Technische Mechanik
151-0223-10

- Basisprüfung -

6. Februar 2023

Dr. Paolo Tiso

HINWEISE:

- Schreiben Sie Ihren Namen und Legi-Nummer auf das Antwortblatt und auf die Rechenteil-Seiten, und zwar in das dafür vorgesehene Feld am oberen Rand.
- Die vorliegende Prüfung umfasst 19 Seiten für den Multiple-Choice-Teil und 7 für den Rechenteil.
- Die Prüfung hat einen Multiple-Choice-Teil mit 15 Aufgaben und einen Rechenteil mit 2 Aufgaben.
- Sowohl der Multiple-Choice-Teil als auch der Rechenteil werden mit 50% gewichtet. Es gibt insgesamt **30 erreichbare Punkte**. Das bedeutet im Durchschnitt 4 Minuten pro Punkt.
- Bei den **Multiple-Choice**-Fragen gibt es **immer nur 1 richtige Antwort**. Jede richtige Antwort wird mit 1 Punkt bewertet. Für falsche oder leere Antworten gibt es keinen Punktabzug.
- Die Prüfungszeit beträgt **2 Stunden**.
- **Erlaubte Hilfsmittel: Zusammenfassung (Computer- oder Handgeschrieben) auf 4 Blättern bzw. 8 Seiten A4.** Aufgaben mit Lösungen und alte Prüfungen sind nicht zulässig. Eigene Beispiele zur Veranschaulichung sind zugelassen. Die Zusammenfassung darf von einer beliebigen Quelle (z.B. vom AMIV) bezogen werden, so lange die oben stehenden Kriterien erfüllt sind.
- **Kein Taschenrechner** oder andere elektronische Hilfsmittel sind zugelassen.
- Beantworten Sie die vorliegenden Aufgaben an den dafür vorgesehenen Stellen.
- Schalten Sie Ihr Mobiltelefon und alle weiteren elektronischen Geräte aus.
- **Das Antwortblatt sowie alle Seiten des Rechenteils sind abzugeben.**
- Bitte den Raum erst verlassen, wenn alle Prüfungen eingesammelt wurden!

Viel Erfolg!

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

151-0223-10 Technische Mechanik
Basisprüfung 06.02.2023
Dr. Paolo Tiso

Antwortblatt
Typ A

Nachname:	
Vorname:	
Legi-Nummer:	

Legi-Nummer

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Wie man das Antwortblatt richtig ausfüllt:

Ja:

A	B	C	D	E	
A	B	C	D	E	
A	B	C	D	E	**D**

Korrektur:
[C → D]

Nein:

A	B	C	D	E	
A	B	C	D	E	
A	B	C	D	E	**D**

Korrektur:
[Bleibt C!]

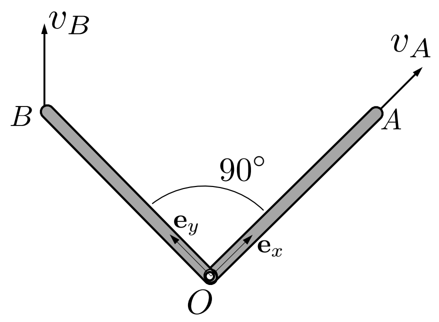
Antworten

1.	A	B	C	D	E
2.	A	B	C	D	E
3.	A	B	C	D	E
4.	A	B	C	D	E
5.	A	B	C	D	E
6.	A	B	C	D	E
7.	A	B	C	D	E
8.	A	B	C	D	E
9.	A	B	C	D	E
10.	A	B	C	D	E
11.	A	B	C	D	E
12.	A	B	C	D	E
13.	A	B	C	D	E
14.	A	B	C	D	E
15.	A	B	C	D	E

Diese Seite muss am Ende abgegeben werden!

Teil I - Multiple-Choice **(1 richtige Antwort)**

1. Zwei starre Stäbe gleicher Länge L schliessen einen Winkel von 90° miteinander ein. In der dargestellten Momentankonfiguration haben die Spitzen A und B jeweils die Geschwindigkeiten $\mathbf{v}_A = v\mathbf{e}_x$ und $\mathbf{v}_B = v\mathbf{e}_x + v\mathbf{e}_y$.



Was ist die Geschwindigkeit $\mathbf{v}_O$ des Punktes O?

(a) $\mathbf{v}_O = 2v\mathbf{e}_x - v\mathbf{e}_y$

► (b) $\mathbf{v}_O = v\mathbf{e}_x + v\mathbf{e}_y$

(c) $\mathbf{v}_O = v\mathbf{e}_y$

(d) $\mathbf{v}_O = v\mathbf{e}_x$

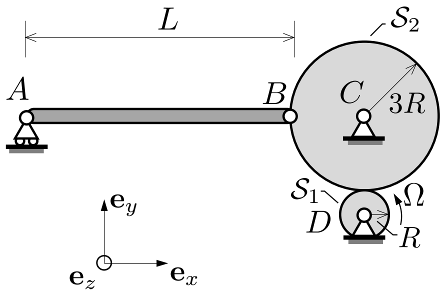
(e) $\mathbf{v}_O = \mathbf{0}$

Lösung:

Die Geschwindigkeit in O kann durch die Projektionen der Geschwindigkeiten in den Punkten A und B entlang der entsprechenden Stäbe berechnet werden (SdpG). Da der Stab AO parallel zur $\mathbf{e}_x$-Achse ist und der Stab BO parallel zur $\mathbf{e}_y$-Achse ist, ergeben sich die Projektionen direkt als die Geschwindigkeitskomponenten in O:

$$\mathbf{v}_O = v\mathbf{e}_x + v\mathbf{e}_y \tag{1}$$

2. Zwei Scheiben $\mathcal{S}_1$ und $\mathcal{S}_2$ mit den Radien R bzw. $3R$ sind in ihren Mittelpunkten C und D gelenkig gelagert und rollen ohne zu gleiten in ihrem Berührungspunkt. Ein Stab der Länge L ist an einem seiner Enden B an $\mathcal{S}_2$ gelenkig gelagert, wie gezeigt. Das andere Ende des Stabes A wird durch ein Auflager gehalten. In der gezeigten Konfiguration ist der Stab horizontal und $\mathcal{S}_1$ dreht sich gegen den Uhrzeigersinn mit der Winkelgeschwindigkeit Ω.



Was ist die momentane Geschwindigkeit $\mathbf{v}_A$ des Punktes A?

(a) $\mathbf{v}_A = \Omega R \mathbf{e}_x$

(b) $\mathbf{v}_A = -3\Omega R \mathbf{e}_x$

(c) $\mathbf{v}_A = \frac{1}{3}\Omega R \mathbf{e}_x$

(d) $\mathbf{v}_A = \Omega R \mathbf{e}_y$

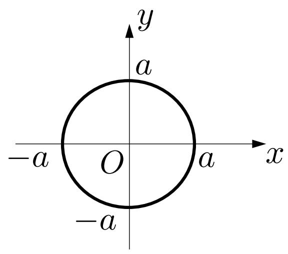
► (e) $\mathbf{v}_A = \mathbf{0}$

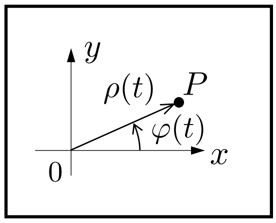
Lösung:

Wir betrachten zuerst Punkt B. Da B an $\mathcal{S}_2$ gelenkig gelagert ist, ist seine momentane Geschwindigkeit tangential zur Bewegung der Scheibe, d.h. $\mathbf{v}_B$ hat nur eine vertikale Komponente.
Wir können jetzt $\mathbf{v}_A$ mithilfe des SdpG bestimmen. Die Projektion von $\mathbf{v}_B$ auf $\mathbf{e}_x$ (Richtung des Stabes AB) ist 0. Wegen des Lagers kann sich A nur in die $\mathbf{e}_x$-Richtung bewegen. Durch Anwendung des SdpG wissen wir aber, dass die Projektion von $\mathbf{v}_A$ auf $\mathbf{e}_x$ null sein muss. Damit ist $\mathbf{v}_A = \mathbf{0}$.

3. Die Bahnkurve eines Punktes P ist durch einen Kreis mit dem Radius a und dem Mittelpunkt O gegeben, wie abgebildet. Betrachten Sie die folgenden Parametrisierungen als Funktion der Zeit $t > 0$:

1. $\rho(t) = a$, $\varphi(t) = t$;
2. $\rho(t) = a$, $\varphi(t) = 2t$;
3. $\rho(t) = a$, $\varphi(t) = t^2$.





Welche dieser Parametrisierung(en) entspricht der gegebenen Bahkurve? (Die Definition der Polarkoordinaten ist in der Abbildung angegeben.)

(a) Nur 2.

(b) Nur 1.

(c) Nur 3.

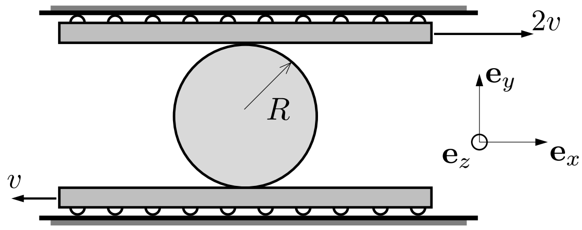
► (d) Alle.

(e) Keine.

Lösung:

Da sich P auf einem Kreis mit konstantem Radius a bewegt, muss $\rho(t) = a$ sein ($\forall t > 0$). Der Winkel $\varphi(t)$ muss mindestens eine volle Umdrehung abdecken, um der Abbildung zu entsprechen. Das ist für alle Antwortmöglichkeiten erfüllt. Damit entsprechen alle Antwortmöglichkeiten der gegebenen Bahnkurve. Sie unterscheiden sich nur durch die Geschwindigkeit, mit der sich P auf dem Kreis bewegt ($v_\varphi(t) = a\dot{\varphi}(t)$).

4. Eine Scheibe mit dem Radius R rollt ohne zu gleiten auf zwei Blöcken, die sich mit den Geschwindigkeiten $2v\mathbf{e}_x$ und $-v\mathbf{e}_x$ horizontal bewegen, wie gezeigt.



Was ist die Rotationsgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ des Rades?

► (a) $\boldsymbol{\omega} = -\dfrac{3v}{2R}\mathbf{e}_z$

(b) $\boldsymbol{\omega} = \dfrac{v}{R}\mathbf{e}_z$

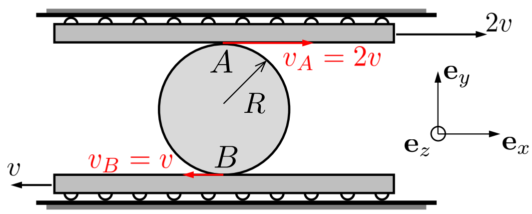
(c) $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$

(d) $\boldsymbol{\omega} = -\dfrac{2v}{3R}\mathbf{e}_z$

(e) $\boldsymbol{\omega} = -\dfrac{v}{3R}\mathbf{e}_z$

Lösung:

Wir betrachten die Punkte am oberen (A) und unteren (B) Rand der Scheibe (siehe Skizze).



Da die Scheibe ohne zu gleiten rollt, haben wir $\mathbf{v}_A = 2v\mathbf{e}_x$ und $\mathbf{v}_B = -v\mathbf{e}_x$. Da wir ein ebenes Problem betrachten, hat $\boldsymbol{\omega}$ nur eine Komponente in $\mathbf{e}_z$-Richtung. Durch Anwenden der Starrkörperformel erhalten wir die folgende Lösung:

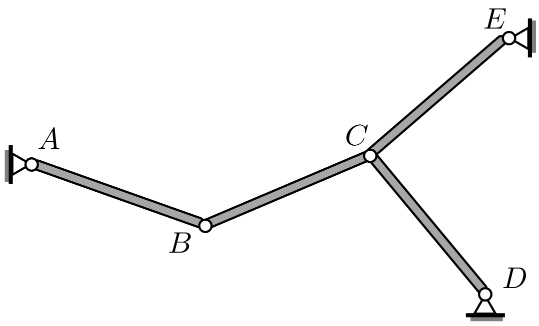
$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{BA} \tag{1}$$

$$\begin{bmatrix} 2v \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 2R \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$\Rightarrow 2v = -v - 2\omega R \tag{3}$$

$$\omega = -\frac{3v}{2R} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} = -\frac{3v}{2R}\mathbf{e}_z. \tag{4}$$

5. Das abgebildete ebene System besteht aus vier starren Stäben, die an ihren Spitzen gelenkig miteinander verbunden sind. Die Punkte A, D und E sind, wie gezeigt, am Boden angelenkt.



Was ist der Freiheitsgrad f des Systems?

(a) $f = 4$

► (b) $f = 0$

(c) $f = 1$

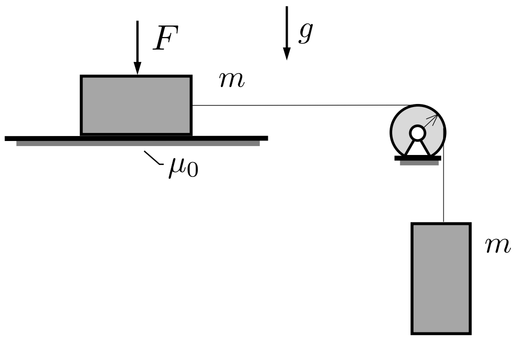
(d) $f = 3$

(e) $f = 2$

Lösung:

Es gibt mehrere Lösungswege für dieses Problem. Die 4 Stäbe haben je 3 Freiheitgrade in der Ebene ($n = 4 \cdot 3 = 12$). Es gibt 3 Festlager, eine Bindung in B, die 2 Stäbe miteinander verknüpft, und eine Bindung in C, die 3 Stäbe miteinander verknüpft. Wir erhalten $b = 3 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 12$. Der Freiheitsgrad ist dann $f = n - b = 12 - 12 = 0$.
Wir können auch die 5 Punkte A-E in der Ebene betrachten ($n = 5 \cdot 2 = 10$). Es gibt 3 Festlager und 4 Stäbe: $b = 3 \cdot 2 + 4 = 10$. Der Freiheitsgrad ist dann $f = n - b = 10 - 10 = 0$.
Schlussendlich können wir auch beobachten, dass das System sich nicht bewegen kann. Das Dreieck ECD ist ein Starrkörper, der unbeweglich ist. C ist somit fix und der Rest des Systems ABC kann sich auch nicht bewegen. Der Freiheitsgrad ist also $f = 0$.

6. Zwei Blöcke gleicher Masse m sind durch ein undehnbares, masseloses Seil verbunden, das um eine Rolle gewickelt ist. Ein Block liegt auf einer horizontalen Fläche mit Haftreibungskoeffizient μ_0 und wird durch eine zusätzliche Kraft F nach unten gedrückt, während der andere Block, wie gezeigt, am Seil hängt. Die Erdbeschleunigung g wirkt nach unten.



Was ist der minimale Betrag der Kraft F, sodass das System in Ruhe ist?

(a) $F = \dfrac{1+\mu_0}{2\mu_0} mg$

► (b) $F = \dfrac{1-\mu_0}{\mu_0} mg$

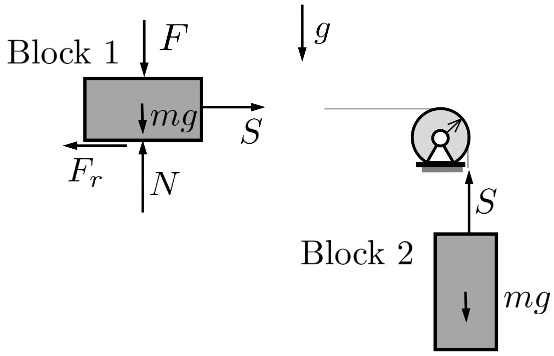
(c) $F = 0$

(d) $F = \mu_0 \, mg$

(e) $F = mg$

Lösung:

Wir betrachten die zwei Blöcke separat, indem wir zwei Freischnitte erstellen (siehe Skizze).



Die Seilkraft **S** ist die gleiche für beide Blöcke, da das Seil undehnbar und masselos ist. Wir fangen mit Block 2 an, und betrachten das Kräftegleichgewicht in $\mathbf{e}_y$-Richtung:

$$S = mg \tag{1}$$

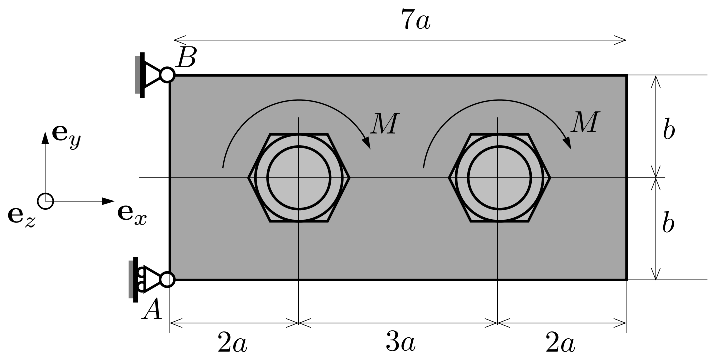
Wir betrachten nun Block 1. Das Kräftegleichgewicht in $\mathbf{e}_y$-Richtung lautet:

$$N = F + mg \tag{2}$$

Mit der Reibungskraft vom Betrag $F_r = \mu_0|N| = \mu_0(F + mg)$ (System im Ruhe) lautet das Kräftegleichgewicht in $\mathbf{e}_x$-Richtung:

$$S = F_r \quad \Leftrightarrow \quad mg = \mu_0(F + mg) \quad \Leftrightarrow \quad F = \frac{1 - \mu_0}{\mu_0} mg \tag{3}$$

7. Ein Block mit den Seiten $7a$ und $2b$ ist im Punkt B gelenkig verbunden und im Punkt A mit einem Auflager gelagert, wie gezeigt. An dem Block sind zwei Bolzen befestigt, deren Lage in der Abbildung angegeben ist. Auf beide Bolzen wird ein Moment M aufgebracht.



Was sind die Reaktionskräfte $\mathbf{R}_A$ und $\mathbf{R}_B$ auf A und B?

(a) $\mathbf{R}_A = \dfrac{M}{b}\mathbf{e}_x,\ \mathbf{R}_B = -\dfrac{M}{b}\mathbf{e}_x + \dfrac{M}{4a}\mathbf{e}_y$

(b) $\mathbf{R}_A = \dfrac{3Ma}{b^2}\mathbf{e}_x,\ \mathbf{R}_B = -\dfrac{3Ma}{b^2\mathbf{e}_x}$

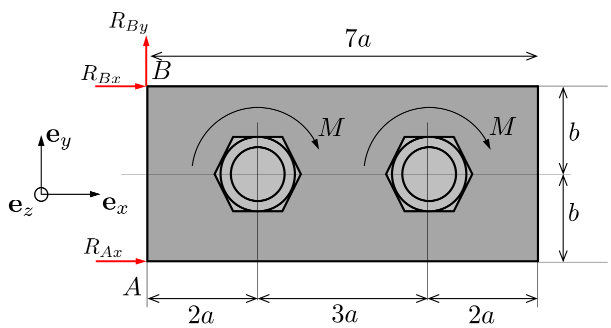
► (c) $\mathbf{R}_A = \dfrac{M}{b}\mathbf{e}_x,\ \mathbf{R}_B = -\dfrac{M}{b}\mathbf{e}_x$

(d) $\mathbf{R}_A = \dfrac{2M}{b}\mathbf{e}_x,\ \mathbf{R}_B = -\dfrac{M}{a}\mathbf{e}_x$

(e) $\mathbf{R}_A = \dfrac{5M}{b}\mathbf{e}_x,\ \mathbf{R}_B = -\dfrac{5M}{b}\mathbf{e}_x$

Lösung:

Bei dieser Aufgabe ist es wichtig zu bemerken, dass beide Momente M ortsunabhängig sind. Wir betrachten die folgende Abbildung:

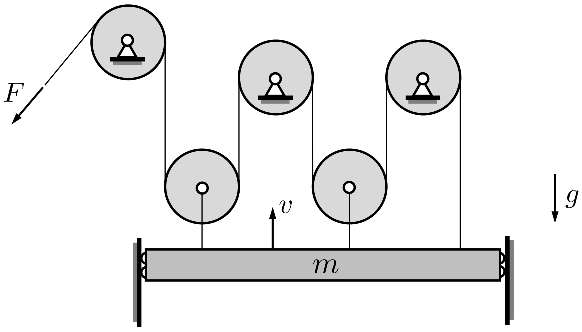


Das Momentengleichgewicht in A lautet:

$$2M + R_{Bx} \cdot 2b = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{Bx} = -\frac{M}{b} \tag{1}$$

Das Kräftegleichgewicht in $\mathbf{e}_y$-Richtung liefert $R_{By} = 0$ (einzige Kraft in $\mathbf{e}_y$-Richtung). In $\mathbf{e}_x$-Richtung erhalten wir: $R_{Ax} = -R_{Bx} = \frac{M}{b}$.

8. Das in der Abbildung gezeigte Flaschenzugsystem besteht aus fünf masselosen Rollen mit gleichem Radius. Die drei oberen Rollen sind in ihren Zentren gelenkig gelagert, während die beiden unteren in ihren Zentren mit einem Block der Masse m durch nicht dehnbare, masselose Seile verbunden sind. Das um die Rollen gewickelte Seil ist masselos und rutscht nicht.



Wie gross ist die Kraft F, die am Ende des Seils aufgebracht werden muss, damit sich der Block mit einer konstanten Geschwindigkeit v nach oben bewegt (reine Translation)?

(a) $F = \dfrac{mg}{4}$

► (b) $F = \dfrac{mg}{5}$

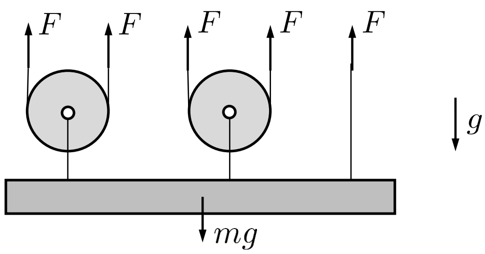
(c) $F = 3mg$

(d) $F = \dfrac{mg}{3}$

(e) $F = \dfrac{mg}{2}$

Lösung:

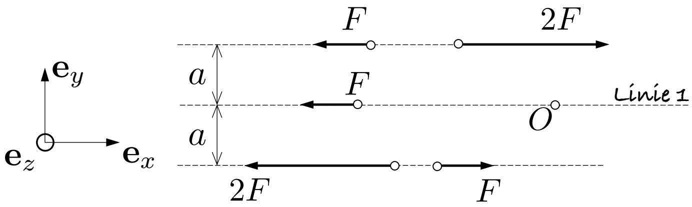
Da die Rollen masselos sind und das gewickelte Seil masselos und nicht dehnbar ist, hat die Seilkraft F entlang des gesamten Seils den gleichen Betrag. Wir betrachten den folgenden Freischnitt:



Wenn der Block sich mit einer konstanten Geschwindigkeit bewegt, ist die Beschleunigung null und das Problem kann statisch betrachtet werden. Das Kräftegleichgewicht in die vertikale Richtung lautet:

$$5F = mg \quad \Rightarrow \quad F = \frac{mg}{5} \tag{1}$$

9. Betrachten Sie das unten dargestellte parallele Kräftesystem. Alle Kräfte sind in der Richtung $\mathbf{e}_x$ ausgerichtet. Ihre Beträge und der relative Abstand der Wirkungslinien sind angegeben. Der Punkt O liegt an einer beliebige Lage auf Linie 1.



Was ist das Moment $\mathbf{M}_O$ bezüglich Punkt O ?

(a) $\mathbf{M}_O = -Fa\mathbf{e}_z$

(b) $\mathbf{M}_O = 3Fa\mathbf{e}_z$

(c) $\mathbf{M}_O = Fa\mathbf{e}_z$

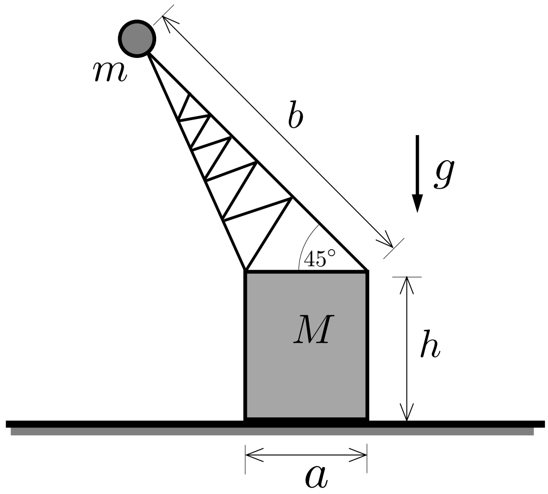
(d) $\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$

► (e) $\mathbf{M}_O = -2Fa\mathbf{e}_z$

Lösung:

Um das Moment bezüglich O zu berechnen, können die Kräfte entlang ihrer Wirkungslinien verschoben werden. Die Wirkungslinien dieser Kräfte sind die horizontalen Linien. Die Kräfte auf der obersten Linie erzeugen ein Moment $\mathbf{M} = -Fa\mathbf{e}_z$ bezüglich O (Rechte-Hand-Regel). Die Kräfte auf der untersten Linie erzeugen das gleiche Moment $\mathbf{M} = -Fa\mathbf{e}_z$ bezüglich O. Die Kraft auf der mittleren Linie verursacht kein Moment bezüglich O, da ihre Wirkungslinie durch O geht. Somit lautet das resultierende Moment $\mathbf{M}_O = 2\mathbf{M} = -2Fa\mathbf{e}_z$.

10. Das dargestellte System besteht aus einem homogenen Block (Masse M und Seitenlängen a und h). Eine zusätzliche Masse m wird, wie gezeigt, in einem Abstand b mit einem Winkel von 45° vom rechten oberen Eckpunkt des Blocks durch eine masselose Fixierung befestigt.



Wie gross ist der Grenzwert von m, damit das System nicht kippt?

(a) $m = 0$

(b) $m = \dfrac{M}{b - 2a}$

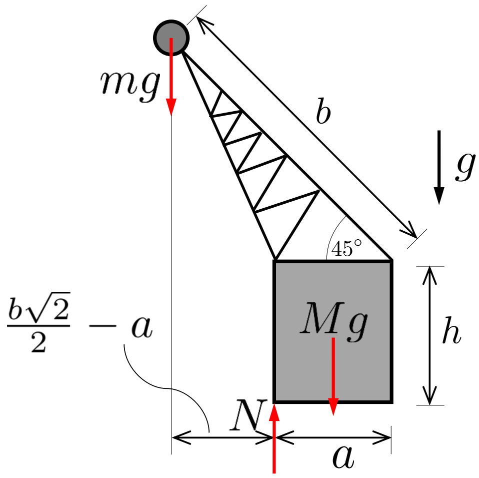
(c) $m = \dfrac{Ma}{b\sqrt{2} - h}$

(d) $m = \dfrac{Ma}{b\sqrt{2}}$

► (e) $m = \dfrac{Ma}{b\sqrt{2} - 2a}$

Lösung:

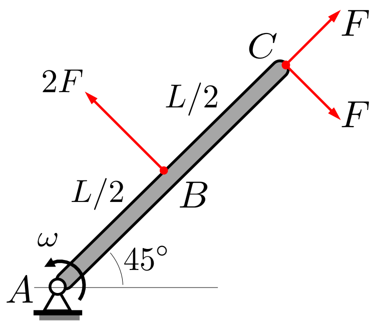
Wir betrachten den folgenden Freischnitt:



Wenn das System kippt, ist die Ecke unten links das Rotationszentrum. Um Kippen zu vermeiden, müssen wir sicherstellen, dass die Bedingungen für Ruhe an dieser kritischen Stelle (unten links) erfüllt sind. Das Momentengleichgewicht lautet in diesem Grenzfall:

$$Mg\frac{a}{2} = mg\left(\frac{b\sqrt{2}}{2} - a\right) \quad \Rightarrow \quad m = \frac{M}{2(\frac{\sqrt{2}}{2} - a)} = \frac{M}{b\sqrt{2} - 2a} \tag{1}$$

11. Ein Stab der Länge L dreht sich in einer Ebene mit der Winkelgeschwindigkeit ω um den Punkt A, der am Boden gelenkig gelagert ist. Senkrecht auf den Stab wirken zwei Kräfte mit den Beträgen $2F$ und F in einem Abstand von $L/2$ bzw. L. Eine dritte Kraft mit Betrag F, die in Richtung des Stabes gerichtet ist, wirkt auf das Ende C. In der momentanen Konfiguration schliesst der Stab einen Winkel von 45° mit der Horizontalen ein.



Was ist die Gesamtleistung P der Kräfte?

(a) $P = 2F\omega L$

(b) $P = FL$

(c) $P = -F\omega L$

▶ (d) $P = 0$

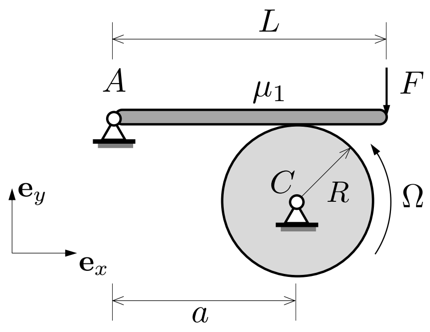
(e) $P = 3F\omega L$

Lösung:

Die Leistung wird mit $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ berechnet. Um diese Formel benutzen zu können, brauchen wir die Geschwindigkeiten in den Punkten A und B. Der Stab rotiert um A mit der Winkelgeschwindigkeit ω, sodass $\mathbf{v}_B = \frac{\omega L}{2}\mathbf{e}_\varphi$ und $\mathbf{v}_C = \omega L \mathbf{e}_\varphi$. Die Leistung lautet somit:

$$
\begin{aligned}
P &= \mathbf{v}_B \cdot 2F\mathbf{e}_\varphi + \mathbf{v}_C \cdot (-F)\mathbf{e}_r + \mathbf{v}_C \cdot F\mathbf{e}_r && (1)\\
&= \frac{\omega L}{2}\mathbf{e}_\varphi \cdot 2F\mathbf{e}_\varphi + \omega L\mathbf{e}_\varphi \cdot (-F)\mathbf{e}_r + \omega L\mathbf{e}_\varphi \cdot F\mathbf{e}_r && (2)\\
&= F\omega L - F\omega L + 0 = 0. && (3)
\end{aligned}
$$

12. Eine Scheibe mit dem Radius R dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω um einen festen Mittelpunkt C. Die Scheibe hat Kontakt mit einem Balken der Länge L, der im Punkt A gelenkig gelagert ist. Der Abstand zwischen dem Berührungspunkt und A ist a. Eine Kraft F wirkt senkrecht nach unten auf das andere Ende des Balkens. Der Gleitreibungskoeffizient ist μ_1.



Was ist die Reaktionskraft $\mathbf{R}_C$, die auf die Scheibe in C ausgeübt wird?

(a) $\mathbf{R}_C = -\mu_1 F \frac{a}{L}\mathbf{e}_x + F\frac{a}{L}\mathbf{e}_y$

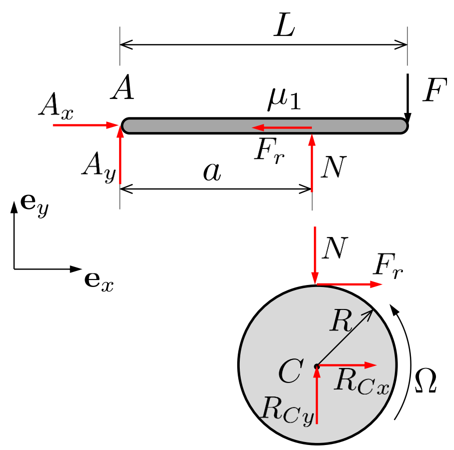
(b) $\mathbf{R}_C = \mu_1 F \mathbf{e}_x$

► (c) $\mathbf{R}_C = -\mu_1 F \frac{L}{a}\mathbf{e}_x + F\frac{L}{a}\mathbf{e}_y$

(d) $\mathbf{R}_C = -\mu_1 F \frac{L}{a}\mathbf{e}_x$

(e) $\mathbf{R}_C = \mu_1 F \frac{L}{a}\mathbf{e}_x - F\mathbf{e}_y$

Lösung:



Wir betrachten zuerst den Balken (siehe Abbildung). Das Momentengleichgewicht in A lautet:

$$FL = Na = F\frac{L}{a}. \tag{1}$$

Für die Scheibe liefert das Kräftegleichgewicht in $\mathbf{e}_y$-Richtung:

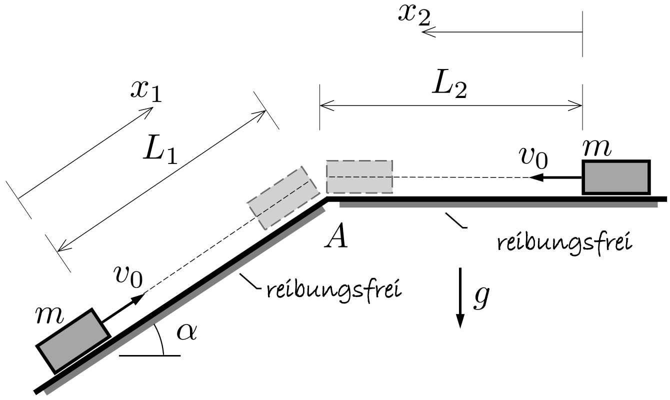
$$R_{Cy} = N = F\frac{L}{a}. \tag{2}$$

Mit der Reibungskraft vom Betrag $F_r = \mu_1|N| = \mu_1 F\frac{L}{a}$ wird das Kräftegleichgewicht in $\mathbf{e}_x$-Richtung zu:

$$R_{Cx} = -F_r = -\mu_1 F\frac{L}{a}. \tag{3}$$

und somit ist $\mathbf{R}_C = -\mu_1 F\dfrac{L}{a}\mathbf{e}_x + F\dfrac{L}{a}\mathbf{e}_y$.

13. Zwei Blöcke der Masse m und vernachlässigbarer Dimensionen werden mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 auf einer reibungsfreien Fläche in Bewegung gesetzt. Ein Block bewegt sich auf einer Steigung mit dem Neigungswinkel α nach oben, während sich der andere Block auf einer horizontalen Fläche bewegt. Der Scheitelpunkt der Fläche wird mit A bezeichnet, während L_1 und L_2 die Abstände der beiden Massen von A zum Zeitpunkt $t = 0$ sind, wie dargestellt. Die Schwerkraft wirkt nach unten. Die Koordinaten $x_1(t)$ und $x_2(t)$ zeigen die Lage der beiden Blöcke. Bei $t = 0$ ist $x_1(0) = 0$ und $x_2(0) = 0$.



Was ist das Verhältnis zwischen L_1 und L_2, so dass sich die beiden Massen im Punkt A treffen?

► (a) $L_1 = L_2 - \frac{g \sin\alpha}{2v_0^2} L_2^2$

(b) $L_1 = L_2$

(c) $L_1 = L_2 - \frac{2g \tan\alpha}{v_0^2} L_2^2$

(d) $L_1 = L_2 + \frac{g \sin\alpha}{v_0^2} L_2^2$

(e) $L_1 = L_2 - \frac{g}{2v_0^2} L_2^2$

Lösung:

Wir betrachten zuerst den oberen Block. Da es keine Kraft gibt, die in der horizontalen Richtung wirkt, ist die Beschleunigung null ($m\ddot{x}_2 = F = 0$). Durch Integration erhalten wir die Geschwindigkeit dieses Blocks, welche konstant und gleich v_0 ist. Um die Position des oberen Blocks als Funktion der Zeit auszudrücken, müssen wir ein weiteres Mal integrieren:

$$x_2(t) = v_0 t + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Die Konstante C_1 lässt sich bestimmen, in dem wir die Anfangsbedingungen benutzen:

$$x_2(t = 0) = C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \tag{2}$$

Wir können jetzt die Zeit t^* finden, nach der der obere Block auf A trifft:

$$x_2(t^*) = v_0 t^* = L_2 \Rightarrow t^* = \frac{L_2}{v_0} \tag{3}$$

Der Impulssatz in x_1-Richtung, angewendet auf den zweiten Block lautet:

$$m\ddot{x}_1(t) = -mg\sin\alpha \Rightarrow \ddot{x}_1(t) = -g\sin\alpha \tag{4}$$

Eine erste Integration liefert:

$$\dot{x}_1(t) = -g\sin\alpha t + C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R} \tag{5}$$

Mit der Anfangsbedingung $\dot{x}_1(t = 0) = v_0$, bekommen wir $C_2 = v_0$. Eine weitere Integration führt zu:

$$x_1(t) = -\frac{g\sin\alpha}{2}t^2 + v_0 t + C_3, \quad C_3 \in \mathbb{R} \tag{6}$$

Und die Anfangsbedingung $x_1(t = 0) = 0$ führt zu $C_3 = 0$. Wir fordern jetzt, dass der untere Block Punkt A nach $t = t^*$ erreicht:

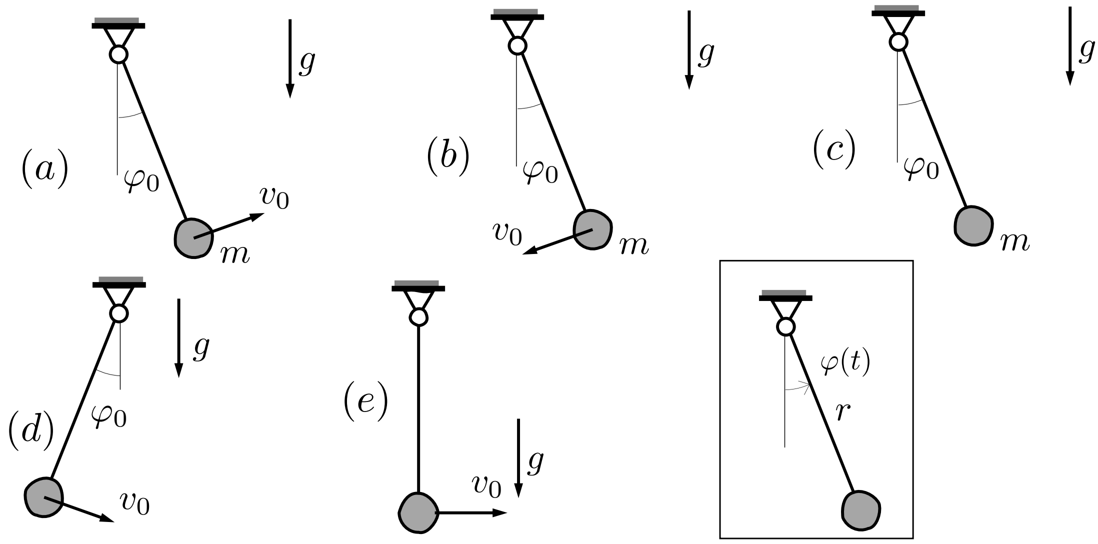
$$x_1(t = \frac{L_2}{v_0}) = -\frac{g\sin\alpha}{2}\left(\frac{L_2}{v_0}\right)^2 + v_0\frac{L_2}{v_0} = L_1 \tag{7}$$

$$\Rightarrow L_1 = L_2 - \frac{g\sin\alpha}{2v_0^2}L_2^2 \tag{8}$$

14. Ein Pendel besteht aus einem Teilchen der Masse m, das an einem Seil der Länge r befestigt ist. Das andere Ende des Seils ist gelenkig gelagert (siehe Skizze). Die Bewegungsgleichung des Pendels für kleine Schwingungswinkel ist gegeben durch

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega t) - \frac{v_0}{r\omega} \sin \omega t,$$

wobei $\omega = \sqrt{\frac{g}{r}}$, φ_0 und v_0 der Winkel in Bezug auf die vertikale Richtung und die Geschwindigkeit des Teilchens bei $t = 0$ sind. Die Erdbeschleunigung ist mit g angegeben. Die positive Richtung des Winkels $\varphi(t)$ ist in der eingerahmten Abbildung angegeben.



cm!
Welche der oben dargestellten Abbildungen stellt die richtigen Anfangsbedingungen dar?

(a)

► (b)

(c)

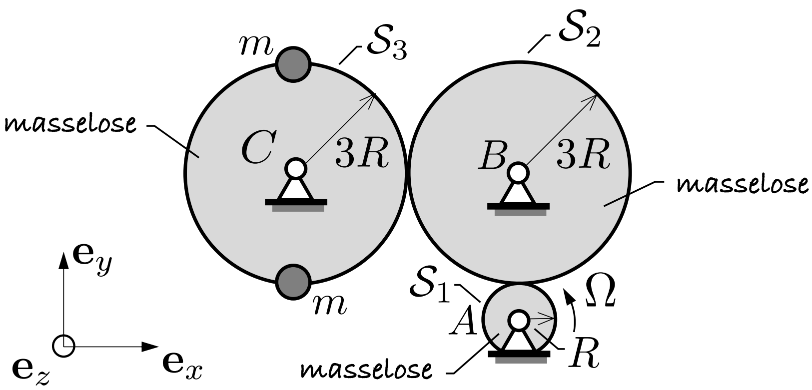
(d)

(e)

Lösung:

Für $t = 0$ erhalten wir aus dem Bewegungsgesetz: $\varphi(0) = \varphi_0$ und $\dot{\varphi}(0) = -\frac{v_0}{r}$. Deshalb ist Antwort (b) die richtige.

15. Drei masselose Scheiben $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ und $\mathcal{S}_3$ mit den Radien R, $3R$ bzw. $3R$ sind an ihren Mittelpunkten A, B und C gelenkig gelagert. Sie rollen ohne an den Berührungspunkten zu rutschen. Zwei Punktmassen der Masse m sind im Abstand $6R$ voneinander starr mit $\mathcal{S}_3$ verbunden, wie gezeigt. Die Scheibe $\mathcal{S}_1$ rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega} = \Omega \mathbf{e}_z$. Was ist der Drall $\mathbf{L}_C$ des Systems bezüglich C?



(a) $\mathbf{L}_C = -mR^2\Omega \mathbf{e}_z$

(b) $\mathbf{L}_C = 2mR^2\Omega \mathbf{e}_z$

► (c) $\mathbf{L}_C = 6mR^2\Omega \mathbf{e}_z$

(d) $\mathbf{L}_C = 18mR^2\Omega \mathbf{e}_z$

(e) $\mathbf{L}_C = -4mR^2\Omega \mathbf{e}_z$

Lösung:

Die Winkelgeschwindigkeit der Scheibe $\mathcal{S}_3$ lautet:

$$\boldsymbol{\omega}_3 = \frac{1}{3}\Omega \mathbf{e}_z. \tag{1}$$

Die Scheibe $\mathcal{S}_3$ ist masselos und das Massenträgheitsmoment I_C wird nur durch die zwei Massen m und ihren Abstand $3R$ zum Mittelpunkt C beeinflusst:

$$I_C = 2m \cdot (3R)^2 = 18mR^2. \tag{2}$$

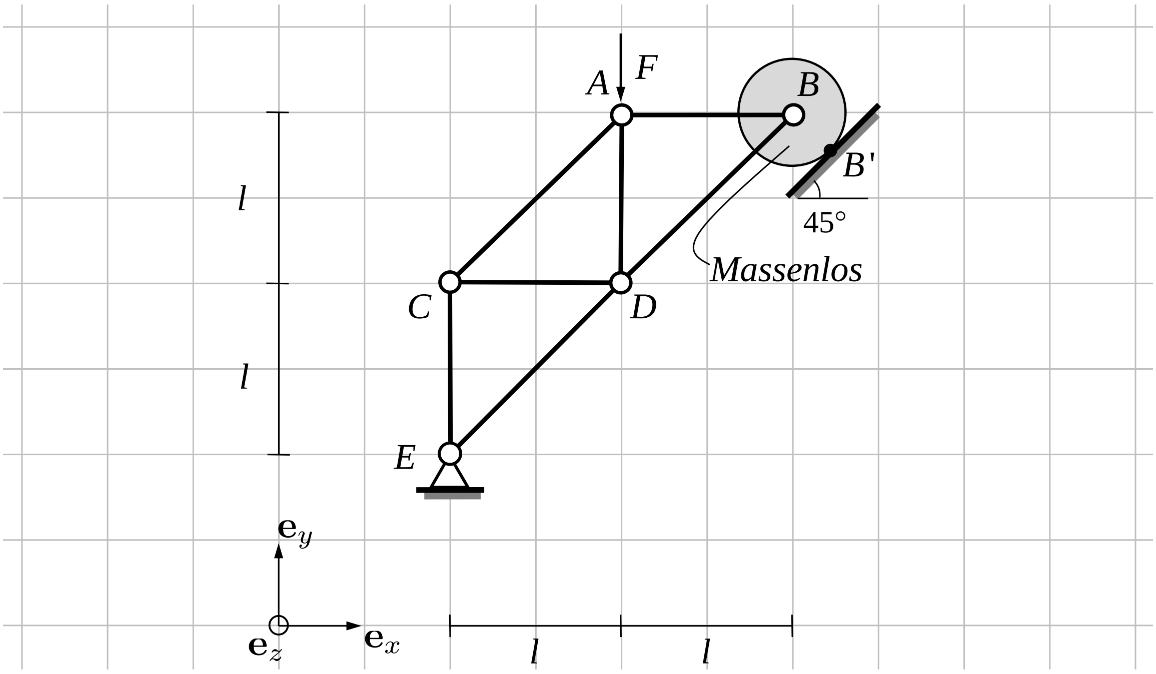
Somit lautet der Drall $\mathbf{L}_C$:

$$\mathbf{L}_C = I_C \boldsymbol{\omega}_3 = 18mR^2 \frac{1}{3}\Omega \mathbf{e}_z = 6mR^2\Omega \mathbf{e}_z. \tag{3}$$

Teil II - Rechenteil

Aufgabe 1 *[7 Punkte]*

Das unten abgebildete System besteht aus 7 masselosen Stäben, die gelenkig miteinander verbunden sind. Das Fachwerk ist im Punkt E gelenkig gelagert und wird im Punkt B mit einem homogenen masselosen Rad gelenkig verbunden. Das Rad rollt ohne zu gleiten auf einer um 45° geneigten Ebene und kann nicht abheben (siehe Skizze). Der Punkt E kann als Koordinatenursprung genommen werden und alle Längen können der Skizze entnommen werden. Die Kraft F wirkt im Punkt A in negativer $\mathbf{e}_y$ Richtung.



1. Berechnen Sie den Freiheitsgrad des Systems (geben Sie die Anzahl der Körper und Bindungen genau an). *[1 Punkt]*

   Das Rad im Punkt B kann als ein Auflager betrachtet werden, das sich auf einer 45° schiefen Ebene bewegt. Folglich lautet der Freiheitsgrad des Systems:

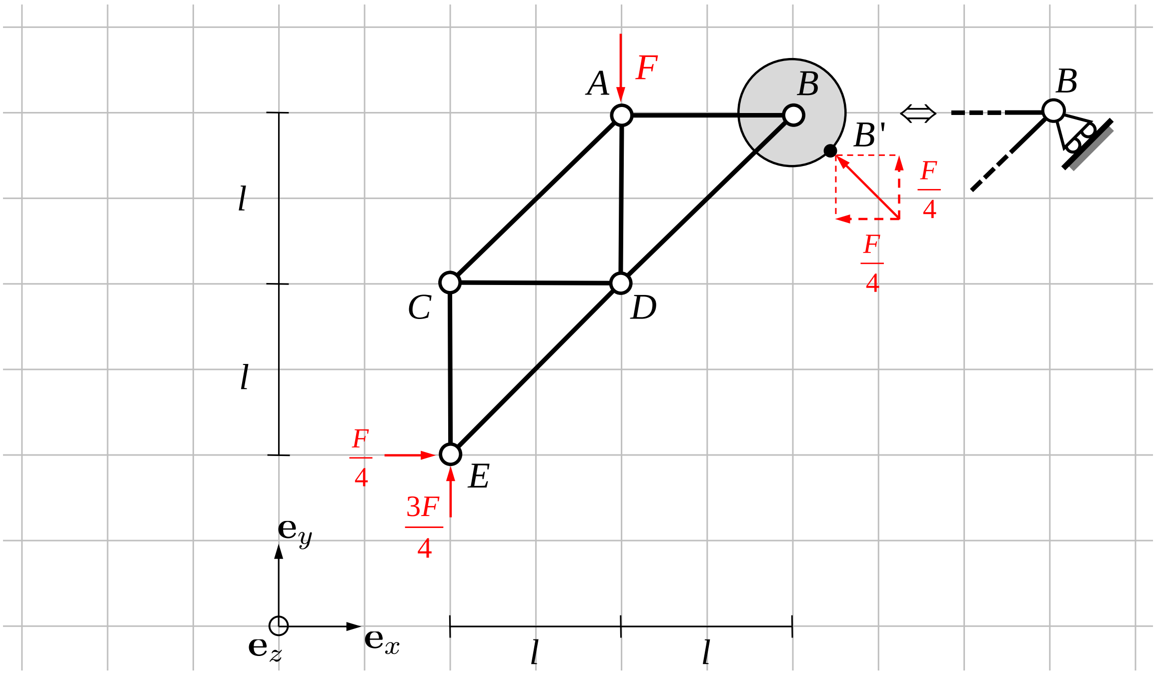
$$f = 3 \cdot n - 2 \cdot \text{Gelenklager} - 1 \cdot \text{Auflager} \tag{1}$$
$$f = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 0 \tag{2}$$

   Das System ist demzufolge statisch bestimmt.

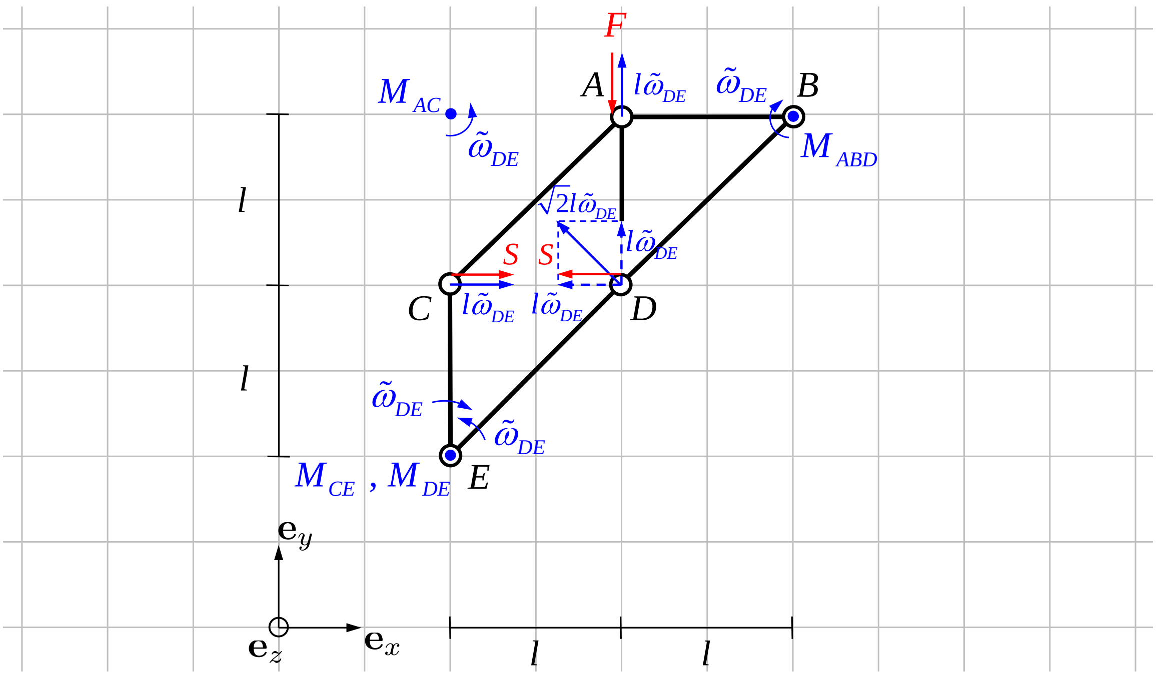
Diese Seite muss am Ende abgegeben werden!

Hilfsskizzen für Teilaufgaben 2 bis 5

Die folgenden Teilaufgaben 2 bis 5 können algebraisch ODER graphisch in den unten stehenden Figuren gelöst werden. Bei einer graphischen Lösung müssen Betrag und Richtung der Vektoren (d.h. auch Winkel) klar und sauber dargestellt werden. Wird die Aufgabe sowohl graphisch als auch algebraisch gelöst und unterscheiden sich die Ergebnisse, so resultiert dies in 0 Punkten. Unlesbare Antworten werden auch mit 0 Punkten bewertet.



Oben Teilaufgabe 2, unten Teilaufgaben 3 bis 5:



2. Berechnen Sie die Reaktionskräfte in den Punkten E und B'. *[1 Punkt]*

   Die Kraft im Punkt B hat einen Winkel von 45°. Deshalb muss das folgende Verhältnis gelten:

$$B_y = -B_x = \frac{\sqrt{2}}{2}B \tag{3}$$

   Damit können die folgenden Gleichgewichtsbedingungen angewendet werden:

$$MB(E,z): \qquad 0 = -F \cdot l + B \cdot 2\sqrt{2}l \tag{4}$$

$$\Rightarrow \quad B = \frac{\sqrt{2}}{4}F, \quad B_x = -\frac{F}{4}, \quad B_y = \frac{F}{4} \tag{5}$$

$$KB(x): \qquad 0 = E_x + B_x \quad \Rightarrow \quad E_x = \frac{F}{4} \tag{6}$$

$$KB(y): \qquad 0 = E_y + B_y - F \quad \Rightarrow \quad E_y = \frac{3F}{4} \tag{7}$$

   Die Lösungen sind graphisch auf der vorherigen Seite dargestellt.

In den folgenden Teilaufgaben 3, 4 und 5 wird die Stabkraft im Stab CD mittels PdvL berechnet.

3. Löschen Sie den Stab CD und führen Sie eine virtuelle Winkelgeschwindigkeit $\tilde{\omega}_{DE}$ im Punkt E ein. Berechnen Sie in dem neu erstellten Mechanismus die Winkelgeschwindigkeiten und Momentanzentren aller Körper (ohne das Rad). *[2 Punkte]*

   Aus $\tilde{\omega}_{DE}$ kann die Geschwindigkeit im Punkt D berechnet werden (siehe Skizze für die Richtung):

$$v_D = \sqrt{2}l \cdot \tilde{\omega}_{DE} \tag{8}$$

   Somit wird Punkt B das Momentanzentrum vom Dreieck ABD (SdpG) und die entsprechende Winkelgeschwindigkeit kann wie folgt berechnet werden:

$$\tilde{\omega}_{ABD} = -\frac{v_D}{\sqrt{2}l} = -\frac{\sqrt{2}l \cdot \tilde{\omega}_{DE}}{\sqrt{2}l} = -\tilde{\omega}_{DE} \tag{9}$$

   Mit Hilfe der Parallelogrammregel finden wir: $\tilde{\omega}_{CE} = -\tilde{\omega}_{DE}$ und $\tilde{\omega}_{AC} = \tilde{\omega}_{DE}$ (siehe Skizze).

   Das Momentanzentrum vom Stab AC ist senkrecht zu den Geschwindigkeiten in A und C. Alle anderen Momentanzentren sind offensichtlich und können der Skizze entnommen werden.

4. Berechnen Sie die Geschwindigkeiten der Punkte A, C und D mit Hilfe der in Teilaufgabe 3 berechneten Winkelgeschwindigkeiten und Momentanzentren.

   [1.5 Punkte]

   Die Richtungen der Geschwindigkeiten sind in der Skizze eingezeichnet. Die Beträge können wie folgt berechnet werden:

$$v_A = \tilde{\omega}_{ABD} \cdot l = l\tilde{\omega}_{DE} \tag{10}$$

$$v_C = \tilde{\omega}_{CE} \cdot l = l\tilde{\omega}_{DE} \tag{11}$$

$$v_D = \sqrt{2} l\tilde{\omega}_{DE} \quad \text{(aus Gleichung 8)} \tag{12}$$

5. Berechnen Sie die Stabkraft im Stab CD durch Anwenden des PdvL und des in Teilaufgaben 3 und 4 erstellten Mechanismus. Handelt es sich um einen Druck- oder Zugstab? *[1.5 Punkte]*

$$\tilde{P} = \tilde{\mathbf{v}}_A \cdot \mathbf{F} + \tilde{\mathbf{v}}_C \cdot \mathbf{S} + \tilde{\mathbf{v}}_D \cdot \mathbf{S} = 0 \tag{13}$$

$$0 = l\tilde{\omega}_{DE} \cdot S + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} l\tilde{\omega}_{DE} \cdot S - l\tilde{\omega}_{DE} \cdot F \tag{14}$$

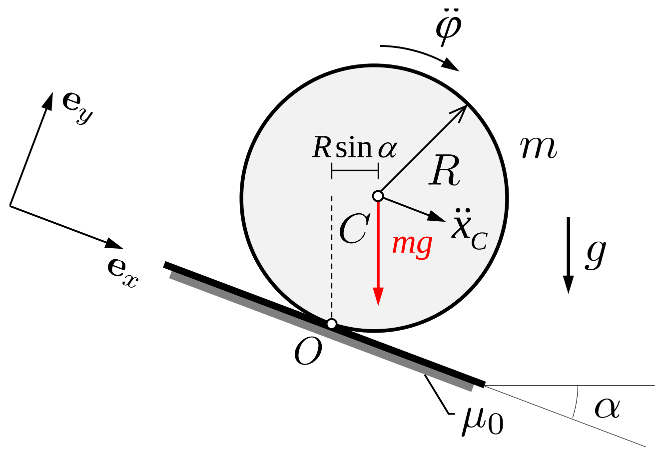
$$0 = 2S - F \tag{15}$$

$$\Rightarrow \quad S = \frac{F}{2} \tag{16}$$

   S wurde als Zugstab eingeführt. Da S positiv ist, ist der Stab CD ein Zugstab.

Aufgabe 2 *[8 Punkte]*

Betrachten Sie eine homogene Scheibe mit dem Radius R, der Masse m und dem Trägheitsmoment $I_C = \frac{1}{2}mR^2$ bezüglich ihres Schwerpunktes C. Die Scheibe rollt ohne zu gleiten auf einer schiefen Ebene mit dem Neigungswinkel α und Haftreibungskoeffizient μ_0. Die Schwerkraft wirkt nach unten. Die Winkelbeschleunigung ist im Uhrzeigersinn als positiv angenommen, sodass $\ddot{x}_C = R\ddot{\varphi}$, wo $\ddot{x}_C$ die Beschleunigung des Schwerpunktes C ist.



1. Bestimmen Sie durch Anwendung des Drallsatzes bezüglich des Berührungspunktes O die Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}$ der Scheibe. *[2 Punkte]*

   Der Drallsatz lautet:

   $$\dot{L}_O = M_O = I_O \cdot \ddot{\varphi} \tag{1}$$

   Dabei kann I_O mit dem Satz von Steiner wie folgt berechnet werden:

   $$I_O = I_C + d^2 \cdot m = \frac{1}{2}mR^2 + R^2 \cdot m = \frac{3}{2}mR^2 \tag{2}$$

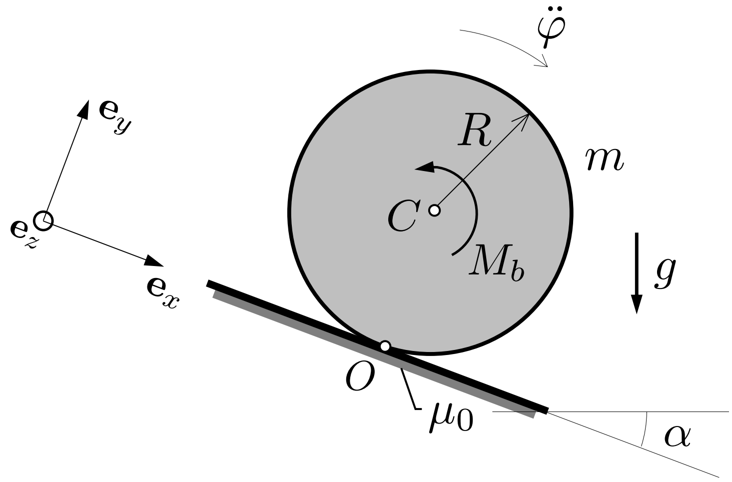
   M_0 ist durch die Schwerkraft mg und den horizontalen Abstand $R\sin\alpha$ zwischen O und C gegeben (siehe Skizze):

   $$M_O = mgR\sin\alpha \tag{3}$$

   Daraus ergibt sich beim Einsetzen in Gleichung 1 die Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}$:

   $$\ddot{\varphi} = \frac{M_O}{I_O} = \frac{mgR\sin\alpha}{\frac{3}{2}mR^2} = \frac{2}{3}\,\frac{g\sin\alpha}{R} \tag{4}$$

In den folgenden Teilaufgaben wirkt ein zusätzliches Bremsmoment $\mathbf{M}_b$ (bzw. $2\mathbf{M}_b$ für die Teilaufgaben 3, 4 und 5) auf die Scheibe. Das Bremsmoment greift im Punkt C an (siehe Skizze).



2. Bestimmen Sie das Moment $\mathbf{M}_b = M_b\mathbf{e}_z$, das auf die Scheibe ausgeübt werden muss, damit die Winkelgeschwindigkeit konstant bleibt. *[1 Punkt]*

   Eine konstante Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ bedeutet keine Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}$:

$$\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = \frac{d\,\text{Konst.}}{dt} = 0 \tag{5}$$

   Bei Anwendung des Drallsatzes aus Gleichung 1 kann das gesuchte Bremsmoment M_b berechnet werden:

$$\dot{L}_O = M_O^{'} = I_O \cdot \ddot{\varphi} = 0 \tag{6}$$

$$M_O^{'} = M_O - M_b = 0 \quad \Rightarrow \quad M_b = M_O = mgR\sin\alpha \tag{7}$$

3. Das Bremsmoment wird nun auf $2\mathbf{M}_b$ erhöht. Was ist die resultierende Winkelbeschleunigung? *[1 Punkt]*

   Die neue Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}_{Neu}$ kann durch den Drallsatz und das neue Bremsmoment $2M_b$ berechnet werden:

$$\ddot{\varphi}_{Neu} = \frac{M_O^{''}}{I_O} = \frac{M_O - 2M_b}{I_O} = \frac{mgR\sin\alpha - 2mgR\sin\alpha}{\frac{3}{2}mR^2} = -\frac{2}{3}\,\frac{g\sin\alpha}{R} \tag{8}$$

   Bemerkung: $\ddot{\varphi}_{Neu}$ ist gleich $-\ddot{\varphi}$, weil das einfache Bremsmoment die Scheibenbeschleunigung auf Null setzt und daher das doppelte Bremsmoment die Scheibe in die andere Richtung im gleichen Mass beschleunigt.

4. Betrachten Sie nun eine Anfangsgeschwindigkeit $\dot{\boldsymbol{\varphi}}(0) = -\Omega_0 \mathbf{e}_z$ und das in Teilaufgabe 3 eingeführte Bremsmoment $2\mathbf{M}_b$. Wie lange dauert es, bis die Scheibe zum Stillstand kommt? *[2 Punkte]*

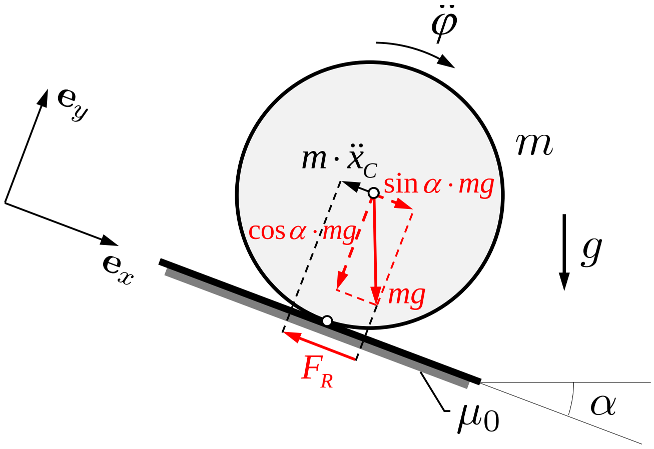
   Die Winkelgeschwindigkeit der Scheibe $\dot{\varphi}$ kann wie folgt berechnet werden:

$$\dot{\varphi} = \int \ddot{\varphi} dt = \Omega_0 + \int -\frac{2}{3}\frac{g \sin\alpha}{R} = \Omega_0 - \frac{2}{3}\frac{g\sin\alpha}{R}t \tag{9}$$

   Beim Stillstand ist die Geschwindigket $\dot{\varphi}(t) = 0$, daraus folgt die Zeit t:

$$\dot{\varphi} = \Omega_0 - \frac{2}{3}\frac{g\sin\alpha}{R}t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\Omega_0}{\frac{2}{3}\frac{g\sin\alpha}{R}} = \frac{3}{2}\frac{\Omega_0 R}{g\sin\alpha} \tag{10}$$

5. Wie lautet bei dem in Teilaufgabe 3 eingeführten Bremsmoment $2\mathbf{M}_b$ die Bedingung für μ_0 (Haftreibungskoeffizient zwischen Scheibe und Ebene), damit Rollen ohne Gleiten gewährleistet ist? *[2 Punkte]*



   Die resultierende Beschleunigung $\ddot{x}_C$ lässt sich aus der in Gleichung 8 berechneten Winkelbeschleunigung bestimmen:

$$\ddot{x}_C = R\ddot{\varphi} = R \cdot -\frac{2}{3}\frac{g\sin\alpha}{R} = -\frac{2}{3}g\sin\alpha \tag{11}$$

   Die benötigte Reibungskraft F_R kann aus der Gleichgewichtsbedingung in $\mathbf{e}_x$-Richtung bestimmt werden (siehe Skizze):

$$m\ddot{x}_C = mg\sin\alpha - F_R \quad \Rightarrow \quad F_R = mg\sin\alpha - m\ddot{x}_C = \frac{5}{3}mg\sin\alpha \tag{12}$$

   Der Haftreibungswert μ_0 ergibt sich dann aus der Reibungsgleichung:

$$F_R = \mu_0 \cdot N = \mu_0 \cdot mg\cos\alpha \tag{13}$$

$$\Rightarrow \quad \mu_0 = \frac{F_R}{mg\cos\alpha} = \frac{\frac{5}{3}mg\sin\alpha}{mg\cos\alpha} = \frac{5}{3}\tan\alpha \tag{14}$$