ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

IMES
Institut für Mechanische Systeme

Technische Mechanik

Klausur I — 24. Oktober 2017, 8^{15} - 9^{15}

Dr. Stephan Kaufmann — **Musterlösung** — **Herbstsemester 2017**

Wichtige Formeln

Starrkörperformel: $\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{AB}$.

Aufgabe 1 (12 Punkte)

a) Die Kinemate von O ergibt sich aus der Zeichnung: $\boldsymbol{v}_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 1^{AR}_{1}, und mit $\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{r}_{OA}$

folgt $\boldsymbol{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-v_A}{R_C} \end{bmatrix}$ 1^{AR}_{2}. Die Kinemate in B sind $\boldsymbol{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-v_A}{R_C} \end{bmatrix}$ und $\boldsymbol{v}_B = \begin{bmatrix} -v_A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. 1^{AR}_{3}

b) Die Geschwindigkeit von C ergibt sich aus $\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{r}_{OC}$ zu $\boldsymbol{v}_C = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-v_A}{R_C} R_B \\ 0 \end{bmatrix}$. 1^{AR}_{4}

c) Die Geschwindigkeit von D errechnet man wie in b) $\boldsymbol{v}_D = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{v_A}{R_C} R_B \\ 0 \end{bmatrix}$. 1^{AR}_{5}

d) $\boldsymbol{r}_{CD} = \begin{bmatrix} -2R_B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $\boldsymbol{v}_D = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{r}_{CD} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-v_A}{R_C} R_B \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2R_B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{v_A}{R_C} R_B \\ 0 \end{bmatrix}$. 1^{KR}_{6}

Daraus folgt $\omega_y = 0$, $\omega_z = \frac{-v_A}{R_C}$. 1^{AR}_{7}

e) Aus $\boldsymbol{v}_D = \boldsymbol{v}_E + \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{r}_{ED} = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_x \\ 0 \\ \frac{-v_A}{R_C} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -R_B \\ R_A \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{v_A}{R_C} R_B \\ 0 \end{bmatrix}$ 1^{KR}_{8}

folgt $E_x = \frac{-v_A}{R_C} R_A$, $E_y = 0$, $\omega_x = \frac{-E_z}{R_A}$. 1^{AR}_{10} 1^{AR}_{9}

f) $\boldsymbol{v}_O \cdot \boldsymbol{\omega}_1 = 0$ also Rotation. 1^{AR}_{11}

g) $\boldsymbol{v}_D \cdot \boldsymbol{\omega}_2 = 0$ also Rotation. 1 AR 12

Punkteschlüssel

Pt		Bedingung
1	*AR*	$\boldsymbol{v}_O$
2	*AR*	$\boldsymbol{\omega}_1$
3	*AR*	$\boldsymbol{v}_B$
4	*AR*	$\boldsymbol{v}_C$
5	*AR*	$\boldsymbol{v}_D$
6	*KR*	Starrkörperformel konsequent richtig benutzt
7	*AR*	ω_y, ω_z bestimmt, -1 falls eine Geschwindigkeit falsch ist
8	*KR*	Starrkörperformel konsequent richtig benutzt
9	*AR*	E_x, E_y, ω_x, siehe Pkt 10
10	*AR*	E_x, E_y, ω_x, -1 pro falschem Wert, zuerst Pkt 9, dann Pkt 10 (siehe Pkt 9)
11	*AR*	Reine Rotation
12	*AR*	Reine Rotation

AR: Absolut Richtig
KR: Konsequent Richtig

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

IMES
Institut für Mechanische Systeme

Technische Mechanik

Klausur I — 24. Oktober 2017, 8^{15} - 9^{15}

Dr. Stephan Kaufmann — **Musterlösung** — **Herbstsemester 2017**

Wichtige Formeln

Moment in O induziert von Kraft in A: $\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_A) = \boldsymbol{F}_A \times \boldsymbol{r}_{AO}$.

Transformationsregel für Momente: $\boldsymbol{M}_B = \boldsymbol{M}_A + \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{r}_{AB}$.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

1^{AR}_{1} 1^{AR}_{2}

a) $\boldsymbol{r}_{CF} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{bmatrix}, \boldsymbol{r}_{CS} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -1.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} l$

b) $\boldsymbol{M}_P(\boldsymbol{F}_{P1}, \boldsymbol{F}_{P2}) = \boldsymbol{F}_{P1} \times \boldsymbol{r}_{AX} + \boldsymbol{F}_{P2} \times \boldsymbol{r}_{EX}$ für alle X. Wähle X = A dann

$$\boldsymbol{M}_P(\boldsymbol{F}_{P1}, \boldsymbol{F}_{P2}) = 0 + \boldsymbol{F}_{P2} \times \boldsymbol{r}_{EA} = \begin{bmatrix} P_x \\ -P_y \\ P_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P_y \\ -P_x \\ 0 \end{bmatrix} l .$$ 1^{AR}_{3}

c) Summe der Kräfte $\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} -B \\ -F \\ -mg \end{bmatrix}$. 1^{AR}_{4}

$$\boldsymbol{M}_C(\boldsymbol{F}_B) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{M}_C(\boldsymbol{F}_F) = \begin{bmatrix} Fl \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{M}_C(\boldsymbol{F}_G) = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} mgl \ ,$$ 1^{AR}_{5} 1^{AR}_{6}

$$\boldsymbol{M}_C(\boldsymbol{F}_B) + \boldsymbol{M}_C(\boldsymbol{F}_F) + \boldsymbol{M}_C(\boldsymbol{F}_G) + \boldsymbol{M}_P = \begin{bmatrix} -P_y + 1.5mg + F \\ -P_x + 0.5mg \\ 0 \end{bmatrix} l = \boldsymbol{M}_C(\boldsymbol{F}_i) .$$

1^{KR}_{7} 1^{AR}_{8} 1^{AR}_{9}

d) $\boldsymbol{M}_B(\boldsymbol{F}_i) = \boldsymbol{M}_C + \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{r}_{CB} = \boldsymbol{M}_C(\boldsymbol{F}_i) + \begin{bmatrix} -B \\ -F \\ -mg \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P_y + F + 1.5mg \\ -P_x + 0.5mg - mg \\ F \end{bmatrix} l.$

1^{KR}_{10}

e)

$$\boldsymbol{M}_C(\boldsymbol{F}_i) \cdot \boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} -P + 3.5mg \\ -P + 0.5mg \\ 0 \end{bmatrix} l \cdot \begin{bmatrix} -2mg \\ -2mg \\ -mg \end{bmatrix} = (-2mg)(-P + 3.5mg)l + (-P + 0.5mg)(-2mg)l = 0$$

$P = 2mg$. 1^{AR}_{11}

Dann $\boldsymbol{M}_C(\boldsymbol{F}_i) \cdot \boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} -2mg + 3.5mg \\ -2mg + 0.5mg \\ 0 \end{bmatrix} l \cdot \begin{bmatrix} -2mg \\ -2mg \\ -mg \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5mg \\ -1.5mg \\ 0 \end{bmatrix} l \cdot \begin{bmatrix} -2mg \\ -2mg \\ -mg \end{bmatrix} = 0$. 1^{KR}_{12}

Alternativer Lösungsweg:

Da in der Aufgabenstellung die Schwerpunktskoordinaten falsch aufgestellt waren, erlauben wir auch $S = 0.5l(1, 3, 1)$. Bei gleichem Puntkeschema.

Aufgabe 2 Alternative *(12 Punkte)*

a) $\boldsymbol{r}_{CF} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{bmatrix}, \boldsymbol{r}_{CS} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ -1.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} l$

b) $\boldsymbol{M}_P(\boldsymbol{F}_{P1}, \boldsymbol{F}_{P2}) = \boldsymbol{F}_{P1} \times \boldsymbol{r}_{AX} + \boldsymbol{F}_{P2} \times \boldsymbol{r}_{EX}$ für alle X. Wähle X = A dann

$$\boldsymbol{M}_P(\boldsymbol{F}_{P1}, \boldsymbol{F}_{P2}) = 0 + \boldsymbol{F}_{P2} \times \boldsymbol{r}_{EA} = \begin{bmatrix} P_x \\ -P_y \\ P_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P_y \\ -P_x \\ 0 \end{bmatrix} l.$$

c) Summe der Kräfte $\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} -B \\ -F \\ -mg \end{bmatrix}$.

$$\boldsymbol{M}_C(\boldsymbol{F}_B) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{M}_C(\boldsymbol{F}_F) = \begin{bmatrix} Fl \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{M}_C(\boldsymbol{F}_G) = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1.5 \\ 0 \end{bmatrix} mgl,$$

$$\boldsymbol{M}_C(\boldsymbol{F}_B) + \boldsymbol{M}_C(\boldsymbol{F}_F) + \boldsymbol{M}_C(\boldsymbol{F}_G) + \boldsymbol{M}_P = \begin{bmatrix} -P_y + 1.5mg + F \\ -P_x + 1.5mg \\ 0 \end{bmatrix} l = \boldsymbol{M}_C(\boldsymbol{F}_i).$$

d) $$\boldsymbol{M}_B(\boldsymbol{F}_i) = \boldsymbol{M}_C + \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{r}_{CB} = \boldsymbol{M}_C(\boldsymbol{F}_i) + \begin{bmatrix} -B \\ -F \\ -mg \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P_y + F + 1.5mg \\ -P_x + 1.5mg - mg \\ F \end{bmatrix} l.$$

e) $$\boldsymbol{M}_C(\boldsymbol{F}_i) \cdot \boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} -P + 3.5mg \\ -P + 1.5mg \\ 0 \end{bmatrix} l \cdot \begin{bmatrix} -2mg \\ -2mg \\ -mg \end{bmatrix} = (-2mg)(-P + 3.5mg)l + (-P + 1.5mg)(-2mg)l = 0$$

$$P = \frac{5}{2}mg.$$

Dann $$\boldsymbol{M}_C(\boldsymbol{F}_i) \cdot \boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} -2.5mg + 3.5mg \\ -2.5mg + 1.5mg \\ 0 \end{bmatrix} l \cdot \begin{bmatrix} -2mg \\ -2mg \\ -mg \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1mg \\ -1mg \\ 0 \end{bmatrix} l \cdot \begin{bmatrix} -2mg \\ -2mg \\ -mg \end{bmatrix} = 0.$$

Punkteschlüssel

Pt		Bedingung
1	*AR*	$\boldsymbol{r}_{CF}$
2	*AR*	$\boldsymbol{r}_{CS}$
3	*AR*	$\boldsymbol{M}_P$
4	*AR*	$\boldsymbol{R}$
5	*AR*	$\boldsymbol{M}_C(\boldsymbol{F}_B) + \boldsymbol{M}_C(\boldsymbol{F}_F) + \boldsymbol{M}_C(\boldsymbol{F}_G)$ Siehe 6
6	*KR*	$\boldsymbol{M}_C(\boldsymbol{F}_B) + \boldsymbol{M}_C(\boldsymbol{F}_F) + \boldsymbol{M}_C(\boldsymbol{F}_G)$, 1Pkt Abzug pro Fehler, zuerst 5 dann 6.
7	*KR*	Wenn transformations Formel benutzt dann KR auf Formel. Sonst KR auf dem Aufstellen der Momente.
8	*AR*	$\boldsymbol{M}_B(\boldsymbol{F}_i)$
9	*AR*	$\boldsymbol{M}_B(\boldsymbol{F}_i)$, -1 pro falscher Komponente, zuerst Pkt 8 dann 9.
10	*KR*	Konsequent richtiges aufstellen der 2ten Invariante und gleich 0 gesetzt.
11	*AR*	Absolut richtiges P
12	*KR*	Konsequent richtig zurück eingesetzt und erkannt, dass es 0 wird.

AR: Absolut Richtig
KR: Konsequent Richtig