Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

IMES
Institut für
Mechanische Systeme

Technische Mechanik

Klausur I

22. Oktober 2015, 17^{15} - 18^{15}

Dr. Stephan Kaufmann — Musterlösung — Herbstsemester 2015

Aufgabe 1 (10 Punkte)

a) Die Kräfte $\boldsymbol{F}_B$, $\boldsymbol{F}_E$, $\boldsymbol{F}_G$ und das Kräftepaar $\boldsymbol{M}_D$ ergeben sich wie folgt aus der Zeichnung:

$$\boldsymbol{F}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_B \end{bmatrix}, \boldsymbol{F}_E = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} \frac{F_E}{5}, \boldsymbol{F}_G = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix} \frac{F_G}{2}, \boldsymbol{M}_D = \begin{bmatrix} 0 \\ M_D \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad 1^{AR}_{1}$$

Gesucht sind die Dyname $\{\boldsymbol{R}, \boldsymbol{M}_G\}$:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{F}_B + \boldsymbol{F}_E + \boldsymbol{F}_G = \begin{bmatrix} 0 \\ 3F_E/5 - F_G/2 \\ F_B - 4F_E/5 - \sqrt{3}/2 F_G \end{bmatrix} \qquad 1^{KR}_{2}$$

$$\boldsymbol{M}_{GB} = \boldsymbol{r}_{GB} \times \boldsymbol{F}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ -3l \\ -4l \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} lF_B \qquad 1^{KR}_{3}$$

$$\boldsymbol{M}_{GE} = \boldsymbol{r}_{GE} \times \boldsymbol{F}_E = \begin{bmatrix} -l \\ -3l \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} \frac{F_E}{5} = \begin{bmatrix} 12 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix} \frac{lF_E}{5} \qquad 1^{KR}_{4}$$

$$\boldsymbol{M}_G = \boldsymbol{M}_{GB} + \boldsymbol{M}_{GE} + \boldsymbol{M}_D = \begin{bmatrix} 12lF_E/5 - 3lF_B \\ M_D - 4lF_E/5 \\ -3lF_E/5 \end{bmatrix} \qquad 1^{AR}_{5}$$

b) Gesucht sind die Dyname $\{\boldsymbol{R}, \boldsymbol{M}_C\}$, wobei $\boldsymbol{R}$ schon bekannt ist und $\boldsymbol{M}_C$ am schnellsten mit der Transformationsregel berechnet werden kann: 1^{KR}_{6}

$$\boldsymbol{M}_C = \boldsymbol{M}_G + \boldsymbol{r}_{CG} \times \boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 12lF_E/5 - 3lF_B \\ M_D - 4lF_E/5 \\ -3lF_E/5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4l \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 3F_E/5 - F_G/2 \\ F_B - 4F_E/5 - \sqrt{3}/2 F_G \end{bmatrix} \qquad 1^{KR}_{7}$$

$$\boldsymbol{M}_C = \begin{bmatrix} 12lF_E/5 - 3lF_B \\ M_D - 4lF_E/5 \\ -3lF_E/5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2lF_G - 12lF_E/5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2lF_G - 3lF_B \\ M_D - 4lF_E/5 \\ -3lF_E/5 \end{bmatrix} \qquad 1^{AR}_{8}$$

Alternativer Lösungsweg:

$$\boldsymbol{M}_{CB} = \boldsymbol{r}_{CB} \times \boldsymbol{F}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ -3l \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} lF_B$$

$$\boldsymbol{M}_{CE} = \boldsymbol{r}_{CE} \times \boldsymbol{F}_E = \begin{bmatrix} -l \\ -3l \\ 4l \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} \frac{F_E}{5} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix} \frac{lF_E}{5} \qquad 1^{KR}_{7}$$

$$\boldsymbol{M}_{CG} = \boldsymbol{r}_{CG} \times \boldsymbol{F}_G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4l \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix} \frac{F_G}{2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} lF_G$$

$$\boldsymbol{M}_C = \boldsymbol{M}_{CB} + \boldsymbol{M}_{CE} + \boldsymbol{M}_{CG} + \boldsymbol{M}_D = \begin{bmatrix} 2lF_G - 3lF_B \\ M_D - 4lF_E/5 \\ -3lF_E/5 \end{bmatrix} \qquad 1^{AR}_{8}$$

d) Damit sich die Kräftegruppe $\{\boldsymbol{F}_B, \boldsymbol{F}_E, \boldsymbol{F}_G, \boldsymbol{M}_D\}$ auf ein Moment reduzieren lässt, muss die Resultierende $\boldsymbol{R}$ verschwinden:

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3F_E/5 - F_G/2 \\ F_B - 4F_E/5 - \sqrt{3}/2F_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad 1^{KR}_{9} \qquad 1^{AR}_{10}$$

$$F_G = \frac{6}{5}F_E,$$

$$F_B = 4F_E/5 + \sqrt{3}/2F_G = \frac{4 + 3\sqrt{3}}{5}F_E$$

Punkteschlüssel

Pt		Bedingung
1	*AR*	Kräfte und Moment richtig aufgestellt.
2	*KR*	$\boldsymbol{R}$
3	*KR*	$\boldsymbol{M}_{GB}$
4	*KR*	$\boldsymbol{M}_{GE}$
5	*AR*	$\boldsymbol{M}_{G}$
6	*KR*	$\boldsymbol{R}$
7	*KR*	$\boldsymbol{M}_C = \boldsymbol{M}_G + \boldsymbol{r}_{CG} \times \boldsymbol{R}$ (Werte eingesetzt), oder einzelne Komponenten berechnet.
8	*AR*	$\boldsymbol{M}_C$ (Endergebnis)
9	*KR*	$\boldsymbol{R} = 0$ (Werte eingesetzt)
10	*AR*	F_G, F_B (Endergebnis)

AR: Absolut Richtig
KR: Konsequent Richtig

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

IMES
Institut für Mechanische Systeme

Technische Mechanik

Klausur I **22. Oktober 2015, 17^{15} - 18^{15}**

Dr. Stephan Kaufmann **Musterlösung** **Herbstsemester 2015**

Aufgabe 2 (13 Punkte)

a)

Interpretiere Randbedingungen: $\boldsymbol{v}_G$ und $\boldsymbol{v}_H$ zeigen in horizontale Richtung, $\boldsymbol{v}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ -v \end{bmatrix}$. 1^{AR}_{1}

Finde Momentanzentrum M_{ABEG}: Schnittpunkt der Horizontalen durch A und der Vertikalen durch G. 1^{AR}_{2}

Die Rotationsschnelligkeit folgt aus dem *SvM*: $\omega_{ABEG} = \frac{v}{8a}$. 1^{AR}_{3}

b)

Aus dem *SvM* folgt: $\boldsymbol{v}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_E = \begin{pmatrix} v \\ v \end{pmatrix}$ 1^{KR}_{4} 1^{KR}_{5}

c)

Aus dem *SdpG* auf Stab *BC*: $\boldsymbol{v}_B \cdot \boldsymbol{r}_{BC} = \boldsymbol{v}_C \cdot \boldsymbol{r}_{BC}$ folgt, dass $v_{Cx} = 0$.
Also muss das Momentanzentrum M_{CDFH} im Schnittpunkt der Horizontalen durch C und der Vertikalen durch H liegen. 1^{AR}_{6}
Mit Hilfe des *SdpG* auf Stab *EF* lässt sich die Rotationsschnelligkeit ω_{CDFH} berechnen:

Aus $\boldsymbol{v}_E \cdot \boldsymbol{r}_{EF} = \boldsymbol{v}_F \cdot \boldsymbol{r}_{EF}$ folgt $v_{Fx} = v$ und mit dem *SvM* berechnet man $\omega_{CDFH} = \frac{v}{8a}$. 1^{KR}_{7}

d)

Aus dem *SvM* folgt: $\boldsymbol{v}_F = \begin{pmatrix} v \\ -3v \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{v}_H = \begin{pmatrix} 3v \\ 0 \end{pmatrix}$. 1^{KR}_{8} 1^{KR}_{9}

e)

$\boldsymbol{v}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ -3v \end{pmatrix}$

Das Momentanzentrum M_{BC} muss auf dem Stab *BC* liegen, da $\boldsymbol{v}_B$ und $\boldsymbol{v}_C$ jeweils nur Komponenten in *y*-Richtung haben und in entgegengesetzte Richtungen zeigen. Die Hebelarme ergeben sich aus dem Verhältnis der Geschwindigkeiten $\boldsymbol{v}_B$ und $\boldsymbol{v}_C$ zu $3/1$. 1^{AR}_{10}

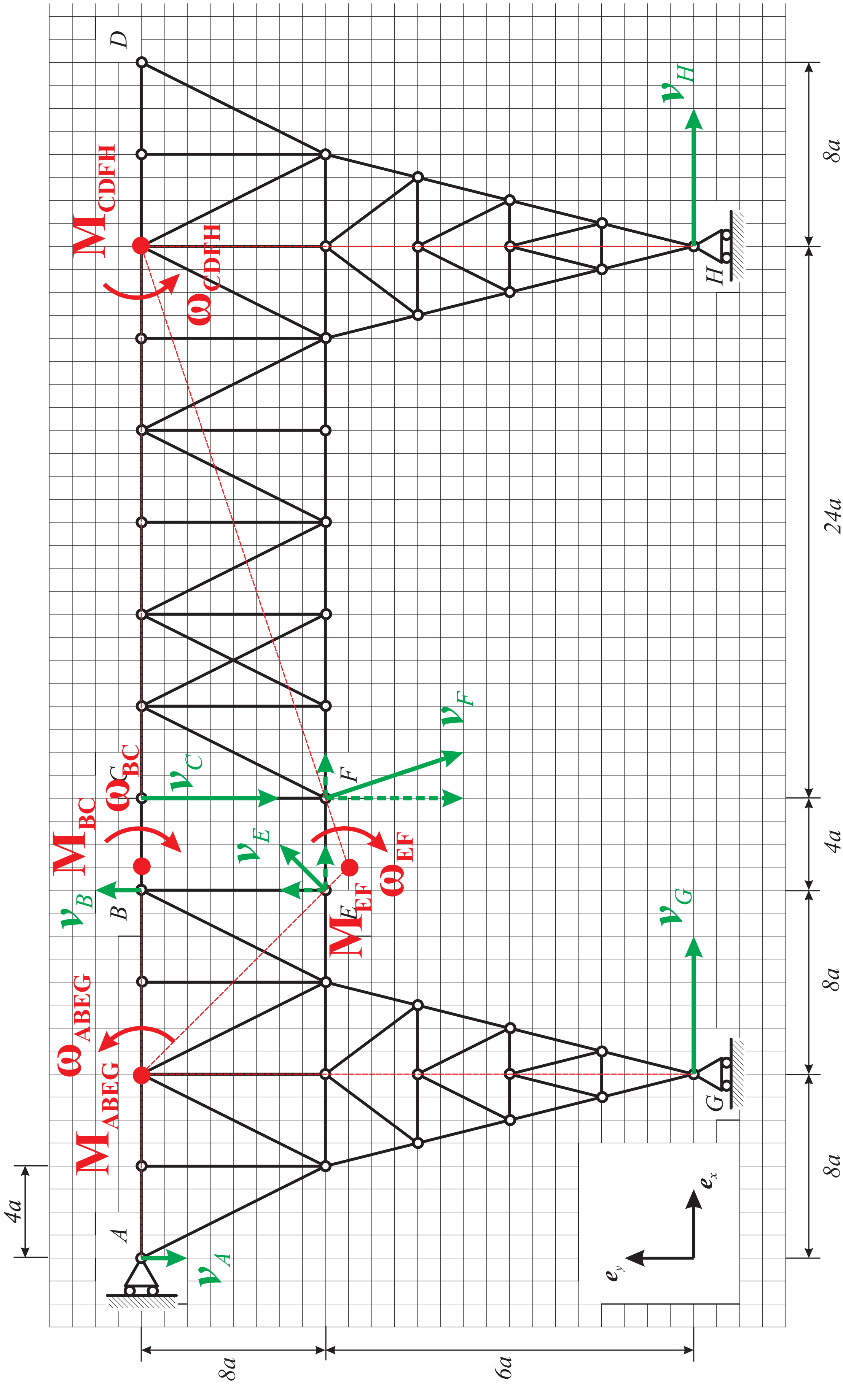
Daraus ergibt sich mit dem *SvM* die Rotationsschnelligkeit $\omega_{BC} = \frac{v}{a}$. 1^{KR}_{11}

f)

Das Momentanzentrum M_{EF} ist der Schnittpunkt der Geraden $M_{ABEG}E$ und $M_{CDFH}F$. 1^{AR}_{12}

Die Rotationsschnelligkeit lässt sich mit dem *SvM* berechnen: $\omega_{EF} = \frac{v}{a}$. 1^{KR}_{13}

Skizze:



D
M_CDFH
ω_CDFH
v_H
8a
H
24a
v_F
F
C
ω_BC
v_C
M_BC
4a
v_E
E
ω_EF
v_B
B
M_EF
v_G
8a
ω_ABEG
M_ABEG
G
8a
4a
A
v_A
e_x
e_y
8a
6a

Bemerkung: $\boldsymbol{v}_A$ *kann auch in positive Richtung eingeführt werden. Dann zeigen alle Geschwindigkeiten in die umgekehrte Richtung.*

Punkteschlüssel

Pt		Bedingung
1	*AR*	Randbedingungen richtig interpretiert ($\boldsymbol{v}_A$, $\boldsymbol{v}_G$ und $\boldsymbol{v}_H$ richtig eingetragen).
2	*AR*	M_{ABEG}
3	*AR*	ω_{ABEG}
4	*KR*	$\boldsymbol{v}_B$
5	*KR*	$\boldsymbol{v}_E$
6	*AR*	M_{CDFH}
7	*KR*	ω_{CDFH}
8	*KR*	$\boldsymbol{v}_C$
9	*KR*	$\boldsymbol{v}_F$
10	*AR*	M_{BC}
11	*KR*	ω_{BC}
12	*AR*	M_{EF}
13	*KR*	ω_{EF}

AR: Absolut Richtig
KR: Konsequent Richtig