Technische Mechanik

Basisprüfung **7. August 2014, 09:00–11:00**

Dr. Stephan Kaufmann **Musterlösung** **Sommer 2014**

Aufgabe 1 (18 Punkte)

a) Geschwindigkeiten der Punkte A, B und C

$$\vec{v}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -v \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3v \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_C = \begin{pmatrix} v_{Cx} \\ 0 \\ v_{Cz} \end{pmatrix}$$

Satz der projizierten Geschwindigkeiten $A \rightarrow C$

$$0 \overset{!}{=} (\vec{v}_C - \vec{v}_A) \cdot \vec{r}_{AC} = \begin{pmatrix} v_{Cx} \\ 0 \\ v_{Cz}+v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} = a(v + v_{Cz}) \Rightarrow \underline{v_{Cz} = -v}$$

Satz der projizierten Geschwindigkeiten $B \rightarrow C$

$$0 \overset{!}{=} (\vec{v}_C - \vec{v}_B) \cdot \vec{r}_{BC} = \begin{pmatrix} v_{Cx} \\ 0 \\ -v-3v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8a \\ 0 \\ a \end{pmatrix} = 4a(2v_{Cx} - v) \Rightarrow \underline{v_{Cx} = v/2}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_C = \begin{pmatrix} v/2 \\ 0 \\ -v \end{pmatrix}$$

b) Starrkörperformel $A \rightarrow C$ der Zelle

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{\omega}_Z \times \vec{r}_{AC} \Rightarrow \begin{pmatrix} v/2 \\ 0 \\ -v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_{Zx} \\ \omega_{Zy} \\ \omega_{Zz} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\omega_{Zy} \\ -a\omega_{Zx} \\ -v \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \underline{\omega_{Zy} = v/2a} \\ \underline{\omega_{Zx} = 0} \end{cases} \qquad (*)$$

Starrkörperformel $B \rightarrow C$ der Zelle

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{\omega}_Z \times \vec{r}_{BC} \Rightarrow \begin{pmatrix} v/2 \\ 0 \\ -v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ v/2a \\ \omega_{Zz} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8a \\ 0 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v/2 \\ 8a\omega_{Zz} \\ 3v-4v \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\omega_{Zz} = 0} \Rightarrow \vec{\omega}_Z = \begin{pmatrix} 0 \\ v/2a \\ 0 \end{pmatrix}$$

Kinemate der Zelle in C: $\underline{\{\vec{v}_C, \vec{\omega}_Z\}}$

c) Erste Invariante der Zelle

$$\vec{I}_{Z1} = \vec{\omega}_Z = \begin{pmatrix} 0 \\ v/2a \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

Zweite Invariante der Zelle

$$I_{Z2} = \vec{\omega}_Z \cdot \vec{v}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ v/2a \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v/2 \\ 0 \\ -v \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ Der momentane Bewegungszustand der Zelle ist eine Rotation, da $\vec{I}_{Z1} \neq 0$ und $I_{Z2} = 0$.

d) Starrkörperformel $A \rightarrow C$ des Rotors

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{\omega}_R \times \vec{r}_{AC} \overset{(*)}{\Rightarrow} \begin{cases} \underline{\omega_{Ry} = v/2a} \\ \underline{\omega_{Rx} = 0} \end{cases}$$

Starrkörperformel $A \rightarrow E$ des Rotors

$$\vec{v}_E = \vec{v}_A + \vec{\omega}_R \times \vec{r}_{AE} \Rightarrow \begin{pmatrix} -11v \\ v_{Ey} \\ v_{Ez} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ v/2a \\ \omega_{Rz} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 6a \\ 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v-6a\omega_{Rz} \\ 0 \\ -v \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_{Rz} = 2v/a \\ v_{Ey} = 0 \\ v_{Ez} = -v \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_E = \begin{pmatrix} -11v \\ 0 \\ -v \end{pmatrix} \qquad \vec{\omega}_R = \begin{pmatrix} 0 \\ v/2a \\ 2v/a \end{pmatrix}$$

e) Erste Invariante des Rotors

$$\vec{I}_{R1} = \vec{\omega}_R = \begin{pmatrix}0\\ v/2a\\ 2v/a\end{pmatrix} \neq 0$$

Zweite Invariante des Rotors

$$I_{R2} = \vec{\omega}_R \cdot \vec{v}_E = \begin{pmatrix}0\\ v/2a\\ 2v/a\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-11v\\ 0\\ -v\end{pmatrix} = -2v^2/a \neq 0$$

$\Rightarrow$ Der momentane Bewegungszustand des Rotors ist eine Schraubung, da $I_{R2} \neq 0$.

A) Alternativer Lösungsweg für a), b)

- Geschwindigkeiten der Punkte A, B und C

$$\vec{v}_A = \begin{pmatrix}0\\0\\-v\end{pmatrix} \qquad \vec{v}_B = \begin{pmatrix}0\\0\\3v\end{pmatrix} \qquad \vec{v}_C = \begin{pmatrix}v_{Cx}\\0\\v_{Cz}\end{pmatrix}$$

- Starrkörperformel A → C der Zelle

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{\omega}_Z \times \vec{r}_{AC} \Rightarrow \begin{pmatrix}v_{Cx}\\0\\v_{Cz}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-v\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\omega_{Zx}\\ \omega_{Zy}\\ \omega_{Zz}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\0\\a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\omega_{Zy}\\ -a\omega_{Zx}\\ -v\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\omega_{Zx} = 0\\ v_{Cz} = -v\end{cases}$$

- Starrkörperformel B → C der Zelle

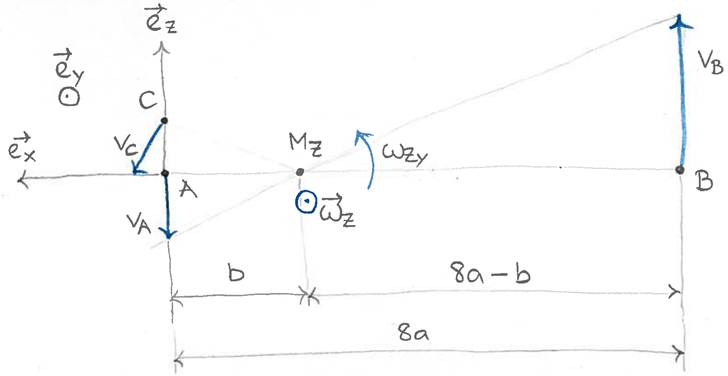
$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{\omega}_Z \times \vec{r}_{BC} \Rightarrow \begin{pmatrix}v_{Cx}\\0\\-v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-v\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ \omega_{Zy}\\ \omega_{Zz}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}8a\\0\\a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\omega_{Zy}\\ 8a\omega_{Zz}\\ 3v-8a\omega_{Zy}\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\omega_{Zz} = 0\\ \omega_{Zy} = v/2a\\ v_{Cx} = v/2\end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_C = \begin{pmatrix}v/2\\0\\-v\end{pmatrix} \qquad \vec{\omega}_Z = \begin{pmatrix}0\\ v/2a\\ 0\end{pmatrix}$$

- Kinemate der Zelle in C: $\{\vec{v}_C, \vec{\omega}_Z\}$

B) Alternativer Lösungsweg für a), b)

- Skizze



- Geschwindigkeiten der Punkte A, B und C

$$\vec{v}_A = \begin{pmatrix}0\\0\\-v\end{pmatrix} \qquad \vec{v}_B = \begin{pmatrix}0\\0\\3v\end{pmatrix} \qquad \vec{v}_C = \begin{pmatrix}v_{Cx}\\0\\v_{Cz}\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ ebener Bewegungszustand der Zelle in der $(\vec{e}_x, \vec{e}_z)$-Ebene

$\Rightarrow v_{Cy} = \omega_{Zx} = \omega_{Zz} = 0$

- Geschwindigkeiten der Punkte A, B antiparallel

$\Rightarrow$ Momentanzentrum der Zelle M_Z liegt auf der Geraden AB zwischen A und B

- Satz vom Momentanzentrum

$$\left.\begin{array}{ll} A \rightarrow M_Z: & v_A = v = b\,\omega_{Zy} \\ B \rightarrow M_Z: & v_B = 3v = (8a-b)\,\omega_{Zy} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \omega_{Zy} = v/b = v/2a \\ 3v = (8a-b)\,v/b \Rightarrow b = 2a \end{array}$$

- Satz vom Momentanzentrum $M_Z \rightarrow C$

$$v_{Cx} = a\omega_{Zy} = v/2 \qquad v_{Cz} = -2a\omega_{Zy} = -v$$

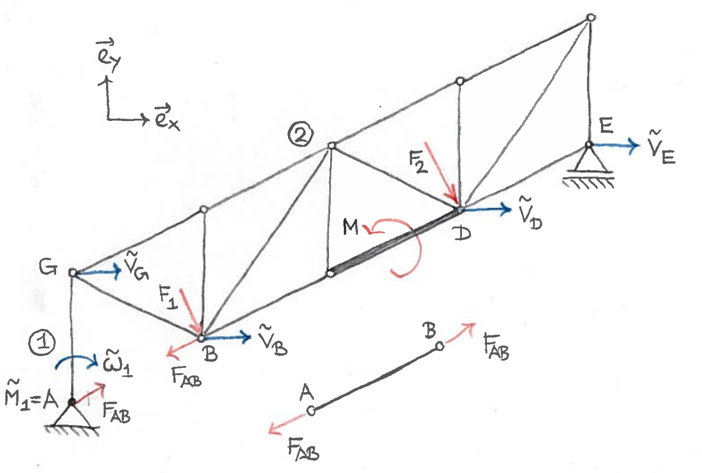
$$\Rightarrow \vec{v}_C = \begin{pmatrix}v/2\\0\\-v\end{pmatrix} \qquad \vec{\omega}_Z = \begin{pmatrix}0\\ v/2a\\ 0\end{pmatrix}$$

Aufgabe 2 (20 Punkte)

a) • Nein, das Fachwerk ist <u>nicht</u> kinematisch unbestimmt gelagert, da keine zulässigen momentanen Bewegungszustände möglich sind ($f=0$).

• Nein, das Fachwerk ist <u>nicht</u> statisch unbestimmt gelagert, da Anzahl Reaktionen $\neq$ Anzahl linear unabhängiger Gleichgewichtsbedingungen.

b) Partieller Freischnitt und virtueller Bewegungszustand



Virtuelle Geschwindigkeiten und Rotationsschnelligkeiten

$$\vec{\tilde v}_A = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{\tilde v}_G = \vec{\tilde v}_E = \vec{\tilde v}_B = \vec{\tilde v}_D = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} 2a\tilde\omega_1, \quad \tilde\omega_2 = 0$$

Prinzip der virtuellen Leistung (PdvL)

$$0 \overset{!}{=} \tilde{\mathcal{P}} = \vec{\tilde v}_B \cdot \vec F_B + \vec{\tilde v}_D \cdot \vec F_D + \tilde\omega_2 \cdot M \qquad \forall \vec{\tilde v}, \tilde\omega \text{ zulässig}$$

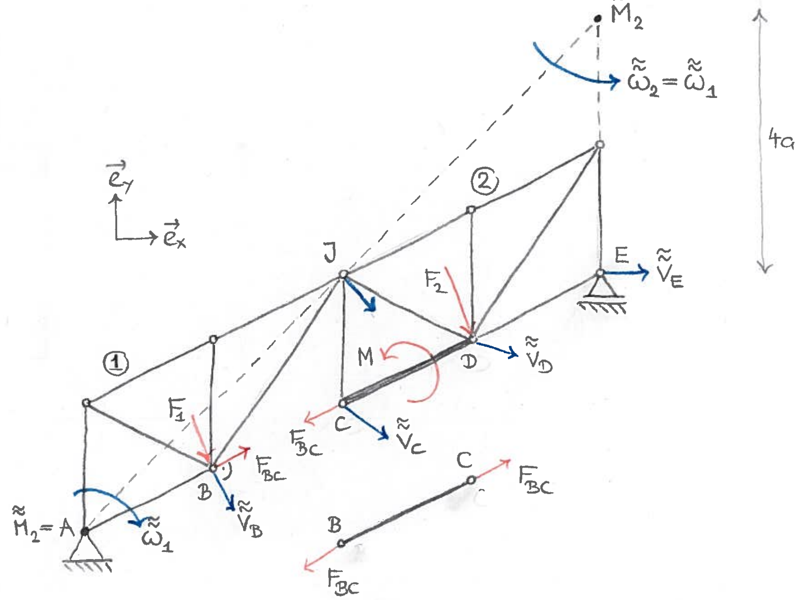
$$= 2a\tilde\omega_1 \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix}F - 2F_{AB}/\sqrt5\\ -2F - F_{AB}/\sqrt5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2F\\-4F\end{pmatrix} \right] \qquad \forall \tilde\omega_1$$

$$= 2a\tilde\omega_1 (3F - 2F_{AB}/\sqrt5) \qquad \forall \tilde\omega_1$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{F_{AB} = \frac{3\sqrt5}{2} F}}$$

c) Der Stab AB ist auf <u>Zug</u> beansprucht, da beim Freischneiden die Stabkraft F_{AB} als Zugkraft eingeführt wurde und $F_{AB} > 0$ resultiert.

d) Partieller Freischnitt und virtueller Bewegungszustand



Virtuelle Geschwindigkeiten und Rotationsschnelligkeiten

$$\tilde{\tilde\omega}_2 = \tilde{\tilde\omega}_1, \quad \vec{\tilde{\tilde v}}_B = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} a\tilde{\tilde\omega}_1, \quad \vec{\tilde{\tilde v}}_C = \begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix} a\tilde{\tilde\omega}_1, \quad \vec{\tilde{\tilde v}}_D = \begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix} a\tilde{\tilde\omega}_1$$

Prinzip der virtuellen Leistung (PdvL)

$$0 \overset{!}{=} \tilde{\tilde{\mathcal{P}}} = \tilde{\tilde{\vec{v}}}_B \cdot \vec{F}_B + \tilde{\tilde{\vec{v}}}_C \cdot \vec{F}_C + \tilde{\tilde{\vec{v}}}_D \cdot \vec{F}_D + \tilde{\tilde{\omega}}_2 \cdot M \quad \forall \tilde{\tilde{\vec{v}}}, \tilde{\tilde{\omega}} \text{ zulässig}$$

$$= a\tilde{\tilde{\omega}}_1 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F+2F_{BC}/\sqrt{5} \\ -2F+F_{BC}/\sqrt{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2F_{BC}/\sqrt{5} \\ -F_{BC}/\sqrt{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2F \\ -4F \end{pmatrix} + \frac{9aF}{a} \right] \forall \tilde{\tilde{\omega}}_1$$

$$= a\tilde{\tilde{\omega}}_1 \big(F + 2F_{BC}/\sqrt{5} + 4F - 2F_{BC}/\sqrt{5} - 12F_{BC}/\sqrt{5} + 4F_{BC}/\sqrt{5} + 10F + 8F + 9F \big)$$

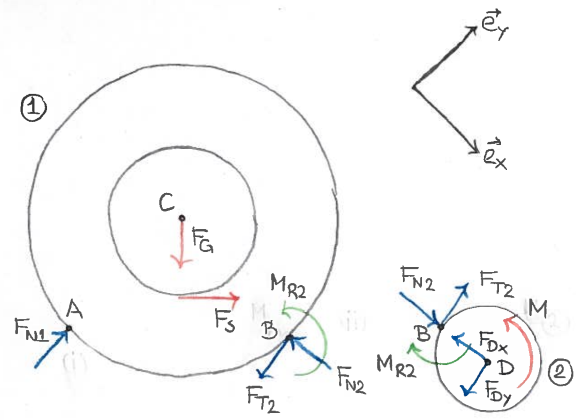
$$= a\tilde{\tilde{\omega}}_1 (32F - 8F_{BC}/\sqrt{5}) = 8a\tilde{\tilde{\omega}}_1 (4F - F_{BC}/\sqrt{5})$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{F_{BC} = 4\sqrt{5}\,F}}$$

e) Der Stab BC ist auf Zug beansprucht, da beim Freischneiden die Stabkraft F_{BC} als Zugkraft eingeführt wurde und $F_{BC} > 0$ resultiert.

Aufgabe 3 (20 Punkte)

a) Freischnitt



b) Gleichgewichtsbedingungen

①

$$\searrow: \quad 0 = -F_{N2} + \frac{\sqrt{2}}{2} F_G + \frac{\sqrt{2}}{2} F_S \qquad (1)$$

$$\nearrow: \quad 0 = F_{N1} - F_{T2} - \frac{\sqrt{2}}{2} F_G + \frac{\sqrt{2}}{2} F_S \qquad (2)$$

$$\circlearrowleft C: \quad 0 = \sqrt{2} R F_S - 3R F_{T2} + M_{R2} \qquad (3)$$

②

$$\searrow: \quad 0 = F_{N2} - F_{Dx} \qquad (4)$$

$$\nearrow: \quad 0 = F_{T2} - F_{Dy} \qquad (5)$$

$$\circlearrowleft D: \quad 0 = M - R F_{T2} - M_{R2} \qquad (6)$$

c) Kraftgesetze für Kontakt in B

Körper haften in B: $|F_{T2}| \leq \mu_0 F_{N2}$ (7)

Körper rollen in B: $M_{R2} = \mu_2 F_{N2}$ (8)

Normalkraft: $F_{N2} \geq 0$ (9)

d) Auflösen

$$(1) \Rightarrow \underline{F_{N2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(F_S + F_G)} \qquad (10)$$

$$(3) \overset{(8)}{\Rightarrow} \underline{F_{T2}} = \frac{1}{3R}\left(\sqrt{2} R F_S + \mu_2 F_{N2}\right)$$

$$\overset{(10)}{=} \frac{\sqrt{2}}{6}\left[\left(2+\frac{\mu_2}{R}\right)F_S + \frac{\mu_2}{R} F_G\right] = \underline{\frac{\sqrt{2}}{36}(13F_S + F_G)} \qquad (11)$$

$$(2) \overset{(11)}{\Rightarrow} \underline{F_{N1}} = \frac{\sqrt{2}}{6}\left[\left(2+\frac{\mu_2}{R}\right)F_S + \frac{\mu_2}{R} F_G + 3F_G - 3F_S\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{6}\left[\left(\frac{\mu_2}{R}-1\right)F_S + \left(\frac{\mu_2}{R}+3\right)F_G\right] = \underline{\frac{\sqrt{2}}{36}(19F_G - 5F_S)} \qquad (12)$$

$$(4) \overset{(10)}{\Rightarrow} \underline{F_{Dx} = \frac{\sqrt{2}}{2}(F_S + F_G)} \qquad (13)$$

$$(5) \overset{(11)}{\Rightarrow} \underline{F_{Dy}} = \frac{\sqrt{2}}{6}\left[\left(2+\frac{\mu_2}{R}\right)F_S + \frac{\mu_2}{R}F_G\right] = \underline{\frac{\sqrt{2}}{36}(13F_S + F_G)} \qquad (14)$$

$$(6) \overset{(8,11,10)}{\Rightarrow} \underline{M} = \frac{\sqrt{2}}{6}R\left[\left(2+\frac{\mu_2}{R}\right)F_S + \frac{\mu_2}{R}F_G + 3\frac{\mu_2}{R}(F_S + F_G)\right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}R\left[\left(1+2\frac{\mu_2}{R}\right)F_S + 2\frac{\mu_2}{R}F_G\right] = \underline{\frac{\sqrt{2}}{9}R(4F_S + F_G)} \qquad (15)$$

e) Bedingung für Haften

$$(7) \overset{(10,11)}{\Rightarrow} \frac{\sqrt{2}}{36}(13F_S + F_G) \leq \mu_0 \frac{\sqrt{2}}{2}(F_S + F_G)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\mu_0 \geq \frac{13F_S + F_G}{18(F_S + F_G)}}} \qquad (16)$$

f) Bedingung für nicht Abheben

Kontakt in A: $0 \overset{!}{\leq} F_{N1} \overset{(12)}{=} \frac{\sqrt{2}}{36}(19F_G - 5F_S) \Rightarrow \underline{\underline{F_S \leq \frac{19}{5}F_G}}$ (17)

Kontakt in B: $0 \overset{!}{\leq} F_{N2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(F_S + F_G)$ immer erfüllt!

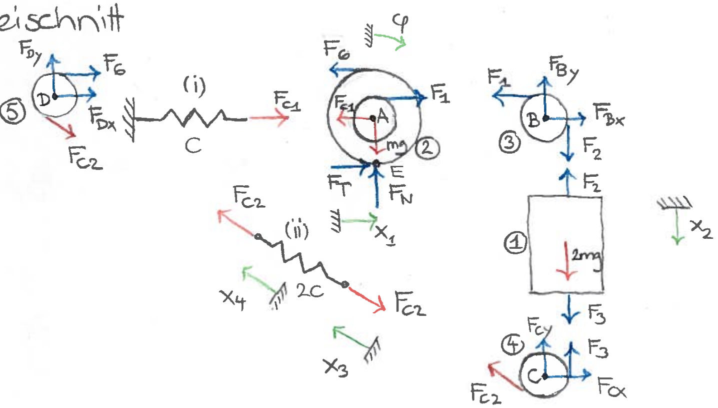
Aufgabe 4 (20 Punkte)

a) Der Freiheitsgrad ist die Anzahl der Minimalkoordinaten um die Lage des Systems eindeutig zu beschreiben. Hier können z.B.

$$\vec{q} = (x_1) \quad \text{oder} \quad \vec{q} = (\varphi) \quad \text{oder} \quad \ldots$$

als Minimalkoordinaten gewählt werden. Demnach ist der Freiheitsgrad $f = 1$.

b) Freischnitt



c) Bewegungsdifferentialgleichungen

① $\downarrow$: $2m\ddot{x}_2 = F_3 - F_2 + 2mg$ (1)

② $\rightarrow$: $m\ddot{x}_1 = F_1 + F_T - F_6 - F_{c1}$ (2)

Ⓐ↺: $2mR^2\ddot{\varphi} = RF_1 - 2RF_6 - 2RF_T$ (3)

d) Kraftgesetze der Federn

(i) $F_{c1} = c x_1$ (4)

(ii) $F_{c2} = 2c(x_4 - x_3)$ (5)

e) Gleichgewichtsbedingungen

③ $\overset{\curvearrowleft}{B}$: $0 = RF_1 - RF_2$ (6)

④ $\overset{\curvearrowleft}{C}$: $0 = RF_3 - RF_{c2}$ (7)

⑤ $\overset{\curvearrowleft}{D}$: $0 = RF_{c2} - RF_6$ (8)

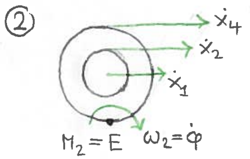
$(8) \Rightarrow \underline{F_6 = F_{c2} \overset{(5)}{=} 2c(x_4-x_3)}$ (9)

$(7) \Rightarrow \underline{F_3 = F_{c2} \overset{(5)}{=} 2c(x_4-x_3)}$ (10)

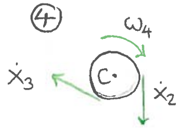
$(6) \Rightarrow \underline{F_2 = F_1}$ (11)

f) Kinematische Relationen

②



④



② $\overset{\curvearrowleft}{E}$: $\omega_2 = \dot{\varphi} = \frac{\dot{x}_1}{2R} = \frac{\dot{x}_2}{3R} = \frac{\dot{x}_4}{4R}$ (12)

④ $\overset{\curvearrowleft}{C}$: $\omega_4 = \frac{\dot{x}_3}{R} = \frac{\dot{x}_2}{R}$ (13)

$(12) \Rightarrow \dot{x}_2 = \frac{3}{2}\dot{x}_1 \quad \Rightarrow \underline{x_2 = \frac{3}{2}x_1 + C_2}$ (14)

$(13) \Rightarrow \dot{x}_3 = \dot{x}_2 \overset{(14)}{=} \frac{3}{2}\dot{x}_1 \quad \Rightarrow \underline{x_3 = \frac{3}{2}x_1 + C_3}$ (15)

$(12) \Rightarrow \dot{x}_4 = 2\dot{x}_1 \quad \Rightarrow \underline{x_4 = 2x_1 + C_4}$ (16)

$(12) \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{\dot{x}_1}{2R} \quad \Rightarrow \underline{\varphi = \frac{x_1}{2R} + C_5}$ (17)

In der ungespannten Anfangslage gilt

$$0 = x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \varphi \overset{(14-17)}{\Longrightarrow} C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = 0$$

g) Eliminieren der Federkräfte F_{c1}, F_{c2} sowie der Bindungskräfte F_2, F_3, F_6 durch Einsetzen der Kraftgesetze (4,5) und der Kraftrelationen (9-11) in die Bewegungsdifferentialgleichungen (1-3) und Substitution der überzähligen Koordinaten mit (14-17)

$(1) \overset{(10,11,14)}{\Longrightarrow} \cancel{2}m\frac{3}{\cancel{2}}\ddot{x}_1 = 2c(x_4-x_3) - F_1 + 2mg$

$\overset{(15,16)}{=} cx_1 - F_1 + 2mg$ (18)

$(2) \overset{(4,9)}{\Longrightarrow} m\ddot{x}_1 = F_1 + F_T - 2c(x_4-x_3) - cx_1$

$\overset{(15,16)}{=} F_1 + F_T - 2cx_1$ (19)

$\frac{1}{R}(3) \overset{(9,17)}{\Longrightarrow} \cancel{2}m\cancel{R}\frac{\ddot{x}_1}{\cancel{2R}} = F_1 - 4c(x_4-x_3) - 2F_T$

$\overset{(15,16)}{=} F_1 - 2cx_1 - 2F_T$ (20)

Eliminieren der Reaktionskräfte F_1, F_T durch Linearkombination der Gleichungen (18-20)

$2\cdot(19) + (20) \Rightarrow 3m\ddot{x}_1 = 3F_1 - 6cx_1$ (21)

$3\cdot(18) + (21) \Rightarrow 12m\ddot{x}_1 = -3cx_1 + 6mg$ (22)

$$\Rightarrow \underline{\underline{4m\ddot{x}_1 + cx_1 = 2mg}}$$