ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

IMES
Institut für
Mechanische Systeme

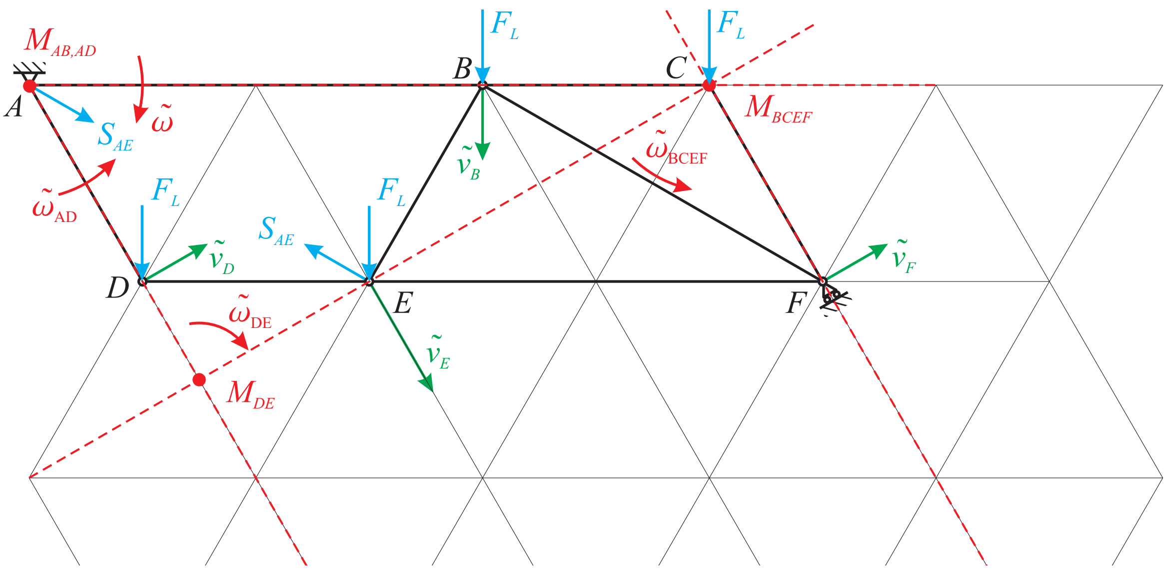
Technische Mechanik

Basisprüfung 23. Januar 2017, 08^{30} - 10^{30}

Dr. Stephan Kaufmann **Musterlösung** **Winter 2017**

Aufgabe 1 (21 Punkte)

a)



Die Momentanzentren M_{AB} und M_{AD} befinden sich in A, da das Tragwerkselement dort gelenkig gelagert ist. Führt man im Stab AB die Rotationsgeschwindigkeit $\tilde{\omega}_{AB} = \tilde{\omega}$ ein so ergibt sich die Geschwindigkeit:

$$\tilde{\boldsymbol{v}}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} a\tilde{\omega} \text{ bzw. } \tilde{v}_B = 2a\tilde{\omega}.$$

Das Momentanzentrum M_{BCEF} liegt im Schnittpunkt der Geraden BC (senkrecht zu $\tilde{\boldsymbol{v}}_B$) und CF (senkrecht zu $\tilde{\boldsymbol{v}}_F$). Mit dem Satz vom Momentanzentrum ergibt sich:

$$\tilde{\omega}_{BCEF} = 2\tilde{\omega}$$

$$\tilde{\boldsymbol{v}}_E = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ -3 \end{bmatrix} a\tilde{\omega} \text{ bzw. } \tilde{v}_E = 2\sqrt{3}a\tilde{\omega}.$$

Das Momentanzentrum M_{DE} liegt im Schnittpunkt der Geraden AD (senkrecht zu $\tilde{\boldsymbol{v}}_D$) und CE (senkrecht zu $\tilde{\boldsymbol{v}}_E$). Mit dem Satz vom Momentanzentrum ergibt sich:

$$\tilde{\omega}_{DE} = 4\tilde{\omega}$$

 Bitte wenden!

$$\tilde{\boldsymbol{v}}_D = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} a\tilde{\omega} \text{ bzw. } \tilde{v}_D = 2a\tilde{\omega}$$

$$\tilde{\omega}_{AD} = 2\tilde{\omega}$$

Prinzip der virtuellen Leistung:

$$\tilde{\mathcal{P}}_A = \boldsymbol{S}_{AE} \cdot \tilde{\boldsymbol{v}}_A = 0$$

$$\tilde{\mathcal{P}}_C = \boldsymbol{F}_L \cdot \tilde{\boldsymbol{v}}_C = 0$$

$$\tilde{\mathcal{P}}_B = \boldsymbol{F}_L \cdot \tilde{\boldsymbol{v}}_B = 2a\tilde{\omega}F_L$$

$$\tilde{\mathcal{P}}_D = \boldsymbol{F}_L \cdot \tilde{\boldsymbol{v}}_D = -a\tilde{\omega}F_L$$

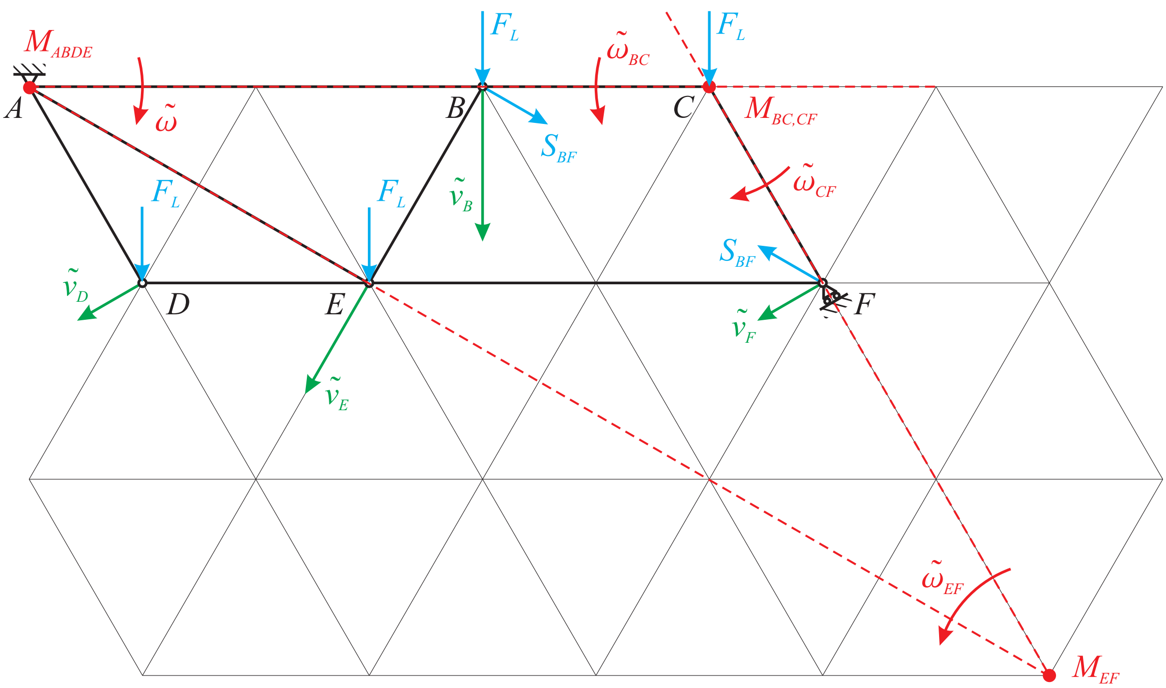
$$\tilde{\mathcal{P}}_E = \boldsymbol{S}_{AE} \cdot \tilde{\boldsymbol{v}}_E + \boldsymbol{F}_L \cdot \tilde{\boldsymbol{v}}_E = 3a\tilde{\omega}(F_L - S_{AE})$$

$$\tilde{\mathcal{P}}_{tot} = \tilde{\mathcal{P}}_A + \tilde{\mathcal{P}}_B + \tilde{\mathcal{P}}_C + \tilde{\mathcal{P}}_D + \tilde{\mathcal{P}}_E = a\tilde{\omega}(4F_L - 3S_{AE}) = 0$$

$$S_{AE} = \frac{4}{3}F_L$$

$S_{AE} > 0$: Der Stab wird somit auf Zug beansprucht.

b)



Das Momentanzentrum M_{ABDE} befindet sich in A, da das Tragwerkselement dort gelenkig gelagert ist. Führt man im Starrkörper $ABDE$ die Rotationsgeschwindigkeit $\tilde{\omega}_{ABDE} = \tilde{\omega}$ ein so ergeben sich die Geschwindigkeiten:

$$\tilde{\boldsymbol{v}}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} a\tilde{\omega} \text{ bzw. } \tilde{v}_B = 2a\tilde{\omega},$$

$$\tilde{\boldsymbol{v}}_D = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ -1 \end{bmatrix} \frac{a\tilde{\omega}}{2} \text{ bzw. } \tilde{v}_D = a\tilde{\omega}$$

$$\tilde{\boldsymbol{v}}_E = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ -3 \end{bmatrix} \frac{a\tilde{\omega}}{2} \text{ bzw. } \tilde{v}_E = \sqrt{3}a\tilde{\omega}.$$

Das Momentanzentrum M_{EF} liegt im Schnittpunkt der Geraden AE (senkrecht zu $\tilde{\boldsymbol{v}}_E$) und CF (senkrecht zu $\tilde{\boldsymbol{v}}_F$). Mit dem Satz vom Momentanzentrum ergibt sich:

$$\tilde{\omega}_{EF} = \frac{1}{2}\tilde{\omega},$$

$$\tilde{\boldsymbol{v}}_F = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ -1 \end{bmatrix} \frac{a\tilde{\omega}}{2} \text{ bzw. } \tilde{v}_F = a\tilde{\omega}.$$

Wendet man den Satz der projizierten Geschwindigkeiten auf den Stab BC an, so ergibt sich dass $\boldsymbol{v}_C$ nur eine vertikale Komponente haben kann. Mit dieser Information findet man das Momentanzentrum M_{CF} im Schnittpunkt der Geraden BC (senkrecht zu $\tilde{\boldsymbol{v}}_C$) und CF (senkrecht zu $\tilde{\boldsymbol{v}}_F$). Damit hat man auch das Momentanzentrum M_{BC} vom Stab BC gefunden. Mit dem Satz vom Momentanzentrum ergibt sich:

$$\tilde{\omega}_{CF} = \tilde{\omega}$$

$$\tilde{\omega}_{BC} = 2\tilde{\omega}$$

Prinzip der virtuellen Leistung:

$$\tilde{\mathcal{P}}_C = \boldsymbol{F}_L \cdot \tilde{\boldsymbol{v}}_C = 0$$

$$\tilde{\mathcal{P}}_B = \boldsymbol{S}_{BF} \cdot \tilde{\boldsymbol{v}}_B + \boldsymbol{F}_L \cdot \tilde{\boldsymbol{v}}_B = a\tilde{\omega}(S_{BF} + 2F_L)$$

$$\tilde{\mathcal{P}}_D = \boldsymbol{F}_L \cdot \tilde{\boldsymbol{v}}_D = \frac{1}{2}a\tilde{\omega}F_L$$

$$\tilde{\mathcal{P}}_E = \boldsymbol{F}_L \cdot \tilde{\boldsymbol{v}}_E = \frac{3}{2}a\tilde{\omega}F_L$$

$$\tilde{\mathcal{P}}_F = \boldsymbol{S}_{BF} \cdot \tilde{\boldsymbol{v}}_F = \frac{1}{2}a\tilde{\omega}S_{BF}$$

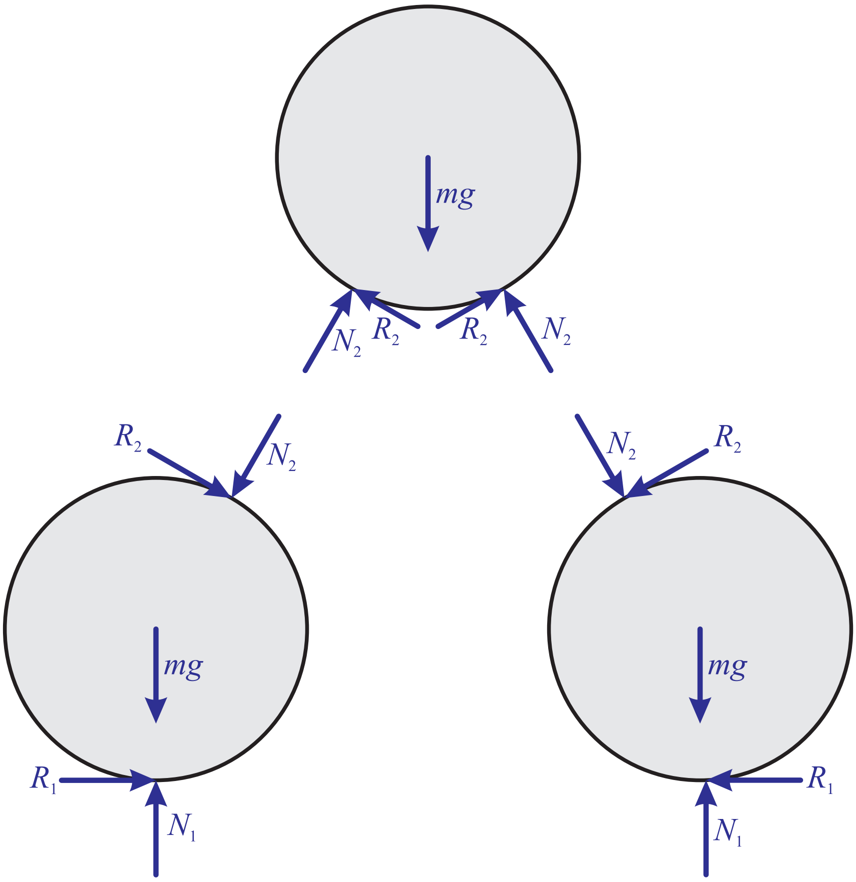
$$\tilde{\mathcal{P}}_{tot} = \tilde{\mathcal{P}}_B + \tilde{\mathcal{P}}_C + \tilde{\mathcal{P}}_D + \tilde{\mathcal{P}}_E + \tilde{\mathcal{P}}_F = a\tilde{\omega}\left(4F_L + \frac{3}{2}S_{BF}\right) = 0$$

$$S_{BF} = -\frac{8}{3}F_L$$

$S_{BF} < 0$: Der Stab wird somit auf Druck beansprucht.

***Aufgabe 2** (15 Punkte)*

a) Aus Symmetriegründen:



Unterer Zylinder:

KB(x): $R_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}R_2 - \frac{1}{2}N_2 = 0$ *(1)*

KB(y): $N_1 - \frac{1}{2}R_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}N_2 - mg = 0$ *(2)*

MB(C): $R_1 = R_2$ *(3)*

Oberer Zylinder:

KB(y): $2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}N_2 + 2 \cdot \frac{1}{2}R_2 - mg = 0$ *(4)*

2(2) + (4):* $N_1 = \frac{3}{2}mg$ *(5)*

aus (1), (2), (3): $R_1 = R_2 = \frac{2-\sqrt{3}}{2}mg$ *(6)*

aus (1) und (6): $N_2 = \frac{1}{2}mg$ *(7)*

b) Ruhe für $|R_1| \leq \mu_0 N_1$ **und** $|R_2| \leq \mu_0 N_2$.

Da $R_1 = R_2$ und $N_2 < N_1$ gilt:

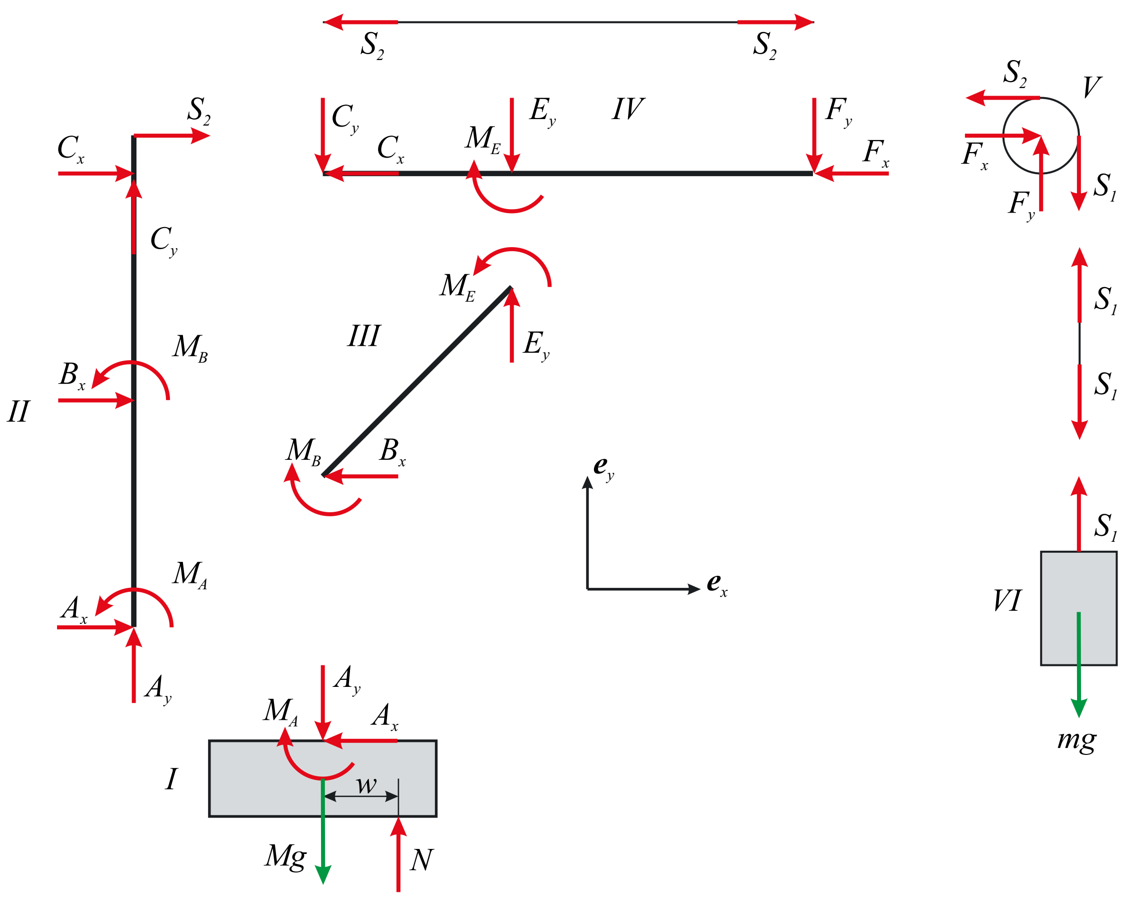
$$\frac{2-\sqrt{3}}{2} mg \leq \mu_0 \frac{1}{2} mg \quad \Rightarrow \quad \mu_0 \geq 2-\sqrt{3}$$

***Aufgabe 3** (21 Punkte)*

a) Nein, das System ist nicht statisch unbestimmt gelagert, denn es gibt nicht mehr unbekannte Lagerreaktionen wie linear unabhängige Gleichungen.

Ja, das System ist kineamtisch unbestimmt, da es sich entlang des Fundaments verschieben lässt.

b) Freischnittskizze:



c) Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen:

Seilkräfte:	$S_1 = S_2 = S$, siehe System V	
System I:		
KB(x):	$-A_x = 0$	(1)
KB(y):	$-A_y - Mg + N = 0$	(2)
MB(A,z):	$-M_A + wN = 0$	(3)

System II:

KB(x):	$A_x + B_x + C_x + S = 0$	(4)
KB(y):	$A_y + C_y = 0$	(5)
MB(A,z)	$M_A + M_B - aB_x - (a+b)C_x - (a+b+r)S = 0$	(6)

System III:

KB(x):	$-B_x = 0$	(7)
KB(y):	$E_y = 0$	(8)
MB(A,z):	$-M_B + M_E = 0$	(9)

System IV:

KB(x):	$-C_x - F_x = 0$	(10)
KB(y):	$-C_y - E_y - F_y = 0$	(11)
MB(C,z):	$-M_E - dE_y - (d+e)F_y = 0$	(12)

System V:

KB(x):	$F_x - S = 0$	(13)
KB(y):	$F_y - S = 0$	(14)
MB(A,z):	$rS_2 - rS_1 = 0$	(15)

System VI:

KB(y):	$S - mg = 0$	(16)

d) Auflösen des linearen Gleichungssystems:

(16):	$S = mg$
(14):	$F_x = mg$
(13):	$F_y = mg$
(7):	$B_x = 0$
(8):	$E_y = 0$
(10):	$C_x = -mg$
(11):	$C_y = -mg$
(12):	$M_E = -(d+e)mg$
(9):	$M_B = -(d+e)mg$
(1):	$A_x = 0$

(5): $A_y = mg$

(2): $N = g(m+M)$

(4): $M_A = (d+e+r)mg$

(5): $w = \dfrac{(d+e+r)m}{(m+M)}$

d)

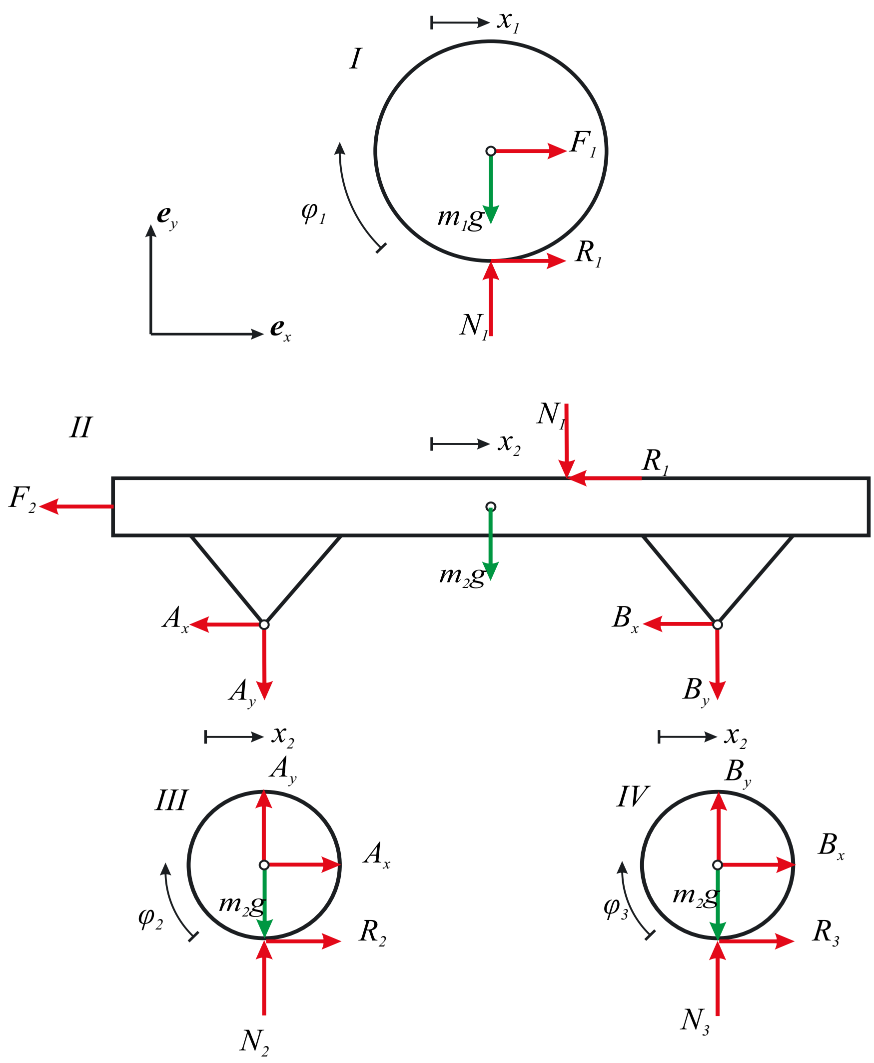
Bedingung für kein Kippen: $|w| \leq l$

$$m \leq \frac{Ml}{(d+e+r-l)}$$

Aufgabe 4 (21 Punkte)

a) Das System hat den Freiheitsgrad 2. Das heisst die Lage des Systems kann mit zwei Koordinaten (z.B. x_1 und x_2) eindeutig beschrieben werden.

b) Freischnittskizze:



c) Bewegungsgleichungen

Zylinder:

$$m_1\ddot{x}_1 = F_1 + R_1 \tag{1}$$

$$I_C\ddot{\varphi}_1 = -r_1R_1 \tag{2}$$

Fahrgestell:

$$m_2\ddot{x}_2 = -F_2 - R_1 - A_x - B_x \tag{3}$$

Rad 1:

$$m_2\ddot{x}_2 = R_2 + A_x \qquad (4)$$
$$I_A\ddot{\varphi}_2 = -r_2R_2 \qquad (5)$$

Rad 2:

$$m_2\ddot{x}_2 = R_3 + B_x \qquad (6)$$
$$I_B\ddot{\varphi}_3 = -r_2R_3 \qquad (7)$$

d) Kinematische Relationen:

$$\dot{x}_2 = r_2\dot{\varphi}_2 \qquad (8)$$
$$\dot{x}_2 = r_2\dot{\varphi}_3 \qquad (9)$$
$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 + r_1\dot{\varphi}_1 \qquad (10)$$

e) Kraftgesetze der Federn:

$$F_1 = -c_1x_1 \qquad (11)$$
$$F_2 = c_2x_2 \qquad (12)$$

f) Zusammenfassen der Differentialgleichungen:
Lagerreaktionen in x-Richtung: ($I_A = I_B$)

(4) mit (5) und (8): $$A_x = \ddot{x}_2\left(m_2 + \frac{I_A}{r_2^2}\right) \qquad (13)$$

(6) mit (7) und (9): $$B_x = \ddot{x}_2\left(m_2 + \frac{I_A}{r_2^2}\right) \qquad (14)$$

(2), (10) und (11) in (1): $$\ddot{x}_1\left(m_1 + \frac{I_C}{r_1^2}\right) - \ddot{x}_2\frac{I_C}{r_1^2} + c_1x_1 = 0 \qquad (20)$$

(12), (2), (10), (13) und (14) in (3): $$\ddot{x}_2\left(3m_2 + \frac{I_C}{r_1^2} + \frac{2I_A}{r_2^2}\right) - \ddot{x}_1\frac{I_C}{r_1^2} + c_2x_2 = 0 \qquad (21)$$