ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

IMES
Institut für Mechanische Systeme

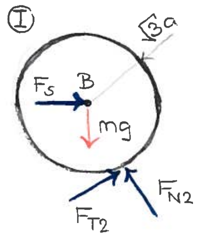
Technische Mechanik

Klausur III **10. Dezember 2013, 08^{15} - 09^{15}**

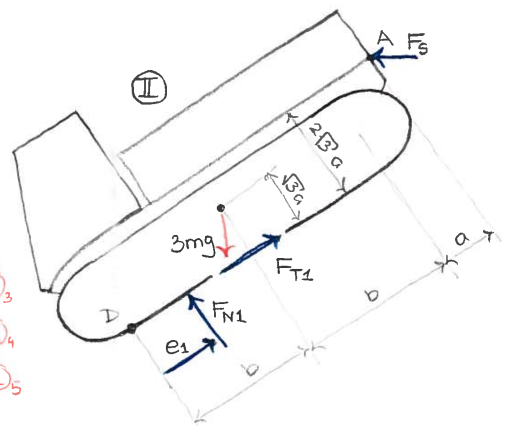
Dr. Stephan Kaufmann **Musterlösung** **Herbstsemester 2013**

Aufgabe 1 (17 Punkte)

a) Freischnitt



1_{1} 1_{2}



1_{3} 1_{4} 1_{5}

b) Gleichgewichtsbedingungen

I:

$$\nearrow:\quad 0 = F_{T2} - \tfrac{1}{2}mg + \tfrac{\sqrt{3}}{2}F_S \qquad (1)$$

$$\uparrow:\quad 0 = F_{N2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}mg - \tfrac{1}{2}F_S \qquad (2)$$

$$\curvearrowleft B:\quad 0 = \sqrt{3}\,a\,F_{T2} \qquad (3)$$

$1^{k.r.}_{6}$ $1^{k.r.}_{7}$

II:

$$\nearrow:\quad 0 = F_{T1} - \tfrac{1}{2}3mg - \tfrac{\sqrt{3}}{2}F_S \qquad (4)$$

$$\uparrow:\quad 0 = F_{N1} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}3mg + \tfrac{1}{2}F_S \qquad (5)$$

$$\curvearrowleft D:\quad 0 = e_1F_{N1} - b\tfrac{\sqrt{3}}{2}3mg + \sqrt{3}a\tfrac{1}{2}3mg + (2b+a)\tfrac{1}{2}F_S + 2\sqrt{3}a\tfrac{\sqrt{3}}{2}F_S \qquad (6)$$

$1^{k.r.}_{8}$ $1^{k.r.}_{9}$

Auflösen

$$(3) \Rightarrow \underline{F_{T2} = 0} \qquad (7)$$

$$(1) \Rightarrow F_S = \tfrac{2\sqrt{3}}{3}\left(\tfrac{1}{2}mg - F_{T2}\right) \overset{(7)}{=} \underline{\tfrac{\sqrt{3}}{3}mg} \qquad (8)$$

$$(2) \Rightarrow F_{N2} = \tfrac{\sqrt{3}}{2}mg + \tfrac{1}{2}F_S \overset{(8)}{=} \tfrac{\sqrt{3}}{6}(\overbrace{3mg+mg}^{4mg}) = \underline{\tfrac{2\sqrt{3}}{3}mg} \qquad (9)$$

$$(4) \Rightarrow F_{T1} = \tfrac{3}{2}mg + \tfrac{\sqrt{3}}{2}F_S \overset{(8)}{=} \tfrac{3}{2}mg + \tfrac{1}{2}mg = \underline{2mg} \qquad (10)$$

$$(5) \Rightarrow F_{N1} = \tfrac{3\sqrt{3}}{2}mg - \tfrac{1}{2}F_S \overset{(8)}{=} \tfrac{3\sqrt{3}}{2}mg - \tfrac{\sqrt{3}}{6}mg = \tfrac{(9-1)\sqrt{3}}{6}mg = \underline{\tfrac{4\sqrt{3}}{3}mg} \qquad (11)$$

$$(6) \Rightarrow e_1 = \frac{1}{F_{N1}}\left[\frac{3\sqrt{3}}{2}bmg - \frac{3\sqrt{3}}{2}amg - \left(\frac{2b+a}{2} + 3a\right)F_S\right]$$

$$\overset{(8,11)}{=} \frac{\sqrt{3}}{4mg}\left[\frac{3\sqrt{3}}{2}bmg - \frac{3\sqrt{3}}{2}amg - \left(\frac{2b+7a}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{3}mg\right]$$

$$= \frac{3}{4\cdot 6}\left[\overbrace{(9-2)}^{7}b - \overbrace{(9+7)}^{16}a\right]$$

$$= \underline{\tfrac{7}{8}b - 2a} \qquad (12)$$

$1^{a.r.}_{10}$ $1^{a.r.}_{11}$ $1^{a.r.}_{12}$ $1^{a.r.}_{13}$

c) Bedingung für Haften

$$|F_{T1}| \overset{!}{\leq} \mu_0 F_{N1} \overset{(10,11)}{\Rightarrow} 2mg \leq \mu_0\frac{4\sqrt{3}}{3}mg \Rightarrow \underline{\underline{\mu_0 \geq \frac{\sqrt{3}}{2}}} \qquad (13)$$

$1^{k.r.}_{14}$ $1^{a.r.}_{15}$

d) Bedingung für nicht Kippen

$$e_1 \overset{!}{\in} [0, 2b] \overset{(12)}{\Rightarrow} \tfrac{7}{8}b - 2a \in [0, 2b]$$

$$\overset{a>0}{\Leftrightarrow} \tfrac{7}{8}b - 2a \geq 0$$

$$\overset{b>0}{\Leftrightarrow} \underline{\underline{\frac{a}{b} \leq \frac{7}{16}}}$$

$1^{k.r.}_{16}$ $1^{a.r.}_{17}$

Punkteschlüssel zu Aufgabe 1

1_1 1_2 Planierwalze freigeschnitten sowie Bindungskräfte F_S, F_{N2}, F_{T2} und Gewichtskraft mg eingezeichnet. Pro Fehler 1 Punkt Abzug.

1_3 1_4 1_5 Pistenfahrzeug freigeschnitten sowie Bindungskräfte F_D, F_{T1}, F_{N1} (mit Abstand e_1) und Gewichtskraft $3mg$ eingezeichnet. Pro Fehler 1 Punkt Abzug.

$1_6^{k.r.}$ $1_7^{k.r.}$ Gleichgewichtsbedingungen für Planierwalze konsequent richtig zu Freischnitt aufgestellt. Pro Fehler 1 Punkt Abzug.

$1_8^{k.r.}$ $1_9^{k.r.}$ Gleichgewichtsbedingungen für Pistenfahrzeug konsequent richtig zu Freischnitt aufgestellt. Pro Fehler 1 Punkt Abzug.

$1_{10}^{a.r.}$ $1_{11}^{a.r.}$ $1_{12}^{a.r.}$ $1_{13}^{a.r.}$ Bindungskräfte F_{N1}, F_{T1}, F_S, F_{N2}, F_{T2} und Abstand e_1 absolut richtig angegeben. Pro Fehler 1 Punkt Abzug.

$1_{14}^{k.r.}$ Bedingung für Haften konsequent richtig zu F_{N1}, F_{T1} eingesetzt.

$1_{15}^{a.r.}$ Bedingung an μ_0 absolut richtig angegeben.

$1_{16}^{k.r.}$ Bedingung für nicht Kippen konsequent richtig zu e_1 eingesetzt.

$1_{17}^{a.r.}$ Bedingung an $\frac{a}{b}$ absolut richtig angegeben.

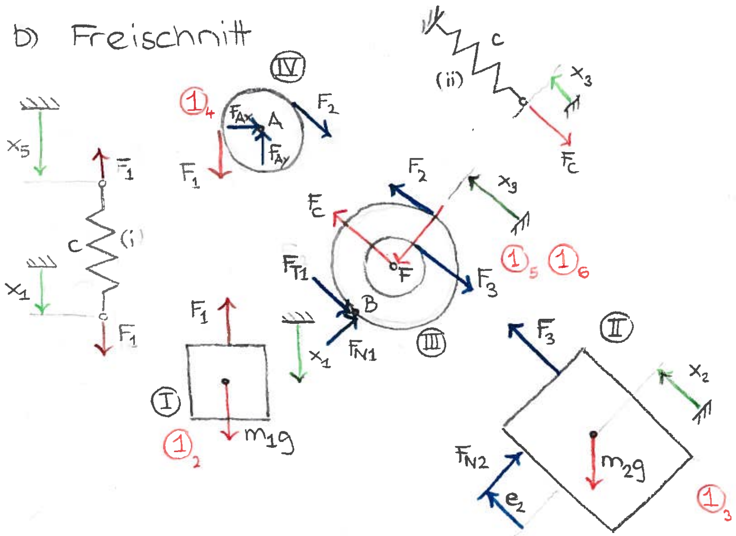
Aufgabe 2 (18 Punkte)

a) Der Freiheitsgrad ist die Anzahl der Minimalkoordinaten um die Lage des Systems eindeutig zu beschreiben. Hier können z.B.

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

als Minimalkoordinaten gewählt werden. Demnach ist der Freiheitsgrad $f = 2$. 1_1

b) Freischnitt



c) Bewegungsdifferentialgleichungen

I $\quad m_1 \ddot{x}_1 = m_1 g - F_1$ $\quad 1_7^{k.r.}$ (1)

II $\quad m_2 \ddot{x}_2 = F_3 - \frac{\sqrt{2}}{2} m_2 g$ $\quad 1_8^{k.r.}$ (2)

d) Kraftgesetze

(i) $F_1 = c(x_1 - x_5)$ $\quad 1_{9}$ (3)

(ii) $F_c = -cx_3$ $\quad 1_{10}$ (4)

e) Gleichgewichtsbedingungen (Drallsatz)

III $\curvearrowleft B)$: $0 = 2RF_c + 4RF_2 - 3RF_3$ $\quad 1_{11}$ (5)

IV $\curvearrowleft A)$: $0 = RF_1 - RF_2$ $\quad 1_{12}$ (6)

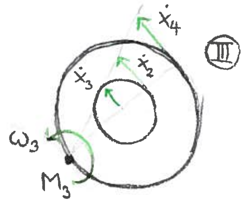
$$\left.\begin{array}{l}(6) \Rightarrow \underline{F_2 = F_1} \qquad (7)\\ (5) \Rightarrow \underline{F_3 = \frac{1}{3}(2F_c + 4F_2)} \qquad (8)\end{array}\right\} \quad 1^{a.r.}_{13}$$

f) Kinematische Relationen

$$\omega_3 = \frac{\dot{x}_3}{2R} = \frac{\dot{x}_2}{3R} = \frac{\dot{x}_4}{4R}$$

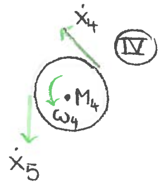
$\Rightarrow \dot{x}_3 = \frac{2}{3}\dot{x}_2 \Rightarrow \underline{x_3 = \frac{2}{3}x_2 + C_3}$ $\quad 1_{14}$ (9)

$\Rightarrow \dot{x}_4 = \frac{4}{3}\dot{x}_2 \Rightarrow \underline{x_4 = \frac{4}{3}x_2 + C_4}$ $\quad 1_{15}$ (10)



$$\omega_4 = \frac{\dot{x}_4}{R} = \frac{\dot{x}_5}{R}$$

$\Rightarrow \dot{x}_5 = \dot{x}_4 = \frac{4}{3}\dot{x}_2 \Rightarrow \underline{x_5 = \frac{4}{3}x_2 + C_5}$ $\quad 1_{16}$ (11)



In der ungespannten Ausgangslage gilt

$$0 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 \overset{(9,10,11)}{\Rightarrow} 0 = C_3 = C_4 = C_5$$

g) Eliminieren der Feder- und Bindungskräfte durch einsetzen der Kraftgesetze (3,4) und Bindungskräfte (7,8) in die Bewegungsdifferentialgleichungen (1,2) und Substitution der überzähligen Koordinaten (9,10,11).

$$(1) \overset{(3)}{\Rightarrow} m_1\ddot{x}_1 = m_1 g - c(x_1 - x_5) \overset{(11)}{=} m_1 g - c(x_1 - \tfrac{4}{3}x_2)$$

$$(2) \overset{(8)}{\Rightarrow} m_2\ddot{x}_2 = \tfrac{1}{3}(2F_c + 4F_2) - \tfrac{\sqrt{2}}{2}m_2 g \overset{(4,7)}{=} -\tfrac{2}{3}cx_3 + \tfrac{4}{3}F_1 - \tfrac{\sqrt{2}}{2}m_2 g$$

$$\overset{(9,3)}{=} -\tfrac{2}{3}c\tfrac{2}{3}x_2 + \tfrac{4}{3}c(x_1 - x_5) - \tfrac{\sqrt{2}}{2}m_2 g$$

$$\overset{(11)}{=} -\tfrac{4}{9}cx_2 + \tfrac{4}{3}cx_1 - \tfrac{4}{3}c\tfrac{4}{3}x_2 - \tfrac{\sqrt{2}}{2}m_2 g$$

$$= c(\tfrac{4}{3}x_1 - \tfrac{20}{9}x_2) - \tfrac{\sqrt{2}}{2}m_2 g$$

Zusammengefasst

$m_1\ddot{x}_1 + c(x_1 - \frac{4}{3}x_2) = m_1 g$ $\quad 1^{a.r.}_{17}$ (12)

$m_2\ddot{x}_2 + c(-\frac{4}{3}x_1 + \frac{20}{9}x_2) = -\frac{\sqrt{2}}{2}m_2 g$ $\quad 1^{a.r.}_{18}$ (13)

oder in Matrixform

$$\underbrace{\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}}_{M} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix}}_{\ddot{\vec{q}}} + \underbrace{\begin{pmatrix} c & -\frac{4}{3}c \\ -\frac{4}{3}c & \frac{20}{9}c \end{pmatrix}}_{K} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\vec{q}} = \underbrace{\begin{pmatrix} m_1 g \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}m_2 g \end{pmatrix}}_{\vec{f}}$$

Anhang

Für konservative Systeme mit holonomen Bindungen lassen sich die Bewegungsgleichungen (12,13) elegant mit den Lagrange-Gleichungen 2. Art bestimmen:

- Minimalkoordinaten

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

- Potentielle Energie der Federn und der Gravitation

$$V = \frac{1}{2}c(x_1 - x_5)^2 + \frac{1}{2}c x_3^2 - m_1 g x_1 + m_2 g \frac{\sqrt{2}}{2} x_2$$

$$\overset{(11,9)}{=} \frac{1}{2}c\left(x_1 - \frac{4}{3}x_2\right)^2 + \frac{1}{2}c\left(\frac{2}{3}x_2\right)^2 - m_1 g x_1 + m_2 g \frac{\sqrt{2}}{2} x_2 \qquad (*)$$

- Kinetische Energie des Quader

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 \qquad (**)$$

- Bewegungsdifferentialgleichungen mit Lagrange II

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\vec{q}}}\right)^T - \left(\frac{\partial T}{\partial \vec{q}}\right)^T + \left(\frac{\partial V}{\partial \vec{q}}\right)^T$$

$$\overset{(*,**)}{=} \begin{pmatrix} m_1 \dot{x}_1 \\ m_2 \dot{x}_2 \end{pmatrix}^{\cdot} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c(x_1 - \frac{4}{3}x_2) - m_1 g \\ c(x_1 - \frac{4}{3}x_2)\cdot(-\frac{4}{3}) + c\frac{2}{3}x_2\frac{2}{3} + m_2 g \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -\frac{4}{3}c \\ -\frac{4}{3}c & \frac{20}{9}c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 g \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} m_2 g \end{pmatrix}$$

Beachte dass mit dem Lagrange-Formalismus das Freischneiden und Eliminieren der Bindungs- und Federkräfte entfällt. Die Bindungskräfte liessen sich nachträglich durch partielles Freischneiden und Anwenden des PdvL bestimmen.

Punkteschlüssel zu Aufgabe 2

1_1 Freiheitsgrad richtig angegeben.

1_2 Quader 1 freigeschnitten sowie F_1 und $m_1 g$ eingezeichnet.

1_3 Quader 2 freigeschnitten sowie F_3, F_{N2}, e_1 und $m_2 g$ eingezeichnet.

1_4 Umlenkrolle freigeschnitten sowie F_1, F_2, F_{Ax}, F_{Ay} eingezeichnet.

1_5, 1_6 Stufenrolle freigeschnitten sowie F_{N1}, F_{T1}, F, F_c, F_2, F_3 eingezeichnet. Pro Fehler 1 Punkt Abzug.

$1_7^{k.r.}$ Bewegungsdifferentialgleichung für Quader 1 konsequent richtig zu Freischnitt aufgestellt.

$1_8^{k.r.}$ Bewegungsdifferentialgleichung für Quader 2 konsequent richtig zu Freischnitt aufgestellt.

1_9 Kraftgesetz für Feder (i) richtig angegeben.

1_{10} Kraftgesetz für Feder (ii) richtig angegeben.

$1_{11}^{k.r.}$ Momentenbedingung für Stufenrolle konsequent richtig zu Freischnitt aufgestellt.

$1_{12}^{k.r.}$ Momentenbedingung für Umlenkrolle konsequent richtig zu Freischnitt aufgestellt.

$1_{13}^{a.r.}$ Relationen $F_1 \leftrightarrow F_2$, $F_2 \leftrightarrow F_3$ absolut richtig angegeben.

1_{14}, 1_{15}, 1_{16} Relationen $x_2 \leftrightarrow x_3 \leftrightarrow x_4 \leftrightarrow x_5$ richtig angegeben. Pro Fehler 1 Punkt Abzug.

$1_{17}^{a.r.}$, $1_{18}^{a.r.}$ Bewegungsdifferentialgleichungen absolut richtig in reduzierter Form angegeben. Pro Fehler 1 Punkt Abzug.