Technische Mechanik
151-0223-10

- Zwischenprüfung -

15. November 2022

Dr. Paolo Tiso

HINWEISE:

- Schreiben Sie Ihren Namen und LEGI Nummer auf den Antwortblatt und auf die Rechnenteil-Seiten, und zwar in das dafür vorgesehene Feld am oberen Rand.
- Die vorliegende Prüfung umfasst 16 Seiten für den Multiple-Choice-Teil und 8 für den Rechenteil.
- Die Prüfung hat einen Multiple-Choice-Teil mit 15 Aufgaben und einen Rechenteil mit 2 Aufgaben.
- Der Multiple-Choice-Teil wird mit 50% gewichtet, der Rechenteil mit 50%. Es gibt insgesamt **30 erreichbare Punkte**. Das bedeutet im Durchschnitt 4 Minuten pro Punkt.
- Bei den **Multiple-Choice**-Fragen gibt es **immer nur 1 richtige Antwort**. Jede richtige Antwort wird mit 1 Punkt bewertet. Für falsche oder leere Antworten gibt es keinen Punktabzug.
- Die Prüfungszeit beträgt **2 Stunden**.
- **Erlaubte Hilfsmittel: Zusammenfassung (Computer oder Handgeschrieben) auf 4 Blättern bzw. 8 Seiten A4.** Aufgaben mit Lösungen und alte Prüfungen sind nicht zulässig. Eigene Beispiele zur Veranschaulichung sind zugelassen. Die Zusammenfassung darf von einer beliebigen Quelle (z.B. vom AMIV) bezogen werden, so lange die oben stehenden Kriterien erfüllt sind.
- **Kein Taschenrechner** oder elektronische Hilfsmittel zugelassen.
- Beantworten Sie die vorliegenden Aufgaben an den dafür vorgesehenen Stellen.
- Schalten Sie Ihr Mobiltelefon und alle weiteren elektronischen Geräte aus.
- **Das Antwortblatt sowie alle Seiten des Rechenteils sind abzugeben.**

Viel Erfolg!

ETH

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

151-0223-10 Technische Mechanik

Zwischenprüfung 15.11.2022

Dr. Paolo Tiso

Antwortblatt
Typ A

Nachname:

Vorname:

Legi-Nummer:

Legi-Nummer

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Wie man das Antwortblatt richtig ausfüllt:

Ja:	A	B	C	D	E
	A	●	C	D	E
Nein	A	B	C	D	E
	A	B	C	D	E

Antworten

1.	A	B	C	D	E
2.	A	B	C	D	E
3.	A	B	C	D	E
4.	A	B	C	D	E
5.	A	B	C	D	E
6.	A	B	C	D	E
7.	A	B	C	D	E
8.	A	B	C	D	E
9.	A	B	C	D	E
10.	A	B	C	D	E
11.	A	B	C	D	E
12.	A	B	C	D	E
13.	A	B	C	D	E
14.	A	B	C	D	E
15.	A	B	C	D	E

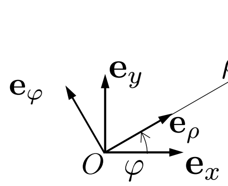
Diese Seite muss am Ende abgegeben werden!

Teil I - Multiple-Choice **(1 richtige Antwort)**

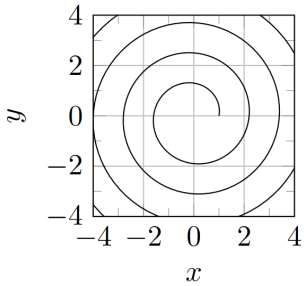
1. Eine Bahnkurve in der Ebene ist durch folgende Parametrisierung in Polarkoordinaten gegeben.

$$\begin{aligned} \rho(t) &= 1 + t^2, \\ \varphi(t) &= at, \end{aligned} \tag{1}$$

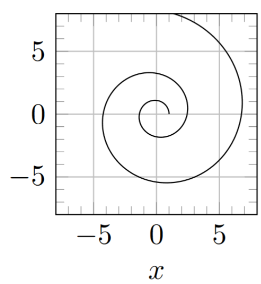
wobei $a = \frac{5}{3}\pi$ und $t \geq 0$. Die Polarkoordinaten sind in dem folgenden Diagramm definiert:



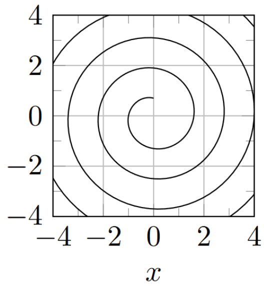
Welches der folgenden Diagramme ist die richtige Darstellung der Bahnkurve?



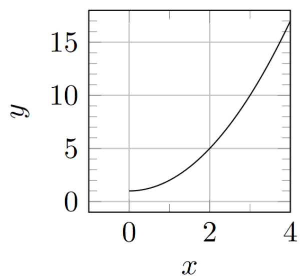
(a)



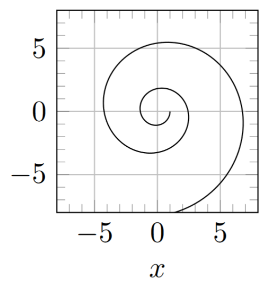
(b)



(c)



(d)



(e)

(a)

► (b)

(c)

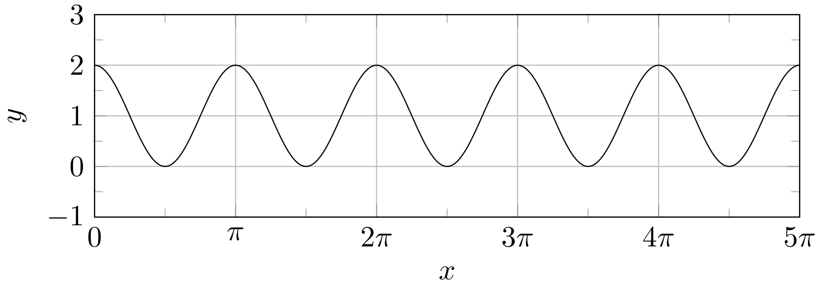
(d)

(e)

Lösung:

Wir lösen dieses Problem durch Eliminierung. Wir können zuerst behaupten, dass bei $t = 0$, $\rho(0) = 1$ und $\phi(0) = 0$. (a),(b), und (e) sind mögliche Kandidaten. Wenn t grösser wird, wird $\phi(t)$ grösser, daher kann man (e) eliminieren. Schlussendlich beobachten wir dass $\rho(t)$ quadratisch mit t wächst. Dieses Verhalten ist in (b) sichtbar, aber nicht in (a). Daher ist (b) die richtige Antwort.
Wir können auch überprüfen dass, für $\phi(\frac{3}{5} \cdot 4) = 4\pi$, wir $\rho(\frac{3}{5} \cdot 4) = 1 + \frac{12^2}{5^2} = 1 + \frac{144}{25}(= 6.76) \approx 1 + 6 = 7$ haben, was (b) entspricht.

2. Gegeben ist die folgende graphische Darstellung einer Bahnkurve, für $t \geq 0$:



Bestimmen Sie die Parametrisierung dieser Bahnkurve.

(a) $x = t, \quad y = \sin(t)$

(b) $x = t, \quad y = \cos(2t)$

► (c) $x = t, \quad y = 1 + \cos(2t)$

(d) $x = t, \quad y = 1 + \cos(t)$

(e) $x = t, \quad y = 1 + \sin(2t)$

Lösung:

Die Kurve hat die Form einer Kosinusfunktion. Sie ist um 1 auf der y-Achse verschoben, und hat eine Kreisfrequenz von $\omega = 2$:

$$y = 1 + \cos(2x). \tag{1}$$

Mit der zusätzlichen Parametrisierung $x = t$ (gleich für alle Antwortmöglichkeiten), erhalten wir das Endresultat:

$$x = t, \quad y = 1 + \cos(2t). \tag{2}$$

3. Ein materieller Punkt bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$ im dreidimensionalen Raum. Betrachten Sie die folgenden Aussagen:

1. $\mathbf{v}(t)$ ist zu jedem Zeitpunkt tangential zu der Bahnkurve des Punktes.
2. Die Bahnkurve des Punktes liegt immer in einer Ebene.
3. Die Schnelligkeit $|\mathbf{v}(t)|$ ist unabhängig von der gewählten Koordinatenparametrisierung von $\mathbf{v}(t)$.
4. $\mathbf{v}(t)$ ist zu jedem Zeitpunkt rechtwinklig zum Ortsvektor.
5. Die Schnelligkeit $|\mathbf{v}(t)|$ ist konstant.

Welche der oben genannten Aussagen sind richtig?

(a) Nur 3. und 4.

(b) Nur 1., 3. und 4.

► (c) Nur 1. und 3.

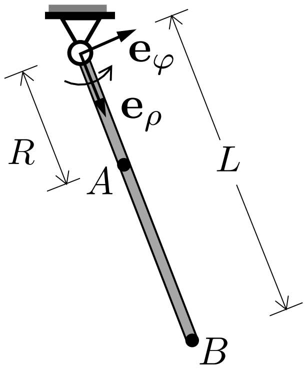
(d) Alle.

(e) Nur 1., 2. und 5.

Lösung:

1. **Richtig** gemäss der Definition der Bahnkurve.
2. Falsch. Der Punkt bewegt sich in dem dreidimensionalen Raum.
3. **Richtig**. Der Betrag eines Vektors (in diesem Fall die Geschwindigkeit) ist unabhängig vom Koordinatensystem.
4. Falsch. Als Gegenbeispiel kann man sich z. B. einen Punkt vorstellen, der sich auf einer Geraden bewegt, die vom Ursprung des Koordinatensystems ausgeht. In diesem Fall sind der Ortsvektor und die Geschwindigkeit parallel.
5. Falsch, da $\mathbf{v}(t)$ Funktion der Zeit ist.

4. Ein masseloser Stab mit konstanter Länge L ist an einem Ende drehbar gelagert und dreht sich im Gegenuhrzeigersinn. Die Schnelligkeit des Punktes A, der im Abstand R zum Drehpunkt auf dem Stab liegt, ist bekannt und beträgt v_A.



Was ist die Geschwindigkeit des Punktes B in Polarkoordinaten?

(a) $\mathbf{v}_B = (L - R)v_A\,\mathbf{e}_\varphi$

► (b) $\mathbf{v}_B = \dfrac{L}{R}v_A\,\mathbf{e}_\varphi$

(c) $\mathbf{v}_B = \dfrac{L}{R}v_A\,\mathbf{e}_\rho$

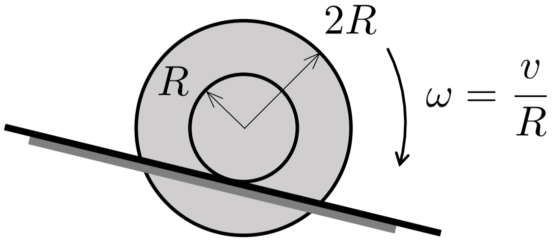
(d) $\mathbf{v}_B = \dfrac{R}{L}v_A\,\mathbf{e}_\rho$

(e) $\mathbf{v}_B = \dfrac{\sqrt{2}}{2}v_A\,\mathbf{e}_\rho + \frac{\sqrt{2}}{2}v_A\,\mathbf{e}_\varphi$

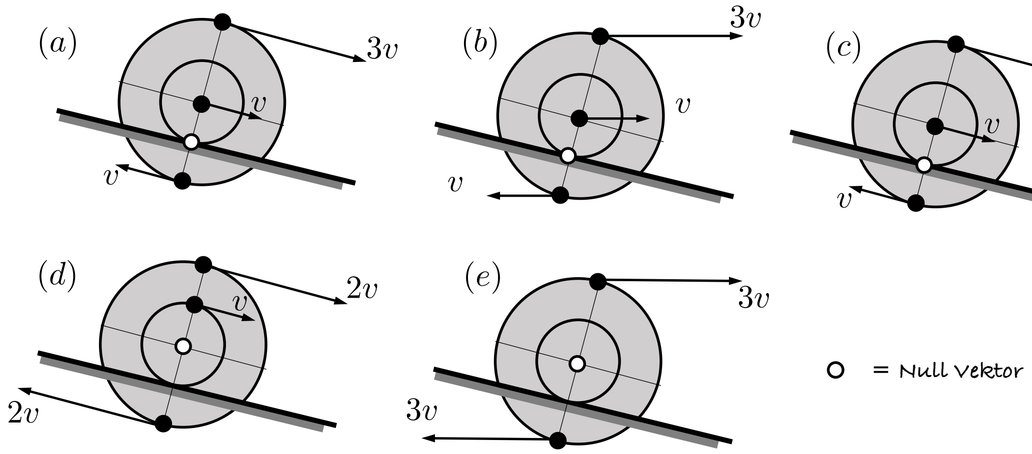
Lösung:

Da der Stab gelagert ist, liegt das Momentanzentrum beim Festlager. Der Stab rotiert um den Lager, und die Geschwindigkeit aller Punkte zeigt in $\mathbf{e}_\varphi$ Richtung. Die momentane Winkelgeschwindigkeit hat Betrag $\omega = \dfrac{v_A}{R}$. Damit können wir den Betrag am Punkt B als $v_B = \omega L = \dfrac{L}{R}v_A$. Die Antwort ist dann $\mathbf{v}_B = \dfrac{L}{R}v_A\,\mathbf{e}_\varphi$.

5. Ein Zylinder besteht aus zwei konzentrischen, starr miteinander befestigten Zylindern mit den Radien R und $2R$. Der kleinere Zylinder rollt ohne zu gleiten auf einer schiefen Ebene, wie in der Abbildung dargestellt, mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{v}{R}$.



Welche der vorliegenden Darstellungen enthält die korrekten Geschwindigkeiten der mit einem schwarzen Kreis markierten Punkte? Ein weisser Kreis bedeutet Geschwindigkeit null.



► (a)

(b)

(c)

(d)

(e)

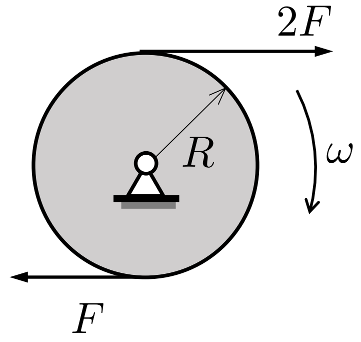
Lösung:

Da der Zylinder ohne zu gleiten rollt, ist die Geschwindigkeit des Berührungspunktes mit der Ebene null. Nach Definition ist dieser Punkt das Momentanzentrum C. Alle andere Punkte P_i rotieren um diesen Punkt, und ihre Geschwindigkeit liegt senkrecht zu dem Vektor r_{CP_i}:

$$\mathbf{v}_{P_i} = \mathbf{v}_C + \omega \times r_{CP_i} = \omega \times r_{CP_i} \tag{1}$$

Die Geschwindingkeiten von Punkten auf dem Zylinder sind somit parallel zur schiefen Ebene. Die dargestellte Punkte liegen auf einer Linie die senkrecht zur schiefen Ebene liegt. Wir können dann die Beträge ihrer Geschwindigkeiten durch $|\mathbf{v}_{P_i}| = |r_\perp|\frac{v}{R}$ berechnen. Obwohl (a), (c) und (d) Geschwindigkeiten parallel zur schiefen Ebene zeigen, nur (a) zeigt die richtige Beträge dieser Geschwindigkeiten.

6. Eine Scheibe mit dem Radius R ist in ihrem Mittelpunkt gelenkig gelagert und dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω im Uhrzeigersinn. Zwei horizontale Kräfte der Beträge $2F$ und F wirken auf den oberen und unteren Punkt der Scheibe in entgegengesetzter Richtung, wie gezeigt. Wie gross ist die Gesamtleistung $\mathcal{P}$?



Was ist die Gesamtleistung P?

(a) $\mathcal{P} = F\omega R$

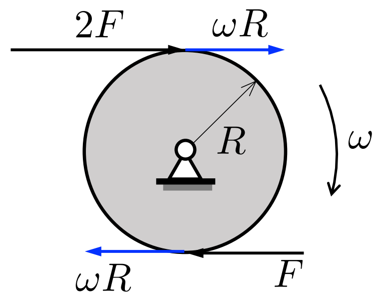
(b) $\mathcal{P} = 0$

(c) $\mathcal{P} = -F\omega R$

► (d) $\mathcal{P} = 3F\omega R$

(e) $\mathcal{P} = 5F\omega R$

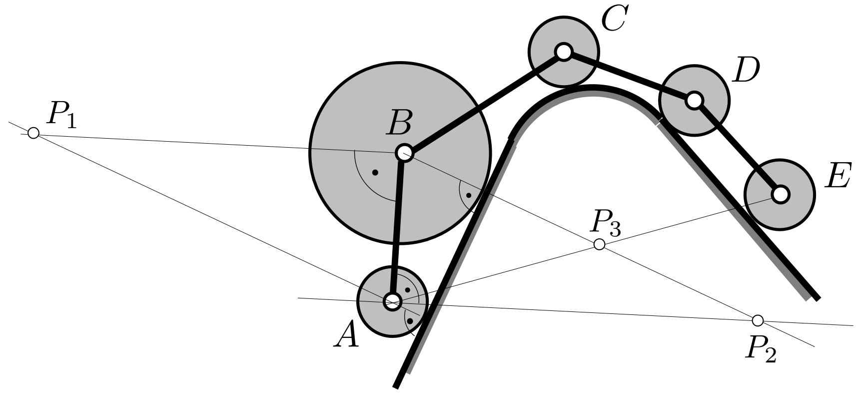
Lösung: Die Geschwindigkeiten der Angriffspunkte der Kräfte haben Betrag ωR und in entgegengesetzte horizontale Richtungen gerichtet, wie hier dargestellt



Die Gesamtleistung ist dann

$$\mathcal{P} = 2F\omega R + F\omega R = 3F\omega R. \tag{1}$$

7. Das in der Abbildung gezeigte ebene System besteht aus fünf Scheiben, die in der Mitte durch starre Stäbe miteinander verbunden sind. Alle Scheiben rollen ohne zu gleiten auf einem geraden Profil mit einer Kurve in der Mitte, wie abgebildet.



Was ist das Momentanzentrum des Stabes AB?

► (a) AB führt eine reine Translation durch.

(b) A

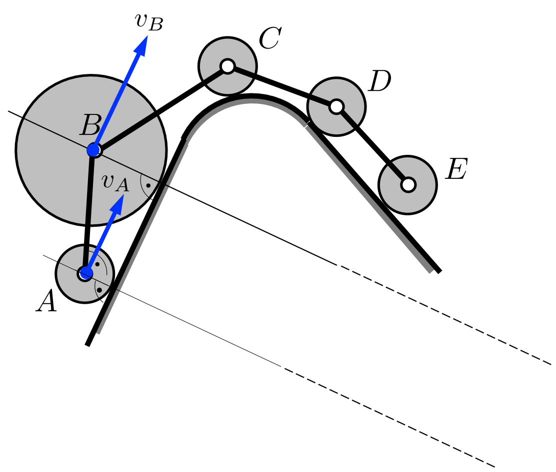
(c) P_3

(d) P_2

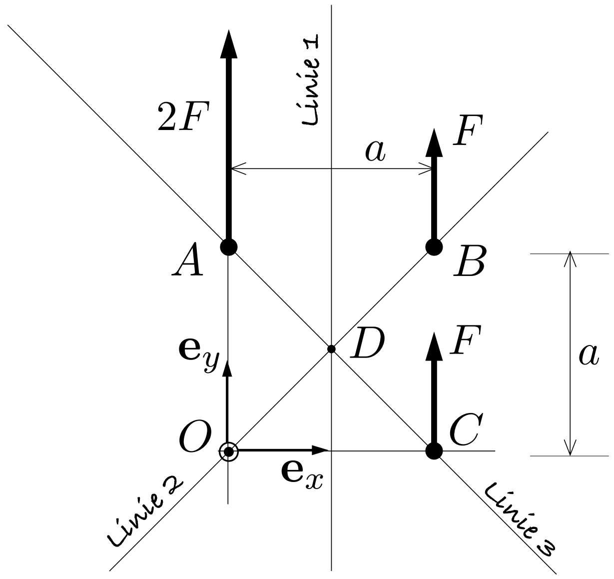
(e) P_1

Lösung:

Da die Scheibe mit den Zentren A und B ohne zu gleiten rollt, sind die Geschwindigkeiten der Punkte A und B parallel zur entsprechenden Kontaktfläche. Daher führt AB eine reine Translation durch.



8. Betrachten Sie die dargestellte Kräftegruppe, die aus drei Kräften der Beträge $2F$, F und F besteht, die vertikal auf die Punkte A, B und C wirken. Der vertikale und horizontale Abstand zwischen den Punkten wird, wie gezeigt, mit a bezeichnet.



Wann ist das resultierende Moment null?

(a) Bezüglich allen Punkten auf Linie 3.

(b) Nur bezüglich D.

(c) Bezüglich allen Punkten auf Linie 2.

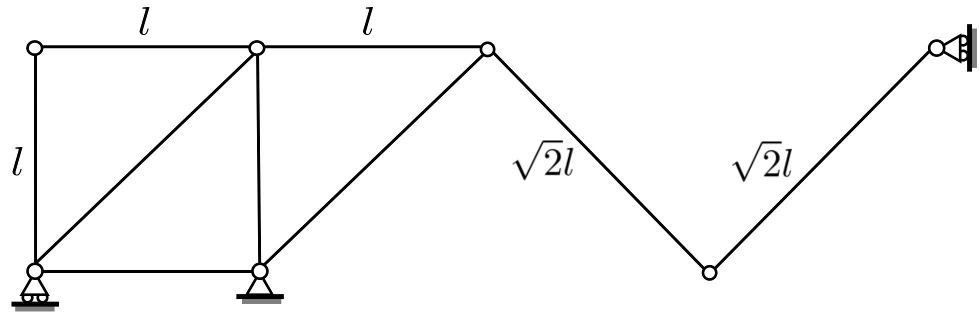
► (d) Bezüglich allen Punkten auf Linie 1.

(e) Nur bezüglich O.

Lösung:

Die beiden Kräfte, die auf B und C wirken, sind äquivalent zu einer einzigen vertikalen Kraft mit der Betrag $2F$. Die entsprechende Wirkunglinie führt durch B und C. Aufgrund der Symmetrie ist dann das Moment aller Kräfte für alle Punkte auf Linie 1 gleich Null.

9. Gegeben ist das folgende ebene System, welches aus starren Stäben besteht:



Was ist der Freiheitsgrad des Systems?

(a) 0

► (b) 1

(c) 2

(d) 3

(e) 4

Lösung:

Wir zeigen zwei Lösungswege, um die Frage zu beantworten.

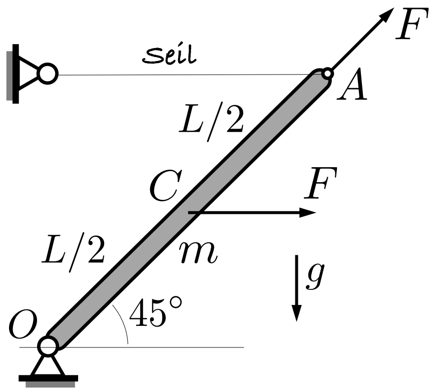
Variante 1: Wir können erkennen, dass die 7 Stäbe auf der linke Seite einen Starrkörper bilden. Die mögliche Bewegungen dieses ebenen Starrkörpers sind durch 1 Festlager und 1 Loslager beschränkt, so dass dieses linke Starrkörper fix ist (der Freiheitsgrad ist null für dieses Teilsystem). Der Rest des Systems besteht aus 2 Stäbe, 1 Gelenke, 1 Loslager, und 1 Festlager (der Verbindungspunkt zwischen der rechte und der linke Teil wir zum Festlager):

$$f = n - b_{Lager} - b_{Gelenke} = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 1 \tag{1}$$

Variante 2: Wir können die Punkte betrachten so dass, in 2D, wir $n = 7 \cdot 2 = 14$ haben. Jede Verbindung beschränkt den Freiheitsgrad bei 1, wie auch die beide Loslager, und der Festlager eliminiert 2 weitere Freiheitsgrade. Wir kriegen somit

$$f = n - b = 7 \cdot 2 - 9 - 2 \cdot 1 - 2 = 1 \tag{2}$$

10. Ein Stab OA der Länge L und der Masse m ist in O gelenkig gelagert und wird durch ein horizontales Seil in einem Winkel von 45° zur Horizontalrichtung gehalten. Die Schwerkraft g wirkt, wie gezeigt, nach unten. An der Spitze des Stabes A und dem Mittelpunkt C wirken zwei Kräfte von gleichem Betrag F in Richtung des Stabes bzw. in horizontaler Richtung, wie dargestellt.



Wie gross ist der Betrag S der Seilkraft, die das Gleichgewicht gewährleistet?

(a) $S = \frac{mg}{2} - \frac{F}{2}$

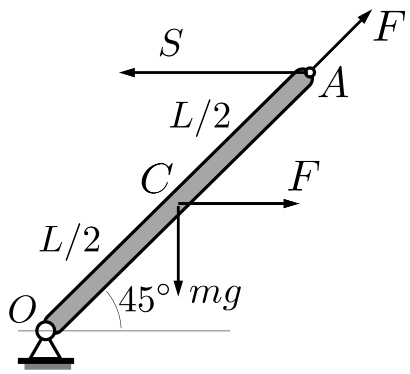
► (b) $S = \frac{mg}{2} + \frac{F}{2}$

(c) $S = \frac{mg}{2} + \frac{2F}{\sqrt{2}}$

(d) $S = mg$

(e) $S = mg + \frac{\sqrt{2}F}{2}$

Lösung: Die Seilkraft kann durch den Hauptsatz der Statik leicht bestimmt werden.

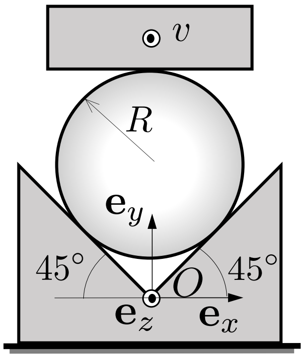


Wenn man das Momentbedingung für Gleichtgewicht bezüglich Punkt O schreibt, bekommt man

$$-mg\frac{L}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - F\frac{L}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + SL\frac{\sqrt{2}}{2} = 0, \tag{1}$$

und deswegen $S = \frac{mg}{2} + \frac{F}{2}$.

11. Eine Kugel mit dem Radius R rollt ohne zu gleiten auf einer festen Bahn. Die beiden Seiten der Bahn schliessen einen Winkel von 90° miteinander ein. Der oberste Punkt der Kugel hat Kontakt mit einem starren Block, der mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_z$ eine Translation durchführt.



Was ist die Rotationsgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ der Kugel?

(a) $\boldsymbol{\omega} = \frac{v}{R}\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{e}_z$

(b) $\boldsymbol{\omega} = -\frac{\sqrt{2}v}{R}\mathbf{e}_x$

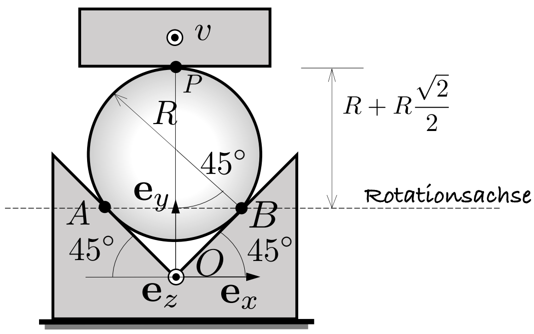
► (c) $\boldsymbol{\omega} = \frac{v}{R}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\mathbf{e}_x$

(d) $-\boldsymbol{\omega} = \frac{v}{R}\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{e}_x$

(e) $\boldsymbol{\omega} = \frac{v}{R}\mathbf{e}_x$

Lösung:

Die Rotationsachse der Kugel führt durch die Berürungspunkte A und B . Die Rotationsgeschwindigkeit ist dann gegeben als $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{e}_x$. Um den Betrag ω zu bestimmen, merkt man das Punkt P der Kugel hat die Geschwindigkeit $\mathbf{v}_P = v\mathbf{e}_z$, und das die Distanz d zwischen die Rotationsachse und P ist $d = R\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$, wie unten gezeigt.



Die Anwendung der Starrkörperformel ergibt sich

$$\omega = \frac{v}{d} = \frac{v}{R}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}. \tag{1}$$

12. Eine Kräftegruppe hat die Resultierende $\mathbf{R} = 3\mathbf{e}_x$ [N] und das resultierende Moment $\mathbf{M}_O = 2\mathbf{e}_z$ [Nm] bezüglich dem Punkt O .

1. Die zweite Invariante der Dyname ist null.
2. Es gibt mindestens einen Punkt P, sodass $\mathbf{M}_P = \mathbf{0}$.
3. Die erste Invariante der Dyname ist $3\mathbf{e}_x$.
4. Die Dyname stellt ein Kräftepaar dar.
5. Es herrscht Gleichgewicht.

Welche Aussage(n) ist(sind) richtig?

(a) Nur 2. und 4.

(b) Nur 5.

(c) Nur 1. und 3.

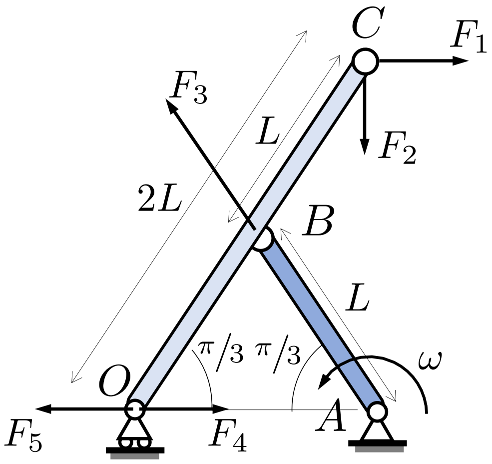
► (d) Nur 1., 2. und 3.

(e) Nur 4. und 5.

Lösung:

1. **Richtig.** Die zweite Invariante ist $I_2 = \mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O$. Da $\mathbf{R}$ und $\mathbf{M}_O$ senkrecht zu einander stehen, ist $I_2 = 0$.
2. **Richtig.** Die Resultierende $\mathbf{R}$ ist nicht Null. Daraus folgt dass das Moment mit der Formel $\mathbf{M}_B = \mathbf{M}_A + \mathbf{R} \times \mathbf{r}_{AB}$ transformiert werden kann, wobei A und B zwei beliebige Punkte sind. Man kann dann setzen ,dass $\mathbf{M}_A + \mathbf{R} \times \mathbf{r}_{AB} = \mathbf{0}$.
3. **Richtig.** Die erste invariante I_1 der Dyname ist definitionsgemäss $I_1 = \mathbf{R}$.
4. Falsch, da $\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$.
5. Falsch. Für Gleichgewicht muss $\mathbf{R} = \mathbf{O}$ und $\mathbf{M} = \mathbf{0}$.

13. Das gezeigte System besteht aus zwei Stäben OC und AB der Länge $2L$ bzw. L, die in B gelenkig miteinander verbunden sind. Der Punkt A ist am Boden angelenkt, während der Punkt O sich nur horizontal bewegen kann. Die Winkel zwischen den Stäben in der momentanen Konfiguration sind in der Abbildung dargestellt. Der Stab AB dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω im Gegenuhrzeigersinn.



Welche Kraft(Kräfte) hat (haben) Leistung null?

(a) Nur F_2.

(b) Nur F_2 und F_3.

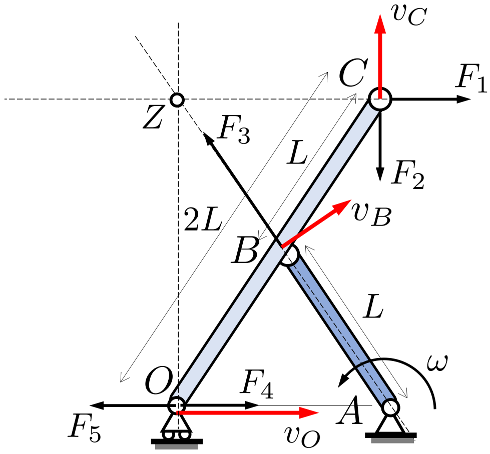
(c) Nur F_1.

(d) Nur F_5 und F_4.

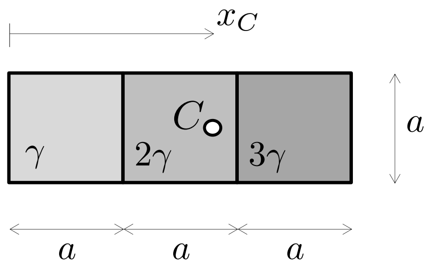
► (e) Nur F_1 und F_3.

Lösung:

Um Leistung Null zu bekommen müss eine Kraft senkrecht zur Geschwindigkeit des entsprechenden Angriffpunktes stehen. Die Geschwindigkeit $\mathbf{v}_O$ von O kann wegen der Auflage nur eine horizontale Komponente haben. Da AB um Punkt A rotiert, ist $\mathbf{v}_B$ senkrecht zu AB. Ausserdem ist Z das Momentanzentrum von OC, und deshalb zeicht $\mathbf{v}_C$ in der vertikale Richtung. Die richtige Antwort ist deswegen nur F_1 und F_3.



14. Der in der Abbildung dargestellte ebene Körper besteht aus drei quadratischen Teilen mit den Seitenlänge a und den Dichten γ, 2γ bzw. 3γ.



Wie lautet die Koordinate x_C des Massenschwerpunkts des Körpers, gemessen von der linken Seite, wie dargestellt?

(a) $x_C = \frac{7}{6}a$

(b) $x_C = 2a$

(c) $x_C = \frac{3}{2}a$

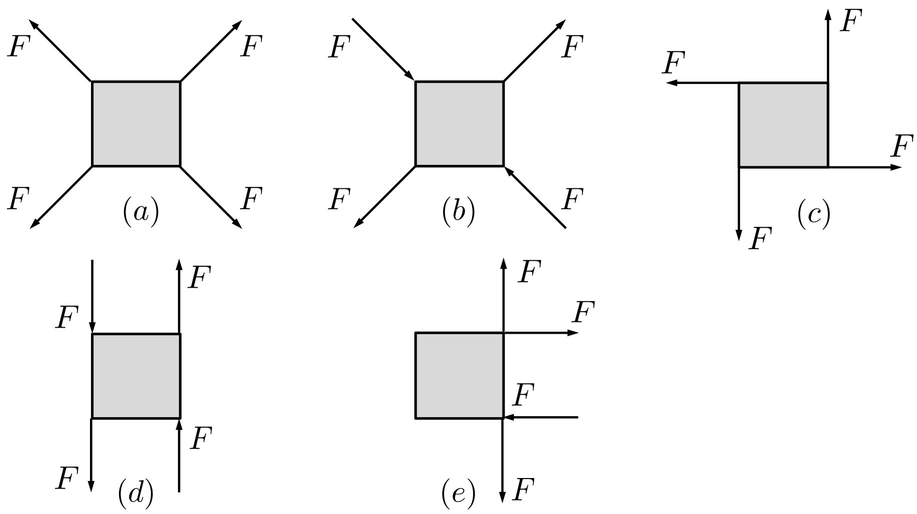
(d) $x_C = \frac{5}{4}a$

► (e) $x_C = \frac{11}{6}a$

Lösung: Gemäss der Definition ist die Lage des Schwerpunktes wie folgt ermittelt:

$$x_C = \frac{\gamma a^2 \frac{a}{2} + 2\gamma a^2 \frac{3a}{2} + 3\gamma a^2 \frac{5a}{2}}{\gamma a^2 + 2\gamma a^2 + 3\gamma a^2} = \frac{\frac{a}{2} + 3a + \frac{15a}{2}}{6} = \frac{11a}{6}. \qquad (1)$$

15. Vier Kräfte mit gleichem Betrag werden auf fünf verschiedene Arten auf ein starres Quadrat ausgeübt (siehe unten).



Welche der oben stehenden Kräftegruppen stellt (stellen) ein Gleichgewicht dar?

(a) Alle ausser (c).

(b) Nur (b) und (d).

(c) Nur (a).

(d) Alle.

► (e) Nur (a) und (b).

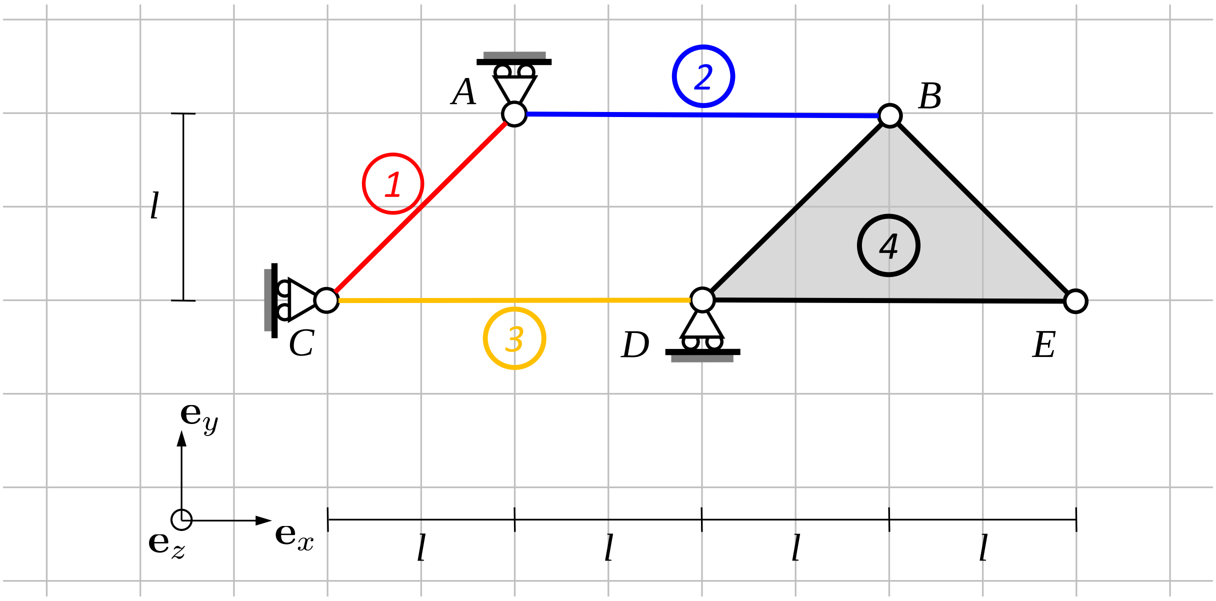
Lösung:

Im Gleichgewicht muss die Resultierende und das resultierende Moment gleich Null sein. Das ist nun für (a) und (b) der Fall. Für (c), (d) und (e) stellt die Dyname ein Kräftepaar dar.

Teil II - Rechenteil

Aufgabe 1 *[7 Punkte]*

Das unten dargestellte System besteht aus 6 masselosen Stäben, die gelenkig miteinander verbunden sind. Die entsprechenden Längen können der Skizze entnommen werden. Die Punkte A und D können nur horizontal verschoben werden und der Punkt C ist auf eine vertikale Bewegung beschränkt (siehe Skizze).



1. Berechnen Sie den Freiheitsgrad des Systems (geben Sie die Anzahl der Körper und Bindungen genau an). *[1 Punkt]*

Das System besteht aus 3 Stäbe und der Dreieck BDE:

$$n = (3 + 1) \cdot 3 = 12 \tag{1}$$

Drei Rollagern (je 1 Bindung) sind eingebaut:

$$b_{Lager} = 3 \cdot 1 = 3 \tag{2}$$

Und 4 Zweistäbige Verbindungen halten das System zusammen:

$$b_{2\ Staebe} = (2 - 1) \cdot 2 = 2 \quad \Rightarrow \quad b_{Gelenke} = 4 \cdot b_{2\ Staebe} = 8 \tag{3}$$

Der Freiheitsgrad des Systems kann dann wie folgt berechnet werden:

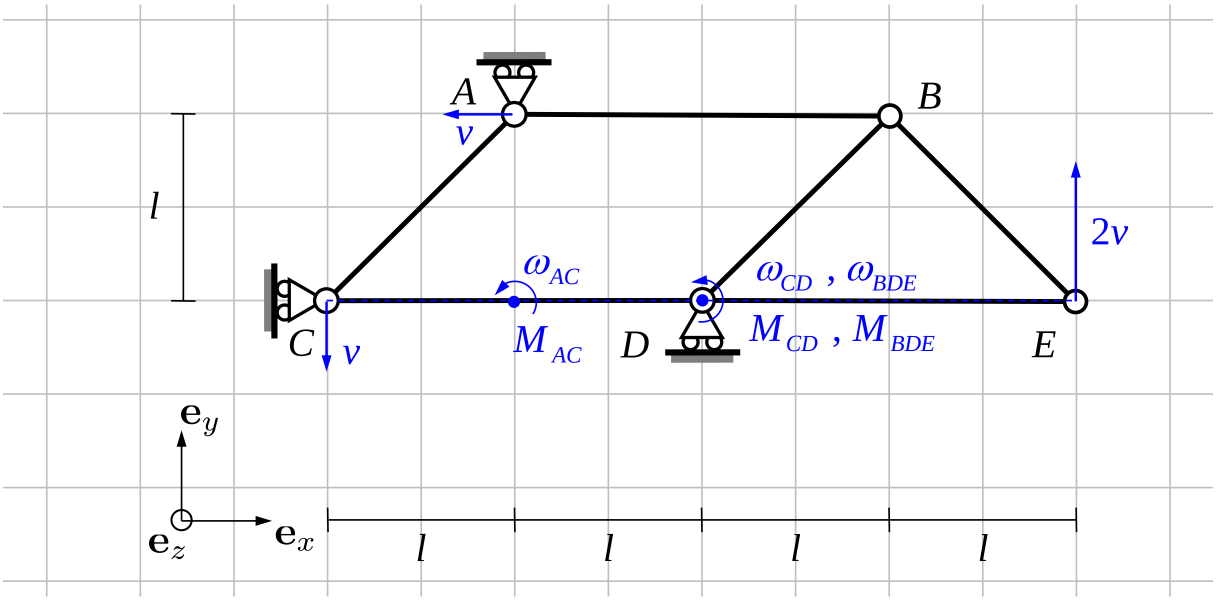
$$f = n - b_{Lager} - b_{Gelenke} = 12 - 3 - 8 = 1 \tag{4}$$

Alternative: Wenn man den Stab AD einführt (+ 1 Bindung) wird der System zu einer statisch bestimmten System mit einem einzigen Körper (Freiheitsgrad = 0). Darum muss der System 1 Freiheitsgrad mehr als 0 haben.

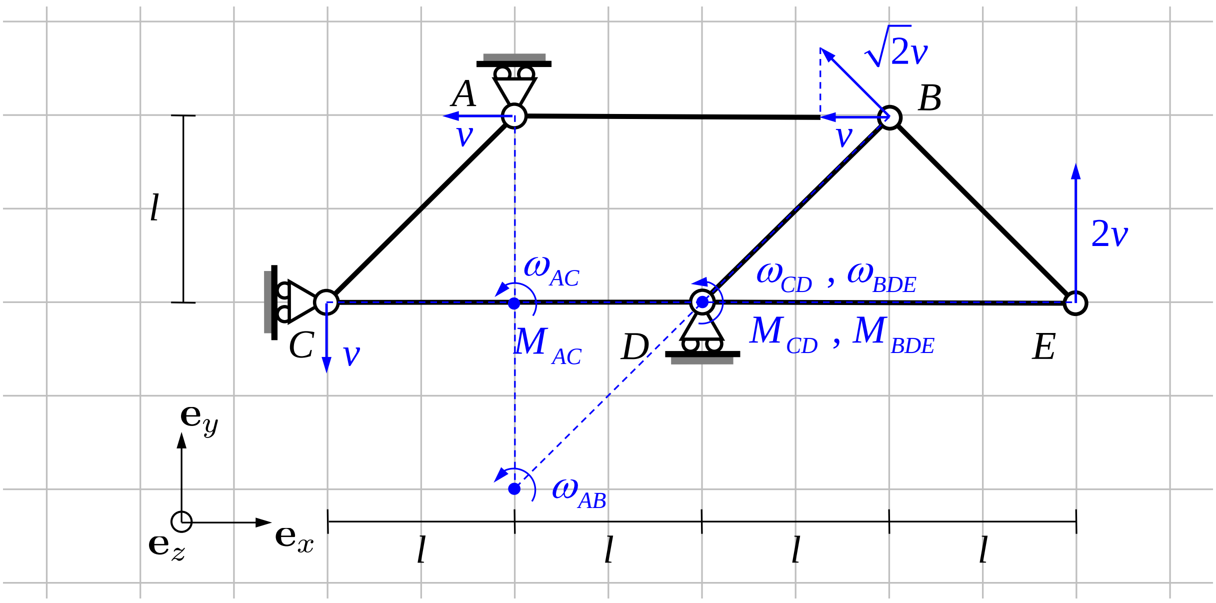
Diese Seite muss am Ende abgegeben werden!

Hilfsskizzen für Teilaufgaben 2 bis 4

Die folgenden Teilaufgaben 2, 3 und 4 können algebraisch ODER graphisch in der unten stehenden Figur gelöst werden. Bei einer graphischen Lösung müssen Betrag und Richtung der Vektoren (d.h. auch Winkel) klar und sauber dargestellt werden. Wird die Aufgabe sowohl graphisch als auch algebraisch gelöst und unterscheiden sich die Ergebnisse, so resultiert dies in 0 Punkten. Unlesbare Antworten werden auch mit 0 Punkten bewertet.



Alternative graphische Lösung für Teilaufgabe 3:



2. Die Geschwindigkeit v wird im Punkt C in negativer $\mathbf{e}_y$ Richtung eingeführt. Berechnen Sie die Geschwindigkeit im Punkt A, die Winkelgeschwindigkeit ω_{AC} und das Momentanzentrum M_{AC}. *[2 Punkte]*

   Das Momentanzentrum muss Senkrecht zu den Rollagern in A und C sein, siehe Skizze für die Position.

   ω_{AC} wird dann:

$$\omega_{AC} = \frac{v}{l} \tag{5}$$

   Die Geschwindigkeit im Punkt E ist dementsprechend:

$$v_{Ax} = -\omega_{AC} \cdot l = -v \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_A = \begin{pmatrix} -v \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

3. Berechnen Sie das Momentanzentrum M_{BDE} und die Winkelgeschwindigkeit ω_{BDE} des Dreiecks BDE. Berechnen Sie zusätzlich die Geschwindigkeit im Punkt E. *[2 Punkte]*

   Aus den Rollagern in Punkt C und D ergibt sich, dass den Stab CD seinen Momentanzentrum im Punkt D hat. Das bedeutet, dass den Punkt D die Geschwindigkeit 0 hat und demzufolge auch dem Momentanzentrum des Dreiecks BDE entspricht (siehe Skizze).

   Dank der Parallelogrammregel hat den Dreieck BDE dieselbe Winkelgeschwindigkeit als Stab AC:

$$\omega_{BDE} = \omega_{AC} = \frac{v}{l} \tag{7}$$

   Alternative: ω_{BDE} kann auch durch die Geschwindigkeit im Punkt B berechnet werden:

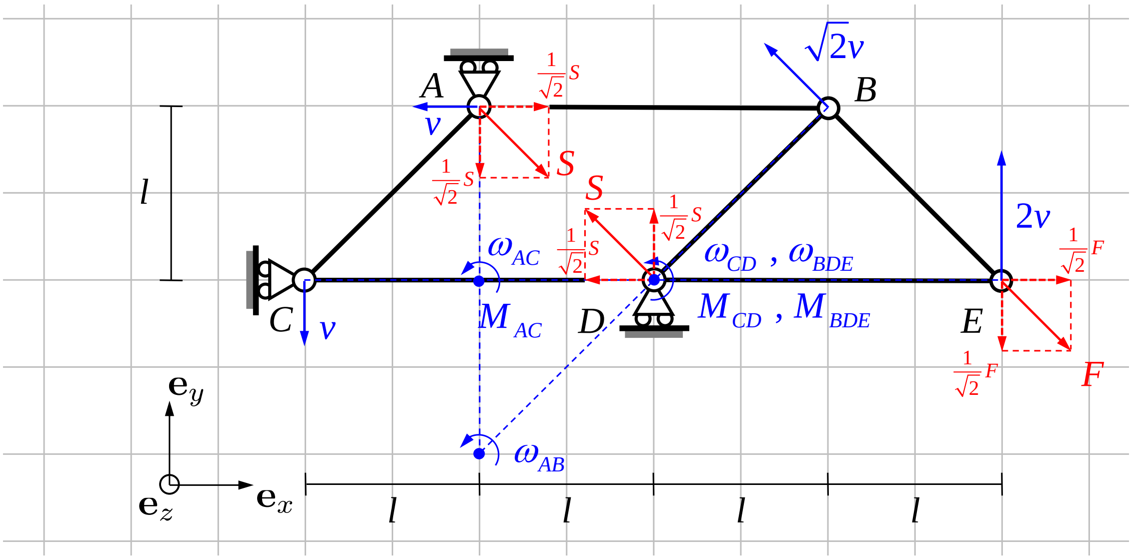
$$\omega_{BDE} = \frac{\sqrt{2}v}{\sqrt{2}l} = \frac{v}{l} \tag{8}$$

   Geschwindigkeit B kann entweder dank der SdpG oder SdM berechnet werden, siehe alternative Graphische Lösung

   Die Geschwindigkeit in E wird demzufolge:

$$v_{Ey} = \omega_{BDE} \cdot 2l = 2v \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 2v \end{pmatrix} \tag{9}$$

4. Der Stab AD wird im System eingebaut und die Kraft F wirkt im Punkt E mit einem Winkel von 45° zur $\mathbf{e}_y$ Achse (siehe Skizze). Berechnen Sie die Stabkraft AD. Handelt es sich um einen Zug- oder Druckstab? *[2 Punkte]*



Hinweis: Benutzen Sie die PdvL und die vorher berechneten Geschwindigkeiten!

Stab AD wird entfernt und durch die Stabkraft S ersetzt (siehe Skizze). Durch die im Aufgabenteil 2 und 3 berechneten Geschwindigkeiten kann die virtuelle Leistung wie folgt berechnet werden:

$$\tilde{\mathbf{v}}_A = \mathbf{v}_A = \begin{pmatrix} -\tilde{v} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{\mathbf{v}}_D = \mathbf{v}_D = \mathbf{0}, \qquad \tilde{\mathbf{v}}_E = \mathbf{v}_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\tilde{v} \end{pmatrix} \tag{10}$$

Und die entsprechende virtuelle Leistung:

$$\tilde{P} = \tilde{\mathbf{v}}_A \cdot \frac{S}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \tilde{\mathbf{v}}_D \cdot \frac{S}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \tilde{\mathbf{v}}_E \cdot \frac{F}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} -\tilde{v} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{S}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathbf{0} \cdot \frac{S}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2\tilde{v} \end{pmatrix} \cdot \frac{F}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

$$\tilde{P} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{v}S - \frac{2}{\sqrt{2}}\tilde{v}F \tag{13}$$

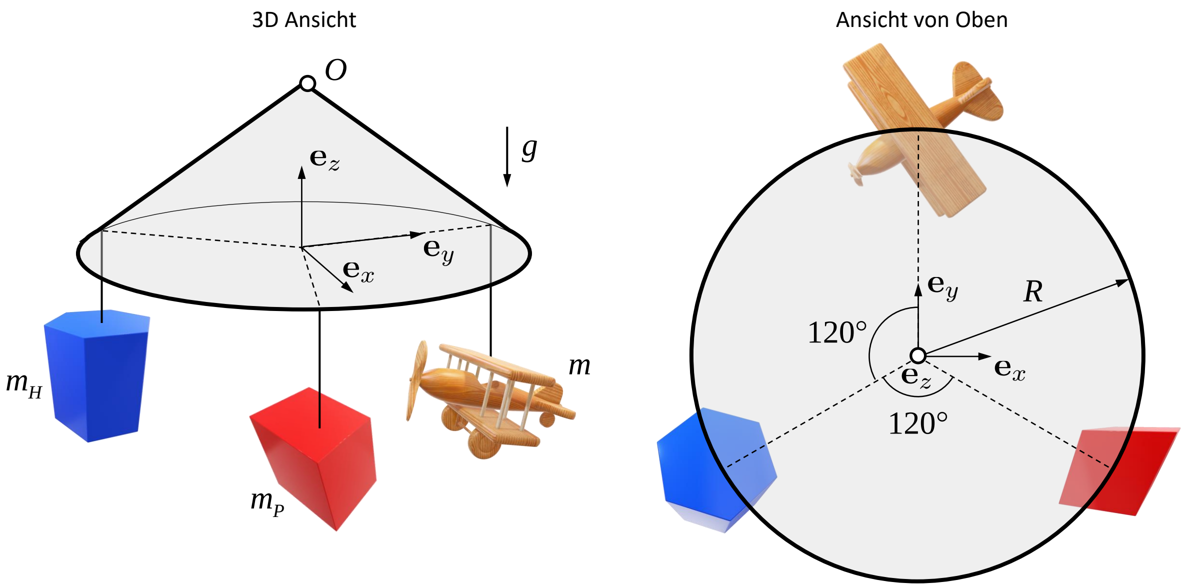
Da $\tilde{P} = 0$ wird die Stabkraft:

$$0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{v}S - \frac{2}{\sqrt{2}}\tilde{v}F \quad \Rightarrow \quad S = -2F \tag{14}$$

Da den Stab eine Kraft nach aussen ausübt handelt es sich um einen Druckstab.

Aufgabe 2 *[8 Punkte]*

Das unten schematisierte Babyspiel besteht aus 3 unterschiedlichen Objekten. Diese sind auf einem masselosen Kegel jeweils um 120° versetzt aufgehängt (siehe Skizze). Das Flugzeug hat die Masse m, das Hexagon die Masse m_H und das Parallelogramm die Masse m_P.

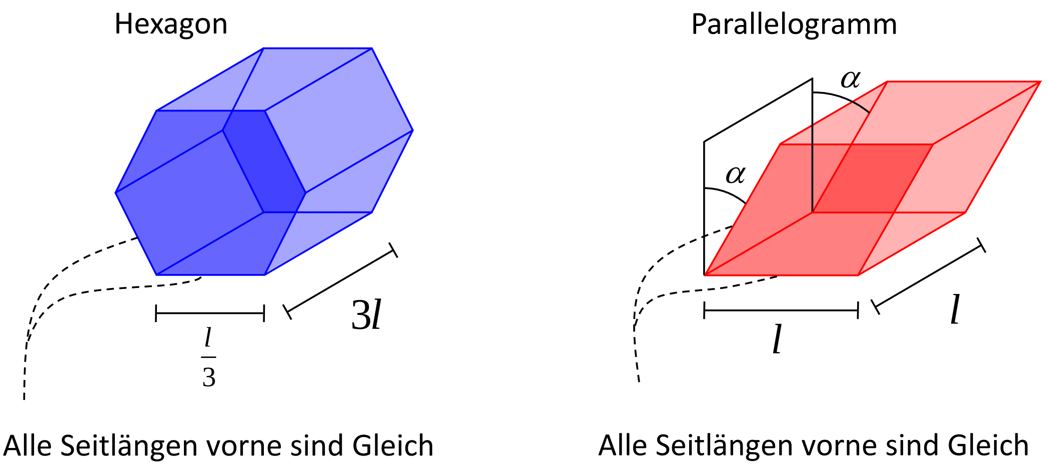


1. Berechnen sie die resultierende Kräfte (R_x, R_y, R_z) und Momente $(M_{O,x}, M_{O,y}, M_{O,z})$ des Systems bezüglich dem Punkt O. *[3 Punkte]*

   Die Gleichungen können wie folgt aufgestellt werden:

$$KB(x): \quad R_x = 0 \tag{1}$$
$$KB(y): \quad R_y = 0 \tag{2}$$
$$KB(z): \quad R_z = -mg - m_H g - m_P g \tag{3}$$
$$MB(O,x): \quad M_{O,x} = \frac{R}{2} m_H g + \frac{R}{2} m_P g - Rmg \tag{4}$$
$$MB(O,y): \quad M_{O,y} = \frac{\sqrt{3}R}{2} m_P g - \frac{\sqrt{3}R}{2} m_H g \tag{5}$$
$$MB(O,z): \quad M_{O,z} = 0 \tag{6}$$

2. Betrachten Sie jetzt die Masse des Hexagons m_H und des Parallelogramm m_P. Beide Figuren haben die Dichte $\gamma = \frac{2m}{\sqrt{3}l^3}$ und die Seitenlängen können aus der Skizze ausgelesen werden *(Achtung: die Skizzen sind nicht Massstäblich!)*. Es handelt sich um einen regularen Hexagon und den Winkel α vom Parallelogramm soll als gegeben betrachtet werden. Zeigen Sie, dass $m_H = m$ und $m_P = \frac{2m}{\sqrt{3}} \cos\alpha$. *[1 Punkte]*



Der Hexagon besteht aus 6 Gleichgrossen gleichschenkige Dreiecke, darum die Flache kann wie folgt berechnet werden:

$$F_H = 6 \cdot F_{Dreieck} = 6 \cdot \frac{\frac{l}{3} \cdot \frac{l}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6} l^2 \tag{7}$$

Und demzufolge Volum und Masse:

$$V_H = F_H \cdot 3l = \frac{\sqrt{3}}{2} l^3 \tag{8}$$

$$\Rightarrow \quad m_H = V_H \cdot \rho = \frac{\sqrt{3}}{2} l^3 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{m}{l^3} = m \tag{9}$$

Die Fläche des Parallelogramms kann aus seine Höhe und Breite berechnet werden:

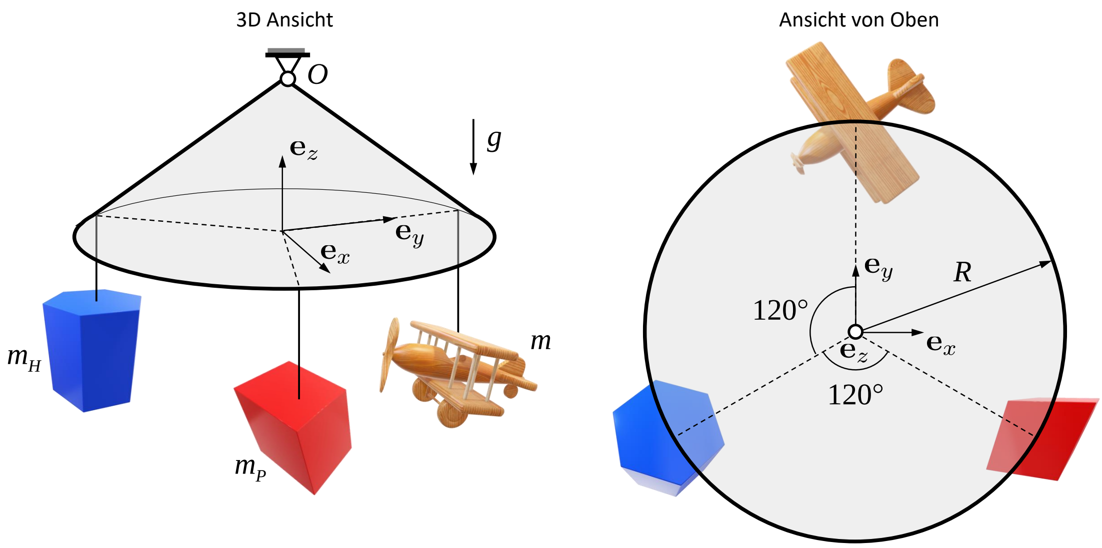
$$F_P = l \cdot l \cos\alpha \tag{10}$$

Und demzufolge Volum und Masse:

$$V_P = F_P \cdot l = \cos\alpha \, l^3 \tag{11}$$

$$\Rightarrow \quad m_P = V_P \cdot \rho = \cos\alpha \, l^3 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{m}{l^3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos\alpha \, m \tag{12}$$

3. Das Babyspiel wird jetzt im Punkt O aufgehängt (siehe Skizze). Wie gross muss der Winkel α beim Parallelogramm gewählt werden, damit das System in der abgebildete Position in Ruhe bleibt? Begründen Sie Ihre Antwort. *[2 Punkt]*



Hinweis: Benutzen sie die im Teilaufgabe 1 hergeleitete Gleichungen und die im Teilaufgabe 2 berechneten Massen.

Da den Lager in O kein Moment aufnehmen kann, müssen alle im Teilaufgabe 1 berechnete Momente gleich 0 sein. Aus Gleichung 5 ($M_{O,y}$) bekommt man:

$$M_{O,y} = \frac{\sqrt{3}R}{2} m_P g - \frac{\sqrt{3}R}{2} m_H g = 0 \quad \Rightarrow \quad m_H = m_P \tag{13}$$

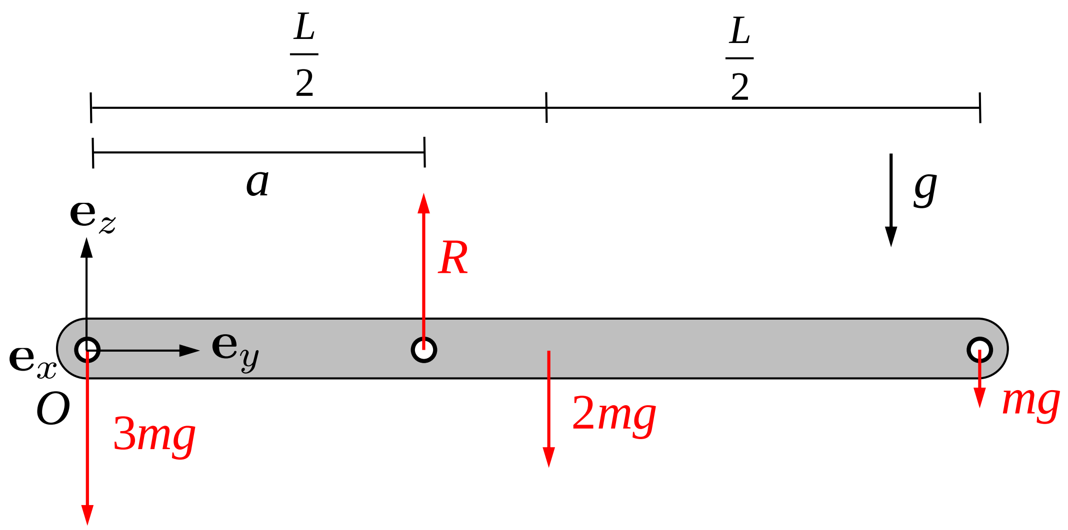
Beim einsetzen der Massen aus Teilaufgabe 2 bekommt man:

$$m_H = m_P \quad \Rightarrow \quad m = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos\alpha \, m \tag{14}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \tag{15}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{6} = 30° \tag{16}$$

4. Das Babyspiel wird verändert und jetzt sind 3 Flugzeuge der Masse m anstatt geometrische Formen aufgehängt. Zusätzlich hängt das Babyspiel auf der linken Seite eines $2m$ schweren und L langen Stabes. Auf der rechten Seite des Stabes hängt ein weiteres Flugzeug (siehe Skizze). Im Abstand a vom Babyspiel wird der Stab auf einem fixen Punkt aufgehängt. Wie gross muss der Abstand a gewählt werden, damit das System in der abgebildeten Position in Ruhe bleibt? *[2 Punkte]*



Das Gleichgewicht kann durch das Moment in $\mathbf{e}_x$ Richtung berechnet werden. Um den Losungsprozess zu vereinfachen wird zuerst die Resultante R berechnet und nachher das Moment im Ursprung O.

$$R = 3mg + 2mg + mg = 6mg \tag{17}$$

Und demzufolge das Moment $M_x = 0$ liefert den Abstand a:

$$M_{O,x} = -a \cdot R + \frac{L}{2} \cdot 2mg + L \cdot mg = 0 \tag{18}$$

$$2L \cdot mg = a \cdot 6mg \tag{19}$$

$$a = \frac{L}{3} \tag{20}$$

Bemerkung: Das Moment M_x auf jeder andere Punkt liefert genau dasselbe Resultat. Z.B. das Moment im Punkt wo R angreift wäre auch eine optimale Wahl.