Technische Mechanik

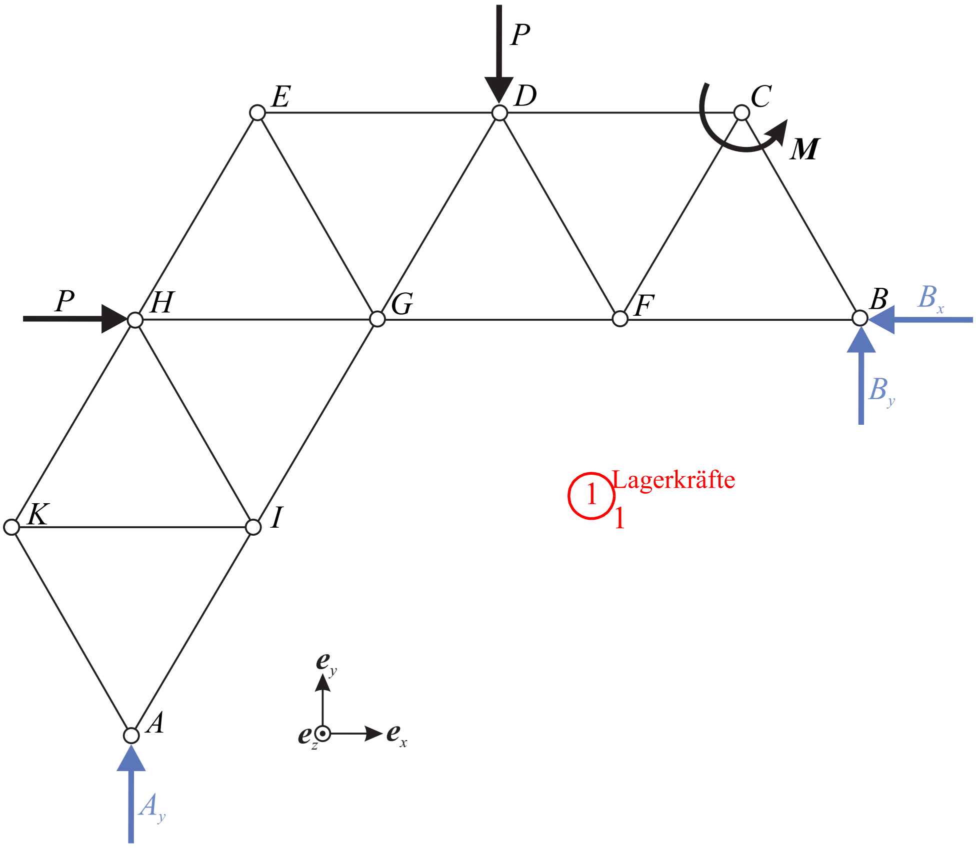
Klausur II

20. November 2012, 08[15] - 09[15]

Dr. Stephan Kaufmann **Musterlösung** **Herbstsemester 2012**

Aufgabe 1 *(22 Punkte)*

a) System freischneiden und die Lagerkräfte einführen.



Gleichgewichtsbedingungen:

KB(x): $\quad P - B_x = 0 \quad \Rightarrow \quad B_x = P$ 1 4

KB(y): $\quad A_y + B_y - P = 0$ 1 2

In B treffen sich die Wirkungslinien von 3 Kräften: B_x, B_y und P. Dort ist das Momentengleichgewicht sehr einfach zu formulieren.

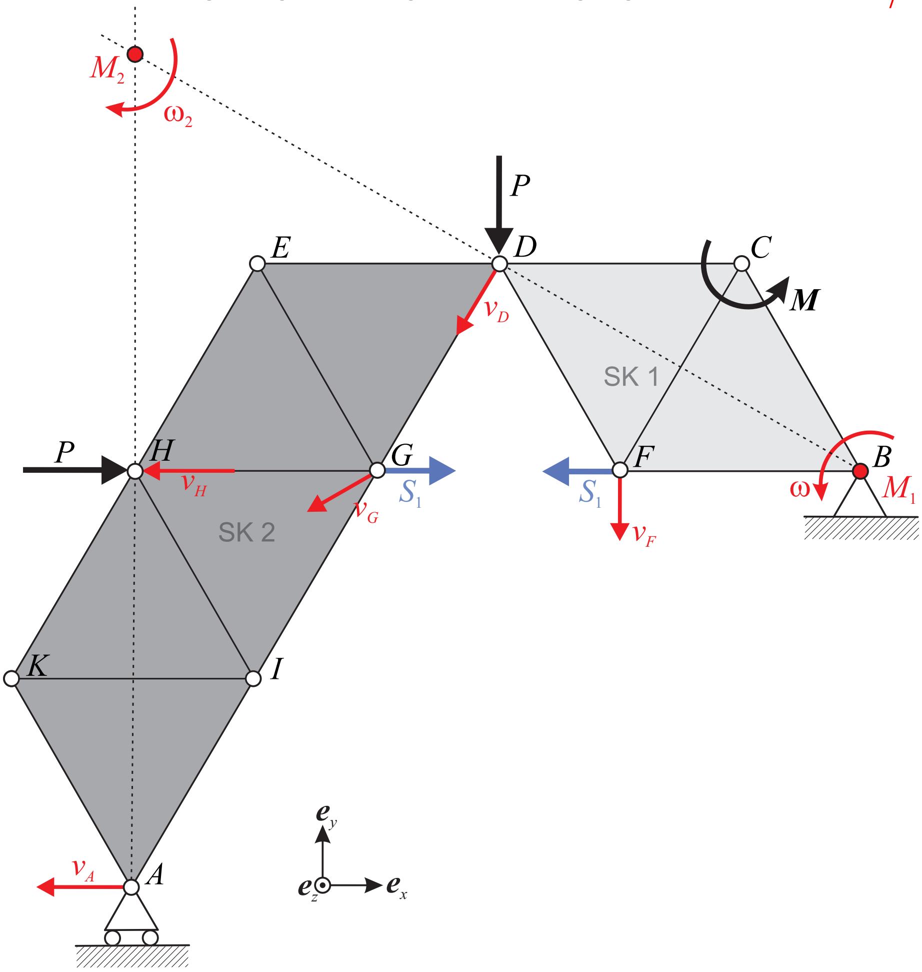
MB(B,z): $\quad 3LP + \frac{3}{2}LP - 3LA_y = 0$ 1 3 $\quad \Rightarrow \quad A_y = \frac{3}{2}P$ 1 5

Damit wird KB(y) zu: $\frac{3}{2}P + B_y - P = 0 \qquad \Rightarrow \qquad B_y = -\frac{1}{2}P$ 1 6

Alternative:

MB(A,z): $\quad 3LP - \sqrt{3}LP - \frac{3}{2}LP + \sqrt{3}LB_x + 3LB_y = 0$

b) Stab GF entfernen und Stabkräfte S_1 als Zugkraft einführen. Das System besteht aus zwei Starrkörpern. Mit den Lagerungen verträglicher Bewegungszustand: 1 PdvL 7



Starrkörper 1:

Momentanzentrum M_1 in B und Winkelschnelligkeit ω.

$$v_F = L\omega; \quad \text{1 8} \quad v_D = \sqrt{3}L\omega$$

bzw. $\quad \boldsymbol{v}_F = \begin{bmatrix} 0 \\ -L\omega \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{v}_D = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ -3 \end{bmatrix} \frac{L\omega}{2}$

Starrkörper 2:

Momentanzentrum $M_2 \perp \boldsymbol{v}_D$ und $\perp \boldsymbol{v}_A$ und Winkelschnelligkeit ω_2. 1 9

$$v_D = \sqrt{3}L\omega_2 = \sqrt{3}L\omega \qquad \Rightarrow \qquad \omega_2 = \omega$$ 1 10

$$v_G = 2L\omega_2 = 2L\omega; \qquad v_H = \sqrt{3}L\omega_2 = \sqrt{3}L\omega \qquad \text{bzw.}$$

$$\boldsymbol{v}_G = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ -1 \end{bmatrix} L\omega \qquad \boldsymbol{v}_H = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}L\omega \\ 0 \end{bmatrix}$$ 1 11

Geschwindigkeiten, die senkrecht auf die jeweils im Punkt angreifenden Kräfte sind, haben Leistung null. Hier: $\boldsymbol{v}_F \perp S_1$.

Prinzip der virtuelle Leistung (PdvL): 1 12 k.r. zur Geschwindigkeiten

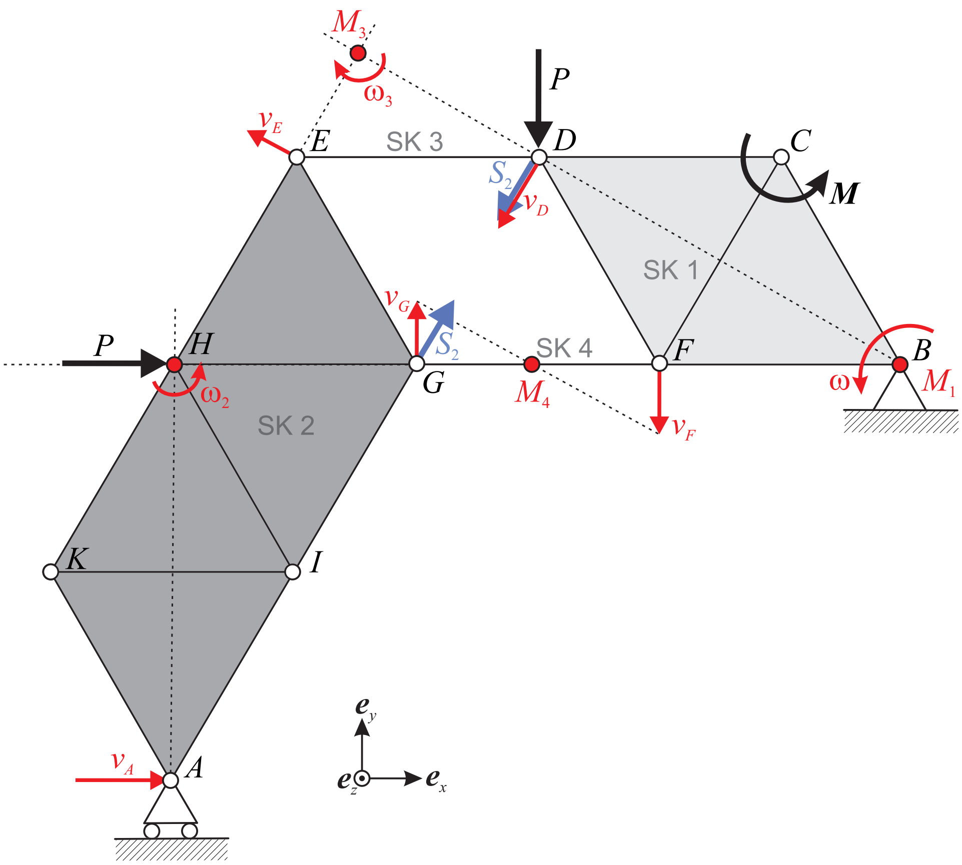
$$\wp = \boldsymbol{v}_D \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -P \end{bmatrix} + \boldsymbol{v}_G \cdot \begin{bmatrix} S_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \boldsymbol{v}_H \cdot \begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix} + \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{3}{2}L\omega P - \sqrt{3}L\omega S_1 - \sqrt{3}L\omega P + 3PL\omega = 0$$

Damit ist $S_1 = \dfrac{3\sqrt{3}-2}{2}P > 0$ und der Stab GF ist ein Zugstab. 1 14 k.r.zur S_1

1 13

c) Stab DG entfernen und Stabkräfte einführen. Das System besteht aus vier Starrkörpern. Mit den Lagerungen verträglicher Bewegungszustand:

1 15 PdvL



Starrkörper 1: (gleich wie im Teilaufgabe a)

Momentanzentrum M_1 in B und Winkelschnelligkeit ω.

$$v_F = L\omega; \qquad v_D = \sqrt{3}L\omega$$

bzw. $$\boldsymbol{v}_F = \begin{bmatrix} 0 \\ -L\omega \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{v}_D = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ -3 \end{bmatrix}\frac{L\omega}{2}$$

Starrkörper 4:

Aus dem Satz der projizierten Geschwindigkeiten: $\boldsymbol{v}_G = \begin{bmatrix} 0 \\ v_G \end{bmatrix}$

Starrkörper 3:

Aus dem Satz der projizierten Geschwindigkeiten: $v_{Ex} = v_{Dx} = \dfrac{\sqrt{3}L\omega}{2}$ 1 SdpG 16

Alternativ auch über das Momentanzentrum M_3.

$$v_D = \frac{\sqrt{3}}{2}L\omega_3 = \sqrt{3}L\omega \quad \Rightarrow \quad \omega_3 = 2\omega \quad \Rightarrow \quad v_E = \frac{L}{2}\omega_3 = L\omega$$

1 M_3 16

Starrkörper 2:

Momentanzentrum $M_2 \perp \boldsymbol{v}_G$ und $\perp \boldsymbol{v}_A$ und Winkelschnelligkeit ω_2. 1 17

$$v_H = 0$$

$$v_{Ex} = \frac{\sqrt{3}}{2}L\omega_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}L\omega \quad \text{oder} \quad v_E = L\omega_2 = L\omega \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \omega$$ 1 18

$$v_G = L\omega_2 = L\omega; \qquad \text{bzw.} \qquad \boldsymbol{v}_G = \begin{bmatrix} 0 \\ L\omega \end{bmatrix}$$ 1 19

Prinzip der virtuelle Leistung (PdvL): 1 k.r zur Geschwindigkeiten 20

$$\wp = \boldsymbol{v}_D \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -P \end{bmatrix} + \boldsymbol{v}_D \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}S_2 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}S_2 \end{bmatrix} + \boldsymbol{v}_G \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2}S_2 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}S_2 \end{bmatrix} + \boldsymbol{v}_H \cdot \begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix} + \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$$

$$\wp = \frac{3}{2}L\omega P + \sqrt{3}L\omega S_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}L\omega S_2 + 0 + 3PL\omega = 0$$

Damit ist $S_2 = -\sqrt{3}P < 0$ und der Stab DG ist ein Druckstab. 1 k.r.zur S_2 22

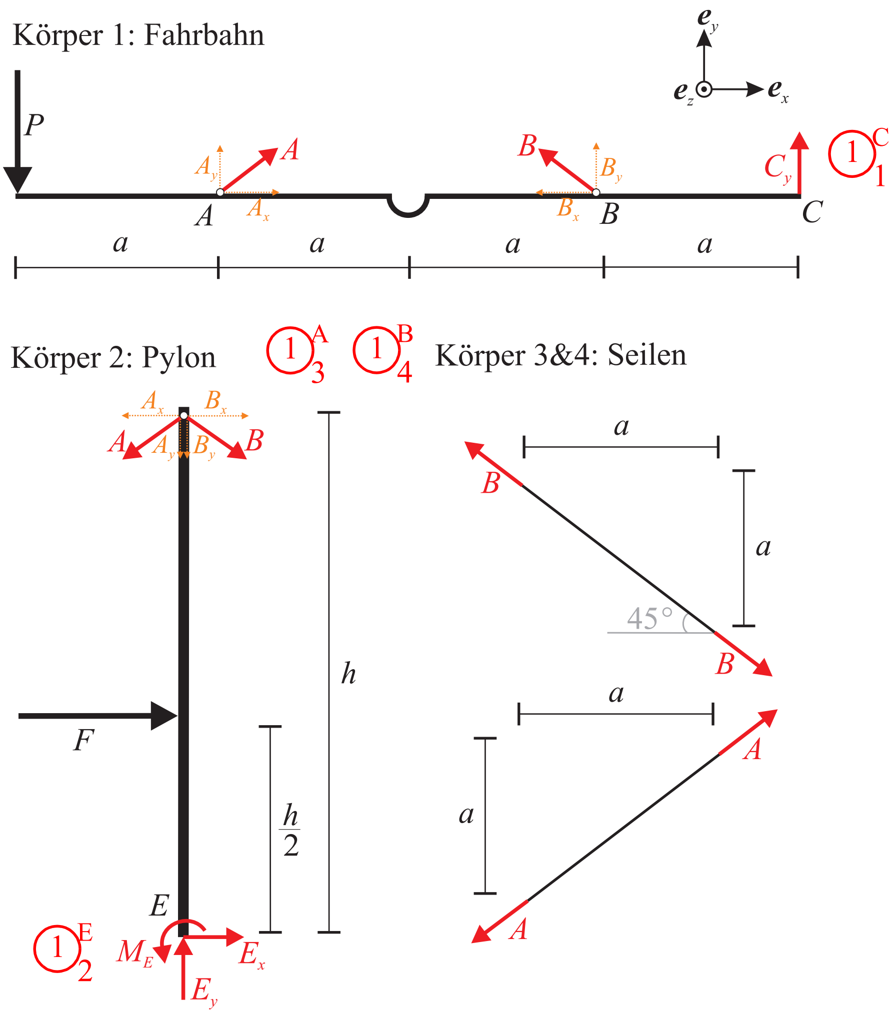
1 21

Punkteschlüssel Aufgabe 1:

1: Lagerkräfte korrekt eingeführt (Orientierung egal).
2: Komponentenbedingungen KB(x) <u>und</u> KB(y) konsequent richtig zur Skizze.
3: Momentenbedingung MB(*, z) konsequent richtig zur Skizze.
4: Lagerkraft B_x korrekt zur Skizze.
5: Lagerkraft A_y korrekt zur Skizze.
6: Lagerkraft B_y korrekt zur Skizze.
7: PdvL: gesuchte Stab *GF* entfernen, Stabkräfte und zulässige virtuelle Geschwindigkeit einführen.
8: Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_F$ oder $\boldsymbol{v}_D$. Geschwindigkeitsvektor oder Schnelligkeiten mir korrekter Orientierung in der Skizze.
9: Momentanzentrum M_2 ist im Schneidepunkt der Senkrechten der Geschwindigkeiten $\boldsymbol{v}_D$ und $\boldsymbol{v}_A$ (oder andere Bewegungszustände richtig).
10: Rotationsgeschwindigkeit $\omega_2 = \omega$.
11: Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_G$ <u>und</u> $\boldsymbol{v}_H$ oder Schnelligkeiten mir korrekter Orientierung in der Skizze.
12: Aufstellung der Gesamtleistung konsequent richtig zur Geschwindigkeiten.
13: Stabkraft S_1.
14: Aussage Stabkraft konsequent richtig zur skizzierten Stabkraft. Begründung ersichtlich.
15: PdvL: gesuchte Stab *DG* entfernen, Stabkräfte und zulässige virtuelle Geschwindigkeit einführen.
16: Anwendung der SdpG für die SK3. *Alternativ:* Momentanzentren M_3.
17: Momentanzentrum M_2 ist im Schneidepunkt der Senkrechten der Geschwindigkeiten $\boldsymbol{v}_G$ und $\boldsymbol{v}_A$ (oder andere Bewegungszustände richtig).
18: Rotationsgeschwindigkeit $\omega_2 = \omega$.
19: Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_G$ oder Schnelligkeit v_G mir korrekter Orientierung in der Skizze.
20: Aufstellung der Gesamtleistung konsequent richtig zur Geschwindigkeiten.
21: Stabkraft S_2.
22: Aussage Stabkraft konsequent richtig zur skizzierten Stabkraft. Begründung ersichtlich.

Aufgabe 2 *(15 Punkte)*

System freischneiden und in die Teilsysteme trennen:



Da Körper 3 und 4 aus Seilen bestehen, werden die Kräfte A und B in Seilrichtung eingeführt. Aus der Geometrie ist der Seilwinkel (45°) bekannt. Falls man diese Informationen nicht direkt einsetzt, werden die zusätzlichen Komponentenbedingungen an den Körpern 3 und 4 benötigt.

Körper 2: Pylon

KB(x): $E_x + F - A\frac{\sqrt{2}}{2} + B\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$ $\textcircled{1}_5$ $\Rightarrow$ $E_x = \frac{\sqrt{2}}{2}(A - B) - F$ (I)

KB(y): $E_y - A\frac{\sqrt{2}}{2} - B\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$ $\textcircled{1}_6$ $\Rightarrow$ $E_y = \frac{\sqrt{2}}{2}(A + B)$ (II)

In E treffen sich die Wirkungslinien von 4 Kräften: E_x, E_y, A_y und B_y. Dort ist das Momentengleichgewicht sehr einfach zu formulieren.

MB(E,z): $$M_E - F\frac{h}{2} + Ah\frac{\sqrt{2}}{2} - Bh\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad 1_{7} \quad \Rightarrow \quad M_E = \frac{\sqrt{2}}{2}(B-A) + F\frac{h}{2} \qquad \text{(III)}$$

Körper 1: Fahrbahn

KB(x): $$A\frac{\sqrt{2}}{2} - B\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad 1_{8} \quad \Rightarrow \quad A = B \qquad \text{(IV)}$$

KB(y): $$C_y - P + A\frac{\sqrt{2}}{2} + B\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad 1_{9} \quad \Rightarrow \quad C_y = -\frac{\sqrt{2}}{2}(A+B) + P \qquad \text{(V)}$$

MB(C,z): $$4aP - 3aA\frac{\sqrt{2}}{2} - aB\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad 1_{10} \qquad \text{(VI)}$$

Gleichungssystem lösen:

(IV) in (VI): $$4aP - 4aA\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad A = \sqrt{2}P = B \quad 1_{11} \qquad \text{(VII)}$$

(IV) in (I): $$E_x = \frac{\sqrt{2}}{2}(A-A) - F \quad \Rightarrow \quad E_x = -F \quad 1_{12} \qquad \text{(VII)}$$

(VII) in (II): $$E_y - \sqrt{2}A = 0 \quad \Rightarrow \quad E_y = 2P \quad 1_{13} \qquad \text{(IX)}$$

(IV) in (III): $$M_E = \frac{\sqrt{2}}{2}(A-A) + F\frac{h}{2} \quad \Rightarrow \quad M_E = F\frac{h}{2} \quad 1_{14} \qquad \text{(X)}$$

(IV) in (V): $$C_y = -\sqrt{2}A + P \quad \Rightarrow \quad C_y = -P \quad 1_{15} \qquad \text{(XI)}$$

Punkteschlüssel Aufgabe 2:

1: Lagerreaktionen in C korrekt (Orientierung egal)

2: Lagerreaktionen in E korrekt (Orientierung egal)

3: Schnittkräfte in A korrekt (Orientierung egal) für alle Körpern.

4: Schnittkräfte in B korrekt (Orientierung egal) für alle Körpern.

5: KB(x) vom Körper 2 (Pylon) konsequent richtig zur Skizze.

6: KB(y) vom Körper 2 (Pylon) konsequent richtig zur Skizze.

7: MB(*,z) vom Körper 2 (Pylon) konsequent richtig zur Skizze.

8: KB(x) vom Körper 1 (Fahrbahn) konsequent richtig zur Skizze.

9: KB(y) vom Körper 1 (Fahrbahn) konsequent richtig zur Skizze.

10: MB(*,z) vom Körper 1 (Fahrbahn) konsequent richtig zur Skizze.

11: A und B korrekt zur Skizze.

12: E_x korrekt zur Skizze.

13: E_y korrekt zur Skizze.

14: M_E korrekt zur Skizze.

15: C_y korrekt zur Skizze.