Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

IMES
INSTITUT FÜR
MECHANISCHE SYSTEME

Technische Mechanik

Klausur I

23. Oktober 2012, 08^{15} - 09^{15}

Dr. Stephan Kaufmann — **Musterlösung** — **Herbstsemester 2012**

Aufgabe 1 *(11 Punkte)*

a) Vektorielle Darstellung der Kräfte:

$$\boldsymbol{F}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}F \qquad \boldsymbol{F}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}F \qquad \boldsymbol{F}_3 = \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}F = \begin{bmatrix}0\\2\\-2\end{bmatrix}F \qquad \boldsymbol{F}_4 = \begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}F = \begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}F \quad 1_1$$

Dyname in A:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 + \boldsymbol{F}_4 = \begin{bmatrix}0\\2\\-1\end{bmatrix}F \quad 1_2^{\text{k.r.}}$$

$$\boldsymbol{M}_A = \boldsymbol{r}_{AA} \times \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{r}_{AC} \times \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{r}_{AD} \times \boldsymbol{F}_3 + \boldsymbol{r}_{AF} \times \boldsymbol{F}_4$$

$$\boldsymbol{M}_A = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}F\\0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-2a\\b\\0\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}0\\F\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-2a\\b\\-b\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}0\\2F\\-2F\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\a+b\\-(a+b)\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}-F\\-F\\F\end{bmatrix} \quad 1_3^{\text{k.r.}}$$

$$\boldsymbol{M}_A = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\-2aF\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\-4aF\\-4aF\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\aF+bF\\aF+bF\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-3a+b\\-5a+b\end{bmatrix}F \quad 1_4$$

b) Dyname in 0:

$\boldsymbol{R}$ ist invariant. Transformationsregel: $\boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{M}_A + \boldsymbol{r}_{OA} \times \boldsymbol{R}$

$$\boldsymbol{M}_O = \begin{bmatrix}0\\-3a+b\\-5a+b\end{bmatrix}F + \begin{bmatrix}2a\\0\\a+b\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}0\\2F\\-F\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2aF-2bF\\-3aF+bF+2aF\\-5aF+bF+4aF\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2a-2b\\-a+b\\-a+b\end{bmatrix}F \quad 1_6$$

$1_5^{\text{k.r.}}$

Bitte wenden!

c) Damit die Kräftegruppe $\{\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3, \boldsymbol{F}_4\}$ zu einer Einzelkraft statisch äquivalent sind, muss die 2. Invariante I_2 (bei nichttrivialer Resultierenden $\boldsymbol{R}$) verschwinden.

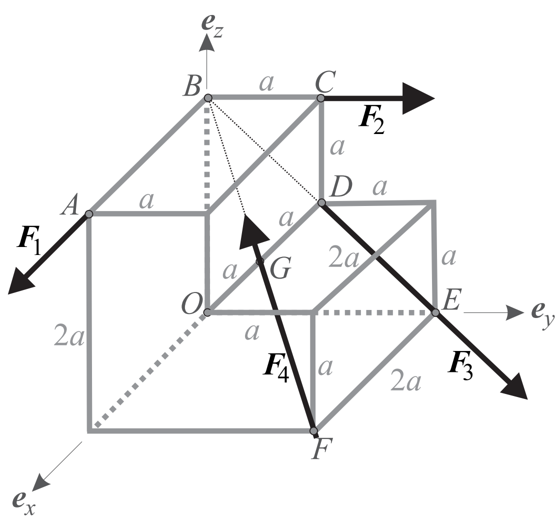
$$I_2 = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{M}_A = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{M}_O = 0\,, \quad \boldsymbol{R} \neq 0 \qquad 1^{\text{Bedingung}}_{7}$$

$$\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{M}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 2F \\ -F \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -3a+b \\ -5a+b \end{bmatrix} F \; 1^{\text{k.r.}}_{8} = F^2(a-b) = 0 \quad \Rightarrow \quad a = b\,. \; 1_{9}$$

Alternativ:

$$\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{M}_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 2F \\ -F \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2a-2b \\ -a+b \\ -a+b \end{bmatrix} F \; 1^{\text{k.r.}}_{8} = F^2(-a+b) = 0 \quad \Rightarrow \quad a = b\,. \; 1_{9}$$

d) Ja. Wenn $a = b$ ist, schneiden sich die Wirkungslinien aller Kräfte im Punkt B. 1_{10}



e) Der Schnittpunkt aller Wirkungslinien (Punkt B) hat eine Dyname mit verschwindedem resultierenden Moment. Der Punkt B ist deshalb ein Punkt der Wirkungslinie der statisch äquivalenten Einzelkraft.

1_{11}

Punkteschlüssel Aufgabe 1

1 $_1$ Kraftvektoren alle korrekt.

1 $^{\text{k.r.}}_2$ Resultierende, konsequent richtig zur Kraftvektoren.

1 $^{\text{k.r.}}_3$ Formel zur Berechnung des resultierenden Moments bzw. implizit verwendet. Konsequent richtig zur Kraftvektoren aber nicht zur Ortsvektoren.

1 $_4$ Resultierendes Moment $\boldsymbol{M}_A$ korrekt.

1 $^{\text{k.r.}}_5$ Invarianz der Resultierenden und Trafo-Formel korrekt angewendet. Die resultierenden Kraft und Moment konsequent richtig zur Teilaufgabe (a).

1 $_6$ Resultierendes Moment $\boldsymbol{M}_O$ korrekt.

1 $_7$ Bedingung für statische Äquivalenz mit Einzelkraft. $I_2 = 0$

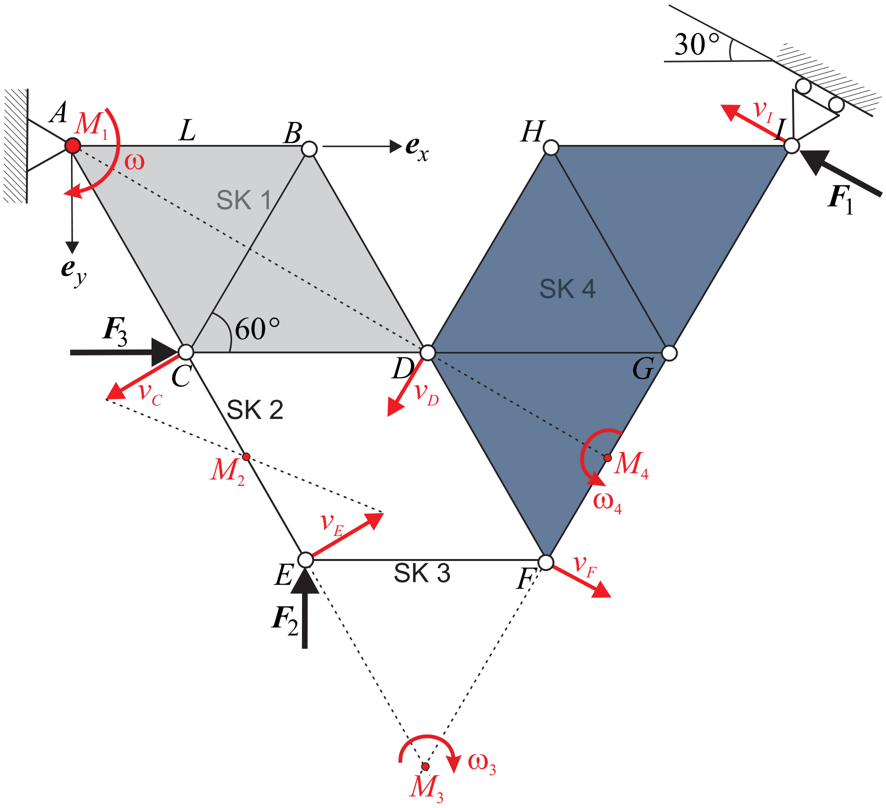
1 $^{\text{k.r.}}_8$ Konsequent richtige Anwendung der Formel für $\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{M}_i = 0$.

1 $_9$ Beziehung zwischen a und b richtig.

1 $_{10}$ Antwort zur Frage (d).

1 $_{11}$ Antwort zur Frage (e).

Aufgabe 2 *(12 Punkte)*



a) Das System besteht aus vier Starrkörper.

SK1: Körper ACDB

SK2: Stab CE

SK3: Stab EF

SK4: Körper DFGIH 1_1

Momentanzentren: M_1 in A, M_2 auf dem Stab CD, $M_3 \perp (\boldsymbol{v}_E, \boldsymbol{v}_F)$ und $M_4 \perp (\boldsymbol{v}_D, \boldsymbol{v}_I)$.

1_2 1_3 1_4 1_5

b) *Geschwindigkeit* $\boldsymbol{v}_c$*:*

$$v_C = \omega L \qquad \text{bzw.} \qquad \boldsymbol{v}_C = \frac{\omega L}{2}\begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} \quad 1_6$$

Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_I$*:*

$$v_D = \sqrt{3}\omega L = \frac{\sqrt{3}}{2}\omega_4 L \qquad \Rightarrow \qquad \omega_4 = 2\omega \quad 1_7$$

$$v_I = \frac{3}{2}\omega_4 L = 3\omega L \qquad \text{bzw.} \qquad \boldsymbol{v}_I = \frac{3}{2}\omega L\begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ -1 \end{bmatrix} \quad 1_8$$

Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_E$*:*

$$v_F = \frac{L}{2}\omega_4 = \omega L$$

Alternativ (I): SdpG bezüglich EF und EC.

$$\boldsymbol{v}_E \cdot \boldsymbol{EF} = \boldsymbol{v}_F \cdot \boldsymbol{EF} \qquad v_{Ex} = v_F \cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}\omega L \quad 1_{9,\mathrm{I}}$$

$$\boldsymbol{v}_E \cdot \boldsymbol{CE} = \boldsymbol{v}_C \cdot \boldsymbol{CE} \qquad \frac{1}{2}v_{Ex} + \frac{\sqrt{3}}{2}v_{Ey} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{v}_E = \frac{\omega L}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{bmatrix} \quad 1_{10}$$

Alternativ (II): über das Momentanzentrum M_3.

$$v_F = \omega_3 L = \frac{L}{2}\omega_4 \qquad \Rightarrow \qquad \omega_3 = \omega \quad 1_{9,\mathrm{II}}$$

$v_E = \omega_3 L = \omega L$ in gezeichnete Richtung 1_{10}

c) Für die Gesamtleistung werden alle Geschwindigkeiten in den Kraftangriffspunkten benötigt. Die Gesamtleistung ist dann die Summe der Einzelleistungen:

$$\wp = \boldsymbol{F}_1 \cdot \boldsymbol{v}_I + \boldsymbol{F}_2 \cdot \boldsymbol{v}_E + \boldsymbol{F}_3 \cdot \boldsymbol{v}_C$$

$$\wp = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ -1 \end{bmatrix} P \cdot \frac{3}{2}\omega L \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -P \end{bmatrix} \cdot \frac{\omega L}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sqrt{3}P \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{\omega L}{2}\begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} \quad 1^{\text{k.r.}}_{11}$$

$$\wp = P \cdot 3\omega L + P \cdot \frac{\omega L}{2} - \sqrt{3}P \cdot \frac{\omega L}{2}\sqrt{3}$$

$$\wp = 2P\omega L \quad 1_{12}$$

Punkteschlüssel Aufgabe 2

$①_{1}$ Identifizierung alle Starrkörpern

$①_{2\text{-}5}$ Momentanzentren M_1, M_2, M_3 und M_4

$①_{6}$ Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_C$ oder Schnelligkeit v_C mir korrekter Orientierung in Skizze.

$①_{7}$ Rotationsschnelligkeit ω_4 . Rotationschnelligkeit mit korrekter Orientierung in Skizze.

$①_{8}$ Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_I$ oder Schnelligkeit v_I mir korrekter Orientierung in Skizze.

$①_{9,I}$ Anwendung SdpG bezüglich EF und EC. Formel oder implizit verwendet.

$①_{9,II}$ Berechnung über das Momentanzentrum M_3. Punkt für $\omega_3 = 2\omega$.

$①_{10}$ Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_E$ oder Schnelligkeit v_E mir korrekter Orientierung in Skizze.

$①^{k.r.}_{11}$ Gesamtleistung als Summe der Einzelleistungen, <u>konsequent richtige</u> Anwendung der Formel bzgl. der berechneten Geschwindigkeiten.

$①_{12}$ Richtige Gesamtleistung.