Technische Mechanik

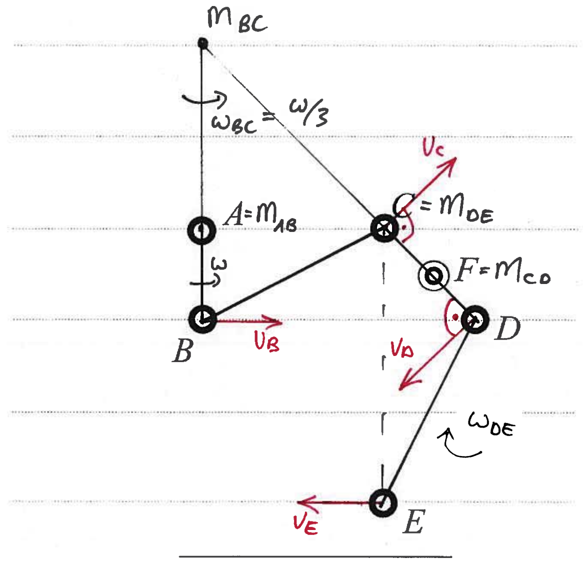
IMES
Institut für Mechanische Systeme

Klausur I — 19. Oktober 2014, 08^{15} - 09^{15}

Dr. Stephan Kaufmann — Musterlösung — Herbstsemester 2014

Aufgabe 1

a)



Bitte wenden!

Aufgabe 1

a) Momentanzentren identifizieren:

$M_{AB} = A$: gegeben

M_{BC} : zeichne Geschwindigkeitsvektoren ein: $(1)_1$ $\vec{v}_B \perp \vec{AB}$

$(1)_2$ $\vec{v}_C \perp \vec{CF}$

Rechtwinklig zu $\vec{v}_B$ und $\vec{v}_C$ liegt M_{BC}

M_{CD} : gegeben

M_{DE} : $(1)_3$ $\vec{v}_E$ ist horizontal (gegeben), $(1)_4$ $\vec{v}_D \perp \vec{FD}$

Rechtwinklig zu $\vec{v}_E$ und $\vec{v}_D$ liegt $M_{DE} = C$

b) $\omega_{BC} = \omega/3$

$$v_C = \omega_{BC} \cdot r_{M_{BC}C} = \frac{\omega}{3}\sqrt{4a^2+4a^2} = \frac{2}{3}\sqrt{2}\,a\omega$$

$$\vec{v}_C = \begin{pmatrix} 2a \\ 2a \end{pmatrix} \frac{\omega}{3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{2}{3} a\omega$$

$(1)_5$ Richtung korrekt

$(1)_6$ Betrag korrekt

c)

$$v_D = v_C = \frac{2}{3}\sqrt{2}\, a\omega$$

$$v_D = \omega_{DE} \cdot r_{CD} = \omega_{DE}\sqrt{2}\, a \Rightarrow \omega_{DE} = \frac{v_D}{\sqrt{2}a} = \frac{2}{3}\omega$$

$$\underline{v_E} = \omega_{DE} \cdot r_{M_{DE}E} = \omega_{DE} \cdot 3a = \underline{2a\omega}$$

1 [7] korrekter Zwischenschritt

$$\vec{v}_E = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} 2a\omega$$

1 [8]

d)

$$v_D = \frac{2}{3}\sqrt{2}\, a\omega$$ 1 [9]

$$\vec{v}_D = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{2}{3} a\omega$$ 1

$$\omega_{DE} = \frac{v_D}{|\vec{r}|_{CD}} = \frac{\frac{2}{3}\sqrt{2}\, a\omega}{\sqrt{2}\, a}$$

$$\omega_{DE} = \frac{2}{3}\omega$$ 1 [11]

Aufgabe 2

a) Resultierende $\boldsymbol{R}$:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{F}+\boldsymbol{G}+\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} F + \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} G + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} H = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}G \\ -F \\ \frac{\sqrt{2}}{2}G + H \end{bmatrix}$$ 1 [1]

Moment der Kräfte $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}$ und $\boldsymbol{H}$ bezüglich O:

$$\boldsymbol{M}_{OF} = \boldsymbol{r}_{OF} \times \boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ \frac{c}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -F \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c}{2}F \\ 0 \\ -aF \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}_{OG} = \boldsymbol{r}_{OG} \times \boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ c \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}G \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}bG \\ \frac{\sqrt{2}}{2}cG \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}bG \end{bmatrix}$$ 1 [2]

$$\boldsymbol{M}_{OH} = \boldsymbol{r}_{OH} \times \boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resultierendes Moment $\boldsymbol{M}_O$ bezüglich O:

$$\boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{M}_{OF} + \boldsymbol{M}_{OG} + \boldsymbol{M}_{OH} = \begin{bmatrix} \frac{c}{2}F + \frac{\sqrt{2}}{2}bG \\ \frac{\sqrt{2}}{2}cG \\ -aF - \frac{\sqrt{2}}{2}bG \end{bmatrix}$$ 1 KR [3]

Die Dyname ist dann $\{\boldsymbol{R}, \boldsymbol{M}_O\}$. 1 KR [4]

b) *Variante 1:*

Resultierende $\boldsymbol{R}$ wie in a):

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{F}+\boldsymbol{G}+\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} F + \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} G + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} H = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}G \\ -F \\ \frac{\sqrt{2}}{2}G+H \end{bmatrix} \quad 1_5^{KR}$$

Moment der Kräfte $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}$ und $\boldsymbol{H}$ bezüglich S:

$$\boldsymbol{M}_{SF} = \boldsymbol{r}_{SF} \times \boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ -\frac{c}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -F \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{c}{2}F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}_{SG} = \boldsymbol{r}_{SG} \times \boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} -a \\ b \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}G \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}bG \\ \frac{\sqrt{2}}{2}aG \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}bG \end{bmatrix} \quad 1_6$$

$$\boldsymbol{M}_{SH} = \boldsymbol{r}_{SH} \times \boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} -a \\ 0 \\ -c \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ aH \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resultierendes Moment $\boldsymbol{M}_S$ bezüglich S:

$$\boldsymbol{M}_S = \boldsymbol{M}_{SF}+\boldsymbol{M}_{SG}+\boldsymbol{M}_{SH} = \begin{bmatrix} -\frac{c}{2}F+\frac{\sqrt{2}}{2}bG \\ \frac{\sqrt{2}}{2}aG+aH \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}bG \end{bmatrix} \quad 1_7$$

Variante 2:

Resultierende $\boldsymbol{R}$ wie in a):

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{F}+\boldsymbol{G}+\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} F + \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} G + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} H = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}G \\ -F \\ \frac{\sqrt{2}}{2}G+H \end{bmatrix} \quad 1_5^{KR}$$

Resultierendes Moment $\boldsymbol{M}_S$ bezüglich S:

$$\boldsymbol{M}_S = \boldsymbol{M}_O + \boldsymbol{r}_{SO} \times \boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \frac{c}{2}F+\frac{\sqrt{2}}{2}bG \\ \frac{\sqrt{2}}{2}cG \\ -aF-\frac{\sqrt{2}}{2}bG \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a \\ 0 \\ -c \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}G \\ -F \\ \frac{\sqrt{2}}{2}G+H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{c}{2}F+\frac{\sqrt{2}}{2}bG \\ \frac{\sqrt{2}}{2}aG+aH \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}bG \end{bmatrix} \quad 1_6 \quad 1_7$$

Die Dyname ist dann $\{\boldsymbol{R}, \boldsymbol{M}_S\}$.

c)

$$P = \vec{v}_0 \cdot \vec{R} + \vec{\omega} \cdot \vec{M}_0 \qquad (1)_8$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} * \\ * \\ \frac{\sqrt{2}}{2}G + H \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v/b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} * \\ * \\ -aF - \frac{\sqrt{2}}{2} bG \end{pmatrix}$$

$$P = v\frac{\sqrt{2}}{2}G + vH - \frac{v}{b}aF - \frac{\sqrt{2}}{2}vG$$

$$\underline{\underline{P = vH - \frac{v}{b}aF}} \qquad (1)_9$$

d)

$F = G = H, \quad a = b$

Bedingung für Einzelkraft: $\vec{M}_0 \cdot \vec{R} = 0$ $(1)_{10}$

$$\begin{pmatrix} \frac{c}{2}F + \frac{\sqrt{2}}{2}aF \\ \frac{\sqrt{2}}{2}cF \\ -aF - \frac{\sqrt{2}}{2}aF \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}F \\ -F \\ \frac{\sqrt{2}}{2}F + F \end{pmatrix} = 0 \qquad (1)_{11}$$

$$F^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{c}{2} + \frac{1}{2}a - \frac{\sqrt{2}}{2}c - \frac{a}{\sqrt{2}} - a - \frac{1}{2}a - \frac{1}{\sqrt{2}}a\right) = 0 \ \forall F \qquad (1)_{12}$$

$$c\left(\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = a\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 + 0{,}5 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$c\,\frac{-\sqrt{2}}{4} = a\left(\frac{2}{\sqrt{2}} + 1\right)$$

$$c = a\,\frac{4}{\sqrt{2}}\left(-1 - \frac{2}{\sqrt{2}}\right)$$

$$c = -2a\left(\sqrt{2} + 2\right) \qquad (1)_{13}$$

Diese mathematische Lösung verlangt nach einem Satelliten mit negativer Seitenlänge c...
Um Probleme in der Herstellung zu vermeiden (die Arbeiter in der Werkstatt können mit solchen Angaben nichts anfangen), sollten die Ingenieure die Positionierung der Antriebsaggregate ändern!