Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

IMES
Institut für Mechanische Systeme

Technische Mechanik

Basisprüfung 12. August 2016, 08[30] - 10[30]

Dr. Stephan Kaufmann **Musterlösung** **Sommer 2016**

Aufgabe 1 *(16 Punkte)*

a)

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{\omega}_{PA} \times \boldsymbol{r}_{PA} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\omega_2 \\ -r\omega_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{v}_E = \boldsymbol{\omega}_{QE} \times \boldsymbol{r}_{QE} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\omega_4 \\ -r\omega_3 \end{bmatrix}$$

b) Da es sich bei dem Ellipsoid um einen Starrkörper handelt, muss der Satz der projizierten Geschwindigkeiten erfüllt werden:

$$\boldsymbol{v}_A \cdot \boldsymbol{r}_{AE} = \boldsymbol{v}_E \cdot \boldsymbol{r}_{AE}\text{, also } \begin{bmatrix} r\omega_2 \\ -r\omega_1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\omega_4 \\ -r\omega_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$(1) \qquad -rb\omega_1 = rb\omega_4 - rc\omega_3 \text{ bzw. } c\omega_3 = b(\omega_1 + \omega_4)$$

c) SdpG:

$$\boldsymbol{v}_A \cdot \boldsymbol{r}_{AD} = \boldsymbol{v}_D \cdot \boldsymbol{r}_{AD} \qquad ar\omega_2 - rb\omega_1 = bv_{Dy}$$

$$\boldsymbol{v}_E \cdot \boldsymbol{r}_{ED} = \boldsymbol{v}_D \cdot \boldsymbol{r}_{ED} \qquad cr\omega_3 = -cv_{Dz}$$

$$\boldsymbol{v}_D = \begin{bmatrix} 0 \\ r\left\{\frac{a}{b}\omega_2 - \omega_1\right\} \\ -r\omega_3 \end{bmatrix}$$

d) SdpG:

$$\boldsymbol{v}_M \cdot \boldsymbol{e}_{DM} = \boldsymbol{v}_D \cdot \boldsymbol{e}_{DM} \qquad v_{Mx} = 0$$
$$\boldsymbol{v}_M \cdot \boldsymbol{e}_{AM} = \boldsymbol{v}_A \cdot \boldsymbol{e}_{AM} \qquad v_{My} = -r\omega_1$$
$$\boldsymbol{v}_M \cdot \boldsymbol{e}_{EM} = \boldsymbol{v}_E \cdot \boldsymbol{e}_{EM} \qquad v_{Mz} = -r\omega_3$$

Starrkörperformel:

(2): $$\boldsymbol{v}_M = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{AM} = \begin{bmatrix} r\omega_2 \\ -r\omega_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\omega_2 - b\omega_z \\ -r\omega_1 \\ b\omega_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -r\omega_1 \\ -r\omega_3 \end{bmatrix}$$

(3): $$\boldsymbol{v}_M = \boldsymbol{v}_E + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{EM} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\omega_4 \\ -r\omega_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c\omega_y \\ r\omega_4 + c\omega_x \\ -r\omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -r\omega_1 \\ -r\omega_3 \end{bmatrix}$$

(2.1): $\omega_z = \frac{r}{b}\omega_2$

(2.3) & (3.2): $\omega_x = -\frac{r}{b}\omega_3 = -\frac{r}{c}(\omega_1 + \omega_4)$ *vgl. (1)*

(3.1): $\omega_y = 0$

Kinemate $\{\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{v}_M\}$ mit: $\boldsymbol{\omega} = \frac{r}{b}\begin{bmatrix} -\omega_3 \\ 0 \\ \omega_2 \end{bmatrix}$ und $\boldsymbol{v}_M = \begin{bmatrix} 0 \\ -r\omega_1 \\ -r\omega_3 \end{bmatrix}$.

Alternativ:

$$(2): \quad \boldsymbol{v}_O = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{AM} = \begin{bmatrix} r\omega_2 \\ -r\omega_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\omega_2 - b\omega_z \\ -r\omega_1 \\ b\omega_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{Mx} \\ v_{My} \\ v_{Mz} \end{bmatrix}$$

$$(3): \quad \boldsymbol{v}_O = \boldsymbol{v}_E + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{EM} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\omega_4 \\ -r\omega_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c\omega_y \\ r\omega_4 + c\omega_x \\ -r\omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{Mx} \\ v_{My} \\ v_{Mz} \end{bmatrix}$$

(4):

$$\boldsymbol{v}_O = \boldsymbol{v}_D + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{DM} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\left\{\frac{a}{b}\omega_2 - \omega_1\right\} \\ -r\omega_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\left\{\frac{a}{b}\omega_2 - \omega_1\right\} - a\omega_z \\ -r\omega_3 + a\omega_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{Mx} \\ v_{My} \\ v_{Mz} \end{bmatrix}$$

(4.1)	$v_{Mx} = 0$
(3.1) & (4.3)	$\omega_y = 0$
(2.2)	$v_{My} = -r\omega_1$
(3.3)	$v_{Mz} = -r\omega_3$
(2.3) & (3.2)	$\omega_x = -\frac{r}{b}\omega_3 = -\frac{r}{c}(\omega_1 + \omega_4)$
(2.1) & (4.2)	$\omega_z = \frac{r}{b}\omega_2$

e) Für eine reine Rotation muss die zweite Invariante verschwinden:

$$I_2 = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{v}_M = -\frac{r^2}{b}\omega_2\omega_3 = 0 .$$

Also **entweder** $\omega_2 = 0$ **oder** $\omega_3 = 0$ (bzw. $\omega_1 + \omega_4 = 0$).

Für eine reine Translation muss gelten:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{r}{b}\begin{bmatrix} -\omega_3 \\ 0 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} .$$

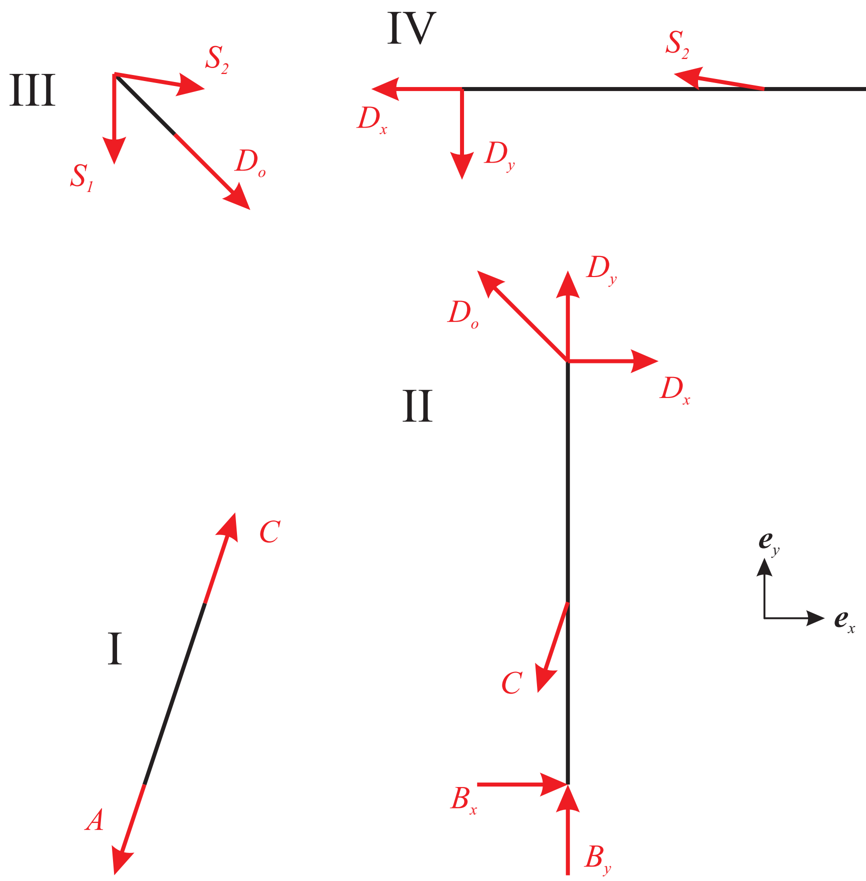
Also $\omega_2 = \omega_3 = 0$ (bzw. $\omega_1 + \omega_4 = 0$ mit $\omega_1 \neq 0$, $\omega_4 \neq 0$).

Aufgabe 2 *(19 Punkte)*

a) **Nein**, das System ist ***nicht*** *statisch unbestimmt* gelagert, denn es gibt gleich viele unbekannte Lagerreaktionen wie linear unabhängige Gleichungen (je neun Stück).

Nein, das System ist ***nicht*** *kinematisch unbestimmt*, da keine zulässigen momentanen Bewegungszustände möglich sind ($f = 0$).

b) Freischnittskizze:



c) Aufstellen der Gleichgewichtbsedingungen:

System I:
Da am Stab AC keine äusseren Kräfte angreifen ergibt sich nur eine nicht triviale Komponentenbedingung in Stabrichtung: $A = C$.

System II:

$$\text{KB}(x): \quad 0 = B_x - \frac{1}{\sqrt{10}}C + D_x - \frac{\sqrt{2}}{2}D_o \qquad (2)$$

$$\text{KB}(y): \quad 0 = B_y - \frac{3}{\sqrt{10}}C + D_y + \frac{\sqrt{2}}{2}D_o \qquad (3)$$

$$\text{MB}(\text{D}, z): \quad 0 = 7aB_x - \frac{4a}{\sqrt{10}}C \qquad (4)$$

System III:

$$\text{KB}(x): \quad 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}D_o + \frac{6}{\sqrt{37}}S_2 \qquad (5)$$

$$\text{KB}(y): \quad 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}D_o + S_1 + \frac{1}{\sqrt{37}}S_2 \qquad (6)$$

System IV:

$$\text{KB}(x): \quad 0 = D_x + \frac{6}{\sqrt{37}}S_2 \qquad (7)$$

$$\text{KB}(y): \quad 0 = D_y - \frac{1}{\sqrt{37}}S_2 + F_L \qquad (8)$$

$$\text{MB}(\text{F}, z): \quad 0 = 5aD_y - 5aF_L \qquad (9)$$

Auflösen des linearen Gleichungssystems:

$$(9): \quad D_y = F_L$$

$$(8): \quad S_2 = 2\sqrt{37}F_L$$

$$(7): \quad D_x = -12F_L$$

$$(5): \quad D_o = -12\sqrt{2}F_L$$

$$(6): \quad S_1 = 10F_L$$

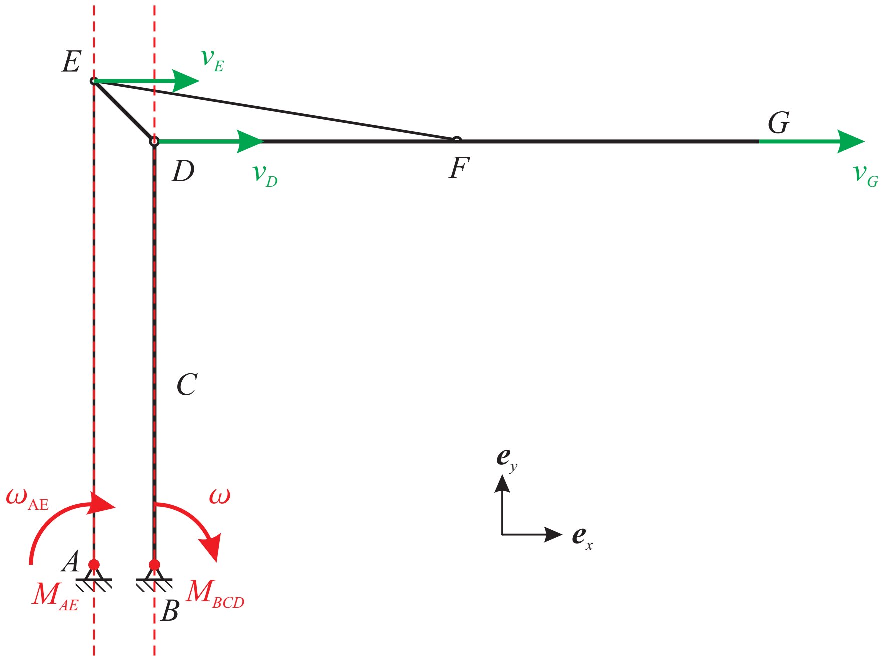
$$(2) \text{ in } (4) \quad C = 0$$

$$(1): \quad A = 0$$

$$(4): \quad B_x = 0$$

$$(3): \quad B_y = 11F_L$$

d) Zulässiger virtueller Bewegungszustand::



Die Momentanzentren M_{AE} und M_{BCD} sind durch Lager in den Punkten A und B gegeben.

Die Geschwindigkeiten in den Punkten D und E lassen sich mit dem Satz vom Momentanzentrum berechnen:

$$v_D = 7a\omega$$

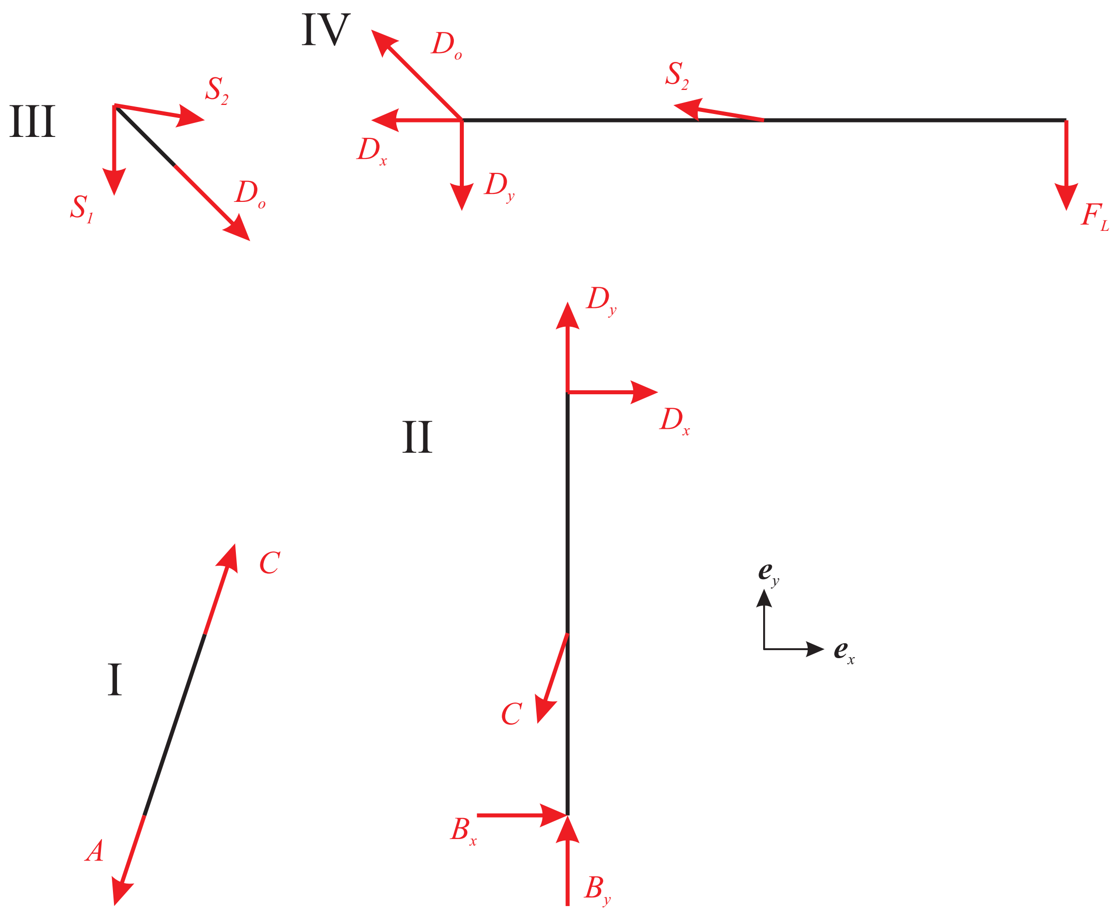
$$v_E = 8a\omega_{AE}$$

Mit Hilfe des Satzes der projizierten Geschwindigkeiten lässt sich das Verhältnis der beiden Rotationsgeschwindigkeiten bestimmen:

$$\boldsymbol{r}_{DE} \cdot \boldsymbol{v}_D = \boldsymbol{r}_{DE} \cdot \boldsymbol{v}_E \text{ bzw. } 7a\omega = 8a\omega_{AE}\text{, also ist } \omega_{AE} = \frac{7}{8}\omega\,.$$

Somit ist $v_D = v_E = v_G = 7a\omega$ und der Bewegungszustand des Starrkörpers $DEFG$ ist eine Translation.

Alternativer Freischnitt



$$
\begin{array}{llcl}
(9): & D_y & = & -11F_L \\
(8) & S_2 & = & 2\sqrt{37}F_L \\
(7): & D_x & = & 0 \\
(5): & D_o & = & -12\sqrt{2}F_L \\
(6): & S_1 & = & 10F_L \\
(2)\ in\ (4) & C & = & 0 \\
(1): & A & = & 0 \\
(4): & B_x & = & 0 \\
(3): & B_y & = & 11F_L
\end{array}
$$

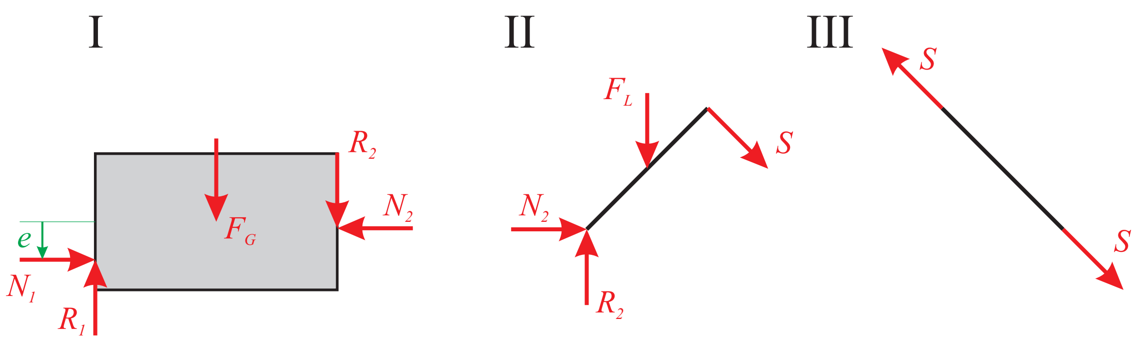
Technische Mechanik

Basisprüfung 12. August 2016, 08^{30} - 10^{30}

Dr. Stephan Kaufmann **Musterlösung** **Sommer 2016**

Aufgabe 3 *(17 Punkte)*

a) Freischnittskizze:



Aufstellen der Gleichgewichtbsedingungen:

System I:

KB(x): $0 = N_1 - N_2$ (1)

KB(y): $0 = R_1 - R_2 - F_G$ (2)

MB(z): $0 = \frac{b}{2}F_G - bR_1 + eN_1$ (3)

System II:

KB(x): $0 = N_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}S$ (4)

KB(y): $0 = R_2 - F_L - \frac{\sqrt{2}}{2}S$ (5)

MB(D,z): $0 = \frac{b}{4}F_L + \frac{\sqrt{2}}{2}bS$ (6)

Auflösen des linearen Gleichungssystems:

$$(6): \quad S = -\frac{\sqrt{2}}{4} F_L$$

$$(5): \quad R_2 = \frac{3}{4} F_L$$

$$(4): \quad N_2 = \frac{1}{4} F_L$$

$$(1): \quad N_1 = \frac{1}{4} F_L$$

$$(2): \quad R_1 = \frac{3}{4} F_L + F_G$$

$$(3): \quad e = \frac{3F_L + 2F_G}{F_L} b$$

Bedingung für Haften zwischen Quader und Wand:

$$(7) \quad |R_1| \le \mu_0 N_1 \text{, bzw. } \frac{3}{4} F_L + F_G \le \frac{1}{4} \mu_0 F_L .$$

Bedingung für Haften zwischen Quader und Balken:

$$(8) \quad |R_2| \le \mu_0 N_2 \text{, bzw. } \frac{3}{4} F_L \le \frac{1}{4} \mu_0 F_L .$$

Bedingung damit der Quader nicht kippt:

$$(9) \quad |e| \le \frac{a}{2} \text{, bzw. } \frac{3F_L + 2F_G}{F_L} b \le \frac{a}{2} .$$

b) Aus Gleichungen *(7)* und *(8)* folgt $3 \le \mu_0$.

Aus Gleichung *(9)* folgt $6 \le \frac{a}{b}$.

c) *(7)* $\quad 4F_G \le F_L$

(9) $\quad 2F_G \le F_L$

Gleichung *(7)* ist die strengere Bedingung, also gilt $4F_G \le F_L$.

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

IMES
Institut für Mechanische Systeme

Technische Mechanik

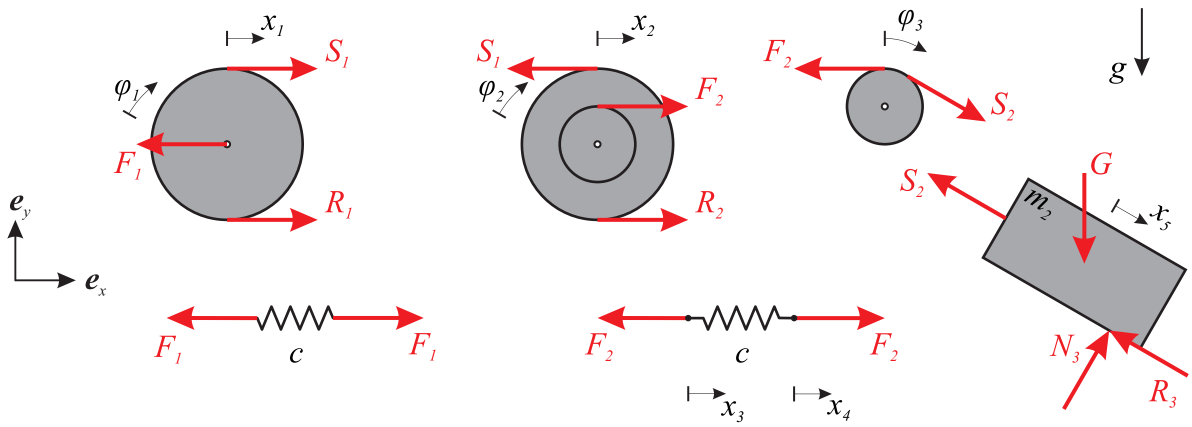
Basisprüfung 12. August 2016, 08^{30} - 10^{30}

Dr. Stephan Kaufmann **Musterlösung** **Sommer 2016**

Aufgabe 4 (21 Punkte)

a) Das System hat den Freiheitsgrad 2. Das heisst die Lage des Systems kann mit zwei Koordinaten (zum Beispiel x_1 und x_5) eindeutig beschrieben werden.

b) Freischnittskizze:



c) Bewegungsgleichungen:

Grosse Rolle:

$$m_1\ddot{x}_1 = S_1 + R_1 - F_1 \qquad (1)$$

$$I_C\ddot{\varphi}_1 = 2r(S_1 - R_1) \qquad (2)$$

Stufenrolle:

$$m_1\ddot{x}_2 = F_2 + R_2 - S_1 \qquad (3)$$

$$I_C\ddot{\varphi}_2 = rF_2 - 2rR_2 - 2rS_1 \qquad (4)$$

Kleine Rolle:

$$\frac{I_C}{16}\ddot{\varphi}_3 = r(S_2 - F_2) \qquad (5)$$

Quader:

$$m_2\ddot{x}_5 = G\sin\alpha - R_3 - S_2 \qquad (6)$$

d) Kraftgesetz der Federn:

$$F_1 = cx_1 \qquad (7)$$

$$F_2 = c(x_4 - x_3) \qquad (8)$$

Gleitreibungskraft:

$$R_3 = \mu_1 N_3 = \mu_1 m_2 g \cos\alpha$$

e) Kinematische Relationen:

$$\dot{x}_1 = 2r\dot{\varphi}_1$$

$$\dot{x}_2 = 2r\dot{\varphi}_2$$

$$4r\dot{\varphi}_1 = 4r\dot{\varphi}_2$$

$$3r\dot{\varphi}_2 = \dot{x}_3$$

$$\dot{x}_4 = r\dot{\varphi}_3 = \dot{x}_5$$

Also:

$$\ddot{x}_2 = \ddot{x}_1$$

$$\ddot{\varphi}_1 = \ddot{\varphi}_2 = \frac{\ddot{x}_1}{2r}$$

$$x_3 = \frac{3}{2}x_1$$

$$x_4 = x_5$$

$$\ddot{\varphi}_3 = \frac{\ddot{x}_5}{r}$$

f) Zusammenfassen:

(1) + (2)/2r: $$\left\{m_1 + \frac{I_C}{4r^2}\right\}\ddot{x}_1 = 2S_1 - F_1 \qquad (1^*)$$

(3) + (4)/2r: $$\left\{m_1 + \frac{I_C}{4r^2}\right\}\ddot{x}_1 = \frac{3}{2}F_2 - 2S_1 \qquad (2^*)$$

(6) + (5)/r: $$\left\{m_2 + \frac{I_C}{16r^2}\right\}\ddot{x}_5 = G\sin\alpha - \mu_1 G\cos\alpha - F_2 \qquad (6^*)$$

(1) + (2*):* $$\left\{2m_1 + \frac{I_C}{2r^2}\right\}\ddot{x}_1 = c\left(\frac{3}{2}x_5 - \frac{13}{4}x_1\right)$$

(6)* $$\left\{m_2 + \frac{I_C}{16r^2}\right\}\ddot{x}_5 = G\sin\alpha - \mu_1 G\cos\alpha - c\left(x_5 - \frac{3}{2}x_1\right)$$

Oder in Matrixschreibweise:

$$\begin{bmatrix} 2m_1 + \dfrac{I_C}{2r^2} & 0 \\ 0 & m_2 + \dfrac{I_C}{16r^2} \end{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{x}} + \begin{bmatrix} \dfrac{13}{4}c & -\dfrac{3}{2}c \\ -\dfrac{3}{2}c & c \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin\alpha - \mu_1 \cos\alpha \end{bmatrix} m_2 g$$

$$\begin{bmatrix} 32m_1 + 8I_C/r^2 & 0 \\ 0 & 16m_2 + I_C/r^2 \end{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{x}} + \begin{bmatrix} 52c & -24c \\ -24c & 16c \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 16m_2 g(\sin\alpha - \mu_1 \cos\alpha) \end{bmatrix}$$