(a) $m \leq \frac{M}{4}$

(b) $m \leq M$

(c) $m \leq \frac{5M}{6}$

► (d) $m \leq \frac{M}{2}$

(e) $m \geq \frac{h}{2b} M$

Lösung:

Der Schwerpunkt des Systems x_c muss die folgende Bedingung erfüllen, damit es nicht kippt:

$$x_c \leq b. \tag{1}$$

Wir erhalten der Schwerpunkt als

$$x_c = \frac{0 \cdot M + 3b \cdot m}{M + m} = \frac{3bm}{M + m}. \tag{2}$$

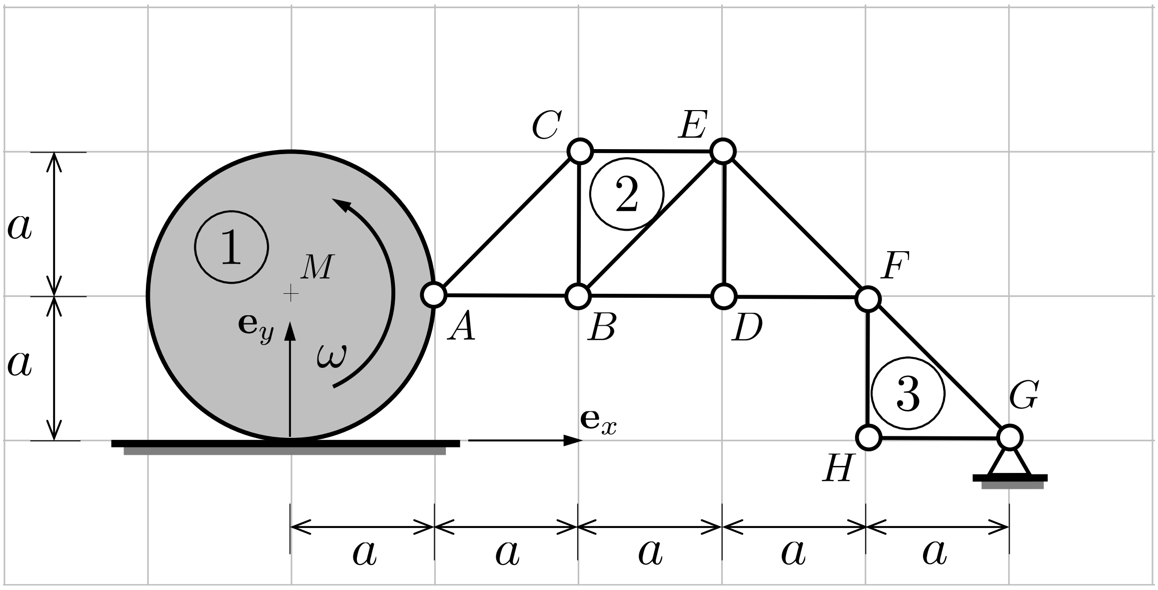
Einsetzen von (2) ins (1) liefert

$$\begin{aligned} \frac{3bm}{M+m} &\leq b \\ m &\leq \frac{M}{2}. \end{aligned} \tag{3}$$

Teil II - Rechenteil

AUFGABE 1. *[9 Punkte]*

Das in der Skizze dargestellte ebene mechanische System, bestehend aus einem Rad und zwölf gelenkig miteinander verbundenen starren Stäben (ebenes Fachwerk), ist wie folgt aufgebaut: Das Rad, welches auf der gezeichneten Ebene rollt, hat die bekannte Rotationsschnelligkeit ω. Im Punkt A ist das Rad gelenkig verbunden mit den Stäben AB und AC. Im Punkt G sind die Stäbe ebenfalls gelenkig gelagert. Die schrägen Stäbe haben Länge $\sqrt{2}a$, die restlichen horizontalen und vertikalen Stäbe haben die Länge a. Der Radius des Rades ist a.



1. Benennen Sie alle starren Körper in der obenstehende Abbildung. *[1 Punkt]*

   Das System besteht aus 3 starren Körper: das Rad (1), das Fachwerk $ABDFEC$ (2) und das Fachwerk FGH (3), wie in der Abbildung bezeichnet.

2. Ist das System statisch bestimmt? Begründen Sie ihre Antwort. *[1 Punkt]*

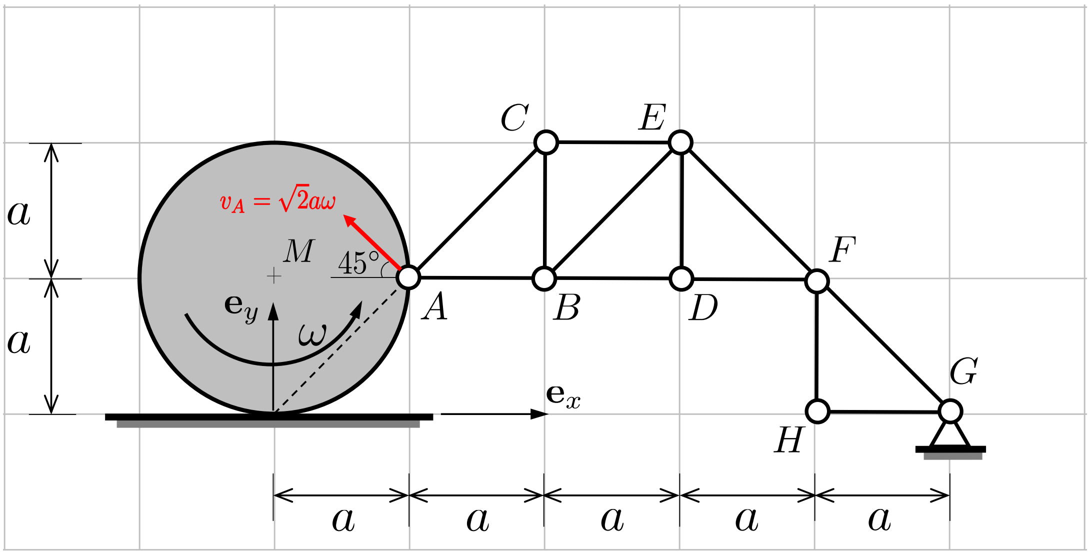
   Nein. Wir bezeichnen mit b die Anzahl der Bindungsreaktionen und mit n die Anzahl von Gleichgewichtsbedingungen: wir haben $b = 8$ Bindungsreaktionen und $n = 3 \cdot 3 = 9$ GGB (3 für jeden Teilkörper). Das System ist dann statisch bestimmt, wenn n = b, was hier nicht der Fall ist.

3. Finden Sie die Geschwindigkeit $\mathbf{v}_A$ des Punktes A. *[1 Punkt]*

Aus der Aufgabenstellung wissen wir, dass das Rad auf der Ebene rollt, das heisst, das Geschwindikeit im Ursprung O ist null. Da die Rotationsgeschwindigkeit vom Rad auch gegeben ist, können wir die Starrkörperformel benutzen um die Geschwindigkeit im Punkt A zu erhalten als

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_A &= \mathbf{0} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r_{OA}} \\ &= \omega \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \sqrt{2}a \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \omega a \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2}\omega a \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{1}$$

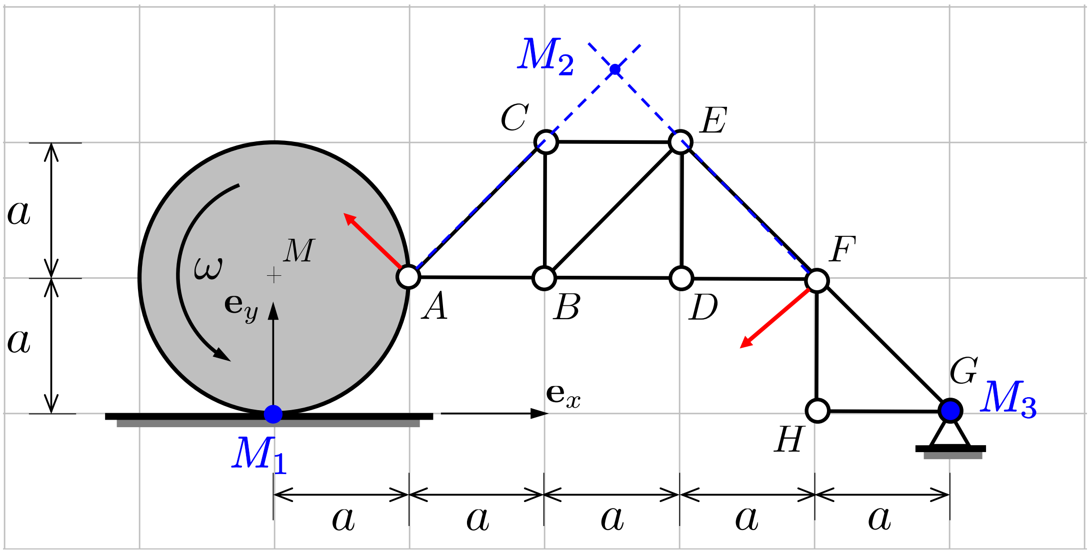
Graphische Lösung:



Anmerkung: im Folgenden wird die z-Komponente der Vektoren weggelassen, da es sich um ein ebenes Problem handelt.

4. Zeichnen Sie die Momentanzentren aller starren Körper in die gegebene Skizze, oder geben Sie ihre kartesischen Koordinaten an. *[2 Punkte]*

Graphische Lösung:



Das Momentanzentrum vom Körper 1 ist einfach

$$M_1 = O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \tag{2}$$

da wir wissen dass die Geschwindigkeit im Punkt O null ist.
Ähnlicherweise ist Körper 3 durch einen nicht verschiebbaren drehbaren Lager im Punkt G am Boden gelagert, also

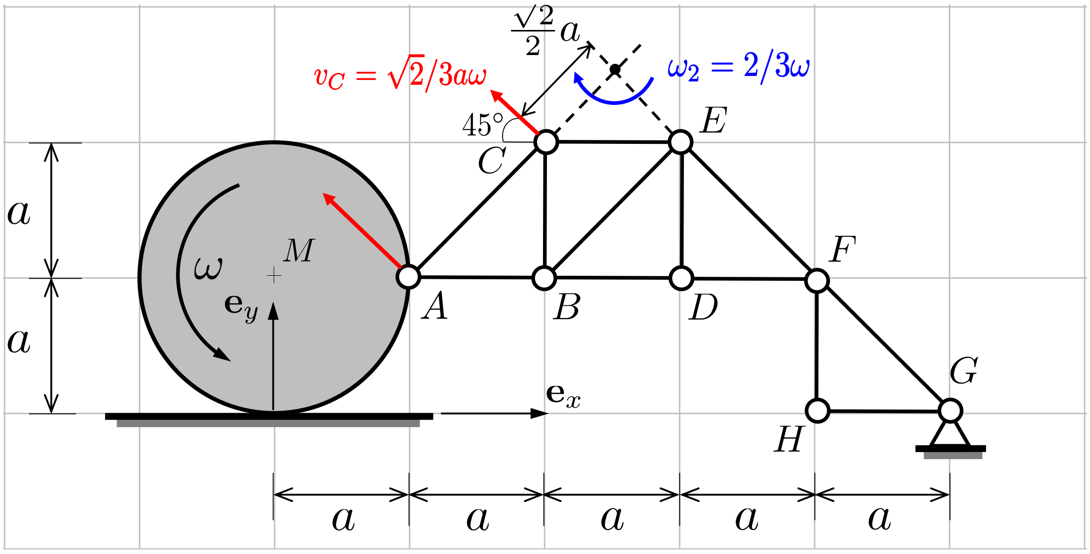
$$M_3 = G = \begin{pmatrix} 5a \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Das Momentanzentrum vom Körper 2 ist dann

$$M_2 = \frac{5}{2}a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \tag{4}$$

5. Bestimmen Sie die Kinemate im Punkt C. *[2 Punkte]*

Graphische Lösung:



Da der Punkt A zum Rad und zum Fachwerk 2 gehört, können wir daraus die Rotationsgeschwindigkeit ω_2 schliessen:

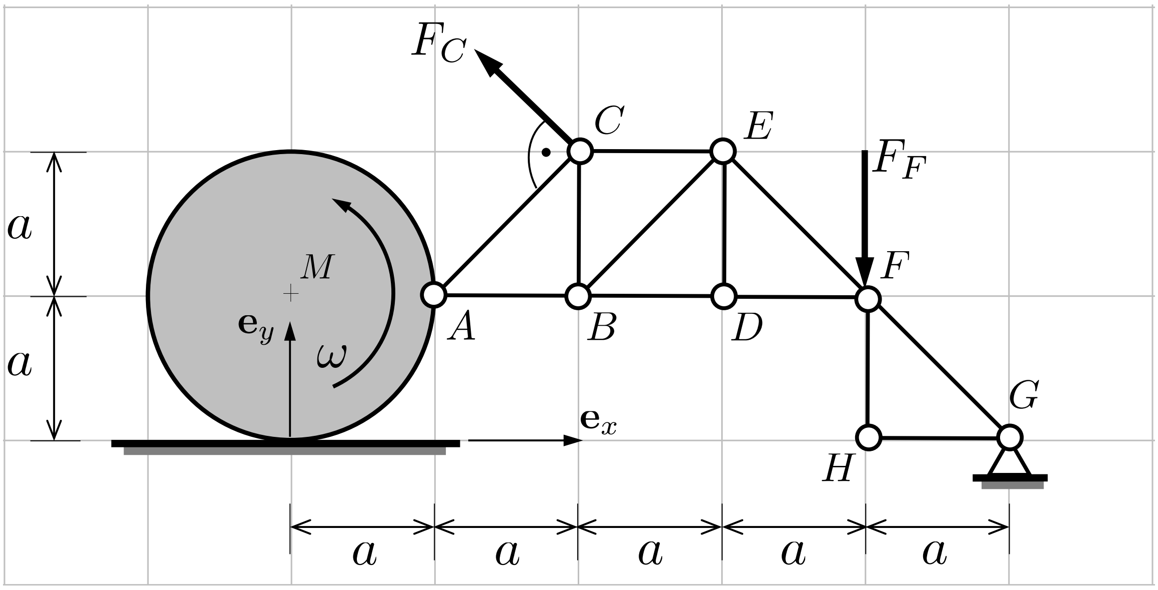
$$v_A = \sqrt{2}\omega a = \frac{3}{2}\sqrt{2}\omega_2 a \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \frac{2}{3}\omega \tag{5}$$

$$\mathbf{v}_C = \frac{2}{3}\omega\frac{a}{2}\sqrt{2}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{3}a\omega\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}. \tag{6}$$

Die Kinemate im Punkt C sind dann

$$\left\{\frac{\sqrt{2}}{3}a\omega\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}, \frac{2}{3}\omega\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}. \tag{7}$$

Das System sei nun wie in der Figur belastet, wobei die Kraft $\mathbf{F}_F = -F\mathbf{e}_y$ gegeben ist.



6. Finden Sie die Kraft $\mathbf{F}_C$, die senkrecht auf dem Stab AC gerichtet ist, so dass sich das System in Ruhe befindet. *[2 Punkte]*

Wir finden die Geschwindigkeit im Punkt F als

$$\mathbf{v}_F = \sqrt{2}a\omega \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$\mathbf{F}_C = F_C \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \tag{9}$$

Nun können wir den PdvL anwenden:

$$\tilde{P} = \mathbf{F}_C \cdot \mathbf{v}_C + \mathbf{F}_F \cdot \mathbf{v}_F = 0 \tag{10}$$

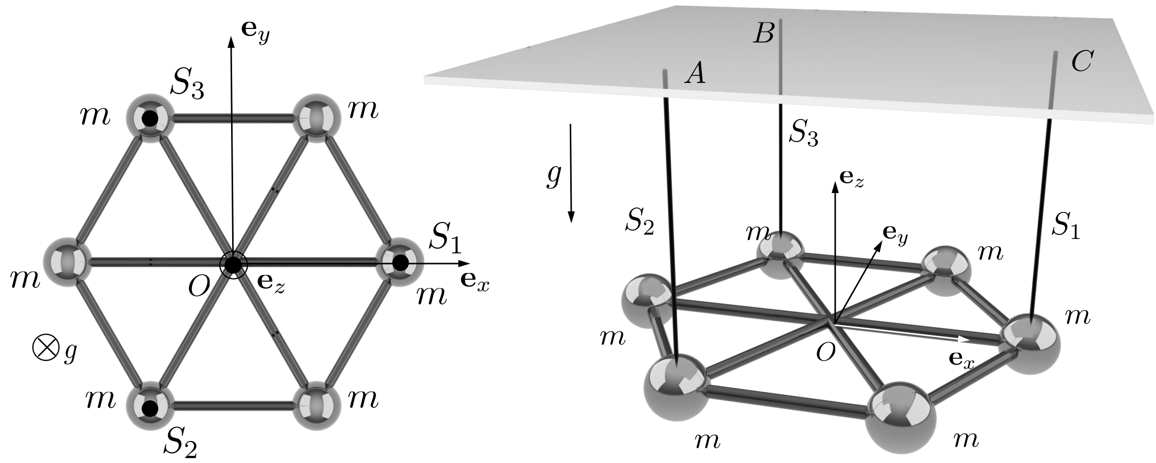
$$F_C \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} a\omega \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} + F \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \omega a\sqrt{2} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = 0 \tag{11}$$

$$F_C \frac{\sqrt{2}}{3} a\omega + F\omega a = 0 \tag{12}$$

$$\Rightarrow \quad F_C = -\frac{3}{\sqrt{2}}F \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}_C = \frac{3}{\sqrt{2}}F \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{3}{2}F \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Aufgabe 2. *[9 Punkte]*

Das dargestellte System besteht aus einem masselosen hexagonalen Rahmen, wobei alle Stäbe, aus denen der Rahmen besteht, die gleiche Länge a haben. An den Eckpunkten des Sechsecks sind sechs Kugeln befestigt, wobei jede Kugel, die homogene Masse m hat (d.h. sie können als Punktmassen betrachtet werden). Das System wird von drei an der Decke befestigten Seilen S_1, S_2 und S_3 getragen, die in z-Richtung ausgerichtet sind. Die Schwerkraft g wirkt in negativer z-Richtung, wie gezeigt.



1. Geben Sie die Koordinaten des Massenschwerpunktes des Systems an. *[1 Punkt]*

   Aus Symmetrie kann man sofort bemerken, dass den Massenschwerpunkt des Systems im Ursprung liegt, also

$$S = O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

2. Berechnen Sie die Spannungen in den Seilen, die das Gleichgewicht des Systems gewährleisten. *[2 Punkte]*

   Die 6 massen an den Eckpunkten sind zu einer Masse $M = 6m$ äquivalent, die sich im Ursprung befindet.

   Wir stellen die GGB auf als

$$KB(z): \qquad 0 = S_1 + S_2 + S_3 - 6mg \tag{2}$$

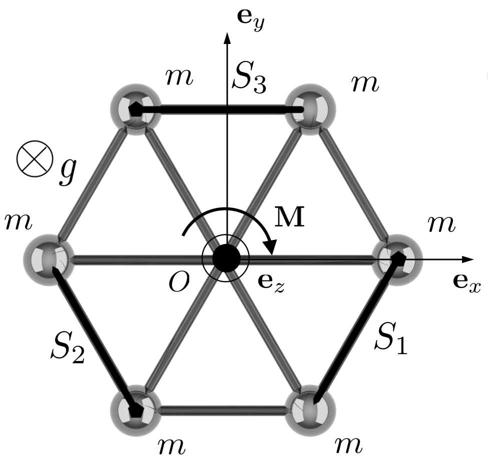
$$MB(x,O): \qquad 0 = (S_2 - S_3)\frac{\sqrt{3}}{2}a \quad \Rightarrow \quad S_2 = S_3 \tag{3}$$

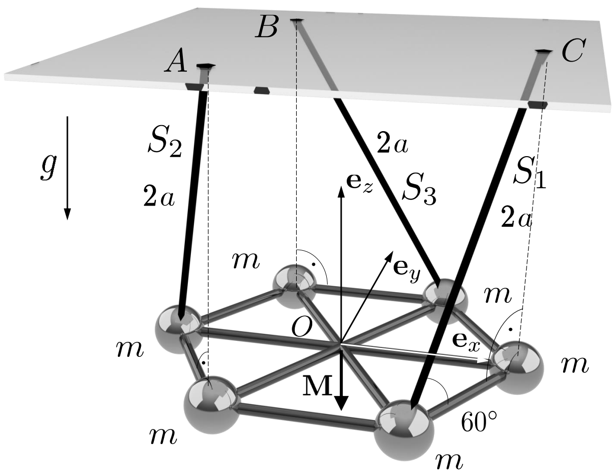
$$\begin{aligned} MB(y,O): \qquad & 0 = (S_2 + S_3)\frac{a}{2} - S_1 a \\ & 0 = 2S_2 - 2_{S1} \quad \Rightarrow \quad S_1 = S_2 = S_3 \end{aligned} \tag{4}$$

und erhalten

$$S1 = S_2 = S_3 = \frac{6}{3}mg = 2mg. \tag{5}$$

Ein Moment $\mathbf{M}$ in negativer z-Richtung wirkt nun auf das System und bringt es in die unten abgebildete Konfiguration (der Rahmen ist 60° um die z-Achse gedreht). Der Winkel zwischen Rahmen und Seile beträgt 60° und die Länge der Seile ist $2a$.





3. Ermitteln Sie den Betrag des Moments M, der erforderlich ist, damit sich der hexagonale Rahmen in der gegebenen Konfiguration im Gleichgewicht befindet. *[3 Punkte]*

Aus der vorhergehende Teilaufgabe wissen wir, dass die z-Komponente der Seilkräfte $S_1 = S_2 = S_3 = S$ ist $S_z = 2mg$, um das Gleichgewicht zu gewährleisten. Daraus können wir schliessen

$$S = \frac{2mg}{\sin(60°)} = \frac{4mg}{\sqrt{3}}. \tag{6}$$

Der Betrag der Projektion auf der xy-Ebene ist dann

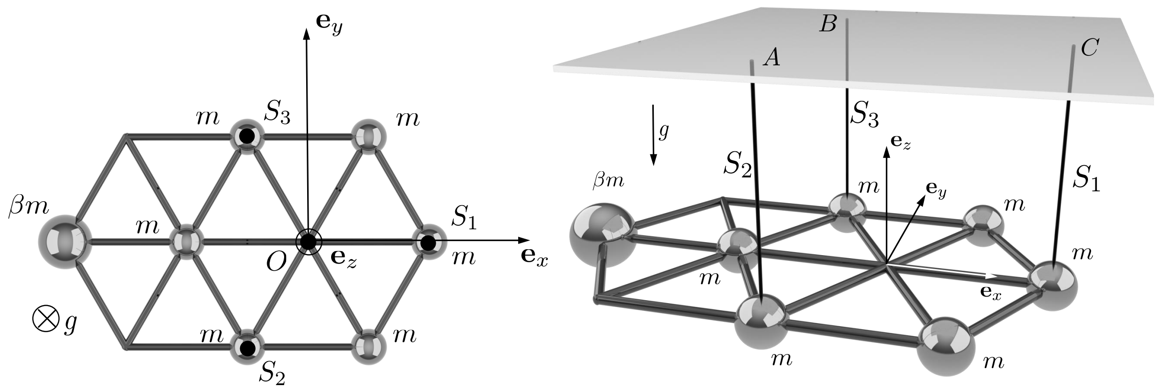
$$S_{xy} = S\cos(60°) = \frac{2mg}{\sqrt{3}}, \tag{7}$$

während der Abstand vom Ursprung beträgt $a\sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.
Wir finden den Betrag des Moments so, dass sich das System in der gegebenen Konfiguration im Gleichgewicht befindet, als

$$MB(z, O): \qquad 0 = -M + 3\frac{\sqrt{3}}{2}a\frac{2mg}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad M = 3amg. \tag{8}$$

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von Teilaufgabe 3.

Das System wird nun um zusätzliche masselosen Elemente der Länge a erweitert. Eine zusätzliche Masse βm, mit $\beta > 0$, wird wie gezeigt dem System hinzugefügt.



4. Bestimmen Sie den maximalem Wert von β, so dass sich das System noch im Gleichgewicht befindet (alle Seile sind gespannt). *[3 Punkte]*

   Wir stellen die GGB auf als

$$KB(z): \qquad 0 = S_1 + S_2 + S_3 - (6+\beta)mg \tag{9}$$

$$MB(x,O): \qquad S_2 = S_3 \tag{10}$$

$$\begin{aligned} MB(y,O): \qquad 0 &= -S_1 a + (S_2 + S_3)\frac{a}{2} - 2a\beta mg \\ 0 &= -S_1 + 2S_2\frac{1}{2} - 2\beta mg \\ S_2 = 2\beta mg + S_1 \quad &\Rightarrow \quad 2S_2 = 4\beta mg + 2S_1 \end{aligned} \tag{11}$$

   Wir setzen (10) in (9) ein und erhalten

$$S_1 + 2S_2 = (6+\beta)mg; \tag{12}$$

   das anschliessende Einsetzen von (11) liefert

$$\begin{aligned} S_1 + 4\beta mg + 2S_1 &= 6mg + \beta mg \\ 3S_1 &= 6mg + \beta mg - 4\beta mg = (6-3\beta)mg \\ \Rightarrow \quad S_1 &= \frac{6-3\beta}{3}mg. \end{aligned} \tag{13}$$

   Das Seil muss gespannt sein, und somit

$$S_1 > 0 \to \beta < 2. \tag{14}$$