Lösungen Klausur 1 - HS 2019

Jonas Fankhauser

Oktober 2019

Hinweise:

- Text, der in grau gedruckt ist, ist nicht bewertungsrelevant und dient lediglich zur Erklärung.
- Alle Lösungen müssen absolut korrekt sein, ausser es steht explizit anders.
- Wenn das korrekte Endresultat auf nachvollziehbare Weise erreicht wird, gibt es sämtliche Punkte, auch wenn der Lösungsweg von der Musterlösung abweicht.

Aufgabe 1

(a) Da A Berührungspunkt mit dem Boden, der Boden ruhend und kein Gleiten

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{0}\,. \quad \textcircled{1}_1$$

(b) Da Rollen ohne zu Gleiten, ist die Zentralachse die Kontaktlinie mit dem Boden, i.e. Gerade entlang $\boldsymbol{e}_x$ durch den Ursprung.
Siehe Skizze. Falls richtig eingezeichnet. $\textcircled{1}_2$

(c) Siehe Skizze. Falls alle Vektoren richtig. $\textcircled{1}_3$

(d) Schnelligkeit von Punkt C_2 zum Beispiel via Starrkörperformel

$$\boldsymbol{v}_{C_2} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{OC_2} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{OC_2}$$
$$\boldsymbol{v}_{C_2} = \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ \sqrt{3}a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{3}a\omega \\ 0 \end{pmatrix}$$

Oder direkt aus dem Satz vom Momentanzentrum:

$$|\boldsymbol{v}_{C_2}| = \sqrt{3}a\omega \quad \textcircled{2}_{4,5}, 5$$

Schnelligkeit der Punkte C_1 und C_3:

- Punkte C_1 und C_3 haben die gleiche Schnelligkeit.
- Die x-Komponente hat keinen Einfluss auf die Schnelligkeit.
- Die z-Komponente von C_1 und C_3 ist gerade die Hälfte der z-Komponente von C_2 (siehe Skizze):

$$z_{C_{1,3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

- Die y-Komponente ist gerade der Radius des grösseren Zylinders:

$$y_{C_{1,3}} = \pm 2a\sin(\beta) = \pm a$$

Richtiger Ortsvektor/richtige Koordinaten von C_1 oder C_3:

$$\boldsymbol{r_{OC_1}} = \begin{pmatrix} * \\ a \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a \end{pmatrix} \quad 1_6$$

Zum Beispiel aus der Starrkörperformel

$$\boldsymbol{v}_{C_1} = \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} * \\ a \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}a\omega \\ a\omega \end{pmatrix}$$

Daraus Schnelligkeiten

$$|\boldsymbol{v}_{C_1}| = \frac{\sqrt{7}}{2}a\omega \quad 1_7$$

$$|\boldsymbol{v}_{C_3}| = \frac{\sqrt{7}}{2}a\omega \quad 1_8$$

Falls $|\boldsymbol{v}_{C_1}| = |\boldsymbol{v}_{C_3}|$. 1_9 Diese Punkte gibt es auch dann, wenn die Beträge falsch sind oder wenn diese Gleichung nur als Satz steht, ohne dass die Beträge ausgerechnet wurden.

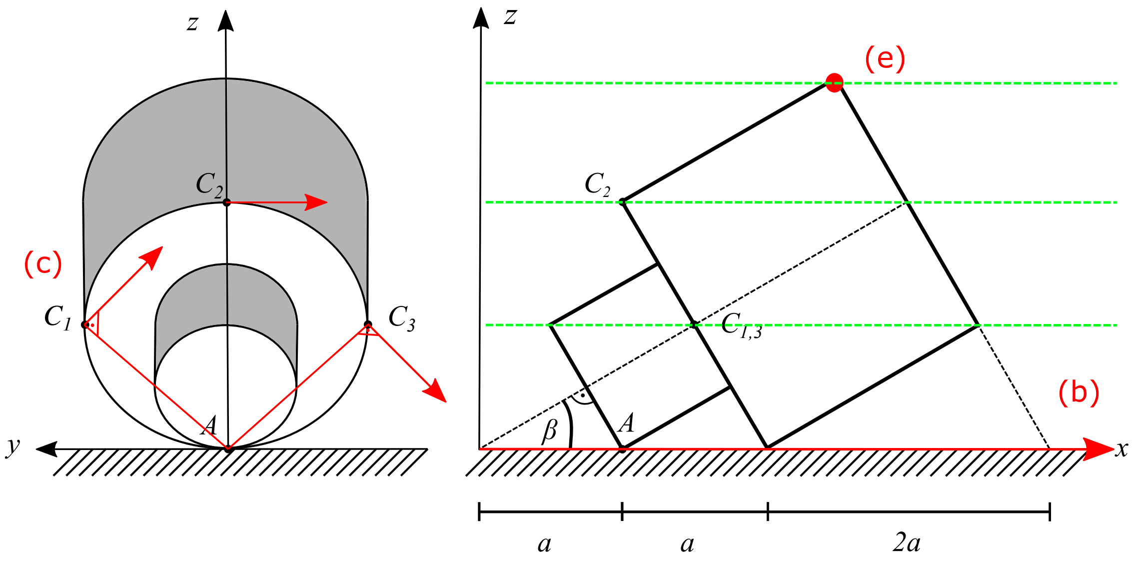
(e) Der Punkt mit maximaler Schnelligkeit ist derjenige Punkt des Starrkörpers mit maximalem Abstand zur Zentralachse. Richtig in Skizze eingezeichnet $2_{10,11}$.

Der Punkt mit maximaler Geschwindigkeit wird hier E genannt. Es wird nur die z-Komponenten benötigt. Zum Beispiel sieht man direkt aus der Skizze:

$$z_E = 3z_{C_1} = \frac{3\sqrt{3}}{2}a \quad 1_{12}$$

Daraus folgt aus dem Satz vom Momentanzentrum

$$|\boldsymbol{v}_E| = \frac{3\sqrt{3}}{2}a\omega \quad 2_{13,14}$$



Aufgabe 2

Richtung von v_B muss senkrecht auf $\overline{AB}$ sein, da A Momentanzentrum.

$$\boldsymbol{r}_{AB} = \begin{pmatrix} 2a \\ a \end{pmatrix}$$

Und der dazugehörende Einheitsvektor

$$\boldsymbol{e}_{AB} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt

$$\boldsymbol{v}_B = \frac{|\boldsymbol{v}_B|}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Andere akzeptierte Lösungen sind

$$\boldsymbol{v}_B \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_B \parallel \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_B = \frac{v_B}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad 2v_{B,x} = -v_{B,y} \quad \text{oder äquivalent.} \quad 2_{1,2}$$

Satz der projizierten Geschwindigkeiten zwischen $\boldsymbol{v}_B$ und $\boldsymbol{v}_E$

$$\boldsymbol{v}_B \cdot \boldsymbol{r}_{BC} = \boldsymbol{v}_c \cdot \boldsymbol{r}_{BC}$$
$$\frac{|\boldsymbol{v}_B|}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ -a \end{pmatrix} = \frac{v}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ -a \end{pmatrix}$$
$$\frac{3|\boldsymbol{v}_B|}{\sqrt{5}} = \frac{v}{5}$$

Daraus ergibt sich der Betrag

$$|\boldsymbol{v}_B| = \frac{v}{3\sqrt{5}} \quad 2_{3,4}$$

Und daraus die Geschwindigkeit

$$\boldsymbol{v}_B = \frac{v}{15} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad 2_{5,6}$$

Falls die Geschwindigkeit auf andere nachvollziehbare Art richtig hergeleitet wird, gibt's alle 6 Punkte. 1_{1-6}