Disclaimer: Diese Zusammenfassung wurde im Rahmen der "Elektromagnetische Felder und Wellen" - Vorlesung von Prof. Dr. Lukas Novotny im FS22 geschrieben.
Als Basis dienten die Zusammenfassungen von Teodora Rajkovic und Nicolas Schmid sowie die Vorlesungsunterlagen.
Es besteht keine Garantie für Vollständigkeit & Korrektheit dieses Dokuments, jedoch bin ich froh über Fehler informiert zu werden oder bei Fragen zu helfen: ldewindt@ethz.ch

Zürich, der 07.12.2022 Lina De Windt

Elektromagnetische Felder & Wellen

VL: Prof. Dr. L. Novotny — Zusammenfassung — Lina De Windt

Wellen

Kreiswellenzahl: Vakuum: $k_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ Medium: $k = \frac{\omega}{c}\cdot n = k_0 \cdot n$

Relation k, ω, c, f: $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = ck = c\cdot\frac{2\pi}{\lambda}$ Vakuum: $n=1,\ \mu_r=1,\ \varepsilon=1$

Brechungsindex: $n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$

Lichtgeschwindigkeit: Vakuum: $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = \frac{\omega}{k}$ Medium: $c_n = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu_r}} = \frac{c}{n}$

Wellenimpedanz: $Z = \sqrt{\frac{\mu_0\mu_r}{\varepsilon_0\varepsilon}} = \frac{\omega\mu_0\mu_r}{k} = \frac{\omega\mu_0\mu_r}{k_0\cdot n}$ Vakuum: $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$

Ausbreitungsgeschwindigkeit: $v = \frac{c}{n} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu_r}} = c_n$

$\vec{E}$: elektrische Feldstärke
$\vec{D}$: elektrische Flussdichte
$\vec{B}$: magnetische Flussdichte
$\vec{H}$: magnetische Feldstärke

$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\Phi(\vec{r})$, $\nabla^2\Phi(\vec{r}) = 0$

$\vec{D}(\vec{r},t) = \varepsilon_0\varepsilon\vec{E}(\vec{r},t) + \vec{P}(\vec{r},t) = \varepsilon_0\varepsilon\vec{E}(\vec{r})$

$\vec{B}(\vec{r},t) = \mu_0\vec{H}(\vec{r},t) + \vec{M}(\vec{r},t) = \mu_0\mu\vec{H}(\vec{r},t)$

Statik

→ keine beschleunigten Ladungen: $\rho \neq 0$, $\partial_t\rho \neq 0$, $\partial_t^2\rho = 0$

E-Feld & Spannung: $V = \int_a^b \vec{E}\,d\vec{s}$; $E = \frac{V}{d}$

Coulomb-Kraft: $\vec{F}_e = q\vec{E} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^2}$

Lorenzkraft: $\vec{F}_m = q\cdot(\vec{v}\times\vec{B})$

Kraftübertragung: $\vec{F}(\vec{r},t) = q[\vec{E}(\vec{r},t) + \vec{v}(\vec{r},t)\times\vec{B}(\vec{r},t)]$

Dipolmoment: $\vec{p}(\vec{r}) = q\cdot\vec{d}(\vec{r})$, mit d von − nach +

Oberflächenladungsdichte: $\sigma(\vec{r}) = \int_{\partial A}\vec{E}\cdot d\vec{A} = \varepsilon\varepsilon_0|\vec{E}|$ if $\vec{E}\perp\vec{A}$

Ladungsdichte: $\rho(\vec{r}) = \sum_n q_n\delta(\vec{r}-\vec{r}_n)$

Stromdichte: $\vec{j}(\vec{r}) = \sum_n q_n r_n \delta(\vec{r}-\vec{r}_n)$ → $\vec{j}(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},t)\cdot\vec{v}(\vec{r},t)$

$\Rightarrow \vec{F} = \int_V [\rho(\vec{r},t)\vec{E}(\vec{r},t) + \vec{j}(\vec{r},t)\times\vec{B}(\vec{r},t)]\,dV$

Poisson-Gleichung: $\nabla\vec{E} = -\nabla^2\Phi = \rho/\varepsilon_0$, $\vec{E} = -\nabla\Phi$

Laplace-Gleichung: $\Delta F = \nabla^2 F = 0$

Monopol: E-Feld $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\cdot\frac{Q}{r^2}$, Potential $\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\cdot\frac{Q}{r}$

Dipol: Potential: $\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$ $\left(= \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}\ \begin{matrix}+q\\-q\end{matrix}\right)$

Leitfähigkeit: $\sigma = \frac{\vec{j}}{\vec{E}} = \frac{\text{Stromdichte}}{\text{el. Feldstärke}}$

Ohm'sches Gesetz: $\vec{j} = \sigma\cdot\vec{E}$

$\vec{B} = \frac{1}{c^2}(\vec{v}\times\vec{E})$

Induktionsgesetz (Spule):

Magnetischer Strom: $\Phi_A = \iint_A \vec{B}_i\cdot d\vec{A}$ → $\Phi = N\Phi_A$ N.. Windungszahl → $U = -\frac{\partial}{\partial t}\Phi$

Induzierte Spannung: $u(t) = \oint_C \vec{E}\cdot d\vec{s} = -N\frac{\partial}{\partial t}\Phi_A = -N\frac{\partial}{\partial t}\iint_A \vec{B}\cdot d\vec{A}$

Gruppengeschwindigkeit: $\frac{\partial\omega}{\partial k} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$ **Phasengeschwindigkeit:** $\frac{\omega}{k}$

Potentiale Basics (mehr 2 Seiten weiter):

4. MW: $\nabla\vec{B} = 0 \Rightarrow \exists\vec{A}$ s.d. $\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$

Leitfähigkeit: $\vec{j} = \sigma\vec{E}$

$\nabla\times\vec{H} = -i\omega\vec{D} + \vec{j}_0 = -i\omega\varepsilon_0(\varepsilon_r + i\varepsilon_I)\vec{E} + \vec{j}_0 = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E} + \overbrace{\omega\varepsilon_0\varepsilon_I}^{\sigma}\vec{E} + \vec{j}_0$

Da $\nabla\vec{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} = -\sigma\frac{\rho}{\varepsilon_0\varepsilon}$ für $\sigma\to\infty$, $\rho(t)\to 0$ fast.

↳ $\nabla\sigma\vec{E} = \sigma\frac{\rho}{\varepsilon_0\varepsilon}$ if $\sigma \gg \omega\varepsilon_0\varepsilon$, $\varepsilon = \varepsilon_I = \frac{i\sigma}{\omega\varepsilon_0}$ → $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\mu\cdot\frac{i\sigma}{\omega\varepsilon_0} = i\mu_0\mu\sigma\omega$ $\quad (\nabla^2 + i\omega\mu_0\mu\sigma)E = 0$, $(\nabla^2 + i\omega\mu_0\mu\sigma)j = 0$

$j(x) = j(x=0)e^{(i-1)\sqrt{\frac{\mu_0\mu\sigma\omega}{2}}x}$ Skindepth: $D_s = \sqrt{\frac{2}{\sigma\mu_0\mu\omega}}$ if $\sigma\to\infty$, $D_s = 0$

Vereinfachungen: (darf man eigentlich immer annehmen falls nichts steht)

Isotropisch: "gleich in allen Richtungen" → $1 + \chi_E = \varepsilon$ ist ein Skalar

Nicht dispersiv: "Polarisation ist gleich überall im Raum für alle Frequenzen"

Linear: $\hat{D}(k,\omega) = \varepsilon_0\varepsilon(k,\omega)\hat{E}(k,\omega) \Rightarrow D(r,t) = \varepsilon_0\iiint\varepsilon(r-r', t-t')E(r',t')\,dr'\,dt'$

Falls alle gelten, dann $\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon\vec{E}$, $\vec{B} = \mu_0\mu\vec{H}$, $\vec{j}_0 = \sigma\vec{E}$

$\Rightarrow \nabla\times\nabla\times E = \nabla\times\frac{-\partial}{\partial t}B = -\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\mu_0\mu H = -\mu_0\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(j_0 + \frac{\partial D}{\partial t}\right) = -\mu_0\mu\frac{\partial}{\partial t}j_0 + \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}E$

$\overset{j=\rho=0}{\Rightarrow} \left(\nabla^2 - \frac{\omega^2\varepsilon\mu}{c^2}\right)E = 0$

Pre-Maxwell (in Worten)

Gauss: Fluss von el. Feld durch geschlossene Oberfläche ∂V ist gleich totaler Ladung q innerhalb ∂V.

Faraday: El. Feld integriert entlang einer Schlaufe ∂A korrespondiert zu der Zeitveränderung von dem magn. Fluss durch die Schlaufe.

Ampère: Magn. Feld integriert über Schlaufe ∂A ist gleich dem Strom, der durch die Schlaufe fliesst.

4. Gesetz: Magnetischer Fluss durch geschlossene Schlaufe immer 0
→ keine magnetischen Monopole.

Pre-Maxwell:

Gauss: $\int_{\partial V}\vec{E}(\vec{r},t)\vec{n}\,dA = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V\rho(\vec{r},t)\,dV$

Faraday: $\oint_{\partial A}\vec{E}(\vec{r},t)\,ds = -\frac{d}{dt}\int_A\vec{B}(\vec{r},t)\vec{n}\,dA$

Ampère: $\oint_{\partial A}\vec{B}(\vec{r},t)\,ds = \mu_0\int_A\vec{j}(\vec{r},t)\vec{n}\,dA$

4. Gesetz: $\int_{\partial V}\vec{B}(\vec{r},t)\vec{n}\,dA = 0$

Kirchhoff'sche Gleichungen (ergibt sich aus Pre-Maxwell):

KCL: $\int_{\partial V}\vec{j}(\vec{r},t)\vec{n}\,dA = 0$ KVL: $\oint_{\partial A}\vec{E}(\vec{r},t)\,d\vec{s} = 0$

Maxwell Integralform:

Gauss: $\int_{\partial V}\vec{D}(\vec{r},t)\vec{n}\,dA = \int_V\rho_0(\vec{r},t)\,dV$

Faraday: $\oint_{\partial A}\vec{E}(\vec{r},t)\,d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_A\vec{B}(\vec{r},t)\vec{n}\,dA$

Ampère: $\oint_{\partial A}\vec{H}(\vec{r},t)\,d\vec{s} = \int_A\left[\vec{j}_0(\vec{r},t) + \frac{\partial}{\partial t}\vec{D}(\vec{r},t)\right]\vec{n}\,dA$

4. Gesetz: $\int_{\partial V}\vec{B}(\vec{r},t)\vec{n}\,dA = 0$

$\vec{D}(\vec{r},t) = \varepsilon_0\vec{E}(\vec{r},t) + \vec{P}(\vec{r},t)$
$\vec{B}(\vec{r},t) = \mu_0[\vec{H}(\vec{r},t) + \vec{M}(\vec{r},t)]$

$\nabla\cdot\vec{j} = -\frac{\partial}{\partial t}\rho$

Maxwell Differenzialform:

Gauss: $\nabla\vec{D}(\vec{r},t) = \rho_0(\vec{r},t)$

Faraday: $\nabla\times\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}(\vec{r},t)$

Ampère: $\nabla\times\vec{H}(\vec{r},t) = \vec{j}_0(\vec{r},t) + \frac{\partial}{\partial t}\vec{D}(\vec{r},t)$

4. Gesetz: $\nabla\vec{B}(\vec{r},t) = 0$

$\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon\vec{E}$
$\vec{B} = \mu_0\mu\vec{H}$
"Quellfrei": $\vec{j}_0 = 0$, $\rho_0 = 0$

Maxwell Spektralform

Gauss: $\nabla\vec{D}(\vec{r},\omega) = \rho_0(\vec{r},\omega)$

Faraday: $\nabla\times\vec{E}(\vec{r},\omega) = i\omega\vec{B}(\vec{r},\omega)$

Ampère: $\nabla\times\vec{H}(\vec{r},\omega) = \vec{j}_0(\vec{r},\omega) - i\omega\vec{D}(\vec{r},\omega)$

4. Gesetz: $\nabla\vec{B}(\vec{r},\omega) = 0$

$\vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon_0\varepsilon(\vec{r},\omega)\vec{E}(\vec{r})$
$\vec{B}(\vec{r}) = \mu_0\mu(\vec{r},\omega)\vec{H}(\vec{r})$

Maxwell für monochromatische Wellen

Monochromatische Welle ($\hat{=}$ zeitharmonische Welle): oszilliert mit einzelner Frequenz ω.

$\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\{\underline{\vec{E}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\}$

Gauss: $\nabla\underline{\vec{D}}(\vec{r}) = \rho_0(\vec{r})$

Faraday: $\nabla\times\underline{\vec{E}}(\vec{r}) = i\omega\underline{\vec{B}}(\vec{r})$

Ampère: $\nabla\times\underline{\vec{H}}(\vec{r}) = \underline{\vec{j}}_0(\vec{r}) - i\omega\underline{\vec{D}}(\vec{r})$

4. Gesetz: $\nabla\underline{\vec{B}}(\vec{r}) = 0$

Ebene Wellen (Untergruppe von monochromatischen Wellen)

$\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\{\vec{E}_0 e^{\pm i\vec{k}\vec{r}}e^{-i\omega t}\}$ +: positive Ausbreitung (mit $\vec{k}$) −: negative Ausbreitung (gegen $\vec{k}$) (Rechtssystem)

$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 e^{\pm i\vec{k}\vec{r}} = \vec{E}_0 e^{\pm i(k_x x + k_y y + k_z z)}$ $\quad \vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$

$\nabla\vec{E} = i\vec{k}\vec{E}$, $\nabla\times\vec{E} = i\vec{k}\times\vec{E}$

Wellenvektor $\vec{k}$:

$\vec{k}\cdot\vec{E}_0 = 0$, $k = |\vec{k}| = \frac{\omega}{c}\cdot n$

$\vec{k}\cdot\vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$

$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\cdot n^2$

$\vec{E}(\vec{r}) = Z(\vec{n}_k\times\vec{H}(\vec{r}))$, $\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{\omega\mu_0\mu}(\vec{k}\times\vec{E}_0) = \frac{1}{Z}(\vec{n}_k\times\vec{E})$

⚠ Fernfelder sind approximativ ebene Wellen.

Evaneszente Welle: $k^2 < k_x^2 + k_y^2$ → fällt exponentiell ab!

$k_z = \sqrt{k^2 - (k_x^2 + k_y^2)}$. Für $k^2 < k_x^2 + k_y^2$ wird $k_z \in \mathbb{C}$ → Die Welle fällt exponentiell in z-Richtung ab: $\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\{\vec{E}_0 e^{\pm i(k_x x + k_y y)}e^{-i\omega t}\}e^{\mp|k_z|z}$

Kontinuitätsgleichung:

$\int_{\partial V}\vec{j}(\vec{r},t)\vec{n}\,dA = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V\rho(\vec{r},t)\,dV \Leftrightarrow \nabla\vec{j}_0(\vec{r},t) + \frac{\partial}{\partial t}\rho_0(\vec{r},t) = 0$

Ladungsträgeränderung in einem Volumen generiert immer einen entsprechenden Strom durch die Berandung des Volumens.

Polarisierung, Magnetisierung:

$\rho = \rho_0 + \rho_{pol}$ mit ρ_0: primäre Ladungsdichte, ρ_{pol}: Ladungsdichte induziert durch Interaktion mit E-Feld

Polarisation $\vec{P}$: $\int_{\partial V}\vec{P}(\vec{r},t)\vec{n}\,dA = -\int_V\rho_{pol}(\vec{r},t)\,dV$

allgemein: $\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon\vec{E} + \vec{P}$, $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0\mu}\vec{B} - \vec{M}$

für lineare Medien: $\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon\vec{E}$, $\vec{B} = \mu_0\mu\vec{H}$

$\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E} = \alpha\vec{E}$, $\chi_e = \varepsilon_r - 1$, $\vec{M} = (\mu_r - 1)\vec{H}$, $\chi_{mag} = \mu_r - 1$

$\Rightarrow \hat{\vec{P}}(\vec{r},\omega) = \varepsilon_0\chi(\omega)\hat{\vec{E}}(\vec{r},\omega)$ im FRaum. $\underline{\vec{P}}(\vec{r}) = \varepsilon_0\chi\underline{\vec{E}}(\vec{r})$ für monochr. W.

Stromdichte:

Polarisationsstromdichte: $\vec{j}_{pol} = \frac{d}{dt}\vec{P}$

$\vec{j}_{mag}(\vec{r},t) = \nabla\times\vec{M}(\vec{r},t)$, $\vec{j}_{cond} = \sigma\vec{E}$, $\vec{j}(\vec{r},t) = \vec{j}_0 + \vec{j}_{cond} = \rho(\vec{r},t)\cdot\vec{v}$

$\Rightarrow \vec{j}_{tot} = \vec{j}(\vec{r},t) + \vec{j}_{pol}(\vec{r},t) + \vec{j}_{mag}(\vec{r},t)$

Wellengleichung:

Herleitung: $\nabla\times\nabla\times\vec{E} = \nabla\times\left(-\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\mu_0(\vec{H}+\vec{M}) = -\mu_0\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{H} + \nabla\times\vec{M}) =$

$= -\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{j}_0 + \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}) + j_{mag}\right) = -\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{j} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}$

analog für Ampère.

Generell: $\nabla\times\nabla\times\vec{E} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} = -\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left[\vec{j}_0 + \frac{\partial\vec{P}}{\partial t} + \nabla\times\vec{M}\right]$

$\nabla\times\nabla\times\vec{H} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{H} = \nabla\times\vec{j}_0 + \nabla\times\frac{\partial\vec{P}}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{M}$

Im quellfreien Raum ($\rho = j = 0$, z.B. Vakuum) → **homogene Wellengleichung:**

$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\vec{E} = 0$, $\nabla\cdot\vec{E} = 0$, $\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\vec{H} = 0$

⚠ Lösungen der homogenen Wellengleichung sind die ebenen Wellen.

Quellfreie Helmholtzgleichung ($\vec{k} = \vec{k}_0 n \perp \vec{E} \perp \vec{H}$)

$[\nabla^2 + k^2]\vec{E}(\vec{r}) = 0$, $[\nabla^2 + k^2]\vec{H}(\vec{r}) = 0$, $k = |\vec{k}| = n\cdot\frac{\omega}{c}$

D'Alembert:

$E(z=0,t) \xrightarrow{t\to t\pm z/c} E(z,t) = E(0, t - z/c)$
$E(z,t=0) \xrightarrow{z\to z\pm ct} E(z,t) = E(z-ct, 0)$
$E(z=L,t) \xrightarrow{t\to t\pm\frac{z-L}{c}} E\left(z, t\pm\frac{z-L}{c}\right)$

− : vorwärts laufende Welle
+ : rückwärts laufende Welle

Intensität: $[I] = W/m^2$ ("Leistung pro Fläche"), $P = \int I\,dA$, $P = \frac{dW}{dt}$

Intensität im freien Raum: $I(\vec{r}) = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\langle\vec{E}(\vec{r},t)\cdot\vec{E}(\vec{r},t)\rangle$

Intensität monochromatischer Wellen: $I(\vec{r}) = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}|\underline{\vec{E}}(\vec{r})|^2 = \frac{1}{2Z}(\underline{\vec{E}}(\vec{r})\cdot\underline{\vec{E}}^*(\vec{r}))$

Intensität evaneszenter Wellen: $I(\vec{r}) = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}|E_0|^2 e^{-2k_z z} = \frac{1}{2Z}|E_0|^2 e^{-2k_z z}$

Leistung: $\vec{P} = \int_{\partial V} I(\vec{r})\vec{n}\,dA \left(= \varepsilon_0\int_{-\infty}^{\infty}\chi(\omega)\cdot\hat{E}(\omega)\cdot e^{-i\omega t}\,d\omega\right)$

Überlagerung zweier Felder:

Intensität: $I(\vec{r}) = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\cdot(\langle\vec{E}_1\cdot\vec{E}_1\rangle + \langle\vec{E}_2\cdot\vec{E}_2\rangle + 2\langle\vec{E}_1\cdot\vec{E}_2\rangle) =$

$= I_1(\vec{r}) + I_2(\vec{r}) + \underbrace{2I_{12}(\vec{r})}_{\text{Interferenzterm}}$

Kohärenz / Inkohärenz:

Beide Ideen (Kohärenz & Inkohärenz) sind rein theoretisch. In der Praxis gibt es immer ein $\Delta\omega$, was eine kleine Kohärenz verursacht.

Maximale Kohärenz: Beide Felder sind monochromatisch, haben die gleiche Frequenz ω und haben eine konstante Phasendifferenz:

$\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\{[\vec{E}_1 e^{i\vec{k}_1\vec{r}} + \vec{E}_2 e^{i\vec{k}_2\vec{r}}]e^{-i\omega t}\}$

$\Rightarrow I(\vec{r}) = I_1(\vec{r}) + I_2(\vec{r}) + \frac{1}{Z}\mathrm{Re}\{\vec{E}_1\vec{E}_2^* e^{i(\vec{k}_1+\vec{k}_2)\vec{r}}\}$

Stärke der Intensität: $\eta = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$

Inkohärenz: Zwei verschiedene Frequenzen ω_1 und ω_2

$\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\{[\vec{E}_1 e^{i\vec{k}_1\vec{r}}e^{-i\omega_1 t} + \vec{E}_2 e^{i\vec{k}_2\vec{r}}e^{-i\omega_2 t}]\}$

$\Rightarrow I(\vec{r}) = \frac{1}{2Z}\langle\vec{E}(\vec{r},t)\cdot\vec{E}(\vec{r},t)\rangle = I_1 + I_2$ Es findet keine Interferenz statt!

Polarisation: (= "Richtung" vom Feld)

Lineare Polarisation: Kein Phasenversatz zw. s & p-Teil der Welle.

z.B.: linear in x-Richtung polarisiert: $\vec{E}(\vec{r},t) = E_0\cos(kz - \omega t)\vec{n}_x$

Zirkulare Polarisation: s & p gleiche Amplitude aber Phasenversatz von 90°

↳ **Linkszirkular:** Feld rotiert im Gegenuhrzeigersinn

↳ **Rechtszirkular:** Feld rotiert im Uhrzeigersinn

Amplitude: $E_{0,max}$ bei $t=0, z=0$. ⚠ Blickrichtung zur Quelle

	linkszirkular	rechtszirkular
+z-Richtung	$E_0\begin{pmatrix}1\\i\\0\end{pmatrix}e^{ikz}$	$E_0\begin{pmatrix}1\\-i\\0\end{pmatrix}e^{ikz}$
−z-Richtung	$E_0\begin{pmatrix}1\\-i\\0\end{pmatrix}e^{-ikz}$	$E_0\begin{pmatrix}1\\i\\0\end{pmatrix}e^{-ikz}$

Materialübergänge: Inhomogenitäten existieren nur an Grenzflächen!

Stetigkeitsbedingungen:

Normalkomponente von $\vec{D}$ & $\vec{B}$ stetig, Tangentialkomponente von $\vec{B}$ & $\vec{H}$ stetig.

$\vec{n}\cdot[\underline{\vec{B}}_i(\vec{r}) - \underline{\vec{B}}_j(\vec{r})] = 0$

$\vec{n}\cdot[\underline{\vec{D}}_i(\vec{r}) - \underline{\vec{D}}_j(\vec{r})] = \sigma(\vec{r})$ $\quad \sigma(\vec{r})$: Oberflächenladungsdichte

$\vec{n}\times[\underline{\vec{E}}_i(\vec{r}) - \underline{\vec{E}}_j(\vec{r})] = 0$ $\quad \vec{K}(\vec{r})$: Oberflächenstromdichte

$\vec{n}\times[\underline{\vec{H}}_i(\vec{r}) - \underline{\vec{H}}_j(\vec{r})] = \vec{K}(\vec{r})$

Feld: $\vec{Q} = [\underline{\vec{E}}, \underline{\vec{D}}, \underline{\vec{B}}, \underline{\vec{H}}]$ ist in $Q^{\parallel}$ und $Q^{\perp}$ aufteilbar. → $\vec{Q} = Q^{\parallel} + Q^{\perp}\vec{n}$

Falls $\sigma(\vec{r}) = \vec{K}(\vec{r}) = 0$: $B_i^{\perp} = B_j^{\perp}$, $D_i^{\perp} = D_j^{\perp}$, $E_i^{\parallel} = E_j^{\parallel}$, $H_i^{\parallel} = H_j^{\parallel}$

Reflexion & Brechung auf glatten Oberflächen:

$E_i(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\{\vec{E}_i e^{i\vec{k}_i\vec{r}}e^{-i\omega t}\}$

Reflexion: Einfallswinkel = Ausfallswinkel, $E_r = r\cdot E_i$, $E_t = t\cdot E_i$

E_i: Amplitude der einfallenden Welle
E_r: Amplitude der reflektierten Welle
E_t: Amplitude der transmittierten Welle

Transmission → Brechung

Snell: $\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ $\quad n = \frac{c_0}{v}$

$v_i = \frac{c_0}{n_i}$ weil $k_1^{\parallel} \overset{!}{=} k_2^{\parallel}$ $\quad \lambda = \frac{2\pi}{k}$

$k_1^{\parallel} = k_2^{\parallel} \rightarrow \underbrace{k_0 n_1}_{k_1}\sin(\theta_1) = \underbrace{k_0 n_2}_{k_2}\sin(\theta_2)$

$k_{2z} = k_2\sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2\sin^2\theta_1}$, $k_{1z} = k_1\cdot\cos\theta_1$

Polarisation: $E_1 = E_1^{(s)} + E_1^{(p)}$

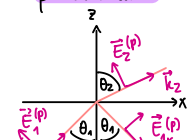
S-Polarisation: Feldvektor ⊥ zum Blatt (bzw. Einfallsebene)

p-Polarisation: Feldvektor ∥ zum Blatt

"Blatt" (bzw. Einfallsebene): Durch Flächennormale der Grenzfläche & Wellenvektor aufgespannte Fläche

S-Polarisation:

p-Polarisation:



Stetigkeitsbedingungen: $k^{2\parallel} = k_x^2 + k_y^2 = k_1^2\sin^2(\theta_1)$

$\Rightarrow k_{1,x} = k_{1r,x} = k_{2,x}$ $\quad k_{1,y} = k_{1r,y} = k_{2,y}$ $\quad k_{1,z} = -k_{1r,z}$

Fresnelkoeffizienten: können komplexwertig sein!

s-Polarisation: (bzw. s-Polarisierter Anteil der Welle)

$$\vec E_1 = \begin{bmatrix}0\\E_1^{(s)}\\0\end{bmatrix} \to \vec H_1 = \frac{1}{Z_1}\begin{bmatrix}-(k_{z1}/k_1)E_1^{(s)}\\0\\(k_x/k_1)E_1^{(s)}\end{bmatrix} \qquad \vec H = \frac{1}{Z_1 k_1}\vec k\times\vec E_1$$

$$\vec E_{1r} = \begin{bmatrix}0\\r^{(s)}E_1^{(s)}\\0\end{bmatrix} \to \vec H_{1r} = \frac{1}{Z_1}\begin{bmatrix}-(k_{z1}/k_1)E_{1r}^{(s)}\\0\\(k_x/k_1)E_{1r}^{(s)}\end{bmatrix}$$

@ $z=0$: $E_1 + E_{1r} = E_2$ $\to \frac{k_{z1}}{Z_1 k_1}(E_{1r}-E_1) = \frac{-k_{z2}}{Z_2 k_2}E_2$

$$\vec E_2 = \begin{bmatrix}0\\E_2^{(s)}\\0\end{bmatrix} \to \vec H_2 = \frac{1}{Z_2}\begin{bmatrix}-(k_{z2}/k_2)E_2^{(s)}\\0\\(k_x/k_2)E_2^{(s)}\end{bmatrix}$$

$$t^s = 1 + r^s$$

$$r^s(k_x,k_y) = \frac{\mu_2 k_{z1} - \mu_1 k_{z2}}{\mu_2 k_{z1} + \mu_1 k_{z2}} = \frac{E_r^{(s)}}{E_1^{(s)}}, \quad t^s(k_x,k_y) = \frac{2\mu_2 k_{z1}}{\mu_2 k_{z1} + \mu_1 k_{z2}} = \frac{E_2^{(s)}}{E_1^{(s)}}$$

p-Polarisation:

$$\vec E_1 = \begin{bmatrix}-(k_{z1}/k_1)E_1^{(p)}\\0\\(k_x/k_1)E_1^{(p)}\end{bmatrix} \to \vec H_1 = \frac{1}{Z_1}\begin{bmatrix}0\\-E_1^{(p)}\\0\end{bmatrix}$$

$$\vec E_{1r} = \begin{bmatrix}-(k_{z1}/k_1)E_{1r}^{(p)}\\0\\-(k_x/k_1)E_{1r}^{(p)}\end{bmatrix} \to \vec H_{1r} = \frac{1}{Z_1}\begin{bmatrix}0\\-E_{1r}^{(p)}\\0\end{bmatrix}$$

$$\vec E_2 = \begin{bmatrix}-(k_{z2}/k_2)E_2^{(p)}\\0\\(k_x/k_2)E_2^{(p)}\end{bmatrix} \to \vec H_2 = \frac{1}{Z_2}\begin{bmatrix}0\\-E_2^{(p)}\\0\end{bmatrix}$$

$$r^p(k_x,k_y) = \frac{\varepsilon_2 k_{z1} - \varepsilon_1 k_{z2}}{\varepsilon_2 k_{z1} + \varepsilon_1 k_{z2}}$$

$$t^p(k_x,k_y) = \frac{2\varepsilon_2 k_{z1}}{\varepsilon_2 k_{z1} + \varepsilon_1 k_{z2}}\sqrt{\frac{\mu_2\varepsilon_1}{\mu_1\varepsilon_2}} = \sqrt{\frac{\mu_2\varepsilon_1}{\mu_1\varepsilon_2}}(1+r^p)$$

Insgesamt:

$$\vec E_2(r) = \begin{pmatrix}-E_1^{(p)}t^p\frac{k_{z2}}{k_2}\\E_1^{(s)}t^s\\E_1^{(p)}t^p\frac{k_x}{k_2}\end{pmatrix} e^{ik_1\left(\sin(\theta_1)x + \sqrt{\frac{\varepsilon_2\mu_2}{\varepsilon_1\mu_1} - \sin^2(\theta_1)}\,z\right)}$$

⚠ falls Welle 1→2 ⇒ Welle 2→1

s und p: $r_{21} = -r_{12}$ $\qquad \theta_i$: Winkel zur z-Achse.

s: $t_{21} = \frac{n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1}\cdot t_{12}$ $\qquad$ p: $t_{21} = \frac{n_2\cos\theta_1}{n_1\cos\theta_2}t_{12}$

Absorbierte Leistung: (an Grenzfläche mit Reflexionskoeffizient r)

$$\frac{P_{abs}}{P_0} = 1 - \frac{P_{ref}}{P_0} = 1 - |r|^2$$

Senkrechter Einfall: $\theta_1 = 0 \Rightarrow r^s = -r^p$ & $t^s = t^p$

Brewster Winkel:

Einfallswinkel, unter dem eine p-polarisierte Welle total transmittiert wird (d.h. perfekte Transmission, keine Reflexion)

Annahme: $\mu_1 = \mu_2$

$$\theta_B = \arcsin\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}}\right) = \arctan\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\right) = \arctan\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \Rightarrow r^p = 0$$

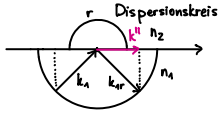
Totalreflexion:

nur möglich für $n_2 < n_1$

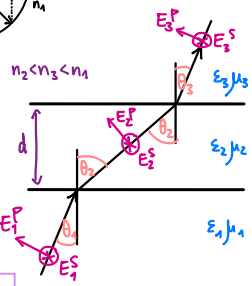
Kritischer Winkel: $\theta_{kritisch} = \arcsin\left(\sqrt{\frac{\mu_2\varepsilon_2}{\mu_2\varepsilon_1}}\right) = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$

alle $\theta_i > \theta_{kritisch} \Rightarrow$ Totalreflexion

Eine Komponente des Wellenvektors $\vec k$ ist positiv imaginär. → Welle fällt in diese Richtung exponentiell ab. Nur möglich wenn Welle vom optisch dichteren ins optisch dünnere Medium geht ($n_2 < n_1$)



Frustrierte Totalreflexion:



Longitudinale Wellenzahl im Medium $j \in \{1,2,3\}$:

$$k_{j\parallel} = \sqrt{k_j^2 - k_\parallel^2} = k_j\sqrt{1 - \left(\frac{k_1}{k_j}\right)^2\sin^2(\theta_1)}$$

$$k_j = n_j k_0 = n_j\left(\frac{\omega}{c}\right), \quad n_j = \sqrt{\varepsilon_j\mu_j}$$

Fall 1: $\theta_1 < \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$ oder $k_\parallel < n_2 k_0$

Nur ebene Wellen, Intensität nicht von d abhängig.

Fall 2: $\arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) < \theta_1 < \arcsin\left(\frac{n_3}{n_1}\right)$

oder $n_2 k_0 < k'' < n_3 k_0$ → Frustrierte Totalreflexion

Evaneszent im Medium 2, propagierend im Medium 3. Intensität stark abnehmend mit d↑.

$I(d) = C_1 e^{-\gamma^2} + C_2 e^{+\gamma^2}$

Fall 3: $\theta_1 > \arcsin\left(\frac{n_3}{n_1}\right)$ oder $k'' > n_3 k_0$

Wellen in Medium 2 & 3 evaneszent, keine Intensität wird transmittiert im Medium 3.

Energie & Momentum (≙ Impuls $p = m\vec v$)

Poynting Theorem:

Felder sind Träger von Energie, da sie über eine Distanz eine Kraftauswirkung ausüben können.

Energieerhaltung: $\underbrace{\int_{\partial V}(\vec E\times\vec H)\vec n\,dA}_{\text{Energieflussdichte}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_V \frac12(\vec D\cdot\vec E + \vec B\cdot\vec H)\,dV}_{\text{Änderung der Energiedichte}} =$

$$= \underbrace{-\int_V \vec j\vec E\,dV}_{\text{ohmsche Verluste}} \underbrace{- \frac12\int_V\left(\vec E\frac{\partial\vec P}{\partial t} - \vec P\frac{\partial\vec E}{\partial t}\right)dV - \frac{\mu_0}{2}\int_V\left(\vec H\cdot\frac{\partial\vec M}{\partial t} - \vec M\frac{\partial\vec H}{\partial t}\right)dV}_{\text{Energieumverteilung im Frequenzraum}}$$

I $(\vec H(\nabla\times\vec E) = -\vec H\frac{\partial}{\partial t}\vec B$

II $\{\vec E\cdot(\nabla\times\vec H) = \vec E\frac{\partial}{\partial t}\vec D + \vec j\vec E$

I − II: $\underbrace{\vec H\cdot(\nabla\times\vec E) - \vec E\cdot(\nabla\times\vec H)}_{\nabla\cdot(\vec E\times\vec H)} = -\vec E\frac{\partial}{\partial t}\vec D - \vec H\frac{\partial}{\partial t}\vec B - \vec j\vec E$

↳ $\int_{\partial V}(\vec E\times\vec H)\vec n\,dA = -\int_V \vec E\frac{\partial}{\partial t}\vec D + \vec H\frac{\partial}{\partial t}\vec B + \vec j_0\vec E\,dV$

für zeitharmonische Felder: $\int_V \vec E\frac{d\vec D}{dt} + \vec H\frac{d\vec B}{dt}\,dV = 0$

$\Rightarrow \vec E = \frac{\partial}{\partial t}\vec D = \frac12\frac{\partial}{\partial t}(\vec D\cdot\vec E) + \frac12\left[\vec E\cdot\frac{\partial\vec P}{\partial t} - \vec P\cdot\frac{\partial\vec E}{\partial t}\right]$

$\Rightarrow \vec H = \frac{\partial}{\partial t}\vec B = \frac12\frac{\partial}{\partial t}(\vec B\cdot\vec H) + \frac{\mu_0}{2}\left[\vec H\cdot\frac{\partial\vec M}{\partial t} - \vec M\cdot\frac{\partial\vec H}{\partial t}\right]$

Poynting's Theorem:

$$P = \int_{\partial V}\underbrace{(\vec E\times\vec H)}_{S:\text{ Energy flux}}\vec{dA} = -\int_V\left(\vec H\frac{\partial\vec B}{\partial t} + \vec E\frac{\partial\vec D}{\partial t} + \vec j_0\vec E\right)dV$$

$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac12(ED + HB)\right)$

ohmic loss or "Arbeit" $= \frac12 \mathrm{Re}\{\vec j_0^*\cdot E\}$

$P_{mech} = (1+|r|^2)\frac1c\langle S\rangle$

$P_{in} \to$ $P_{in} = P_{ref} + P_{mech}$, P_{ref}, P_{mech}

Elektromagnetische Energiedichte:

$$W = \frac12(\vec D\cdot\vec E^* + \vec B\cdot\vec H^*) \quad [J/m^3]$$

*: für komplexe Felder

Poynting Vektor $\vec S$:

Beschreibt die Dichte und die Richtung des Energietransportes (Energieflussdichte) eines elektromagnetischen Feldes.

$$\vec S = \vec E\times\vec H \quad \left[\frac{J}{m^2s} = \frac{W}{m^2} = \frac{N}{ms} = \frac{\text{Energie}}{\text{Fläche}\cdot\text{Zeit}} = \frac{\text{Leistung}}{\text{Fläche}}\right]$$

Energieflussdichte zeigt in Ausbreitungsrichtung.

Felder sind Träger von Energie, da sie über eine Distanz eine Kraftauswirkung ausüben können.

Energieerhaltung:

$$\underbrace{\int_{\partial V}(\vec E\times\vec H)\vec n\,dA}_{\text{Energieflussdichte}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_V\frac12(\vec D\cdot\vec E + \vec B\cdot\vec H)\,dV}_{\text{Änderung der Energiedichte}} = \underbrace{-\int_V\vec j\vec E\,dV}_{\text{ohmsche Verluste}} -$$

$$\underbrace{-\frac12\int_V\left(\vec E\frac{\partial\vec P}{\partial t} - \vec P\frac{\partial\vec E}{\partial t}\right)dV - \frac{\mu_0}{2}\int_V\left(\vec H\cdot\frac{\partial\vec M}{\partial t} - \vec M\frac{\partial\vec H}{\partial t}\right)dV}_{\text{Energieumverteilung im Frequenzraum}}$$

Zeitgemittelter Poynting-Vektor: $\langle S(\vec r)\rangle = \frac12\mathrm{Re}\{\vec E(\vec r)\times\vec H^*(\vec r)\}$

Reduzierter Erhaltungssatz:

$$\int_{\partial V}\langle S(\vec r)\rangle\vec n\,dA = -\frac12\int_V \mathrm{Re}\{\vec j_0^*(\vec r)\vec E(\vec r)\}\,dV$$

In radiale Richtung: $\langle S_r(\vec r)\rangle = \frac12\mathrm{Re}\{E_\theta H_\phi^*\}$

Für ebene Wellen/Fernfeld: (im FF sind Wellen ebene Wellen)

$$\langle\vec S(\vec r)\rangle = \frac{1}{2Z_i}|\vec E(\vec r)|^2\vec n_r$$

Intensität: $I(\vec r) = |\langle\vec S(\vec r)\rangle|$

Leistung (gemittelt): $\bar P = \frac{dW}{dt} = \int_{\partial V}\langle\vec S(\vec r)\rangle\vec n\,dA = \int_{\partial V} I(\vec r)\,dA$

Energiedichte: immer positiv!

In dispersivem und verlustbehaftetem Medium:

$$\bar W = \frac12\left[\varepsilon_0\frac{d[\omega\varepsilon'_E(\omega)]}{d\omega}\langle\vec E\cdot\vec E\rangle + \mu_0\frac{d[\omega\mu'(\omega)]}{d\omega}\langle\vec H\cdot\vec H\rangle\right]$$

Für Medium mit vernachlässigbarer Dispersion:

$$\bar W = \frac14(\varepsilon_0\varepsilon'|\vec E_0|^2 + \mu_0\mu'|\vec H_0|^2)$$

Maxwellscher Spannungstensor:

Spannungstensor: $\overleftrightarrow T = \varepsilon_0\varepsilon\vec E\cdot\vec E^T + \mu_0\mu\vec H\vec H^T - \frac12(\varepsilon_0\varepsilon\vec E^2\mu_0\mu\vec H^2)\overleftrightarrow I$

wobei $\vec E\cdot\vec E^T = \begin{bmatrix}E_x^2 & E_xE_y & E_xE_z\\E_xE_y & E_y^2 & E_yE_z\\E_xE_z & E_yE_z & E_z^2\end{bmatrix}$ $\quad \vec E$: totales Feld, $\vec E = \vec E_{in} + \vec E_{ref}$

Konservierungsregel für lineares Momentum (Vakuum):

$$\int_{\partial V}\overleftrightarrow T(\vec r,t)\vec n(\vec r)\,dA = \frac{d}{dt}[\vec G_{field} + \vec G_{mech}]$$

wobei $\vec G_{field} = \frac{1}{c^2}\int_V[\vec E\times\vec H]\,dV$, $\vec F = \frac{d}{dt}\vec G_{mech}$, $\langle\vec F\rangle = \int_{\partial V}\overleftrightarrow T(\vec r,t)\vec n(\vec r)\,dA$

Strahlungsdruck:

Elektrisches Feld, ausserhalb des Mediums:

$$\vec E(\vec r,t) = E_0\mathrm{Re}\{\underbrace{e^{ikz}}_{\text{einfallend}} + \underbrace{re^{-ikz}}_{\text{Reflektiert}}\}e^{-i\omega t}\vec n_x$$

Strahlungsdruck: $P\cdot\vec n_z = \frac1A\langle\overleftrightarrow T(\vec r,t)\rangle\vec n_z\,dA$

↳ Die ersten beiden Terme des Maxwell Spannungstensor tragen nicht zum Strahlungsdruck bei! → $\overleftrightarrow T(\vec r,t)\vec n_z = -\frac12\langle\varepsilon_0E_0^2\mu_0H^2\rangle\vec n_z = \frac{\varepsilon_0}{2}E_0^2[1+|r|^2]\vec n_z$

Strahlungsdruck: $P = \frac{I_0}{c}(1+R)$ mit $I_0 = \frac{\varepsilon_0}{2}cE_0^2$

Reflexion: $R = |r|^2$ $\qquad$ Absorbierendes Medium: $R = 0$

Perfekt reflektierendes Medium: $R = 1$

Strahlung

Green'sche Funktion:

$\vec r$: Ort der Beobachtung, $\vec r'$: Ort der Quelle

Inhomogenes lineares DGL Problem mit bekannter Anregung $B(\vec r)$ und unbekannter Lösung $A(\vec r)$, auf die ein bekannter linearer Differentialoperator wirkt: $\mathcal{L}\vec A(\vec r) = \vec B(\vec r)$

Allgemeine Lösung: Summe von homogener & partikulärer Lösung.

Annahme: Homogene Lösung A_0 bekannt.

Lösen des einfachere Problem: $\mathcal{L}\overleftrightarrow G(\vec r,\vec r') = \overleftrightarrow I\delta(\vec r-\vec r')$

$\to \int_V\mathcal{L}\overleftrightarrow G(\vec r,\vec r')\vec B(\vec r')\,dV' = \int_V\vec B(\vec r')\delta(\vec r-\vec r')\,dV' = \mathcal{L}\vec A(\vec r)$

$\Rightarrow \vec A(\vec r) = \int_V\overleftrightarrow G(\vec r,\vec r')\vec B(\vec r')\,dV$ für $\vec r'\notin V$

Green'sche Funktion des Helmholtz-Operators:

Sei $\mathcal{L}\vec A(\vec r) = -\vec B(\vec r)$ mit $\mathcal{L} = \nabla^2 + k^2 \Rightarrow \mathcal{L}G_0(\vec r,\vec r') = -\delta(\vec r-\vec r') \Rightarrow G_0(\vec r,\vec r') = \frac{e^{ik|\vec r-\vec r'|}}{4\pi|\vec r-\vec r'|}$

$\to \int_V\mathcal{L}G_0(\vec r,\vec r')\cdot\vec B(\vec r)\,dV' = \mathcal{L}\left(\int_V G_0(\vec r,\vec r')B(\vec r')\,dV'\right) = \int_V -\delta(\vec r-\vec r')B(\vec r')\,dV$

$\Rightarrow \vec A(\vec r) = \int_V G_0(\vec r,\vec r')B(\vec r')\,dV'$ $\qquad$ mit $\vec B(\vec r') = \mu_0\mu\vec j(\vec r')$...

$\Rightarrow A_i(\vec r) = \int_V G_0(\vec r,\vec r')\mu_0\mu\vec j_i(\vec r')\,dV'$ und $\phi(\vec r) = \int_V G_0(\vec r,\vec r')\frac{\rho(\vec r')}{\varepsilon\varepsilon_0}\,dV'$

for time-dependent fields:

$\left(\nabla^2 - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec A(\vec r,t) = -\mu_0\mu\vec j(\vec r,t) \to \left(\nabla^2 - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)G_0(\vec r,\vec r',t,t') = -\delta(\vec r-\vec r')\delta(t-t')$

$\Rightarrow G_0(\vec r,\vec r',t,t') = \frac{\delta\left(t'-t+\frac{n}{c}|\vec r-\vec r'|\right)}{4\pi|\vec r-\vec r'|}$ $\to \vec A(\vec r,t) = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\int_V\frac{\vec j_0(\vec r',t-|\vec r-\vec r'|\frac{n}{c})}{|\vec r-\vec r'|}dV'$

↳ $\phi(\vec r,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\int_V\frac{\rho(\vec r',t-|\vec r-\vec r'|\frac{n}{c})}{|\vec r-\vec r'|}dV'$

Skalar & Vektorpotential:

ϕ: Skalarpotential, $\vec A$: Vektorpotential

$\vec E(\vec r,t) = -\frac{d}{dt}\vec A(\vec r,t) - \nabla\phi(\vec r,t)$

$\vec B(\vec r,t) = \nabla\times\vec A(\vec r,t)$

⚠ Potentiale sind nicht eindeutig. sie können durch neue Potentiale $\tilde{\vec A}$ und $\tilde\phi$ ausgetauscht werden:

$A \mapsto \tilde{\vec A} + \nabla\chi$, $\phi \mapsto \tilde\phi - \frac{\partial\chi}{\partial t}$

χ: beliebige Eichung

Vektorfeld: Transversal: $\nabla\cdot\vec F = 0$

Longitudinal: $\nabla\times\vec F = 0$

Eichungen

Lorenz-Eichung: $\nabla\cdot\vec A = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}$

Dann bekommt man ...

... aus 3. MW-Gleichung: $\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{d^2}{dt^2}\right]\vec A = -\mu_0\vec j_{tot}$

. aus 1. MW-Gleichung: $\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{d^2}{dt^2}\right]\phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho_{tot}$

} Wellengleichungen!

Herleitung für ① (analog für ②, einfach mit 1. MW-Gleichung.)

$\nabla\times E = -\frac{\partial}{\partial t}B = \nabla\times\left(-\frac{\partial}{\partial t}A\right) \Rightarrow \nabla\times\underbrace{\left(E + \frac{\partial A}{\partial t}\right)}_{-\nabla\phi} = 0 \Rightarrow \vec E = -\nabla\phi - \partial_t\vec A$

$(A,\phi) \equiv \left(A + \nabla\chi, \phi - \frac{\partial\chi}{\partial t}\right) \Rightarrow$ resultiert auf gleiches E und B.

$\nabla\times H = \nabla\times\left(\frac{B}{\mu_0} - M\right) = \frac{\partial}{\partial t}D + j_0 = \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0E + P) \Rightarrow \nabla\times B = \mu_0(\nabla\times M + \varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}E + \frac{\partial P}{\partial t} + j_0)$

$\Rightarrow \nabla\times\nabla\times A = \mu_0\left(j + \varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}E\right) = \mu_0 j + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla\phi - \frac{\partial A}{\partial t}\right) = \nabla\cdot(\nabla\cdot A) - \nabla^2 A$

$\Leftrightarrow \nabla^2 A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}A = \nabla\left(\nabla A + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\phi\right) - \mu_0 j$ / Lorenzeichung $\nabla A = \frac{-1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\phi$

$\Rightarrow \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)A = -\mu_0 j$ Wellengleichung! analog... $\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi = \frac{-\rho_{tot}}{\varepsilon_0}$

Für harmonische Wellen: $(\nabla^2 + k^2)A = -\mu_0 j$, $(\nabla^2 + k^2)\phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

Coulomb-Eichung: $\nabla\cdot\vec A = 0$ $\qquad$ Dann bekommt man ...

... aus 3. MW Gleichung: $\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{d^2}{dt^2}\right]\vec A = -\mu_0\vec j_{tot} + \frac{1}{c^2}\nabla\frac{d\phi}{dt}$

... aus 1. MW Gleichung: $\nabla^2\phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho_{tot}$

Dipole

Dipolstrahlung:

Dipol: Strahlende Punktladung (beschleunigte Ladung)

Dipolmomente: $\vec{p}(t) = q(t)\,d\vec{s} = q(t)\vec{n}_s\,ds$ ($+q$, $-q$) $\vec{s}$ von − nach +

Stromdichte eines Dipols: aus $\frac{d}{dt}\vec{p}(t) = (\vec{j}_0 da)\,ds = \vec{j}_0\,dV$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{j}_0(\vec{r},t) = \frac{d}{dt}\vec{p}(t)\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)} \quad \text{mit } \vec{r}_0\text{: Position des Dipols.}$$

Vektorpotential eines zeitharmonischen Dipols

Mit Lorenzeichung: $\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\psi = \Theta$ für A_x, A_y, A_z, ϕ

Zeitharmonischer Ansatz:

$\vec{A}(\vec{r}) = \mathrm{Re}\{\vec{A}(\vec{r})e^{-i\omega t}\}$, $\phi(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\{\phi(\vec{r})e^{-i\omega t}\}$

Wir verwenden: $\nabla\vec{A}(\vec{r}) = i(k^2/\omega)\phi(\vec{r})$ mit $k^2 = (\omega^2/c^2)\mu(\omega)\varepsilon(\omega)$

Lorenzeichung: $[\nabla^2 + k^2]\vec{A}(\vec{r}) = -\mu_0\mu\vec{j}_0\vec{r}$, $[\nabla^2+k^2]\phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon}\rho_0(\vec{r})$

Mit komplexer Amplitude: Für $\vec{p}(t) = \mathrm{Re}\{\underline{\vec{p}}e^{-i\omega t}\}$

$\rightarrow [\nabla^2+k^2]\vec{A}_i(\vec{r}) = i\omega\mu_0\mu p_i\delta(\vec{r}-\vec{r}')$

$\rightarrow [\nabla^2+k^2]G_0(\vec{r},\vec{r}') = -\delta(\vec{r}-\vec{r}')$

Lösung: $\boxed{G_0(\vec{r},\vec{r}') = \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}}$

Vektorpotential für Dipol: $\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = -i\omega\mu_0\mu\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}\vec{p}}$

Vektorpotential für beliebige Stromverteilung: $\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \mu_0\mu\int_V G_0(\vec{r}-\vec{r}')\vec{j}_0(\vec{r}')\,dV'}$

Skalarpotential: $\boxed{\phi(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon}\int_V G_0(\vec{r},\vec{r}')\rho_0(\vec{r}')\,dV' \left(= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\int\frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'\right)}$

Elektrisches & magnetisches Dipolfeld:

$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \omega^2\mu_0\mu\overleftrightarrow{G}_0(\vec{r},\vec{r}')\vec{p}}$ $\boxed{\vec{H}(\vec{r}) = -i\omega[\nabla\times\overleftrightarrow{G}_0(\vec{r},\vec{r}')]\vec{p}}$

Herleitung:

$p(t) = q(t)\,ds$, $\frac{\partial p(t)}{\partial t} = j_0 dV$, $j_{dipol} = \frac{\partial}{\partial t}p(t)\delta(r-r_0) \Rightarrow \boxed{j_{dipol}(\vec{r}) = -i\omega\underline{p}\,\delta(r-r_0)}$

$$\Rightarrow A(r) = -i\omega\mu_0\mu\frac{e^{ik|r-r_0|}}{4\pi|r-r_0|}\underline{p}, \quad \nabla\times B = \frac{-i\omega}{c^2}E$$

$$\Rightarrow E = \frac{i\omega}{k^2}\nabla\times B = \frac{i\omega}{k^2}\nabla\times\nabla\times(-i\omega\mu_0\mu\overleftrightarrow{G}_0 p)$$

$$\Rightarrow \boxed{E(r)} = \omega^2\mu_0\mu\left(\frac{1}{k^2}(\nabla(\nabla G_0) - \nabla^2 G_0)\right)\underline{p} = \boxed{\omega^2\mu_0\mu\overleftrightarrow{G}(r,r')\underline{p}}$$

Alternative: $\nabla A = \frac{-1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\phi = \frac{i\omega\phi}{c^2} = \frac{ik^2}{\omega}\phi$

$$\Rightarrow E = -\nabla\phi - \frac{\partial}{\partial t}A = -\nabla\left(\frac{\omega}{ik^2}\nabla A\right) + i\omega A = i\omega\left(\frac{1}{k^2}\nabla\nabla + I\right)A = \omega^2\mu_0\mu\left(\frac{1}{k^2}\nabla\nabla + I\right)\overleftrightarrow{G}_0\underline{p}$$

$$= \omega^2\mu_0\mu\overleftrightarrow{G}(r,r')\underline{p}$$

$\nabla\times\nabla\times E - k^2E = i\omega\mu_0\mu j(r)$ Def.: $\boxed{\nabla\times\nabla\times\overleftrightarrow{G} - k^2\overleftrightarrow{G} = I\delta(r-r')}$

$\Rightarrow E = i\omega\mu_0\mu\int_V\overleftrightarrow{G}(r,r')j(r')\,dV'$, $H = \int_V(\nabla\times\overleftrightarrow{G})j(r')\,dV'$, $E_{tot} = E_{homo} + E_{pot}$

Dyadische Greenfunktion: Um das Feld eines Dipols zu bestimmen!

$$\boxed{\overleftrightarrow{G}_0(\vec{r},\vec{r}') = \left(\overleftrightarrow{I} - \frac{1}{k^2}\nabla\nabla\right)G_0(\vec{r},\vec{r}')} =$$

$$= \boxed{\frac{e^{ikR}}{4\pi R}\left[\left(1 + \frac{ikR-1}{k^2R^2}\right)\overleftrightarrow{I} + \frac{3-3ikR-k^2R^2}{k^2R^2}\cdot\frac{\vec{R}\cdot\vec{R}^T}{R}\right]}$$

mit $|\vec{R}| = |\vec{r}-\vec{r}'|$, $\vec{R}\vec{R}^T = \begin{bmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & zy \\ xz & yz & z^2\end{bmatrix}$, $G_0 = \begin{bmatrix} G_{xx} & G_{xy} & G_{xz} \\ G_{xy} & G_{yy} & G_{yz} \\ G_{xz} & G_{yz} & G_{zz}\end{bmatrix}$

$$\nabla\times\overleftrightarrow{G}_0(\vec{r},\vec{r}') = \frac{e^{ikR}}{4\pi R}\cdot\frac{k(\vec{R}\times\overleftrightarrow{I})}{R}\left(i - \frac{1}{kR}\right), \text{ mit } \vec{R}\times\overleftrightarrow{I} = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & x \\ -y & x & 0\end{bmatrix}$$

Vector product of $\vec{R}$ with each column of I.

$$\boxed{\overleftrightarrow{G}_0 = \overleftrightarrow{G}_{NF} + \overleftrightarrow{G}_{IF} + \overleftrightarrow{G}_{FF}}$$

Phasenübergang ist kontinuierlich.

		A	Phase
Nahfeld ($R \ll \lambda$ bzw. $kR \ll 1$):	$\overleftrightarrow{G}_{NF} = \frac{e^{ikR}}{4\pi R}\cdot\frac{1}{k^2R^2}\left[-\overleftrightarrow{I} + \frac{3\vec{R}\vec{R}^T}{R^2}\right]$	$\left(\frac{1}{kR}\right)^3$	0°
Intermediate Field ($R \approx \lambda$):	$\overleftrightarrow{G}_{IF} = \frac{e^{ikR}}{4\pi R}\cdot\frac{i}{kR}\left[\overleftrightarrow{I} - \frac{3\vec{R}\vec{R}^T}{R^2}\right]$	$\left(\frac{1}{kR}\right)^2$	90°
Fernfeld ($R \gg \lambda$, bzw. $kR \gg 1$):	$\overleftrightarrow{G}_{FF} = \frac{e^{ikR}}{4\pi R}\left[\overleftrightarrow{I} - \frac{\vec{R}\vec{R}^T}{R^2}\right]$	$\frac{1}{kR}$	180°

für ein Dipol $\vec{p} = p\vec{n}_z$ ($\uparrow^z$ $\vec{p}$)

⚠ lediglich die Fernfelder transportieren EM-Energie.

$$E_r = \frac{p\cos(\theta)}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{e^{ikr}}{r}k^2\left[\frac{2}{k^2r^2} - \frac{2i}{kr}\right]$$

$$E_\theta = \frac{p\sin(\theta)}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{e^{ikr}}{r}k^2\left[\frac{1}{k^2r^2} - \frac{i}{kr} - 1\right]$$

$$H_\varphi = \frac{-p\sin(\theta)}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{e^{ikr}}{r}k^2\left[\frac{i}{kr} + 1\right]\sqrt{\frac{\varepsilon_0\varepsilon}{\mu_0\mu}}$$

Leistung eines Dipols:

Fluss des zeitgemittelten Poynting-Vektors durch eine Kugeloberfläche (für FF: $R\to\infty$) um Dipol:

$$\bar{P} = \frac{1}{2}\int_{\partial V}\mathrm{Re}\{\vec{E}(\vec{r})\times\vec{H}^*(\vec{r})\}\vec{n}\,dA \overset{\vec{p}=p\vec{n}_z}{=} \frac{1}{2}\int_{\partial V}\mathrm{Re}\{\vec{E}_\theta\times\vec{H}^*_\varphi\}r^2\sin(\theta)\,d\theta\,d\varphi$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{P} = \frac{|\vec{p}|}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{n^3\omega^4}{3c^3} = \frac{|\vec{p}|^2\omega k^3}{12\pi\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{|\vec{p}|^2\omega^3\mu_0\mu k}{12\pi}}$$

Abstrahlcharakteristik des Fernfeldes: $\frac{\bar{P}(\theta,\varphi)}{\bar{P}} = \frac{3}{8\pi}\sin^2(\theta)$

Dipolstrahlung in beliebigen Umgebungen:

$$\boxed{\bar{P} = \frac{\omega}{2}\mathrm{Im}\{\vec{p}^*\cdot\vec{E}(\vec{r}_0)\}}$$

Normalisierte Rate der Dipolstrahlung: $\boxed{\frac{\bar{P}}{\bar{P}_0} = 1 + \frac{6\pi\varepsilon_0\varepsilon}{|\vec{p}|^2}\frac{1}{k^3}\mathrm{Im}\{\vec{p}^*\cdot\vec{E}_s(\vec{r}_0)\}}$

Felder ausgesendet von einer beliebigen Quelle:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \mu_0\mu\int_V\overleftrightarrow{G}_0(\vec{r},\vec{r}')\vec{j}_0(\vec{r}')\,dV$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{E}(\vec{r}) = i\omega\mu_0\mu\int_V\overleftrightarrow{G}_0(\vec{r},\vec{r}')\vec{j}_0(\vec{r}')\,dV'}$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{H}(\vec{r}) = \int_V[\nabla\times\overleftrightarrow{G}_0(\vec{r},\vec{r}')]\vec{j}_0(\vec{r}')\,dV'}$$

Dipolfelder mit beliebigem Zeitverhalten

Dispersionsfreie Medien:

$$\boxed{G_0(\vec{r},\vec{r}',t) = \frac{1}{2}\frac{\delta\left[t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right]}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}$$

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\int_V\frac{\vec{j}_0\left(\vec{r}', t - |\vec{r}-\vec{r}'|\frac{n}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'}$$

$$\boxed{\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\int_V\frac{\rho_0\left(\vec{r}', t - |\vec{r}-\vec{r}'|\frac{n}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'}$$

Dipolfelder

$$\begin{array}{ccc} \vec{j}(\vec{r},t) & \not\Longrightarrow & \vec{E}(\vec{r},t) \\ \downarrow \text{Fourier} & & \uparrow \text{Inverse Fourier} \\ \vec{j}(\vec{r},\omega) & \longrightarrow \underset{\text{Maxwell}}{\vec{H}(\vec{r},\omega)} \longrightarrow & \vec{E}(\vec{r},\omega) \end{array}$$

Lorentzsches Leistungsspektrum

Bewegungsgleichung: harmonisch oszillierender Dipol:

$$\frac{d^2}{dt^2}\vec{p}(t) + \gamma_0\frac{d}{dt}\vec{p}(t) + \omega_0^2\vec{p}(t) = 0 \quad \rightarrow \text{Lösung: } \vec{p}(t) = \mathrm{Re}\left\{\vec{p}_0 e^{-i\omega_0\sqrt{1-\left(\frac{\gamma_0^2}{4\omega_0^2}\right)}}e^{-\gamma_0\frac{t}{2}}\right\}$$

Totale Energie per Einheitsraumwinkel $d\Omega$ und per Einheitsfrequenz $d\omega$:

$$\frac{dW}{d\Omega d\omega} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{|p_0|^2\sin^2(\theta)\omega_0^4}{4\pi^2c^3\gamma_0^2}\left(\frac{(\gamma_0^2/4)}{(\omega-\omega_0)^2 + \gamma_0^2/4}\right)$$

Total ausgestrahlte Energie: $\boxed{W = \frac{|p_0|^2\omega_0^4}{4\pi\varepsilon_0 3c^3\gamma_0}}$

$\Delta\omega = \gamma_0$: Strahlungs-Linienbreite: Breite der Kurve auf halben Maximum.

Feldwinkelspektrum

Wir betrachten rein monochromatische Wellen mit Kreisfrequenz ω:

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\{\vec{E}(\vec{r})e^{-i\omega t}\}}$$

1. Berechne Feld in der Ebene $z=0$
2. 2D-Fouriertransformation für $z=\text{const.}$

$$\boxed{\vec{\tilde{E}}(k_x,k_y;z) = \frac{1}{4\pi^2}\iint_{-\infty}^{\infty}\vec{E}(x,y,z)e^{-i(k_xx+k_yy)}\,dx\,dy}$$

$$\boxed{\vec{E}(x,y,z) = \iint_{-\infty}^{\infty}\vec{\tilde{E}}(k_x,k_y;z)e^{i(k_xx+k_yy)}\,dk_x\,dk_y}$$

3. Propagation zu beliebigem z:

Einsetzen in der Helmholtz-Gleichung: $\boxed{[\nabla^2+k^2]\vec{E}(\vec{r}) = 0}$ $k = \frac{\omega}{c}$, $n = \sqrt{\mu\varepsilon}$

mit $k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}$, $\mathrm{Im}\{k_z\} \geq 0$

$$\boxed{\vec{\tilde{E}}(k_x,k_y;z) = \vec{\tilde{E}}(k_x,k_y,0)e^{\pm ik_zz}}$$

Nicht evaneszent: $\mathrm{Im}\{k_z\} = 0$

$+ik_zz$ für Welle die sich in $z>0$ ausbreitet

$-ik_zz$ für Welle die sich in $z<0$ ausbreitet

4. Fourier Rücktransformation

$$\boxed{\vec{E}(x,y,z) = \iint_{-\infty}^{\infty}\vec{\tilde{E}}(k_x,k_y,0)e^{i(k_xx+k_yy\pm ik_zz)}\,dk_x\,dk_y}$$

$$\boxed{\vec{H}(x,y,z) = \iint_{-\infty}^{\infty}\vec{\tilde{H}}(k_x,k_y,0)e^{i(k_xx+k_yy\pm ik_zz)}\,dk_x\,dk_y}$$

Beziehungen:

$$\boxed{\hat{H}_x = Z_{\mu\varepsilon}^{-1}\left[\left(\frac{k_y}{k}\right)\hat{E}_z - \left(\frac{k_z}{k}\right)\hat{E}_y\right]}$$

$$\boxed{\hat{H}_y = Z_{\mu\varepsilon}^{-1}\left[\left(\frac{k_z}{k}\right)\hat{E}_x - \left(\frac{k_x}{k}\right)\hat{E}_z\right]}$$

$$\boxed{\hat{H}_z = Z_{\mu\varepsilon}^{-1}\left[\left(\frac{k_x}{k}\right)\hat{E}_y - \left(\frac{k_y}{k}\right)\hat{E}_x\right]}$$

mit $\boxed{Z_{\mu\varepsilon} = \sqrt{\frac{\mu_0\mu}{\varepsilon_0\varepsilon}}}$

"Berechnen Sie das Feldwinkelspektrum":

$$\boxed{\hat{\vec{E}}(k_x,k_y;z) = \frac{1}{4\pi^2}\iint E(x,y,z)e^{-i(k_xx+k_yy)}\,dx\,dy} \text{ berechnen.}$$

Ausbreitung und Fokussierung von Feldern

Propagation des Fernwinkelspektrums

Propagator: $\boxed{\hat{H}(k_x,k_y,z) = e^{\mp ik_zz}} \rightarrow \boxed{\hat{\vec{E}}(k_x,k_y,0) = \hat{H}(k_x,k_y,z)\hat{\vec{E}}(k_x,k_y,0)}$

$\hat{H}$:
- oszillierende Funktion für $(k_x^2+k_y^2) < k^2$,
- exponentiell abnehmende Funktion für $(k_x^2+k_y^2) > k^2$

  Für $k_x^2+k_y^2 > k^2$ ist $k_z \in \mathbb{C} \rightarrow$ evaneszent

⚠ H ist ein Tiefpassfilter. Nur Strukturen grösser als $\Delta x \approx \frac{1}{2k} = \frac{\lambda}{4\pi n}$ werden genau genug übertragen. n: Brechungsindex.

Zeitbereich: $\boxed{\vec{E}(x,y,z) = \vec{E}(x,y;0) * H(x,y;z)}$

Propagator im direkten Raum: $\boxed{H(x,y,z) = \iint_{-\infty}^{\infty}e^{i(k_xx+k_yy\pm k_zz)}\,dk_x\,dk_y}$

Paraxiale Approximation.

⚠ MW-Gleichungen sind hier nicht mehr erfüllt.

Wellenvektor k verläuft fast parallel zur z-Achse, verteilt sich nur und nur wenig in der transversalen Richtung. Wellenvektor $\vec{k} = (k_x,k_y,k_z)$ $k_x^2, k_y^2 \ll k^2$

Paraxiale Approximation: $k_z = k\sqrt{1 - \frac{(k_x^2+k_y^2)}{k^2}} \approx k - \frac{k_x^2+k_y^2}{2k}$

Gaussische Strahlen (Fundamentaler Laserstrahl, der linear polarisiert ist).

Gaussische Feldverteilung in der Strahltaille: $\vec{E}(x',y',0) = \vec{E}_0e^{-(x'^2+y'^2)/w_0^2}$

E_0: Konstanter Feldvektor in der transversalen (x,y) Ebene. Wir zählen $z=0$ an der Strahltaille.

Feldwinkelspektrum: w_0: Radius der Strahltaille

Räumliche Fouriertransformation an $z=0$: $\boxed{\hat{\vec{E}}(k_x,k_y;0) = \vec{E}_0\frac{w_0^2}{4}e^{-(k_x^2+k_y^2)\frac{w_0^2}{4}}}$

Rücktransformation: $\boxed{\vec{E}(x,y,z) = \frac{E_0e^{ikz}}{1+2iz/kw_0^2}\exp\left(-\left(\frac{x^2+y^2}{w_0^2}\right)\frac{1}{1+2iz/kw_0^2}\right)}$

Zylinderkoordinaten: Transversalgrösse: $\rho = x^2+y^2$

Rayleigh Länge: $\boxed{z_0 = \frac{kw_0^2}{2}}$ Distanz, die ein Laserstrahl braucht, bis seine Querschnittsfläche sich ausgehend von der Strahltaille verdoppelt. Radius ist dort $\sqrt{2}$ grösser als an Taille bzw. Fokus.

$$\vec{E}(\rho,z) = \vec{E}_0\frac{w_0}{w(z)}\exp\left(-\frac{\rho^2}{w^2(z)}\right)\exp\left(i\left[kz - \eta(z) + \frac{k\rho^2}{2R(z)}\right]\right)$$

↳ Strahlradius: $w(z) = w_0\sqrt{1 + z^2/z_0^2}$

↳ Wellenfront Radius: $R(z) = z\left(1 + \frac{z_0^2}{z^2}\right)$

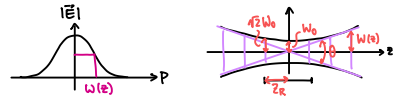
↳ Phasenkorrektur: $\eta(z) = \arctan(z/z_0)$

Querschnittsgrösse vom Strahl wird durch $\rho^2 = x^2+y^2$ gegeben, für welches die elektrische Feldamplitude die untenstehende Gleichung erfüllt:

$$\frac{|\vec{E}(x,y,z)|}{|\vec{E}(0,0,z)|} = \frac{1}{e}$$

Die Oberfläche, die von dieser Gleichung definiert wird, ist ein Hyperboloid dessen Asymptote einen Winkel θ einschliesst: $\theta = \frac{2}{kw_0}$

Gouy Phasenshift:



Fernfeldapproximation

Feld-Auswertung bei $\vec{r} = \vec{r}_\infty$. Dieses Fernfeld ist nur von einer ebenen Welle, die in die Richtung Zielpunkt läuft, bestimmt. Alle anderen Wellen interferieren destruktiv.

→ FF durch Feldwinkelspektrum in Objektebene definiert.

$$\vec{s} = [s_x, s_y, s_z] = [x/r, y/r, z/r] = [k_x/k, k_y/k, k_z/k] \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\rightarrow \vec{E}_\infty(s_x,s_y) = \lim_{k\to\infty}\iint_{(k_x^2+k_y^2\leq k^2)}\vec{\tilde{E}}(k_x,k_y;0)\exp\left[ikr\left(\frac{k_x}{k}s_x + \frac{k_y}{k}s_y + \frac{k_z}{k}s_z\right)\right]dk_x\,dk_y$$

$$\rightarrow \vec{E}_\infty(s_x,s_y) = -2\pi ik s_z\frac{e^{ikr}}{r}\vec{\tilde{E}}(ks_x,ks_y,0)e^{\frac{ikr}{r}} \qquad k_x \to k\cdot s_x$$

Fourier Fernfeld: $\vec{\tilde{E}}(ks_x,ks_y,0) = \frac{ire^{-ik}}{2\pi k_z}E_\infty\left(\frac{k_x}{k},\frac{k_y}{k}\right)$

$$E(x,y,z) = \iint_{k_x^2+k_y^2\leq k^2}E_\infty\left(\frac{k_x}{k},\frac{k_y}{k}\right)e^{i(k_xx+k_yy+k_zz)}\frac{1}{k_z}\,dk_x\,dk_y$$

In der Approximation: $k_z = k$ formen die beiden Felder ein perfektes Fouriertransformationspaar.

Fresnel & Fraunhofer Beugung

Fraunhofer Approximation: Wenn Quelle um kleine Distanz verschoben ist. → Vernachlässigbar für die Amplitude, aber nicht für die Phase.

Amplitude: $|\vec{r}-\vec{r}'| = |\vec{r}| - \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{|\vec{r}|} \approx |\vec{r}|$

Phase: $|\vec{r}-\vec{r}'| \approx |\vec{r}| - |\vec{r}'|\cos(\theta) = r - \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{|\vec{r}|}$

$$\Rightarrow \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} \approx \frac{e^{ikr}e^{-ik\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}_0}{r}}}{4\pi r} \quad \text{gültig für } z \gg z_0 = \frac{kw_0^2}{2} \text{ und } \theta < \frac{2}{kw_0}$$

Radius

$$r(x',y') \approx \underbrace{R - \left[\frac{x'x}{R} + \frac{y'y}{R}\right]}_{\text{Fraunhofer}} + \underbrace{\frac{x'^2+y'^2}{2R}}_{\text{Fresnel}}$$

Der Übergang von Fresnel zu Fraunhofer Approx. geschieht ungefähr bei der Rayleigh Länge $z_0 = \frac{kD^2}{8}$, wobei $D = 2w_0$ (Max. Ausdehnung der Quelle bei $z=0$)

Resonatoren und Waveguides

Wir haben vermehrt Glasfaserkabel und die Übertragung findet über diese Kabel statt. Leider haben diese auch ein Maximum (analog zu Moore's Law), welches aber bald erreicht wird. Ziel ist es, einen Lösungsansatz für solche Problemstellungen zu finden.

Datenraten und optische Fibern

Die Datenraten, die heute übertragen werden, haben 44.2 Tb/s erreicht. Wir haben in optische Fiber-Kabeln eine Aufstellung der Übertragung, welche wie in QM auf die Idee aufgebaut sind, die effizienteste Übertragung herzustellen. Diese wird mit sogenannten Moden bewerkstelligt. Die Moden sind radial verteilt und haben unterschiedliche Intensitäten, von welchem die erste die effizienteste ist (wird heute so verwendet).

Optische Fibern-Lösungsansatz

Lösungsansatz für solche optische Fibern sind:
In sphärischer Ebene: $[\sin(m\varphi), \cos(m\varphi)]$ also mit m und n möglichen Lösungen auf dieser Achse.
In radialer Ebene: $[J_n(\mu), H_n(\mu)]$, also hier ist der Radius über zwei Achsen mit je von der Variablen μ abhängig. → HE_{nm} und EH_{nm}: Moden

Magnetischer Dipol:

Vektorpotential: $\boxed{\vec{A}_{dip}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}_r}{r^2}}$

Trennung der Variablen:

$E(r,t) = R(r)\cdot T(t) \Rightarrow \frac{c^2}{\varepsilon\mu}\frac{\nabla^2 R(r)}{R(r)} - \frac{1}{T(t)}\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = 0$

$\Rightarrow \frac{c^2}{\varepsilon\mu}\frac{\partial^2 R(r)}{R(r)} = \frac{1}{T(t)}\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t} = -\omega^2 \Rightarrow T(t) = \mathrm{Re}\{A_\omega e^{i\omega t}\} \Rightarrow \vec{E}(r,t) = \mathrm{Re}\{\vec{E}(r)e^{i\omega t}\}$

$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} \Rightarrow k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 = \varepsilon\mu\frac{\omega^2}{c^2}$

$\Rightarrow k = k_0 \cdot n = k_0\sqrt{\varepsilon\mu} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu} = \frac{2\pi}{\lambda}$

Allgemeine Lösung der homogenen Wellengleichung:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\{\underbrace{\int_{k_\omega}\int E(k,\omega)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}d\omega dk}_{\text{Superposition von ebenen Wellen}}\}$$

$\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\{\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\}$

Monochromatische Wellen: (= "zeitharmonisch", ω fix)

$\vec{A}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\{\underline{\vec{A}}(\vec{r})e^{i\omega t}\} \Rightarrow \frac{\partial\underline{\vec{A}}(\vec{r})}{\partial t} = -i\omega\underline{\vec{A}}(\vec{r}) \Rightarrow \boxed{\nabla\cdot\underline{\vec{A}} = i\vec{k}\cdot\underline{\vec{A}}}\ \boxed{\nabla\times\underline{\vec{A}} = i\vec{k}\times\underline{\vec{A}}}$

$(\nabla^2 + k^2)E = 0,\quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}n^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu,\quad \nabla\times\underline{\vec{E}} = i\omega\mu_0\mu_r\underline{\vec{H}}$

$\Rightarrow \boxed{\underline{\vec{H}} = \frac{1}{\omega\mu_0\mu_r}\vec{k}\times\underline{\vec{E}} = \underbrace{\sqrt{\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r}{\mu_0\mu_r}}}_{Z_i}(\vec{n}_k\times\underline{\vec{E}})}\quad Z_i = \sqrt{\frac{\mu_0\mu_r}{\varepsilon_0\varepsilon}}$

Im Vakuum: $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \Rightarrow \boxed{\underline{\vec{H}} = \frac{1}{Z}(\vec{n}_k\times\underline{\vec{E}})}$

$k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} \Rightarrow$ evaneszent falls $k_x^2 + k_y^2 > k^2$

$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = E_0 e^{i(k_x x + k_y y)}e^{-|k_z|z}$ exp. abfallender Term!

Vektoranalysis

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{c} \Rightarrow \vec{c} \perp \vec{a}$ und $\vec{b}$

$(a\times b)\cdot c = (c\times a)\cdot b = (b\times c)\cdot a$

Operatoreigenschaften

$\nabla\cdot(A\times B) = B(\nabla\times A) - A(\nabla\times B)$

$\nabla\times(\nabla\cdot f) = 0$

$\nabla\cdot(\nabla\times A) = 0$

$\nabla\times(\nabla\times A) = \nabla(\nabla\cdot A) - \nabla^2 A$

Anhang

Fouriertransformation:

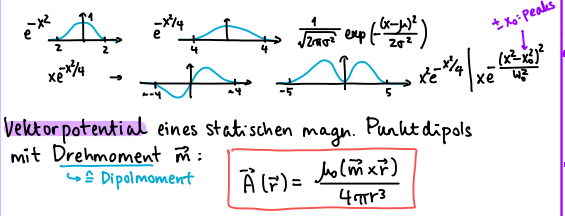
1D: $\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$

$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(\omega)\}(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega t}d\omega$

2D: $\hat{\vec{E}}(k_x,k_y;z) = \frac{1}{4\pi^2}\iint_{-\infty}^{\infty}\vec{E}(x,y,z)e^{-i(k_x x + k_y y)}dx\,dy$

$\vec{E}(x,y,z) = \iint_{-\infty}^{\infty}\hat{\vec{E}}(k_x,k_y;z)e^{i(k_x x + k_y y)}dk_x\,dk_y$

Gauss'sche Funktionen + Variationen davon:



Vektorpotential eines statischen magn. Punktdipols mit Drehmoment $\vec{m}$: ↳ ≙ Dipolmoment

$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0(\vec{m}\times\vec{r})}{4\pi r^3}}$

- **Biot-Savart Gesetz:** Beschreibt das magnetische Feld $\vec{B}(\vec{r})$ am Ort $\vec{r} = (x,y,z)^T$, das von einem zeitlich konstanten Strom I entlang des Pfades C generiert wird:

$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_C\frac{d\vec{r}'\times\vec{R}}{|\vec{R}|^3}$, $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ $\vec{r}'$: Ort der Erzeugung

↳ Bei einer kreisförmigen Leiterschleife haben wir:

$B(z) = \frac{\mu_0}{2}\frac{R^2 I}{(R^2 + \underbrace{z^2}_{\text{bzw. } (z-z_0)^2})^{3/2}}$

wobei z_0 = Dort wo das Spulenzentrum ist.

- Bei einem Dipol: Das magnetische Feld eines Dipols mit Dipolmoment $\vec{m}$ ist:
  für uns: $\vec{p}$

$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^2}\cdot\frac{3\vec{r}(\vec{m}\cdot\vec{r}) - \vec{m}r^2}{r^3}$

- Dipol im Feld: In einem äusseren magn. Feld $\vec{B}$ wirkt auf ein magn. Dipol das Drehmoment: $\vec{M} = \vec{m}\times\vec{B}$

- Taylorreihe: $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}$

- Vorgehensweise um in einem dispersiven Medium das Feld $\vec{E}(\vec{r},t)$ einer zeitabhängigen Stromdichte $\vec{j}(\vec{r}',t)$ zu bestimmen:
  Berechne die Fouriertransformierte des Stromes:
  $\hat{j}_0(\vec{r}',\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\vec{j}_0(\vec{r}',t)e^{i\omega t}dt$. Da die Maxwellgleichungen für die Fouriertransformierte dieselben sind wie für die komplexen Amplituden, können wir sagen, dass $\hat{E}(r,\omega) = i\omega\mu_0\mu(\omega)\int_V G(r,r',\omega)\hat{j}_0(r',\omega)dV'$. Dann können wir $\hat{E}(r,\omega)$ zurück in den Zeitbereich transformieren um $E(r,t)$ zu erhalten.

- Ein Film wird mit einem elektromagnetischen Puls bestrahlt. Der Puls trifft senkrecht zur Grenzfläche & wird durch das Feld $\vec{E}^{in}(\vec{r},t)$ beschrieben. Wie kann man den reflektierten Puls mit Feld $\vec{E}^{ref}(\vec{r},t)$ berechnen?
  1) $\vec{E}^{in}(\vec{r},t)$ Fouriertransformieren: $\hat{\vec{E}}^{in}(\vec{r},\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\vec{E}^{in}(\vec{r},t)e^{i\omega t}d\omega$
  2) Fouriertransformation der reflektierten Welle bei z=0 berechnen:
  $\hat{\vec{E}}_{ref}(x,y,0,\omega) = r(\omega)\hat{\vec{E}}^{in}(x,y,0,\omega)$ und es propagiert in die negative z-Richtung, deshalb muss für $z \neq 0$ das Vorzeichen von z geändert werden.
  $\hat{\vec{E}}_{ref}(x,y,z,\omega) = r(\omega)\hat{\vec{E}}^{in}(x,y,-z,\omega)$
  3) Am Schluss können wir rücktransformieren: $\vec{E}^{ref}(\vec{r},t) = \int_{-\infty}^{\infty}\hat{\vec{E}}^{ref}(r,\omega)e^{-i\omega t}dt$

Komische Umformungen aus den Seinen:

Das Potential einer Ladungsdichte ρ lautet:

$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(r')}{|r-r'|}dV'$

Für die Ladungsdichte $\rho(r) = q[\delta(r-r') - \delta(r+r')]$ (Dipol) finden wir:

$\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d/2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+d/2)^2}}\right)$

Mit der Entwicklung $1/\sqrt{x^2+y^2+(z-d/2)^2} \approx \left(1 + \frac{zd}{2r^2}\right)/r$ finden wir das Potential des Dipols für d→0 mit qd=p=const.:

$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qzd}{r^3} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\theta}{r^2}$

Verständnisfragen aus Prüfung

- Ergänzung, welche Maxwell am Ampère'schen Gesetz vorgenommen hat: Er hat entdeckt, dass Ströme nicht unbedingt erhalten bleiben und durch bewegende Ladungen entstehen können. Um dies in den Gleichungen darzustellen, machte er folgende Änderung: $\nabla\times\vec{H} = \vec{j}$ (vor Maxwell) $\Rightarrow \nabla\times\vec{H} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{D} + \vec{j}$
  Verschiebungsstrom
- Eine ebene Welle fällt auf einen Film bestehend aus zwei parallelen Grenzflächen ein. Alle Medien sind homogen & linear, haben jedoch unterschiedliche Permittivitäten. Wie viele linear unabhängige Randbedingungen sind nötig, um das transmittierte Feld zu bestimmen? → 4
- Wieso werden die Potentiale $\phi(\vec{r},t)$ und $\vec{A}(\vec{r},t)$ eingeführt? mind. 2 Gründe:
  Um das lösen von DGL zu vereinfachen, insbesondere inhomogene. Man reduziert somit die Anzahl der zu lösenden Gleichungen von 6 (3 von $\vec{E}$-Feld, 3 von $\vec{H}$-Feld) auf 4 (3 von $\vec{A}$ und 1 von ϕ). Mithilfe der Potentiale kann man die $\vec{E}$- und $\vec{H}$-Felder in beliebigen Umgebungen lösen.
- Zeigen: Wechselwirkung zwischen dem magn. Induktionsfeld $\vec{B}(\vec{r},t)$ und einer Ladung q kann keine Arbeit verursachen:
  Lorenzkraft: $\vec{F} = q\cdot(\vec{v}\times\vec{B})$, wobei $\vec{v}$ die Geschwindigkeit des Teilchens ist.
  Für eine infinitesimale Bewegung der Ladung um $d\vec{s}$ gilt: $\vec{v}\parallel d\vec{s}$.
  Die Arbeit ist definiert als: $W = \int_C\vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_C q(\vec{v}\times\vec{B})d\vec{s} = 0$, da $(\vec{v}\times\vec{B})\perp d\vec{s}$.
- Warum fällt bei frustrierter Totalreflexion das Feld im Luftspalt zwischen den dielektrischen Medien generell nicht exponentiell ab?
  Die Voraussetzungen, damit exponentieller Abfall im Luftspalt möglich ist, sind:
  1) $n_{Luft} = \sqrt{\varepsilon\mu}$ im Luftspalt muss kleiner sein als in den dielektrischen Medien ($n_{med} > n_{Luft}$).
  2) Der Einfallswinkel auf die Grenzfläche muss einen kritischen Winkel überschreiten: $\theta_c = \arcsin\left(\frac{n_{Luft}}{n_{med}}\right)$
- Ein elektromagnetisches Feld, das durch $\vec{E}$ und $\vec{H}$ charakterisiert wird, hat insgesamt 6 Vektorkomponenten. Wie viele dieser Komponenten müssen bekannt sein, damit das Feld in einem Wellenleiter eindeutig bestimmt ist?
  → 2, nämlich $\vec{E}$-Feld in Propagationsrichtung, $\vec{H}$-Feld in Propagationsrichtung (longitudinale Komponenten)
- Warum hängt die abgestrahlte Leistung einer Antenne von seiner Umgebung ab?
  Das abgestrahlte Feld kann an Objekten reflektiert werden oder an Teilchen gestreut werden, wodurch Leistung verloren geht, entweder als Interferenz, Ohm'sche Verluste oder sonstige.
- Wir möchten eine Mode in einem unendlich langen dielektrischen Wellenleiter mit einem äusseren Feld $\vec{E}$ anregen. Die Propagationskonstante der Mode sei k_z und die Kreisfrequenz ω. Der Wellenleiter wird vom Vakuum umgeben. Welche Eigenschaften muss das äussere Feld haben?
  Der Propagationswinkel muss genug gross sein, damit Totalreflexion an den Rändern des Wellenleiters stattfindet. Dafür muss $k_z < k_2 < k_1$ gelten, wobei $k_1 = \frac{\omega}{c}n_1$ der Betrag des Wellenvektors innerhalb der Wellenleiter und $k_2 = \frac{\omega}{c}n_2$ der ausserhalb ist.
- für kleine Terme: Näherung 1. Ordnung: vernachlässige alle Terme mit Ordnung $\Theta(..^2)$ (wird eigentlich immer gemacht.)

Dipol Energie (power ≙ Leistung)

$P = \frac{dW}{dt} = \frac{dE}{dt} = \int_A I\,dA$

$\bar{P} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\, r^2\sin(\theta)\,\mathrm{Re}\{\underbrace{E_\theta\cdot H_\varphi^*}_{I}\} = \frac{p^2n^2\omega^4}{12\pi\varepsilon_0\varepsilon c^3} = \frac{p^2\omega k^3}{12\pi\varepsilon_0\varepsilon}$

$\bar{P}(\theta,\varphi)$ = power on $d\Omega = \sin(\theta)d\theta d\varphi$

$\frac{\bar{P}(\theta,\varphi)}{\bar{P}} = \frac{3}{8\pi}\sin^2(\theta)$ p(klein).. : Dipolmoment P(gross).. Leistung

Energy dissipated: $\frac{dW}{dt} = -\frac{1}{2}\int_V\mathrm{Re}\{j_0^*E\}dV = \frac{\omega}{2}\mathrm{Im}\{p^*\cdot E(r_0)\} = \ldots = \frac{p^2}{12\pi}\frac{\omega}{\varepsilon\varepsilon_0}k^3$ (use $\vec{G}(r_0,r')$)

$\Rightarrow P_0 = \frac{p^2}{12\pi}\frac{\omega}{\varepsilon_0\varepsilon}k^3$ but there can also be scattered E-field at r_0:

$\frac{\bar{P}}{P_0} = \frac{P_0 + P_s}{P_0} = 1 + \frac{P_s}{P_0} = 1 + \frac{\frac{\omega}{2}\mathrm{Im}\{p^*E_s(r_0)\}}{\frac{p^2}{12\pi}\frac{\omega}{\varepsilon\varepsilon_0}k^3} = 1 + \frac{6\pi\varepsilon_0\varepsilon}{p^2k^3}\mathrm{Im}\{p^*\cdot E_s(r_0)\}$

and $\frac{\bar{P}(\theta,\varphi)}{P} = \frac{\langle S(\theta,\varphi)\rangle}{\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\langle S(\theta,\varphi)\rangle\sin\theta\, d\varphi d\theta}$

Fraunhofer Approximation:

Phase: 1. Ordnung, Amplitude: 0. Ordnung Approx., $\theta' \approx \theta$, $\phi' \approx \phi$

$|r - r_0|^2 = |r|^2 - 2|r||r_0|\cos(\theta) + |r_0|^2 \Rightarrow |r - r_0| = \sqrt{1 - 2\frac{|r_0|}{|r|}\cos(\theta) + \frac{|r_0|^2}{|r|}}\,|r|$

$1 - \cos(\theta)\frac{|r_0|}{|r|} + \frac{1}{2}\sin^2(\theta)\frac{|r_0|^2}{|r|^2}$

$\Rightarrow |r - r_0| \approx |r| - \cos(\theta)|r_0| = |r| - \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}_0}{|r|}$

$\Rightarrow \frac{e^{ik|r-r_0|}}{4\pi|r-r_0|} \approx \frac{e^{ikr}\cdot e^{-ik\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}_0}{r}}}{4\pi r}$ gültig für $z \gg z_0 = \frac{k\omega_0^2}{2}$ und $\theta < \frac{z}{k\omega_0}$

Radius

Fraunhofer Approximation: Fildwinkelspektrum

$E(x,y,z) = \iint\hat{E}(k_x,k_y;z)e^{i(k_x x + k_y y)}dk_x\,dk_y$

$\hat{E}(k_x,k_y;z) = \frac{1}{4\pi^2}\iint E(x,y,z)e^{-i(k_x x + k_y y)}dx\,dy$ $\quad k_z = \sqrt{k^2 - (k_x^2 + k_y^2)}$

Für ebene Welle: $E(x,y,z) = E(x,y,0)e^{ik_z z} \Rightarrow \hat{E}(k_x,k_y;z) = \hat{E}(k_x,k_y;0)e^{ik_z z}$

$\Rightarrow E(x,y,z) = \iint_{-\infty}^{\infty}\left(\hat{E}(k_x,k_y;0)e^{ik_z z}\right)e^{i(k_x x + k_y y)}dk_x\,dk_y$

und $\hat{H}_x = \frac{1}{Z}\left[\frac{k_x}{k}\hat{E}_z - \frac{k_z}{k}\hat{E}_y\right]$, $\hat{H}_y = \frac{1}{Z}\left[\frac{k_z}{k}\hat{E}_x - \frac{k_x}{k}\hat{E}_y\right]$, $\hat{H}_z = \frac{1}{Z}\left[\frac{k_x}{k}\hat{E}_y - \frac{k_y}{k}\hat{E}_x\right]$

Fernfeld:

Only consider $k_x^2 + k_y^2 < k^2 \rightarrow (S_x,S_y,S_z) = \left(\frac{x}{r},\frac{y}{r},\frac{z}{r}\right) = \left(\frac{k_x}{k},\frac{k_y}{k},\frac{k_z}{k}\right)$

$E_\infty(S_x,S_y,S_z) = \lim_{kr\to\infty}\iint_{k_x^2+k_y^2<k^2}\hat{E}(k_x,k_y;0)e^{ikr\left[\frac{k_x}{k}S_x + \frac{k_y}{k}S_y + \frac{k_z}{k}S_z\right]}dk_x\,dk_y =$

$= -2\pi i k S_z\hat{E}(kS_x,kS_y;0)\frac{e^{ikr}}{r}$

$\Rightarrow E_\infty(x,y,z) = -2\pi i k z\frac{e^{ikr}}{r^2}\hat{E}\left(k\frac{x}{r},k\frac{y}{r};0\right)$

Gaussian Beam

$E(x,y,z=0) = E_0 e^{-\frac{(x^2+y^2)}{w_0^2}}$, $\quad \hat{E}(k_x,k_y;z=0) = E_0\frac{w_0^2}{4\pi}e^{-\frac{(k_x^2+k_y^2)}{4}w_0^2}$

Paraxial Approximation: $k_z = \sqrt{k^2 - (k_x^2 + k_y^2)} \approx k - \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k}$

$E(x,y,z) = \iint e^{i\left(k - \frac{k_x^2+k_y^2}{2k}\right)z}E_0\frac{w_0^2}{4\pi}e^{-\frac{(k_x^2+k_y^2)}{4}w_0^2}e^{i(k_x x + k_y y)}dk_x\,dk_y \Big/ z_0 := \frac{k\omega_0^2}{2},\ \rho := x^2 + y^2$

$= \frac{E_0 e^{ikz}}{1 + 2i\frac{z}{k\omega_0^2}}e^{-\frac{(x^2+y^2)}{w_0^2}}\cdot\frac{1}{1 + 2i\frac{z}{k\omega_0^2}} =$

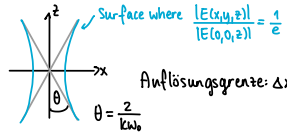
$= \frac{E_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{z}{z_0}\right)^2}}e^{\frac{-\rho}{w_0^2\sqrt{1+(z/z_0)^2}}}\cdot e^{i\left(kz - \arctan\left(\frac{z}{z_0}\right) + \frac{k\rho^2}{2z(1+(z/z_0)^2)}\right)}$

$E(\rho,z) = E_0\frac{w_0}{w(z)}\cdot e^{-\frac{\rho^2}{w^2(z)}}e^{i(kz - \eta(z) + k\rho^2/2R(z))}$

mit $w(z)$ = Strahl Taille, $w(z) = w_0\sqrt{1 + (z/z_0)^2} \approx w_0\frac{z}{z_0}$ $\quad z \gg z_0$

$R(z)$ = Wellenfront Radius, $R(z) = z + \left(1 + \frac{z_0}{z^2}\right) \approx z$

$\eta(z)$ = Phasenkorrektur, $\eta(z) = \arctan\left(\frac{z}{z_0}\right) \approx \frac{\pi}{2}$



$\theta = \frac{2}{k\omega_0}$

Auflösungsgrenze: $\Delta x = \frac{1}{2k} = \frac{x}{4\pi n}$ oder $d = \frac{\lambda}{2n\sin(\theta_{max})}$

Komplexe Zahlen

$z = x+iy = re^{i\varphi}$ wobei $|z| = r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

$z^* = x-iy = re^{-i\varphi}$ $\quad z\cdot z^* = |z|^2$

$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$

$\cos(\varphi) = \mathrm{Re}\{e^{i\varphi}\} = \mathrm{Im}\{ie^{i\varphi}\}$

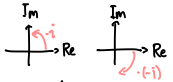
$\sin(\varphi) = \mathrm{Im}\{e^{i\varphi}\} = \mathrm{Re}\{-ie^{i\varphi}\}$

$\cos(\varphi) = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})$, $\sin(\varphi) = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})$

$\sinh(\varphi) = -i\sin(i\varphi)$, $\cosh(\varphi) = \cos(i\varphi)$

$\mathrm{Im}(z) = -\frac{i}{2}(z - z^*)$

$z\cdot w = (x_1 + iy_1)\cdot(x_2+iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)$

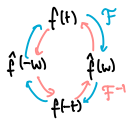


$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, $-1 = e^{i\pi}$, $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\varphi+2k}{n}\right)}$, $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. $\quad \frac{1}{i} = -i$

Fouriertransformation

1D: $\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}\,dt$

$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(\omega)\}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{-i\omega t}\,d\omega$



Wichtige Eigenschaften:

$\alpha f(\vec{r},t) + \beta g(\vec{r},t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \alpha\hat{f}(\vec{r},\omega) + \beta\hat{g}(\vec{r},\omega)$

$f(t)e^{i\omega t} \circ\!\!-\!\!\bullet\ \hat{f}(\omega+\alpha)$

$f(t-\alpha) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \hat{f}(\omega)e^{i\omega\alpha}$

$\frac{1}{|a|}f\left(\frac{t}{a}\right) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \hat{f}(a\omega)$

$f(at) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{|a|}\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$

$t^n f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ (-i)^n\left(\frac{\partial}{\partial\omega}\right)^n\hat{f}(\omega)$

$\left(\frac{d}{dt}\right)^n f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ (-i\omega)^n\hat{f}(\omega)$

$f(t)\cdot g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ (\hat{f} * \hat{g})(\omega)$

$(f*g)(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ 2\pi\hat{f}(\omega)\cdot\hat{g}(\omega)$

einige Transformationen:

$\begin{cases} 1 & -L \le t \le L \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{\sin(L\omega)}{\omega\pi} = \frac{L}{\pi}\mathrm{sinc}(L\omega)$

$e^{-at^2}\ (a>0) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{\sqrt{4\pi a}}e^{-\omega^2/4a}$

$\frac{1}{k^2+t^2}\ (k>0) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{2k}e^{-k|\omega|}$

$e^{iat} \circ\!\!-\!\!\bullet\ \delta(\omega+a)$

$\cos(at) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{2}(\delta(\omega+a) + \delta(\omega-a))$

$\sin(at) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{2i}(\delta(\omega+a) - \delta(\omega-a))$

$\hat{A}(\omega) = \hat{A}^*(-\omega) \iff A(t) \in \mathbb{R}$

Spatial Fourier Transform

$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\hat{E}(k_x)e^{ik_xx}\,dk_x \circ\!\!-\!\!\bullet\ \hat{E}(k_x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}E(x)e^{-ik_xx}\,dx$

$e^{-iax} \circ\!\!-\!\!\bullet\ \delta(a+k_x)$ $\quad e^{iax} \circ\!\!-\!\!\bullet\ \delta(k_x - a)$ $\quad \delta(x) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{2\pi}$ $\quad 1 \circ\!\!-\!\!\bullet\ \delta(k)$

$\mathrm{rect}(xL) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{2\pi|L|}\frac{\sin(k_x/2L)}{k_x/2L}$ $\quad \frac{\sin(xL)}{xL} \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{2L}\mathrm{rect}\left(\frac{k_x}{2L}\right)$

Faltung: $(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$

Trigrules:

$\arctan(-ix) = \frac{\pi}{2} - i\alpha(x)$, $x \in \mathbb{R}$

↳ $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ $\quad$ ⚠ $\tan = \frac{\sin}{\cos}$

↳ $\sin(-x) = -\sin(x)$, $\cos(-x) = \cos(x)$

↳ $\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$, $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$

↳ $\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$, $\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$

↳ $\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) - \sin(x+y))$ $\quad \sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

↳ $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$, $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$ $\quad \cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

Periodische Funktionen, Integraltabelle:

	$\int_0^{\pi/4}$	$\int_0^{\pi/2}$	$\int_0^{\pi}$	$\int_0^{2\pi}$	$\int_{-\pi/4}^{\pi/4}$	$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}$	$\int_{-\pi}^{\pi}$		$\int_0^{\pi/4}$	$\int_0^{\pi/2}$	$\int_0^{\pi}$	$\int_0^{2\pi}$	$\int_{-\pi/4}^{\pi/4}$	$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}$	$\int_{-\pi}^{\pi}$
$\sin$	$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$	1	2	0	0	0	0	$\cos^3$	$\frac{5}{6\sqrt{2}}$	$\frac{2}{3}$	0	0	0	0	0
$\sin^2$	$\frac{\pi-2}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\pi-2}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\cos^4$	$\frac{8+3\pi}{32}$	$\frac{3\pi}{16}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{8+3\pi}{16}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$
$\sin^3$	$\frac{8-5\sqrt{2}}{12}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	0	0	0	$\sin\cdot\cos$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0
$\sin^4$	$\frac{3\pi-8}{32}$	$\frac{3\pi}{16}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi-8}{16}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\sin^2\cdot\cos$	$\frac{1}{6\sqrt{2}}$	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3\sqrt{2}}$	$\frac{2}{3}$	0
$\cos$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	0	0	$\sqrt{2}$	2	0	$\sin\cdot\cos^2$	$\frac{4-\sqrt{2}}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	0	0
$\cos^2$	$\frac{2+\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\pi-2}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π								

Integral-stuff

Volumenelement (dV):

Kartesisch: $dx\,dy\,dz$

Zylindrisch: $\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz$

Sphärisch: $r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$

Bem: wenn r, ρ konstant (d.h. wir wollen Oberfläche, nicht Volumen) → einfach dr, $d\rho$ weglassen.

D.h. $A = \int_{\partial V} d\mu = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$

$M = \int_{\partial V} d\mu = \int_0^{2\pi}\int_0^{z}\rho\,dz\,d\varphi$

Transformationssatz:

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $\Phi: \Omega \to \Phi(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Diffeomorphismus. Falls f auf $\Phi(\Omega)$ integrierbar ist, dann gilt:

$$\int_{\Phi(\Omega)} f(\vec{y})\,d\vec{y} = \int_{\Omega} f(\Phi(\vec{x}))\,|\det d\Phi(\vec{x})|\,d\vec{x}$$

Bsp.: $\overset{\Phi(\Omega)}{\text{Kartesisch}} \to \overset{\Omega}{\text{Polarkoordinaten}}$ $\quad \Phi: \Omega \to \Phi(\Omega) = \mathbb{R}^n$

$(0,\infty)\times(0,2\pi)\times(-\infty,+\infty) \to \mathbb{R}^n$

$(r,\varphi,z) \longmapsto \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$, $|\det d\Phi| = r$

⚠ $\det(d\Phi(x)) =$ Funktionaldeterminante von Φ, $d\Phi(x) =$ Jacobimatrix

⚠ Allgemeine Funktionaldeterminante von $\Phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$: $\sqrt{\det(\underbrace{(d\Phi(x)^T d\Phi(x))}_{\text{gramsche Det. von } d\Phi})}$

⚠ Falls $\Phi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$: allgemeine Fkt.Det. von Φ: $\left\|\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} \times \frac{\partial\Phi}{\partial x_2}\right\|$

Intergralsätze

Satz von Stokes (in 2D: Green): $\underbrace{\iint_\Omega \vec{\nabla}\times\vec{A}\,dA}_{\text{Flussintegral}} = \underbrace{\int_{\partial\Omega}\vec{A}\,d\vec{s}}_{\text{Linienintegral}}$

Satz von Gauss: 2D: $\underbrace{\oint_{\partial\Omega}\vec{A}\cdot\vec{n}\,dA}_{\text{Flussintegral in der Ebene}} = \underbrace{\iint_\Omega \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\,dA}_{\text{Oberflächenintegral}}$

3D: $\underbrace{\oiint_{\partial\Omega}\vec{A}\vec{n}\,dA}_{\text{Flussintegral von VF über Oberfläche}} = \underbrace{\iiint\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\,dV}_{\text{Volumenintegral}}$

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega-\omega_0)u}\cdot\frac{2a}{a^2+u^2}\,du = \dots = 2\pi e^{-a|\omega-\omega_0|}$ ← Residuensatz

⚠ Über geschlossene Fläche bzw. Weg!

⚠ Bei Gauss: $\vec{n}$ von $\partial\Omega$ zeigt immer nach aussen!

Geometrie

Kugel: Oberfläche: $4\pi R^2$ $\quad$ Volumen: $\frac{4}{3}\pi R^3$

Zylinder: Mantelfläche: $M = 2\pi rh$ $\quad$ Volumen: $\pi r^2 h$

Kreis: $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2\}$ $\quad r \in \mathbb{R}_{>0}$: Radius

Fläche: $A = \pi r^2$, Umfang: $U = 2r\pi$, Volumen: $V =$

$\gamma(t) = (x_0 + r\cos(t), y_0 + r\sin(t))^T$, $t \in [0, 2\pi)$ $\quad \vec{n} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ MP(0,0)

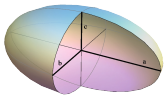
Ellipse: $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1\right\}$ $\quad a, b \in \mathbb{R}_{>0}$: Halbachsen

$\gamma(t) = (x_0 + a\cos(t), y_0 + b\sin(t))^T$, $t \in [0, 2\pi)$

Ellipsoidkoordinaten:

$\Phi: (0,\infty)\times[0,2\pi)\times[0,\pi] \to \mathbb{R}^3$

$\Phi(r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} ar\cos(\varphi)\sin(\theta) \\ br\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ cr\cos(\theta) \end{pmatrix}$



$\det(D\Phi(r,\varphi,\theta)) = abcr^2\sin(\theta)$

Integraltypen

Weg/Linienintegrale

Über Skalarfeld: $\boxed{\int_\gamma f(\vec{x})\,d\vec{s} = \int_a^b f(\vec{\gamma}(t))\,\|\dot{\vec{\gamma}}(t)\|_2\,dt}$ $\quad f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (1D)

KomA: $\int_\gamma f(z)\,ds = \int_a^b f(\gamma(t))\,\dot{\gamma}(t)\,dt$

Über Vektorfeld: $\boxed{\int_\gamma \vec{V}(\vec{x})\,d\vec{s} = \int_a^b \vec{V}(\vec{\gamma}(t))\,\dot{\vec{\gamma}}(t)\,dt}$ ↳ über geschlossener Weg

↳ (entlang des Wegs, d.h. Tangentialkomponente!)

Flussintegrale

Flussintegral in der Ebene: $\boxed{\int_\gamma \vec{V}\,d\vec{n} = \int_\gamma \vec{V}\vec{n}\,ds = \int_a^b \vec{V}(\vec{\gamma}(t))\,\vec{n}\,\|\dot{\vec{\gamma}}(t)\|_2\,dt}$

↳ ≙ Wegintegral über VF, aber Normalkomponente davon

↳ Flussintegral in der Ebene durch ein geschlossener Weg → Gauss (2D) ✓

Gauss 2D

Oberflächenintegrale

Flussintegral von Vektorfeld über Oberfläche: ⚠ Gebiet links!

$\boxed{\iint_S \vec{A}(\vec{x})\,d\vec{s} = \pm\iint_B A(\Phi)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u} \times \frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)du\,dv}$ $\quad$ wobei: $\Phi: B \to \mathbb{R}^3$, $(u,v) \mapsto S$ (Parametrisierung von S)

$d\vec{s} = \vec{n}\cdot dS$ $\quad$ Fluss von innen nach aussen / aussen nach innen

↳ Flussintegral von Vektorfeld über eine geschlossene Oberfläche oder wenn VF = 0 ∀ Punkte ausserhalb der Fläche → Gauss (3D) ✓

Flussintegral von Skalarfeld über Oberfläche: ⚠ Gebiet links!

$\boxed{\iint_S f(\vec{x})\,d\mu = \iint_B f(\Phi)\left\|\frac{\partial\Phi}{\partial u} \times \frac{\partial\Phi}{\partial v}\right\|_2 du\,dv}$ $\quad$ wobei $\Phi: B \to \mathbb{R}^3$, $(u,v) \mapsto S$

Flächenelement. $\left\|\frac{\partial\Phi}{\partial u} \times \frac{\partial\Phi}{\partial v}\right\|du\,dv = |\det d\Phi|\,du\,dv$

Gauss (3D)

Volumenintegrale

Allgemeines Volumenintegral: $\boxed{\int_V f(x)\,dV}$

↳ kartesisch: $\boxed{\int_x\int_y\int_z f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}$

↳ zylindrisch: $\boxed{\int_\rho\int_\varphi\int_z f(\rho,\varphi,z)\,\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz}$

↳ sphärisch: $\boxed{\int_r\int_\varphi\int_\theta f(r,\varphi,\theta)\,r^2\sin\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta}$

SI-Einheiten

$[E] = [W] =$ Joule $J = \frac{kg\cdot m^2}{s^2}$ $\quad \varepsilon_0 = 8.854\times10^{-12}\frac{As}{Vm}$ $\quad \mu_0 = \frac{V\cdot s}{A\cdot m}$

$[P] =$ Watt $W = \frac{J}{s}$ $\quad [F] =$ Newton $= \frac{kg\cdot m}{s^2}$

$[R] =$ Ohm $\Omega = \frac{kg\cdot m^3}{A^2s^3}$

$[U] =$ Volt $V = \frac{kg\cdot m^2}{As^3}$

$[B] =$ Henry $H = \frac{V\cdot s}{m^2}$?

$[H] =$ Tesla $T = \frac{kg}{A^2s^2}$

⚠ falls A_x, A_y, A_z Fkt. von x, y, z sind, mit $\begin{cases} x = r\cos\phi\sin\theta \\ y = r\sin\phi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}$ ersetzen.

falls B_r, B_θ, B_ϕ Fkt. von r, θ, ϕ sind, mit $\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = \arccos\frac{z}{r} \\ \phi = \arctan\frac{y}{x} \end{cases}$ ersetzen.

- Koordinatentransformation, how:

z.B. Kartesisch → Kugel ⇒ $A = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$

→ $A_r = A\cdot\vec{n}_r = A\cdot(\underbrace{\sin\theta\cos\phi\,\vec{n}_x + \sin\theta\sin\phi\,\vec{n}_y + \cos\theta\,\vec{n}_z}_{\vec{n}_r \text{ in Kart. Koord.}}) =$

$= A_x\sin\theta\cos\phi + A_y\sin\theta\sin\phi + A_z\cos\theta$

analog für A_θ, A_ϕ, auch für Kugel → Kart.:

$B = \begin{pmatrix} B_r \\ B_\theta \\ B_\phi \end{pmatrix} \to B_x = B\cdot\vec{n}_x =$

$= B\cdot(\underbrace{\sin\theta\cos\phi\,\vec{n}_r + \cos\theta\cos\phi\,\vec{n}_\theta - \sin\phi\,\vec{n}_\phi}_{\vec{n}_x \text{ in Kugelkoordinaten}})$

$= B_r\sin\theta\cos\phi + B_\theta\cos\theta\cos\phi - B_\phi\sin\phi$

Koordinatensysteme

Einheitsvektoren

Kartesisch → Sphärisch:

$\vec{n}_x = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{n}_r + \cos\theta\cos\varphi\,\vec{n}_\theta - \sin\varphi\,\vec{n}_\varphi$

$\vec{n}_y = \sin\theta\sin\varphi\,\vec{n}_r + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{n}_\theta - \cos\varphi\,\vec{n}_\varphi$

$\vec{n}_z = \cos\theta\,\vec{n}_r - \sin\theta\,\vec{n}_\theta$

Sphärisch → Kartesisch

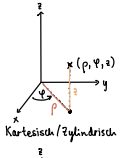
$\vec{n}_r = \frac{x}{r}\vec{n}_x + \frac{y}{r}\vec{n}_y + \frac{z}{r}\vec{n}_z$

$\vec{n}_\theta = \frac{xz}{r\cdot\sqrt{x^2+y^2}}\vec{n}_x + \frac{yz}{r\cdot\sqrt{x^2+y^2}}\vec{n}_y - \frac{x^2+y^2}{r\cdot\sqrt{x^2+y^2}}\vec{n}_z$

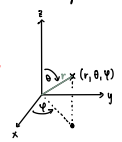
$\vec{n}_\varphi = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{n}_x + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{n}_y$

Transformation:

Zu \ Von	Kartesisch	Zylindrisch	Sphärisch
Kartesisch		$x=\rho\cos\varphi$ $y=\rho\sin\varphi$ $z=z$	$x=r\sin\theta\cos\varphi$ $y=r\sin\theta\sin\varphi$ $z=r\cos\theta$
Zylindrisch	$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ $\varphi=\arctan\frac{y}{x}$ $z=z$		$\rho=r\sin\theta$ $\varphi=\varphi$ $z=r\cos\theta$
Sphärisch	$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $\theta=\arccos\frac{z}{r}$ $\varphi=\arctan\frac{y}{x}$	$r=\sqrt{\rho^2+z^2}$ $\theta=\arctan\frac{\rho}{z}$ $\varphi=\varphi$	



Kartesisch / Zylindrisch



Kartesisch / Sphärisch

Vektoroperatoren

f skalarfeld, $\vec{A}$ Vektorfeld

∇f: Kartesisch: $\frac{\partial f}{\partial x}\vec{n}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{n}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{n}_z$

Zylindrisch: $\frac{\partial f}{\partial \rho}\vec{n}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{n}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{n}_z$

Sphärisch: $\frac{\partial f}{\partial r}\vec{n}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{n}_\theta + \frac{1}{r\cdot\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{n}_\varphi$

$\nabla^2 f$: Kartesisch: $\partial_x^2 f + \partial_y^2 f + \partial_z^2 f$

Zylindrisch: $\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

Sphärisch: $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}$

$\nabla\cdot\vec{A}$: Kartesisch: $\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

Zylindrisch: $\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

Sphärisch: $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$

$\nabla\times\vec{A}$: Kartesisch: $\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{n}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{n}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{n}_z$

Zylindrisch: $\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\vec{n}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)\vec{n}_\varphi + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\varphi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\right)\vec{n}_z$

Sphärisch: $\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\varphi\sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\vec{n}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right)\vec{n}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\vec{n}_\varphi$

$\nabla^2\vec{A}$: Kartesisch: $\nabla^2\vec{A} = \nabla^2 A_x\vec{n}_x + \nabla^2 A_y\vec{n}_y + \nabla^2 A_z\vec{n}_z$

Zylindrisch:

Sphärisch:

$$\left(\nabla^2 A_r - \frac{2A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial(A_\theta\sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right)\vec{n}_r$$
$$+\left(\nabla^2 A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2\sin^2\theta} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial\theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right)\vec{n}_\theta$$
$$+\left(\nabla^2 A_\varphi - \frac{A_\varphi}{r^2\sin^2\theta} + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} + \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\vec{n}_\varphi$$

Wichtige Grössen:

- Kreiswellenzahl: $k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi f}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$ $\quad [k] = m^{-1}$
- Kreisfrequenz: $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = v\cdot k$ ($\neq$ Winkelgeschwindigkeit)
- Phasen/Winkelgeschwindigkeit: $v = \lambda f = \frac{\omega}{k}$
- Wellenlänge: $\lambda = \frac{\omega}{kf} = \frac{\omega T}{k} = vT = \frac{2\pi}{k}$ $\quad [\lambda] = m$

$$\lambda_{medium} = \frac{v_{medium}}{f}$$

Geschwindigkeiten Überblick:

- Seilwelle: $v = \sqrt{\frac{S}{\rho}}$ $\quad$ S.. Seilspannung, ρ.. Seildichte
- Schallwelle: $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ $\quad$ E.. Elastizitätsmodul, ρ.. Dichte (Medium)
- Saite: $v = \sqrt{\frac{F_S}{\mu}}$ $\quad$ μ.. lineare Dichte (="Dichte in 1 Dim.") $[\mu] = kg/m$

$$n = \frac{c_0}{v} \quad \text{mit } n\text{.. Brechungsindex}$$

- Vektorpotential eines magn. Körpers ist i.A.:

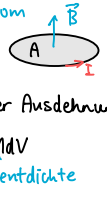
$$A(\vec{r}) = \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}_b(\vec{r})}{R}dV'}_{\text{Vektorpotential eines Körpers mit Stromdichte } \vec{J}_b \text{ im Inneren}} + \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{\partial V}\frac{\vec{K}_b(\vec{r})}{R}dA'}_{\text{Flächenstromdichte } K_b \text{ auf der Oberfläche}}$$

mit $\vec{J}_b(\vec{r}) = \nabla'\times\vec{M}(\vec{r}')$ und $\vec{K}_b(\vec{r}) = \vec{M}(\vec{r}')\times\vec{n}$

- Magnetfeld $\vec{B}$ im Inneren einer homogen magnetisierten Kugel mit Magnetisierung $\vec{M}$: $\boxed{\vec{B} = \frac{2}{3}\mu_0\vec{M}}$ $\quad$ ↳ $\nabla\times\vec{M}(\vec{r}) = 0$ (d.h. Feld ist alleindurch die Oberflächenströme bestimmt!)
- Grassmann-Identität für Kreuzprodukt:

$$\boxed{\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\cdot\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = (\vec{a}\cdot\vec{c})\cdot\vec{b} - (\vec{b}\cdot\vec{c})\cdot\vec{a}}$$

- χ_m = Magnetisierbarkeit
- $\vec{M} = \chi_m\vec{H} = \chi_m\frac{\vec{B}}{\mu_0\mu}$ $\quad \mu = 1+\chi_m$, $\vec{B} = \mu_0\mu\vec{H}$
- "Magnetfeld" = B
- $U = -\frac{\partial}{\partial t}\Phi$, $\Phi = N\Phi_A$, $\Phi_A = \iint_A \vec{B}_i\,d\vec{A}$ $\quad$ homogen auf Oberfläche $\quad$ Φ_A: magnetischer Strom
- Induktionsgesetz: $\boxed{u(t) = \oint_C \vec{E}\cdot d\vec{s} = -N\frac{\partial}{\partial t}\Phi_A = -N\frac{\partial}{\partial t}\iint_A \vec{B}\cdot d\vec{A}}$



- Vektorpotential eines beliebigen magnetischen Körpers endlicher Ausdehnung:

$$A(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{M}(\vec{r}')\times\vec{R}}{R^3}dV' \qquad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' \qquad \text{⚠ } dm = M\,dV$$

Dipolmomentdichte

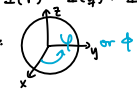
- Was bringen uns diese Potentiale?

$\boxed{\vec{E} = -\nabla\Phi, \quad \vec{B} = \nabla\times\vec{A}}$ man kann die Felder aus den Potentialen berechnen!

- Bedingung für D an einer Oberfläche: $D_{\perp 1} = D_{\perp 2}$ ⇒ falls über Kugeloberfläche → $\boxed{\frac{\partial\vec{B}_1}{\partial r} = \frac{\partial\vec{B}_2}{\partial r}}$
- Potential eines el. Dipols = Superposition der Potentiale der beiden einzelnen

Dipolladungen: $\Phi(\vec{r}) = \Phi(q) + \Phi(-q)$

- Azimuthalwinkel:



Sonstiges

$\mathrm{Re}\{a\}\cdot\mathrm{Re}\{b\} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{a\cdot b + a\cdot b^*\}$

$\hat{E}(r,\omega') = \frac{1}{2}[E(r)\delta(\omega'-\omega) + E^*(r)\delta(\omega'+\omega)]$

$i\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ 0\end{pmatrix}$ $\quad$ $-i\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ -\sin\varphi\\ 0\end{pmatrix}$

Dipolmoment: $p = \int_V \vec{r}\cdot\rho(\vec{r})\,dV$

Geometrische Reihe: $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$, $|q|<1$

Monochromatische Wellen

- können geschrieben werden als: $\boxed{\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\{\underline{\vec{E}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\}}$, $\underline{\vec{E}}(\vec{r}) \in \mathbb{C}$
- falls $\vec{E}$ gegeben & wollen $\underline{\vec{E}}$ bestimmen:
  1) schreibe $\begin{cases}\cos(kr-\omega t) = \mathrm{Re}\{e^{ikr}e^{-i\omega t}\}\\ \sin(kr-\omega t) = \mathrm{Re}\{-ie^{ikr}e^{-i\omega t}\}\end{cases}$ und schreibe $\vec{E}$ auf diese Weise. ⚠ $\mathrm{Re}\{z_1\} + \mathrm{Re}\{z_2\} = \mathrm{Re}\{z_1+z_2\}$

Dann $\underline{\vec{E}}$ ablesen: $\vec{E} = \mathrm{Re}\{\underline{\vec{E}}e^{-i\omega t}\}$ ↑ was auch immer hier steht ist $\underline{\vec{E}}$

Ebene Wellen

⚠ ebene Welle ⇒ monochromatische Welle

- Basis von Lösungen der homogenen Wellengleichung.
  ↳ Wegen linearität der Maxwellschen Gleichungen: Superposition ebener Wellen sind wiederum Lösungen der Wellengleichung.
  ↳ In Problemen mit sphärischer Symmetrie: sphärische Wellen als Basisfunktionen benutzen!

einfachste sphärische Welle:

$$\vec{E}(r,\theta,\phi,t) = A\frac{\sin(\theta)}{r}[\cos(kr-\omega t) - (kr)^{-1}\sin(kr-\omega t)]\vec{n}_\phi$$

↳ sphärische Wellen: Flächen konstanter Phase sind Kugeln.

d.h. wenn ich über die Fläche laufe, dann ändert sich auf der Fläche die Phase der Wellen nicht.

- Bedingung, s.d. Feld reell im Zeitbereich: $\hat{H}^*(-\omega) = \hat{H}(\omega)$
- $k(x^2+y_0^2)^{1/2} - ky_0 \cong \frac{kx^2}{2y_0}$ für $ky_0 \gg 1$ und $x \ll y_0$
- Faltungsintegral: $(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$
- Arbeit $W = \int_a^b \vec{F}\,d\vec{s}$
- $\vec{a}\times\vec{b}$ ist ⊥ auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Falls $\vec{c}\parallel\vec{a}$, dann ist $\vec{a}\times\vec{b}$ auch ⊥ $\vec{c}$
- Grenzflächen: Voraussetzung, damit ein exponentieller Abfall im Medium 2 möglich ist:

$n_3 = \sqrt{\varepsilon_3\mu_3}$, $n_2 = \sqrt{\varepsilon_2\mu_2}$, $n_1 = \sqrt{\varepsilon_1\mu_1}$ $\quad$ ① $n_2 < n_1$ ② $\theta_1 \geq \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$

- Räumliches Spektrum: $\hat{E}(k_x,k_y,k_z) = \frac{1}{8\pi^3}\iiint_{-\infty}^{\infty}\vec{E}(x,y,z)e^{-i(k_x x + k_y y + k_z z)}\,dx\,dy\,dz$

falls $z=0$: $\hat{E}(k_x,k_y,0) = \frac{1}{4\pi^2}\iint_{-\infty}^{\infty}\vec{E}(x,y,0)e^{-i(k_x x + k_y y)}\,dx\,dy$

- Auslingzeit τ: $e^{t/\tau}$ ← unter dem Bruch.
- ideal reflektierend/ideal leitend: $E = H = 0$
- Dispersion in Materien: Brechungsindex für elektromagnetische Wellen ist frequenzabhängig.

- $\vec{E} = -\nabla\Phi$
- Oberflächenladungsdichte bestimmen: $\int\vec{E}\,d\vec{A} \underset{\text{falls } \vec{E}\parallel d\vec{A}}{=} \int E_z\,dA = \int\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,dA$

Aus Serie 10 Aufgabe 2: verschiedene Dipole: ← Ort des Dipols

- ▷ statischer elektrischer Dipol: $\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'$
- ▷ zeitharmonisch oszillierender elektrischer Dipol
- ▷ magnetischer Dipol

Intuitiv: Unterschied zw. diesen Dipolen: