Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

IMES
Institut für Mechanische Systeme

Technische Mechanik

Klausur II

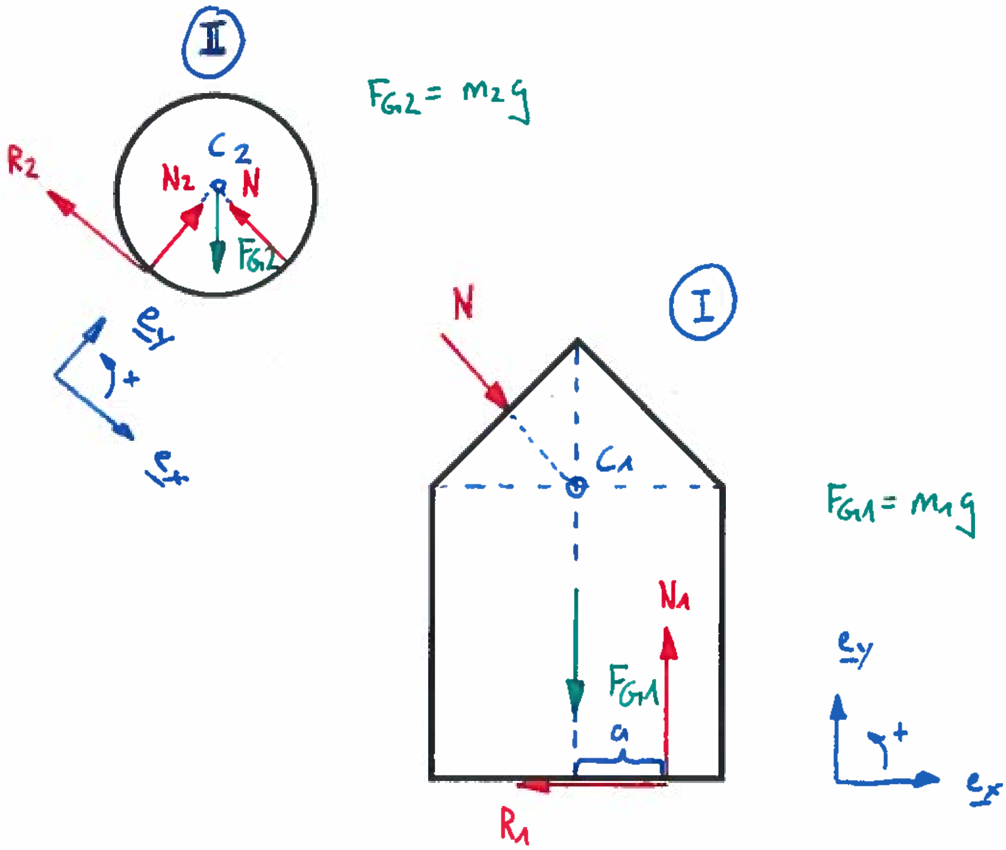
13. Dezember 2016, 08^{15} - 09^{15}

Dr. Stephan Kaufmann

Musterlösung

Herbstsemester 2016

Aufgabe 1



$①_1^{AR}$: Gewichtskräfte F_{G1} & F_{G2}

$①_2^{AR}$: Kontaktkräfte Block - Unterlage

$①_3^{AR}$: Kontaktkräfte Rolle - Unterlage

$①_4^{AR}$: Kontaktkraft Rolle - Block

System I: $KB(x)$: $-R_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} N = 0 \quad (1)$

$KB(y)$: $N_1 - m_1 g - \frac{\sqrt{2}}{2} N = 0 \quad (2)$ $\Big\}$ 1_5^{KR}

$MB(C_1, z)$: $-2\sqrt{2} r R_1 + a N_1 = 0 \quad (3)$ 1_6^{KR}

System II: $KB(x)$: $-R_2 - N + \frac{\sqrt{2}}{2} m_2 g = 0 \quad (4)$

$KB(y)$: $N_2 - \frac{\sqrt{2}}{2} m_2 g = 0 \quad (5)$ $\Big\}$ 1_7^{KR}

$MB(C_2, z)$: $-r R_2 = 0 \quad (6)$ 1_8^{KR}

Auflösen:

$(6): \; R_2 = 0 \quad (7)$

$(4): \; N \overset{(7)}{=} \frac{\sqrt{2}}{2} m_2 g \quad (8)$

$(5): \; N_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} m_2 g \quad (9)$ $\Big\}$ 1_9^{AR}

$(1): \; R_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} N \overset{(8)}{=} \frac{1}{2} m_2 g \quad (10)$

$(2): \; N_1 = m_1 g + \frac{\sqrt{2}}{2} N \overset{(8)}{=} g\left(m_1 + \frac{1}{2} m_2\right) \quad (11)$ $\Big\}$ 1_{10}^{AR}

$(3): \; \underline{a N_1 = 2\sqrt{2} r R_1}$ mit (11) und (10)

$$a \cancel{g}\left(m_1 + \frac{1}{2} m_2\right) = \cancel{2}\sqrt{2} r \frac{1}{\cancel{2}} m_2 \cancel{g}$$

$$a = \frac{\sqrt{2} r m_2}{m_1 + \frac{1}{2} m_2} = \frac{2\sqrt{2} r m_2}{2 m_1 + m_2} \quad (12)$$

1_{11}^{AR}

Haftbedingung: Wann ist das System in Ruhe?

$$|R_1| \leq \mu_0 |N_1|$$, N_1 ist positiv in die Freischnitte eingeführt (N_1 zeigt in den Körper "hinein")

Somit:

$$|R_1| \leq \mu_0 N_1$$

Einsetzen R_1 und N_1:

$$\left| \frac{1}{2} m_2 g \right| \leq \mu_0 g \left(m_1 + \frac{1}{2} m_2 \right)$$ 1 UR 12

m_1, m_2, g sind alle positiv definiert. Oder anders ausgedrückt: negative Werte für m_1, m_2, g machen physikalisch keinen Sinn.

$$\frac{1}{2} m_2 \cancel{g} \leq \mu_0 \cancel{g} \left(m_1 + \frac{1}{2} m_2 \right)$$

$$\mu_0 \geq \frac{\frac{1}{2} m_2}{m_1 + \frac{1}{2} m_2} = \underline{\underline{\frac{m_2}{2m_1 + m_2}}}$$ 1 AR 13

Kippen: Damit der Quader nicht kippt muss a innerhalb des Körpers bleiben.

$$|a| \leq \sqrt{2}\, r$$

Einsetzen von a (12):

$$\left| \frac{2\sqrt{2}\, r\, m_2}{2m_1 + m_2} \right| \leq \sqrt{2}\, r$$

1 KR 14

r, m_1, m_2 sind wiederum alles positiv definierte Grössen. Somit können keine negativen Längen innerhalb des Betrages entstehen.

$$\frac{2\cancel{\sqrt{2}\, r}\, m_2}{2m_1 + m_2} \leq \cancel{\sqrt{2}\, r}$$

$$2m_2 \leq 2m_1 + m_2$$

$$\underline{\underline{m_2 \leq 2m_1}}$$

1 AR 15

Das bedeutet solange die Masse m_2 der Rolle kleiner als zweimal der Masse des Blockes ist, dass dieser nicht kippt.

Punkt		Bemerkung
1	AR	Gewichtskräfte F_{G1} & F_{G2}
2	AR	Kontaktkräfte Block - Unterlage
3	AR	Kontaktkräfte Rolle - Unterlage
4	AR	Kontaktkraft Rolle - Block
5	KR	KB(x) & KB(y) für Block
6	KR	MB für Block
7	KR	KB(x) & KB(y) für Rolle
8	KR	MB für Rolle
9	AR	R_2, N, N_2
10	AR	R_1, N_1
11	AR	a
12	KR	Bedingung für Haften inkl. einsetzen.
13	AR	$\mu_0 \geq \dots$
14	KR	Bedingung für Kippen inkl. einsetzen
15	AR	$m_2 \geq \dots$

Technische Mechanik

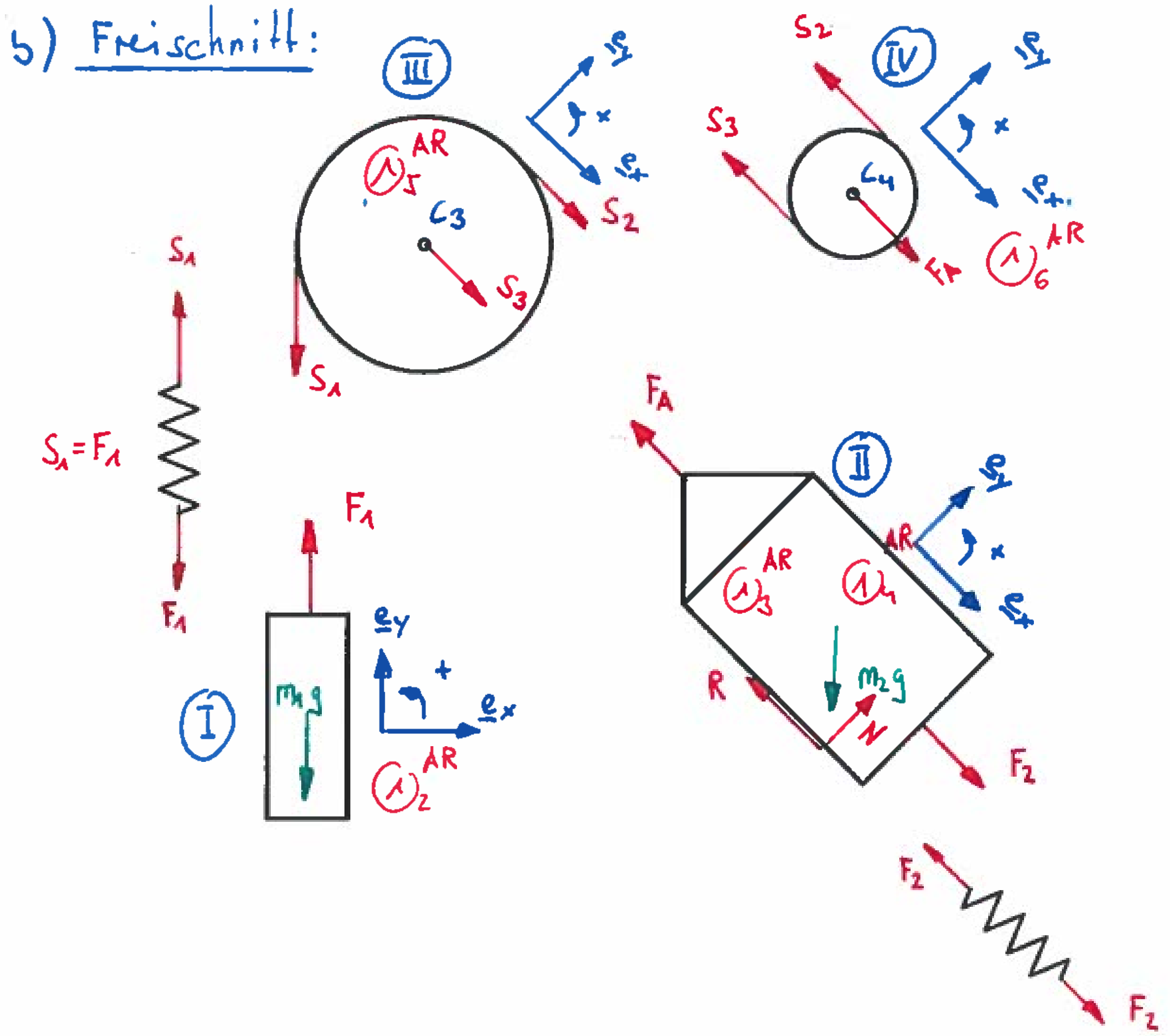
Klausur II 13. Dezember 2016, 08^{15} - 09^{15}

Dr. Stephan Kaufmann Musterlösung Herbstsemester 2016

Aufgabe 2

a) Der Freiheitsgrad des Systems ist: $f = 2$. $(1)_1^{AR}$

b) Freischnitt:



c) Bewegungsdifferentialgleichungen:

I $\quad -m_1 \ddot{x}_1 = F_1 - m_1 g \qquad (1)$ $\quad 1_7$ KR

II $\quad m_2 \ddot{x}_2 = F_2 - R - F_A + \frac{\sqrt{2}}{2} m_2 g \qquad (2)$ $\quad 1_8$ KR

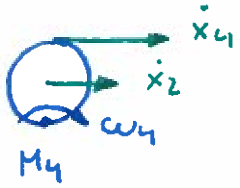
d) Kraftgesetze der Federn:

$F_1 = c_1 (x_1 - x_3) \qquad (3)$ $\quad 1_9$ AR

$F_2 = -c_2 x_2 \qquad (4)$ $\quad 1_{10}$ AR

e) kinematische Relationen:

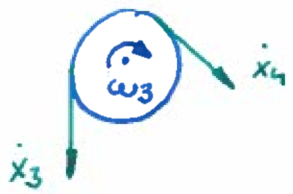
IV



$\omega_4 = \frac{\dot{x}_2}{r} = \frac{\dot{x}_4}{2r}$

$\Rightarrow \quad \dot{x}_4 = 2\dot{x}_2 \quad$ AR 1_{11} $\quad \Rightarrow \quad x_4 = 2x_2 + c_3 \qquad (5)$

III



$\omega_3 = \frac{\dot{x}_4}{2r} = -\frac{\dot{x}_3}{2r}$

$\Rightarrow \quad \dot{x}_3 = -\dot{x}_4 = -2\dot{x}_2$ $\quad 1_{12}$ AR

$\Rightarrow \quad x_3 = -2x_2 + c_4 \qquad (6)$

Ungespannte Ausgangslage:

$0 = x_2 = x_3 = x_4 \quad \overset{(5),(6)}{\Longrightarrow} \quad c_3 = c_4 = 0$

$\Rightarrow \quad x_4 = -x_3 = 2x_2 \qquad (7)$

f) Seilkräfte

$$\text{III} \quad MB(C_3, z): \quad 2r S_1 - 2r S_2 = 0 \quad \Rightarrow S_1 = S_2 \quad (8) \quad 1_{13}^{KR}$$

$$\text{IV} \quad MB(C_4, z): \quad r S_2 - r S_3 = 0 \quad \Rightarrow S_2 = S_3 \quad (9) \quad 1_{14}^{KR}$$

$$\Rightarrow S_1 = S_2 = S_3 = S \quad (10)$$

g) Bindungskräfte:

$$\text{IV} \quad KB(x): \quad F_A - S_2 - S_3 = 0 \quad \overset{(10)}{\Rightarrow} \quad F_A = 2S \overset{S=F_1}{=} 2F_1 \quad (11) \quad 1_{16}^{KR}$$

$$\text{II} \quad KB(y): \quad N - \frac{\sqrt{2}}{2} m_2 g = 0 \quad \Rightarrow N = \frac{\sqrt{2}}{2} m_2 g \quad (12)$$

$$R = \mu_1 N \overset{(12)}{=} \mu_1 \frac{\sqrt{2}}{2} m_2 g \quad (13) \quad 1_{15}^{KR}$$

Einsetzen der Federkräfte (3) & (4); der Seilkräfte (8) & (9); sowie der übrigen Bindungskräfte (11) & (12) in die Bewegungsdifferentialgleichungen liefert:

$$(1) \Rightarrow \quad -m_1 \ddot{x}_1 \overset{(3)}{=} c_1(x_1 - x_3) - m_1 g \quad (14)$$

$$(2) \Rightarrow \quad m_2 \ddot{x}_2 \overset{(4),(13),(11)}{=} -c_2 x_2 - \mu_1 \frac{\sqrt{2}}{2} m_2 g - 2c_1(x_1 - x_3) + \frac{\sqrt{2}}{2} m_2 g \quad (15)$$

Einsetzen der kinematischen Relationen (7) liefert:

$$(14) \Rightarrow \quad m_1\ddot{x}_1 = -c_1(x_1 + 2x_2) + m_1 g$$

$$m_1\ddot{x}_1 + c_1 x_1 + 2c_1 x_2 = m_1 g \quad (16)$$

①$_{17}^{AR}$

$$(15) \Rightarrow \quad m_2\ddot{x}_2 = -c_2 x_2 - 2c_1(x_1 + 2x_2) + \frac{\sqrt{2}}{2} m_2 g (1-\mu_s)$$

$$m_2\ddot{x}_2 + 2c_1 x_1 + x_2(c_2 + 4c_1) = \frac{\sqrt{2}}{2} m_2 g (1-\mu_s) \quad (17)$$

①$_{18}^{AR}$

Oder in Matrixform:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & 2c_1 \\ 2c_1 & (4c_1 + c_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 g \\ \frac{\sqrt{2}}{2} m_2 g (1-\mu_s) \end{bmatrix}$$

Punkt		Bedingung
1	AR	Freiheitsgrad richtig angegeben
2	AR	Quader 1 freigeschnitten sowie F_1 und $m_1 g$ eingezeichnet
3	AR	Quader 2 freigeschnitten sowie F_A, R, N, F_2
4	AR	und $m_2 g$ eingezeichnet (pro Fehler 1 Pt. Abzug)
5	AR	Grosse Umlenkrolle freigeschnitten sowie S_1 und S_2 eingezeichnet.
6	AR	Kleine Umlenkrolle freigeschnitten sowie S_1, S_2 und F_A (evt. F_{Ax}, F_{Ay}) eingezeichnet.
7	KR	DG zu Quader 1 konsequent richtig zu Freischnitt aufgestellt.
8	KR	DG zu Quader 2 konsequent richtig zu Freischnitt aufgestellt.
9	AR	Kraftgesetz für Feder 1 richtig angegeben
10	AR	Kraftgesetz für Feder 2 richtig angegeben
11	AR	kin. Relation zwischen x_2 & x_1
12	AR	kin. Relation zwischen x_2 & x_3
13	KR	Seilkräfte S_1 & S_2 konsequent richtig zu Freischnitt
14	KR	Seilkräfte S_2 & S_3 konsequent richtig zu Freischnitt
15	KR	Reibungskraft R mit Normalkraft aus Freischnitt
16	KR	Lagerreaktion F_A aus Freischnitt
17	AR	DG in reduzierter Form angegeben
18	AR	DG in reduzierter Form angegeben