Das Wichtigste auf 6 Seiten

Signal und Systemtheorie 1

Basiert auf der Vorlesung von Prof. Dr. H. Bölcskei HS2021

Lina De Windt

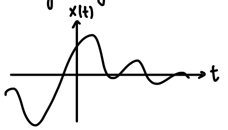
Signaleinteilung

Signal = Funktion. $x: U \rightarrow V$

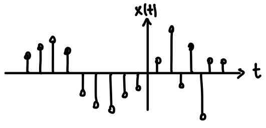
Zeitbereich U = Definitionsbereich

Amplitudenbereich V = Zielbereich

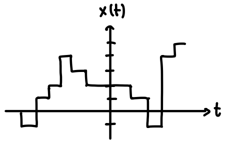
Analoges Signal:



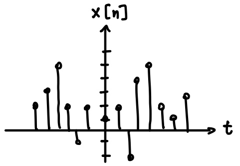
Zeitdiskretes Signal:



Amplitudendiskretes Signal:



Digitales Signal:

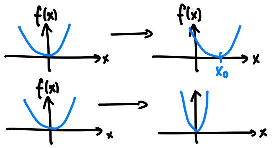


Funktionsoperationen

Verschiebung: $f(x) \rightarrow f(x-x_0)$

Streckung / Verstauchung: $f(x) \rightarrow f(\alpha x)$

$\alpha<1$ $\alpha>1$



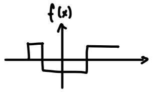
Spiegelung: Um die x-Achse: $f(x) \rightarrow f(-x)$

Um die y-Achse: $f(x) \rightarrow -f(x)$

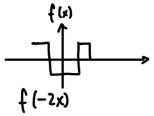
Bei Verschachtelungen: $f(\alpha x+\beta) = f(\alpha \cdot (x+\frac{\beta}{\alpha})) = f(-\alpha(x-x_0))$ in dies Form bringen.

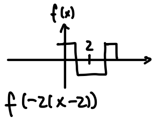
Dann: zuerst spiegeln / strecken um α, dann um x_0 verschieben.

Bsp:



$f(2x+4) = f(-2(x-2))$:





Lineare Räume

Definition: (Linearer Raum / Vektorraum) Ein linearer Raum über $\mathbb{C}$ ist eine nichtleere Menge X zusammen mit: $x_1, x_2 \in X$

$\oplus$: Einer Abbildung von $X \times X$ nach X, genannt Addition und notiert mit x_1+x_2

$\odot$: Einer Abbildung von $\mathbb{C} \times X$ nach X, genannt skalare Multiplikation und notiert mit αx

wobei $\oplus$ und $\odot$ folgende Eigenschaften erfüllen müssen: $\forall x, x_i \in X, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$:

A1) $x_1+x_2 = x_2+x_1$ Kommutativgesetz
A2) $x_1+(x_2+x_3) = (x_1+x_2)+x_3$ Assoziativgesetz
A3) $\exists!\, 0 \in X:\ 0+x=x$ Nullelement $\exists!$ = es existiert ein einziges
A4) $\exists!\, x \in X:\ x+(-x)=0$ Inverses Element
SM1) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ Assoziativgesetz
SM2) $\exists!\, 1 \in \mathbb{C}:\ 1 \cdot x = x$ Einselement
A&SM1) $\alpha(x_1+x_2) = \alpha x_1 + \alpha x_2$ Distributivität 1
A&SM2) $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$ Distributivität 2

Ausserdem: Überprüfe: Bildet die Addition & skalare Multiplikation tatsächlich immer nach X ab?

Beispiele: $\mathbb{R}^M$ und $\mathbb{C}^M$ zusammen mit der Vektoraddition & skalaren Multiplikation von Vektoren bilden einen linearen Raum.

Definition (linearer Unterraum): Eine nichtleere Menge $\tilde{X} \subseteq X$ ist ein linearer Unterraum von X, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1. $x_1+x_2 \in \tilde{X}$ $\forall x_1, x_2 \in \tilde{X}$
2. $\alpha x \in \tilde{X}$ $\forall x \in \tilde{X} \wedge \forall \alpha \in \mathbb{C}$

Basen in linearen Räumen:

Eine Basis eines linearen Raumes X ist eine Teilmenge B von X, mit welcher man alle Elemente von X als eindeutige Linearkombination von Elementen aus B darstellen kann. Die Koeffizienten der Linearkombination werden Koordinaten genannt.

Definition (Basis): Die Menge $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^M$, $\vec{e}_k \in \mathbb{C}^M$, ist eine Basis für $\mathbb{C}^M$, wenn gilt:

1. Vollständigkeit: $\operatorname{span}\{\vec{e}_k\}_{k=1}^M = \{c_1\vec{e}_1 + \dots + c_M\vec{e}_M \mid c_1, \dots, c_M \in \mathbb{C}\} = \mathbb{C}^M$
2. Lineare Unabhängigkeit: $\sum_{k=1}^M c_k\vec{e}_k = 0 \Rightarrow c_k = 0 \ \forall k = 1, 2, \dots, M$

↳ Eine unendliche Menge ist linear unabhängig, wenn jede endliche Teilmenge linear unabhängig ist.

Analyse- und Synthesematrizen:

Betrachte ein Signal $\vec{x} \in \mathbb{C}^M$. Die zugehörigen Entwicklungskoeffizienten in einer Basis $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^M$ sind: $\boxed{c_k := \langle \vec{x}, \vec{e}_k \rangle = \vec{e}_k^H \vec{x}}$, $k = 1, \dots, M$

Diese können sehr einfach mithilfe der Analysematrix T berechnet werden:

$$T := \begin{bmatrix} e_1^H \\ e_2^H \\ \vdots \\ e_M^H \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_M \end{bmatrix} = Tx$$

Bem: T hat vollen Rang & ist quadratisch.

Duale Basis: zu einer Basis B ist die Basis $\{\tilde{\vec{e}}_k\}_{k=1}^M$ die folgendes erfüllt:
↳ $\tilde{T}$

Menge $\{\tilde{\vec{e}}_k\}_{k=1}^M$ mit $\tilde{\vec{e}}_k \in \mathbb{C}^M$, s.d. $\boxed{\vec{x} = \sum_{k=1}^M \langle \vec{x}, \vec{e}_k \rangle \tilde{\vec{e}}_k}$ $\forall \vec{x} \in \mathbb{C}^M$

w. $\vec{e}_k$ = Basisvektoren der Basis B

Diese kann man mithilfe der Synthesematrix $\tilde{T}^H$ finden:

$$\boxed{\tilde{T}^H \overset{!}{=} T^{-1}} \qquad \tilde{T}^H = [\tilde{\vec{e}}_1 \ \dots \ \tilde{\vec{e}}_M]$$

(So wird aus $\vec{x} = \sum_{k=1}^M \langle \vec{x}, \vec{e}_k \rangle \tilde{\vec{e}}_k = \sum_{k=1}^M c_k \tilde{\vec{e}}_k$

$\Rightarrow \vec{x} = \tilde{T}^H \vec{c} = \tilde{T}^H T x \overset{!}{=} I_M x$)

Eine Basis und ihre Dualbasis sind biorthonormal, d.h. sie erfüllen:

$$\langle \vec{e}_k, \vec{e}_{k'} \rangle = \begin{cases} 1 & k = k' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{da } T\tilde{T}^H = TT^{-1} = I_M$$

Achtung! $\vec{c}$ sind nicht die Koordinaten von $\vec{x}$ bezüglich der Basis $\{e_i\}_{i=1}^M$!

im Allgemeinen: $\vec{x} \neq c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + \dots + c_M\vec{e}_M$

$\vec{x} = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + \dots + c_M\vec{e}_M = \sum_{i=1}^M \langle x, \vec{e}_i \rangle \vec{e}_i$ gilt nur für orthonormale Basen.

Dualbasen verhalten sich symmetrisch: $x = \sum \langle x, \tilde{e}_k \rangle e_k = \tilde{T}^H T x =$

(d.h. wir könne ihre Rolle umkehren) $= \sum \langle x, e_k \rangle \tilde{e}_k = T^H \tilde{T} x = T^H (T^{-1})^H x$

$= I_M x = x$

Bem: Für Orthonormale Basen gilt $T^H = T^{-1} \Rightarrow \tilde{T} = T$ (selbst-dual)

Und sie sind normerhaltend: $\|c\|^2 = c^H c = x^H T^H T x = x^H I_M x = \|x\|^2$

Für allgemeine Basen gilt nur: $\lambda_{min}(T^H T)\|x\|^2 \leq \|c\|^2 \leq \lambda_{max}(T^H T)\|x\|^2$

wobei λ jeweils einen EW von $T^H T = \sum_i v_i \lambda_i v_i^H$ ist.

Funktionsräume als lineare Räume:

Funktionen sind ∞-dimensionale Vektoren.

Sei X die Menge aller Fkt. von S nach $\mathbb{C}$ (linearer Raum). Wir definieren die Addition und Multiplikation: Punktweise Addition und Multiplikation:

$\oplus$: $\forall x_1, x_2 \in X:\ +: X \times X \rightarrow X:\ (x_1+x_2)(s) = x_1(s) + x_2(s)$ $\forall s \in S$
$\odot$: $\forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall x \in X:\ \cdot: \mathbb{C} \times X \rightarrow X:\ (\alpha x)(s) = \alpha x(s)$ $\forall s \in S$

Normierte lineare Räume:

Definition: (Norm): Eine relle Fkt. $\|\cdot\|$, def. auf einen lin. Raum X ist eine Norm auf X, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

$\forall x, x_i \in X, \forall \alpha \in \mathbb{C}$

N1) $\|x\| \geq 0$ Nichtnegativität
N2) $\|x_1+x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|$ $\wedge$ $\|x_1-x_2\| \geq \|x_1\| - \|x_2\|$ Dreiecksungleichung
N3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ Homogenität
N4) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ Definitheit

Definition: (Normierter linearer Raum): Ein normierter Vektorraum ist ein Paar $(X, \|\cdot\|)$, bestehend aus einem Vektorraum X und einer Norm auf X (Längenmass)

In einem normierten linearen Raum kann man den Abstand zw. Elementen des Raumes messen. Wir definieren den Abstand: $X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\boxed{d(x_1, x_2) := \|x_1 - x_2\|}$$

Bspe normierte Fkt.räume:

$L^p := \{x: \mathbb{R} \to \mathbb{C} : \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^p dt < \infty\}$ mit $\|x\|_{L^p} := \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^p dt\right)^{1/p}$ w. $1 \leq p < \infty$

$\ell^p := \{x: \mathbb{Z} \to \mathbb{C}: \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^p < \infty\}$ mit $\|x\|_{\ell^p} := \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^p\right)^{1/p}$

Definition (Inneres Produkt): Sei X ein linearer Raum. Ein inneres Produkt auf X ist eine Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:

1) $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$ Additivität
2) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$ Homogenität
3) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle^*$ konjugierte Symmetrie
4) $\langle x, x\rangle \geq 0 \ \wedge \ \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ positive Definitheit

Definition (Orthogonalität): Die Elemente $x, y \in X$, X lin. Raum, ausgestattet mit $\langle\cdot,\cdot\rangle$, sind orthogonal, wenn $\boxed{\langle x, y\rangle = 0}$

Cauchy-Schwarz Ungleichung: $\boxed{|\langle u,v\rangle|^2 \leq \langle u,u\rangle \cdot \langle v,v\rangle}$

$\Rightarrow |\langle u,v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$

Induzierte Norm: $\boxed{\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}}$ mit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ inneres Produkt.
Alle Eigenschaften der Norm sind auch für die induzierte Norm erfüllt.

Hilberträume

Definition (Hilbertraum): Ist ein lin. Raum, der mit einem inneren Produkt ausgestattet und vollständig ist.

Vollständigkeit eines Raumes X: der Endpkt. jeder konvergenten Folge (Cauchy Folge) von Vektoren des Raumes ist im Raum enthalten.

Intuitiv: X hat keine Löcher und keinen offenen Rand.

$$\lim_{n\to\infty} \vec{v}_n = \vec{v}^*, \quad \text{w. } \vec{v}_n \in X \Rightarrow \vec{v}^* \in X$$

Bspe Hilberträume: $\mathbb{C}^n$ mit $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i^*$

$L^2(\mathbb{R}) = \{x(t): \mathbb{R} \to \mathbb{C} : \langle x,x\rangle < \infty\}$ mit $\langle x,y\rangle = \int_{\mathbb{R}} x(t) y(t)\, dt$

$\ell^2(\mathbb{Z}) = \{x[n]: \mathbb{Z} \to \mathbb{C} : \langle x,x\rangle < \infty\}$ mit $\langle x,y\rangle = \sum_{\mathbb{Z}} x[n] y^*[n]$

Hilberträume - Orthonormale (Schauder) Basis:

Definition (Vollständiges Orthonormalsystem): Die Vektoren $\{e_\ell\}_{\ell=-\infty}^{\infty}$ in X bilden ein vollständiges Orthonormalsystem für den Hilbertraum X, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

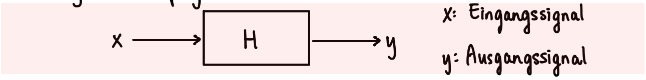
1) $\langle e_\ell, e_{\ell'}\rangle = \begin{cases} 1 & \ell = \ell' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ für $\ell, \ell' \in \mathbb{Z}$ Orthonormalität
2) $\forall x \in X$ gilt $\|x\|^2 = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} |\langle x, e_\ell\rangle|^2$ Vollständigkeit

Wenn $\{e_\ell\}_{\ell=-\infty}^{\infty}$ ein vollständiges Orthonormalsystem für X ist, dann kann jedes $x \in X$ in der Form $x = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \langle x, e_\ell\rangle e_\ell$ dargestellt werden.

Systeme

Systeme und Systemeigenschaften:

Ein System hat folgendes Blockschaltbild:



$x \in X, y \in Y$, X, Y lin. Räume, $H: X \to Y$

Definition (System): Ein System H ist eine Abbildung, die einem Eingangssignal x ein Ausgangssignal y zuordnet. Wir schreiben $y = Hx$

Linearität von Systemen:

Definition (Linearität): Ein System $H: X \to Y$ ist linear, wenn folgendes gilt:

1) $H(\alpha x) = \alpha Hx \quad \forall x \in X \wedge \forall \alpha \in \mathbb{C}$ Homogenität
2) $H(x_1 + x_2) = Hx_1 + Hx_2 \quad \forall x_1, x_2 \in X$ Additivität

Bem: Wenn X, Y über $\mathbb{R}$, dann $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ zusammen: $H(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Hx_1 + \beta Hx_2 \quad \forall x_1, x_2 \in X, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

Null- und Bildraum von Systemen:

Definition: (Nullraum): Der Nullraum $\mathcal{N}(H)$ des lin. Systems $H: X \to Y$ ist ein lin. Unterraum von X definiert durch: $\mathcal{N}(H) = \{x \in X: Hx = 0\} \leq X$

Definition (Bildraum): Der Bildraum $\mathcal{R}(H)$ des lin. Systems $H: X \to Y$ ist ein lin. Unterraum von Y definiert durch: $\mathcal{R}(H) = \underbrace{\{y \in Y: \exists x \in X : Hx = y\}}_{Hx:\, x \in X} \leq Y$

Linearität & Stetigkeit von Systemen:

Theorem: (Stetige Systeme): Das System H ist linear stetig dann und nur dann, wenn: $H\left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i H e_i \quad \forall$ konvergente Reihen $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$

Wir nehmen in SigSys1 an, dass ein lin. System immer auch stetig ist.

Das inverse System:

Definition (Inverses System): Das System $H: X \to Y$ ist invertierbar, wenn es ein System $G: Y \to X$ gibt, so dass $GH = I_X$ und $HG = I_Y$, wobei I_X bzw. I_Y die Identitätsabbildung für den jeweiligen linearen Raum ist. In diesem Fall bezeichnen wir G als das zu H zugehörige inverse System und schreiben $H^{-1} = G$.

Theorem: Eindeutigkeit des inversen Systems
Wenn ein System invertierbar ist, dann ist seine Inverse eindeutig.

Theorem: Linearität des inversen Systems:
Die inverse eines linearen Systems ist linear.

Darstellung lin. Systeme über Matrizen:

X, Y endlichdim. lin. Räume mit den dazugehörigen Basen $B_X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ und $B_Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$

$$x = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$$
$$Hx = y = \beta_1 y_1 + \ldots + \beta_n y_n$$
$$Hx = H(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n) = \alpha_1 Hx_1 + \ldots + \alpha_n Hx_n$$

Hx_i ist ein Element von Y. Deshalb können wir es in der Basis B_Y ausdrücken:

$$Hx_1 = t_{11} y_1 + \ldots + t_{m1} y_m$$
$$Hx_2 = t_{12} y_1 + \ldots + t_{m2} y_m$$
$$\vdots$$
$$Hx_n = t_{1n} y_1 + \ldots + t_{mn} y_m$$

Dann lässt sich Hx schreiben als:

$$Hx = \alpha_1 [t_{11} y_1 + \ldots + t_{m1} y_m] + \alpha_2 [t_{12} y_1 + \ldots + t_{m2} y_m] + \ldots + \alpha_n [t_{1n} y_1 + \ldots + t_{mn} y_m]$$

Nun klammern wir jeweils $y_1, \ldots, y_m$ aus, um die $\beta_1, \ldots, \beta_m$ herauszulesen:

$$Hx = y = \beta_1 y_1 + \ldots + \beta_m y_m$$
w. $\beta_1 = \alpha_1 t_{11} + \alpha_2 t_{12} + \ldots + \alpha_n t_{1n}$
$\vdots$
$\beta_m = \alpha_1 t_{m1} + \alpha_2 t_{m2} + \ldots + \alpha_n t_{mn}$

In Matrixform bringen:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{m1} & t_{m2} & \cdots & t_{mn} \end{bmatrix}}_{H} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \qquad \dim(H) = m \times n$$

Eigenschaften zeitkontinuierlicher linearer Systeme:

Systeme auf lin. Räumen von Fkt. auf $\mathbb{R}$, Notation: $y(t) = (Hx)(t)$

Zeitinvariantes System: Ein System $H: X \to Y$ ist zeitinvariant, wenn

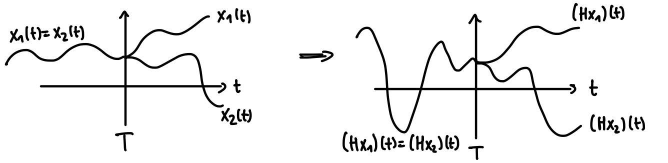
$$\boxed{HT_\tau x = T_\tau Hx \quad \forall x \in X \ \wedge \ \forall \tau \in \mathbb{R}}$$

mit den Zeitverschiebungsoperator $(T_\tau x)(t) = x(t - \tau)$

d.h. also: $(Hx(\cdot - t_0))(t) = (Hx)(t - t_0) = y(t - t_0)$

Kausales System: Ein System $H: X \to Y$ ist kausal, wenn $\forall x_1, x_2 \in X \wedge \forall T \in \mathbb{R}$

$$\boxed{x_1(t) = x_2(t) \ \forall t \leq T \Longrightarrow (Hx_1)(t) = (Hx_2)(t) \ \forall t \leq T}$$



Gedächtnisloses System: Ein System $H: X \to Y$ ist gedächtnislos, wenn: $\forall x \in X \wedge \forall$ Zeitpunkte $t_0 \in \mathbb{R}$ das Ausgangssignal $(Hx)(t)$ zum Zeitpkt. t_0 nur von $x(t_0)$ abhängt. Bem: gedächtnislos $\Rightarrow$ kausal

BIBO-Stabilität: Intuition: beschränktes Eingangssignal $\Rightarrow$ beschränktes Ausgangssignal
Ein System $H: X \to Y$ ist BIBO-stabil, wenn:
$\forall x \in X$ mit $|x(t)| < B_X < \infty \ \forall t$, ein $B_Y \in \mathbb{R}$ existiert, s.d. $|(Hx)(t)| \leq B_Y \ \forall t$.

Analoge lineare zeitinvariante Systeme (LTI) im Zeitbereich:

LTI-Systeme sind vollständig durch ihre Impulsantwort definiert.

Impulsantwort $h(t) = (H\delta)(t)$ mit $\delta(t) = \begin{cases} 1 & t=0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$, $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1$

D.h. also: $\boxed{y(t) = (Hx)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = (x*h)(t)}$

LTI: Ausgangssignal = Faltung des Eingangssignals mit der Impulsantwort!

Faltung:

Definition: $\boxed{(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau}$

Existenz der Faltung: Theorem: Young'sche Ungleichung:

Seien x und h integrierbare Fkt., mit $\|x\|_p, \|h\|_q < \infty$ für $1 \leq p, q < \infty$. Mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$ gilt:

$$\|x * h\|_r \leq \|x\|_p \|h\|_q$$

d.h. also: die Faltung ist eine Fkt. von $\mathcal{L}^p \times \mathcal{L}^q$ nach $\mathcal{L}^r$.

Eigenschaften der Faltung:

1) $x_1 * x_2 = x_2 * x_1$ kommutativ
2) $(x_1 * x_2) * x_3 = x_1 * (x_2 * x_3)$ assoziativ
3) $x_1 * (x_2 + x_3) = x_1 * x_2 + x_1 * x_3$ distributiv/additiv
4) $x_1 * (\alpha x_2) = \alpha x_1 * x_2$ homogen
5) $x_1 * (\alpha x_2 + \beta x_3) = \alpha(x_1 * x_2) + \beta(x_1 * x_3)$ Bilinearität
   $(\alpha x_2 + \beta x_3) * x_1 = \alpha(x_2 * x_1) + \beta(x_3 * x_1)$ (linear in beiden Argumenten)

Interpretation des Faltungsintegrals:

$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\, h(\tau)\, d\tau$ $\quad y(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} x(t-t_j) h(t_j)$ diskrete Faltung

Faltung = gewichtete Summe zeitverschobener Eingangssignale!
$h(\cdot)$ gibt dabei die Gewichtungskoeffizienten.

Systemeigenschaften von LTI-Systemen durch ihre Impulsantwort:

Impulsantwort: $\boxed{h(t) = (H\delta)(t)}$

Kausalität: LTI-System ist kausal, wenn $\boxed{h(t) = 0 \quad \forall t < 0}$

Gedächtnislosigkeit: LTI-System ist gedächtnislos, wenn $\boxed{h(t) = \alpha\delta(t).}$

BIBO-Stabilität: LTI-System ist BIBO-stabil, wenn $\boxed{h \in \mathcal{L}^1}$

d.h. h absolut integrierbar: $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt < \infty$

Funktionale

Funktional: Abbildung, deren Definitionsmenge eine (Teilmenge) eines Vektorraumes ist und skalarwertig ist.

angewendet auf Testfunktion

$$\boxed{\ell_x(\cdot) = \int_a^b (\cdot)\, x(t)\, dt}$$

lineares Funktional

Deltafolge:

Ist eine Folge von Testfunktionen $\delta_n(t)$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\delta_n(t) = \begin{cases} \geq 0 & \text{für } t \in I_n = [a_n, b_n] \\ = 0 & \text{für } t \notin I_n \end{cases}$$

Die Intervalle I_n bilden eine Intervallverschachtelung um $t_0 \in \mathbb{R}$:

$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq t_0 \leq \ldots \leq b_2 \leq b_1$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = t_0$

Für jedes n sei $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(t)\, dt = \int_{a_n}^{b_n} \delta_n(t)\, dt = 1$ Eichvorschrift

Der Grenzwert der Deltafolge wird Dirac-Delta "Funktion" genannt:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \delta_n(t) = \delta_{t_0}(t) = \begin{cases} \infty & t = t_0 \\ 0 & t \neq t_0 \end{cases}}$$

Deltafolge zur Messung:

Mittelwertsatz

$$\ell_x(\delta_n) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, \delta_n(t)\, dt = \int_{a_n}^{b_n} x(t)\, \delta_n(t)\, dt = x(\xi_n) \int_{a_n}^{b_n} \delta_n(t)\, dt = x(\xi_n)$$

$$a_n < \xi_n < b_n$$

insbesondere: $\lim_{n\to\infty} \ell_x(\delta_n) = \lim_{n\to\infty} x(\xi_n) = x(\lim_{n\to\infty} \xi_n) = x(t_0)$

$x(t)$ stetig um t_0

Definition: Verallgemeinerte Funktion: Jedes lineare Funktional auf dem Testfunktionenraum D heisst verallgemeinerte Funktion.

↳ beinhaltet alle Fkt. φ mit: $\begin{cases} \varphi(t) = 0 \quad \forall t \notin [a,b] \text{ (kompakter Träger)} \\ \varphi \text{ unendlich oft diffbar} \end{cases}$

Teil des Definitionsbereichs, auf dem φ nicht null ist

Verallgemeinerte Funktion ⊂ Funktional

Zwei verallgemeinerte Funktionen $\ell, \tilde{\ell}$ heissen gleich, falls

$$\ell(\varphi) = \tilde{\ell}(\varphi) \quad \forall \varphi \in D$$

Reguläre verallgemeinerte Funktion: $\exists$ eine auf $\mathbb{R}$ stückweise stetige Funktion $x(\cdot)$, so dass $\ell(\varphi) = \ell_x(\varphi) = \int_a^b \varphi(t)\, x(t)\, dt$. Sonst heisst sie singulär.

Intuitiv: Verallgemeinerte Fkt. erlauben uns, auch Fkt. zu betrachten, deren Integral von einzelnen Pkten abhängen.

Rechenregeln für verallgemeinerte Funktionen:

- $\ell_{x_1+x_2}(\varphi) = \ell_{x_1}(\varphi) + \ell_{x_2}(\varphi)$ Reg. verallg. Fkt.
  $(\ell + \tilde{\ell})(\varphi) = \ell(\varphi) + \tilde{\ell}(\varphi)$ All. verallg. Fkt.
- $\ell_{\alpha x}(\varphi) = \alpha \ell_x(\varphi)$ Reg. verallg. Fkt.
  $(\alpha\ell)(\varphi) = \alpha\ell(\varphi)$ All. verallg. Fkt.
- $\ell_{x_1 x_2}(\varphi) = \ell_{x_1}(x_2\varphi)$ Reg. verallg. Fkt.
  $(x\ell)(\varphi) = \ell(x\varphi)$ All. verallg. Fkt.
- $\ell_{x \circ g}(\varphi) = \frac{1}{|a|} \ell_x(\varphi(\frac{t-b}{a}))$ Reg. verallg. Fkt.
  $(\ell \circ g)(\varphi) = \frac{1}{|a|} \ell(\varphi(\frac{t-b}{a}))$ mit $g(t) = at + b$ All. verallg. Fkt.

Definition der Deltafunktion über das Deltafunktional:

$$\boxed{\ell_\delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\varphi(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\varphi(0)\, dt = \varphi(0)}$$

Rechenregeln für $\delta(t)$

Addition: $(\ell_x + \ell_\delta)(t) = \ell_x(\varphi) + \ell_\delta(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} (x(t) + \delta(t))\, \varphi(t)\, dt =$
$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\varphi(t)\, dt + \varphi(0)$

Produkt: $(x\ell_\delta)(\varphi) = \ell_\delta(x\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, x(t)\, \varphi(t)\, dt = x(0)\varphi(0) = x(0)\,\ell_\delta(\varphi)$
$\Rightarrow x(t)\,\delta(t) = x(0)\,\delta(t)$

Verkettung: $\boxed{\delta(at+b) = \frac{1}{|a|}\delta\left(t + \frac{b}{a}\right)}$

Siebeigenschaft: $\boxed{\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - t)\,\varphi(\tau)\, d\tau = \ell_{\delta(\cdot - t)}(\varphi)}$

Fouriertransformation von Funktionen:

Fouriertransformation (FT): $\boxed{\hat{x}(f) := (\mathcal{F}x(t))(f) := \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-2\pi i f t}\, dt}$

Rücktransformation (IFT): $\boxed{x(t) := (\mathcal{F}^{-1}\hat{x}(f))(t) := \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(f)\, e^{2\pi i f t}\, df = (\check{\hat{x}})(t)}$

Eigenschaften der FT:

1) $(\mathcal{F}^2 x)(t) = x(-t)$
2) $((\mathcal{F}^{-1})^2 \hat{x})(f) = \hat{x}(-f)$
3) $\mathcal{F}(x(\cdot - t_0))(f) = e^{-2\pi i f t_0}\, \hat{x}(f)$
4) $\mathcal{F}(x(a \cdot + b))(f) = \frac{1}{|a|} e^{2\pi i f b/a}\, \hat{x}(\frac{f}{a})$
5) $\mathcal{F}(e^{2\pi i f_0 (\cdot)} x(\cdot))(f) = \hat{x}(f - f_0)$
6) $\frac{d}{df} \mathcal{F}(x(\cdot))(f) = -2\pi i\, \mathcal{F}(\tilde{x}(\cdot))(f)$ w. $\tilde{x}(t) = t\,x(t)$
7) $\mathcal{F}(\frac{d}{dt} x(t))(f) = 2\pi i f\, \mathcal{F}(x(\cdot))(f)$
⑧ $\mathcal{F}(x*h)(f) = \widehat{(x*h)}(f) = \hat{x}(f)\,\hat{h}(f) = (\mathcal{F}x)(f)\;(\mathcal{F}h)(f)$
   und $\mathcal{F}(x \cdot h)(f) = \widehat{(x \cdot h)}(f) = \hat{x}(f) * \hat{h}(f) = (\mathcal{F}x)(f) * (\mathcal{F}h)(f)$

Plancherelsche Identität:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, y^*(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(f)\,\hat{y}^*(f)\, df}$$

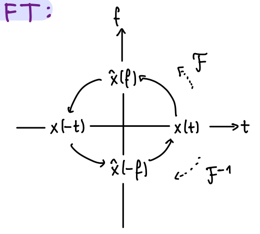
Poisson'sche Summenformel:

$$\boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t - kT) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{h}\left(\frac{k}{T}\right) e^{2\pi i k t/T}}$$

Impulskamm:

$$\left(\mathcal{F} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta((\cdot) + kT)\right)(f) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f + \frac{k}{T}\right)$$

FT und IFT:



$x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; \hat{x}(f)$

$\hat{x}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; x(-f)$

$x(-t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; \hat{x}(-f)$

$\hat{x}(-t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; x(f)$

Eigenfunktionen analoger LTI-Systeme:

$\boxed{x(t) = e^{2\pi i f t}}$ sind Eigenfunktionen von LTI-Systemen H mit den Eigenwerten $\hat{h}(f)$. $h(t) = (H\delta)(t)$, $\hat{h}(f) = \mathcal{F}(x(t))(f)$

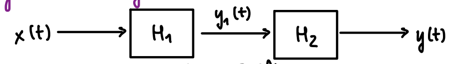
Frequenzgang eines LTI-Systems = die FT $\hat{h}(f)$ der Impulsantwort $h(t)$.

Dann ist: $y(t) = (Hx)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(f)\hat{x}(f)e^{2\pi i f t}\,df$

$y(t) = (x*h)(t)$

$$\boxed{\hat{y}(f) = \hat{x}(f)\cdot\hat{h}(f)}$$

Kaskadierung von LTI-Systemen:



$x(t) = e^{2\pi i f t}$ $\quad y_1(t) = (H_1 x)(t) = \hat{h}_1(f)e^{2\pi i f t}$ und $y_2(t) = (H_2 x)(t) = \hat{h}_2(f)e^{2\pi i f t}$

$$\Rightarrow y(t) = (H_1 H_2 x)(t) = \underbrace{\hat{h}_2(f)\,\hat{h}_1(f)}_{\hat{h}(f)}\,e^{2\pi i f t}$$

Systeme werden von aussen nach innen aufgelöst! $y = H_1 H_2 x \rightarrow H_1$ zuerst, dann H_2

nur bei LTI: Reihenfolge egal.

Impulsantwort des Gesamtsystems: $\boxed{h(t) = (h_1 * h_2)(t)}$

und $\boxed{y(t) = (x*h)(t) = (x*(h_1*h_2))(t)}$

Sinusförmiges Eingangssignal:

Liegt am Eingang eines LTI-Systems ein sinusförmiges Signal vor

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) = \frac{1}{2}e^{2\pi i f_0 t}e^{i\varphi_0} - \frac{1}{2}e^{-2\pi i f_0 t}e^{-i\varphi_0}$$

Dann gilt für das Ausgangssignal (bei $h(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow \hat{h}(f) = \hat{h}^*(-f)$)

wichtige Eigenschaft

$$\boxed{y(t) = |\hat{h}(f_0)|\cos(2\pi f_0 t + \varphi_0 + \arg[\hat{h}(f_0)])}$$

$|\hat{h}(f_0)|$: Änderung der Amplitude

$\arg[\hat{h}(f_0)]$: Änderung der Phase

} gegenüber dem Eingangssignal.

Laplace Transformation

Nehme als Eingangssignal $\boxed{x(t) = e^{st}}$ w.

$\boxed{s = \sigma + 2\pi i f_0}$ und $\sigma = \begin{cases} <0 & \text{zeitlich abklingende Einhüllende} \\ =0 & \text{zeitlich konstante Einhüllende} \\ >0 & \text{zeitlich abklingende Einhüllende} \end{cases}$

Dann ist das Ausgangssignal:

auch Eigenfunktion!

$$\boxed{y(t) = (x*h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}\,d\tau = e^{st}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau}_{=H(s)}}$$

$H(s)$ = Laplace-Transformierte von $h(t)$

Tiefpassfilter für LTI-Systeme:

Ein verzerrungsfreies System übt eine formgetreue Übertragung aus:

$y(t) = kx(t-t_0) \quad k>0$

$h(t) = k\delta(t-t_0)$

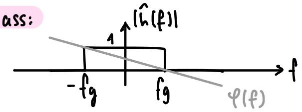
Damit ist die FT $\hat{h}(f)$ der Impulsantwort:

$$\boxed{\hat{h}(f) = ke^{-2\pi i f t_0} = |\hat{h}(f)|e^{i\varphi(f)}}$$

Ein verzerrungsfreies System ist ein lineares, stabiles, kausales ($t_0 \geq 0$) und zeitinvariantes System, das einen Allpass mit linearer Phase beschreibt.

Indem wir Filter auf Signale anwenden, verzerren wir diese:

Bsp: Tiefpass:



$|\hat{h}(f)| = \begin{cases} 1, & |f| \leq f_g \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

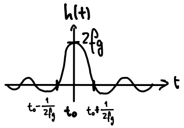
$\varphi(f) = -2\pi f t_0$

$$\boxed{\hat{h}(f) = \begin{cases} e^{-2\pi i f t_0} & |f| \leq f_g \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}}$$

Weil FT einer absolut integrierbaren Fkt. ist stetig (hier nicht stetig)

Impulsantwort eines idealen Tiefpasses: (nicht kausal & nicht stabil)

$$\boxed{h_{id}(t) = 2f_g\frac{\sin(2\pi f_g(t-t_0))}{2\pi f_g(t-t_0)} = 2f_g\,\mathrm{sinc}(2f_g(t-t_0))}$$

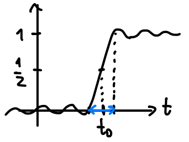


$\mathrm{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$

Kausalisierung des idealisierten Tiefpasses: $\boxed{h_{kausal}(t) = h_{id}(t-t_0)\,\sigma(t)}$

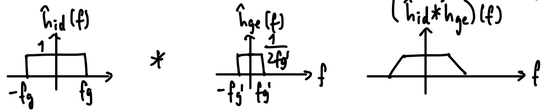
Sprungantwort eines idealen Tiefpasses:

$$\boxed{a(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\sigma(t-\tau)\,h(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{t} 2f_g\,\mathrm{sinc}(2f_g(\tau-t_0))\,d\tau}$$



$t_c = \frac{1}{2f_g}$ = Einschwingzeit

Idealer Tiefpass BIBO-stabilisieren:



Stabil, da: $(\hat{h}_{id} * \hat{h}_{ge})(f) \bullet\!\!-\!\!\circ \sim \frac{1}{t}\frac{1}{t} \Rightarrow h \in \mathcal{L}^1$

Bandbegrenzte Signale:

Bandbreite: des Signals x ist das kleinste W, so dass:

$$\boxed{(x * h_{TP,W})(t) = x(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}}$$

w. $\boxed{h_{TP,W}(t) = 2W\,\mathrm{sinc}(2Wt)}$ = idealer Tiefpass mit Grenzfrequenz W

↪ d.h. im Frequenzbereich wird das Signal auf den Intervall $[-W, W]$ beschränkt.

Änderungsrate von Signalen einschränken: mithilfe der

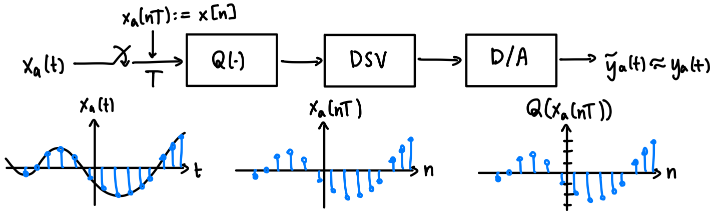
Bernstein-Ungleichung: Wenn $x(t)$ in der Form

$$\boxed{x(t) = \int_{-W}^{W} g(f)e^{2\pi i f t}\,df \quad \forall t \in \mathbb{R}}$$

dargestellt werden kann mit $g \in L^1$, dann gilt:

$$\boxed{\left|\frac{dx(t)}{dt}\right| \leq 4\pi W \sup_{\tau\in\mathbb{R}}|x(\tau)| \quad \forall t \in \mathbb{R}.}$$

Abtasttheorem



mathematische Modellierung der Abtastung im Zeitbereich:

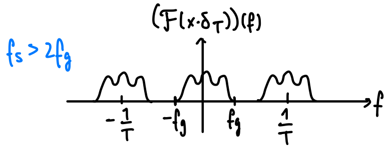
$$\boxed{x(t)\cdot\delta_T(t) = x(t)\cdot\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta(t-kT) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(kT)\,\delta(t-kT)}$$

Deltakamm

FT des abgetasteten Signals:

periodisches Signal mit Periode $\frac{1}{T}$!

$$\boxed{(\mathcal{F}(x\cdot\delta_T))(f) = \left(\hat{x} * \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\cdot - \frac{k}{T}\right)\right)(f) = \overbrace{\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{x}\left(f-\frac{k}{T}\right)}}$$



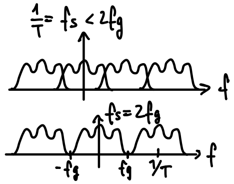
x(t) ist ein Bandbegrenztes Signal mit Bandbreite f_g!

Falls die Abtastfrequenz zu klein ($f_s < 2f_g$), so tritt eine Überfaltung (Aliasing) auf:

kritische Abtastung: $f_s = 2f_g$

Überabtastung: $f_s > 2f_g$

Unterabtastung: $f_s < 2f_g$



$\frac{1}{T} = f_s$

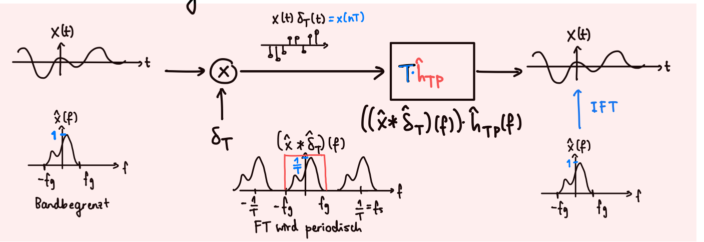
↖ vom Deltakamm δ_T

Abtasttheorem: Ein Signal mit der Bandbreite f_g kann aus seinen Abtastwerten, genommen mit einer Rate von $f_s \geq 2f_g$, eindeutig rekonstruiert werden.

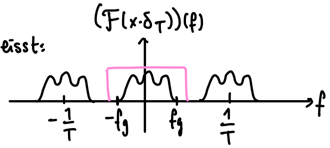
f_g: Bandbreite vom Signal; $f_s = \frac{1}{T}$, T vom Deltakamm.

Überabtastung garantiert nicht nur Rekonstruierbarkeit, sondern hilft auch gegen Rauschen im Abtastprozess und erlaubt verschiedene Tiefpassfilter.

Prozess bildlich dargestellt:



Rekonstruktion heisst:



Tiefpass über eine Kopie der FT legen um dieses Signal herauszufiltern
→ dann IFT um ursprüngliches Signal zu erhalten.

Rekonstruktionsformel bei der kritischen Abtastung $\left(\frac{1}{T}=f_s=2f_g\right)$

Sei $x(t)$ ein Signal, welches kritisch abgetastet & rekonstruiert wird:

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{im Frequenzbereich argumentieren}}}{x(t)=}((x\cdot\delta_T)*T\cdot h_{id})(t) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{ab hier Ausdruck im Zeitbereich auswerten}}}{=} T\cdot\left(\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(kT)\,\delta(\cdot-kT)\right)*h_{id}\right)(t)=$$

$$=T\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(kT)h_{id}(t-kT)$$

$$\Rightarrow x(t)=T\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(kT)\,2f_g\,\frac{\sin(2\pi f_g(t-kT))}{2\pi f_g(t-kT)}\underset{\substack{\uparrow\\ \frac{1}{T}=f_s=2f_g}}{=}\boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(kT)\frac{\sin\left(\frac{\pi}{T}(t-kT)\right)}{\frac{\pi}{T}(t-kT)}}$$

Abtastung als Entwicklung in ein Orthonormalsystem:

$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(kT)\frac{\sin\left(\frac{\pi}{T}(t-kT)\right)}{\frac{\pi}{T}(t-kT)}$ ist eine Entwicklung des bandbegrenzten Signals $x(t)$ in ein Orthonormalsystem $e_k(t)=\sqrt{T}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{T}(t-kT)\right)}{\pi(t-kT)}$! :)

Zeitdiskrete Signale und Systeme

Zeitdiskrete Signale:

Ab hier: Signale endlicher Länge = periodische Signale

Abtastung im Zeitbereich ⇒ periodische Fortsetzung des Spektrums im Frequenzbereich

$$(\mathcal{F}(x\cdot\delta_T))(f)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{x}\left(f-\frac{k}{T}\right)\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Poisson'sche Summenformel}}}{=}\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{2\pi ikTf}}_{\text{Fourierreihe!}} \quad \text{w. } c_k=x(kT)$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ x_d[k]:=x(kT)\\ \text{und } \theta=Tf}}{=}\sum_{k=-\infty}^{\infty}x_d[k]e^{-2\pi ik\theta}=\underbrace{\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{x}\left(\frac{\theta-k}{T}\right)}_{\text{1-periodisch in }\theta}=\hat{x}_d(\theta)$$

Zeitdiskrete FT und IFT für $x_d[n]$:

FT: $\boxed{\hat{x}_d(\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_d[n]e^{-2\pi in\theta}}$ IFT: $\boxed{x_d[n]=\int_0^1\hat{x}_d(\theta)e^{2\pi in\theta}\,d\theta}$

→ $n=0,1,\dots,N-1$ (wobei N = Periode/Länge)

$\theta=\frac{f}{f_s}$ = relative Frequenz; auf die Abtastfrequenz bezogen.

Zeitdiskrete Systeme:

Blockschaltbild: $x[n]\longrightarrow\boxed{\quad H\quad}\longrightarrow y[n]$ $\quad y=Hx$

Eigenschaften von zeitdiskreten Systemen:

Linearität: $H(x_1+x_2)=H(x_1)+H(x_2)\ \wedge\ H(\alpha x)=\alpha H(x)\quad \forall x_1,x_2,x\in X\ \wedge\ \forall\alpha\in\mathbb{C}$

Zeitinvarianz: $H(x[\cdot-n_0])=(Hx)[\cdot-n_0]\quad\forall x\in X\ \wedge\ n_0\in\mathbb{Z}$

Kausalität: $x_1[n]=x_2[n]\ \forall n\le n_0\Rightarrow(Hx_1)[n]=(Hx_2)[n]\ \forall n\le n_0$
$\forall x_1,x_2\in X\ \wedge\ \forall n_0\in\mathbb{Z}$

BIBO-Stabilität: $|x[n]|\le B_x<\infty\ \forall n\in\mathbb{Z}\Rightarrow\exists B_y: |(Hx)[n]|\le B_y<\infty\ \forall n\in\mathbb{Z}$

LTI: linear & zeitinvariant. $\forall x\in X$

Impulsantwort von zeitdiskreten LTI-Systemen:

Zeitdiskretes Signal = Zeitdiskrete Faltung mit dem zeitdiskreten Deltaimpuls:

$$\boxed{x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\,\delta[n-k]}\quad \text{w.}\quad \boxed{\delta[m]:=\begin{cases}1 & m=0\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}}$$

Impulsantwort: $h[n]:=(H\delta)[n]$

Ausgangssignal von zeitdiskreten LTI = Faltung mit $h[n]=(H\delta)[n]$:

$$\boxed{y[n]=\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}x[n-\tau]h[\tau]=\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}x[\tau]h[n-\tau]}$$

Kausalität und BIBO-Stabilität anhand der Impulsantwort:

Kausal: $h[n]=0\ \forall n<0$

BIBO-stabil: $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h[n]|<\infty$

Eingangs-Ausgangsbeziehung von zeitdiskreten LTI-Systemen im Frequenzbereich:

$$\boxed{\hat{y}(\theta)=\hat{x}(\theta)\hat{h}(\theta)}$$

$x[\cdot]$ = Eingangssignal
$h[\cdot]$ = Impulsantwort

Differenzengleichungen von zeitdiskreten LTI-Systemen:

Viele LTI-Systeme können durch kausale Differenzengleichungen dargestellt werden:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{N}a_k y[n-k]=\sum_{m=0}^{M}b_m x[n-m]}$$

x: Eingangssignal
y: Ausgangssignal $y=Hx$
a_k, b_m: Parameter des Systems

$$\Leftrightarrow\quad y[n]=\sum_{k=1}^{N}-\frac{a_k}{a_0}y[n-k]+\sum_{m=0}^{M}\frac{b_m}{a_0}x[n-m]$$

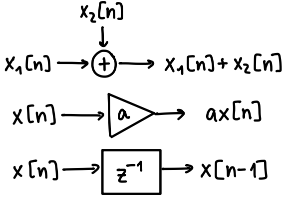
→ Achtung y dadurch nicht eindeutig bestimmt!
→ Wir brauchen noch Anfangsbedingungen $y[n]$
↳ Wie bei allen anderen DGL auch. $y[n]=y_h[n]+y_p[n]\ \forall n\in\mathbb{Z}$

Elemente für Blockschaltbild von Differenzengleichungen:

"Addition"

"Multiplikation"

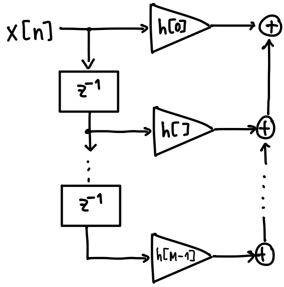
"Zeitverzögerung"



FIR-Filter (finite-impulse response):

↳ haben Impulsantwort endlicher Länge.

$$\boxed{y[n]=\sum_{l=0}^{M-1}h[l]\,x[n-l]}$$



⚠ $h[n]$ hat endliche Länge
= keine Rückkopplungen.

Rückkopplung: $h[n]$ hat unendliche Länge.
dann nicht BIBO-stabil.

IIR-Filter (Infinite Impulse):

Filter, welche eine Impulsantwort unendlicher Länge haben. Häufig: ∞ lange Impulsantworten durch Rückkopplungen herbeigeführt.

Rekursive Implementierungen (= Rückkopplungen) führen oft zu Problemen mit der BIBO-Stabilität!

Diskrete Fouriertransformation (DFT)

Diskret im Zeitbereich & Frequenzbereich

FT: $\boxed{\hat{x}[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-2\pi ikn/N}}$ w. $\hat{x}[k]=\hat{x}\left(\frac{k}{N}\right)$

IFT: $\boxed{\hat{x}[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\hat{x}[k]e^{2\pi ikn/N}}$

Matrix-Notation:

$$\boxed{\omega_N=e^{-2\pi i/N}}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\hat{x}[0]\\ \hat{x}[1]\\ \hat{x}[2]\\ \vdots\\ \hat{x}[N-1]\end{bmatrix}}_{\hat{x}}=\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & \omega_N^{-1} & \omega_N^{-2} & \cdots & \omega_N^{-(N-1)}\\ 1 & \omega_N^{-2} & \omega_N^{-4} & \cdots & \omega_N^{-2(N-1)}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \omega_N^{-(N-1)} & \omega_N^{-2(N-1)} & \cdots & \omega_N^{-(N-1)^2}\end{bmatrix}}_{F_N^H}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}x[0]\\ x[1]\\ x[2]\\ \vdots\\ x[N-1]\end{bmatrix}}_{x}$$

F_N: DFT-Matrix. Unitär bis auf einen Skalierungsfaktor:

$$\boxed{F_N F_N^H=NI_N}\quad\text{und}\quad\boxed{F_N^H F_N=NI_N}$$

In Matrixform: $\mathbf{x}=\frac{1}{N}\mathbf{F}_N^H\hat{\mathbf{x}} \quad\Leftrightarrow\quad x[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\hat{x}[k]e^{2\pi ink/N}$

für $n\notin\{0,\dots,N-1\}$ wurde $x[n]$ durch Abtastung periodisch fortgesetzt.

Hier auch: FT = Entwicklung in eine orthonormale Basis:

$$x=\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\underbrace{\langle x,f_l\rangle}_{\hat{x}[l]}f_l\quad\text{mit}\quad f_l=\begin{bmatrix}1\\ \omega_N^{-l}\\ \omega_N^{-2l}\\ \vdots\\ \omega_N^{-(N-1)l}\end{bmatrix}$$

Übersicht Fouriertransformationen:

	time	frequency
Fourier Transform	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
discrete-time FT	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{R}$ mod 1
discrete FT (DFT)	$\mathbb{Z}$ mod N	$\mathbb{Z}$ mod N
Fourier Series	$\mathbb{R}$ mod T ↑ Periode	$\mathbb{Z}$

Zirkulante Matrix: Ist durch einen Vektor, z.B. $x_2[n]$, vollständig bestimmt:

$$Z = \begin{bmatrix} x_2[0] & x_2[N-1] & \cdots & x_2[1] \\ x_2[1] & x_2[0] & \cdots & x_2[2] \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ x_2[N-1] & x_2[N-2] & \cdots & x_2[0] \end{bmatrix}$$

Sie wird immer durch die normierte DFT-Matrix $\frac{F_N}{\sqrt{N}}$ und den Eigenwerten $\hat{x}_2[k]$ diagonalisiert:

$$Z = \frac{1}{\sqrt{N}} F_N^H \begin{bmatrix} \hat{x}_2[0] & & & \\ & \hat{x}_2[1] & & \phi \\ & & \ddots & \\ \phi & & & \hat{x}_2[N-1] \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{N}} F_N$$

Zyklische Faltung:

Sei $x_1[n]$ und $x_2[n]$ jeweils N-periodisch oder mit Länge N.
Die zyklische Faltung $x_3[n]$ ist gegeben durch:

$$\boxed{x_3[n] = \sum_{\ell=0}^{N-1} x_1[\ell]\, x_2[n-\ell] = \sum_{\ell=0}^{N-1} x_1[n-\ell]\, x_2[\ell]}$$ Laufzeit: $O(N^2)$

wobei x_1 und x_2 jeweils N-periodisch fortgesetzt werden.

Die zyklische Faltung kann effizient in der DFT berechnet werden:

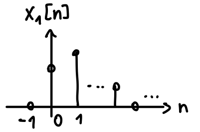
$$\sum_{\ell=0}^{N-1} x_1[\ell]\, x_2[n-\ell] \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \hat{x}_1[k]\,\hat{x}_2[k]$$ Laufzeit: $O(N)$

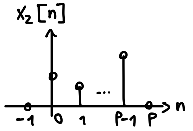
$$x_1[n] \cdot x_2[n] \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} x_1[\ell]\, x_2[k-\ell]$$

DFT kann in $O(N\log(N))$ berechnet werden. ⇒ DFT + Mult. + IDFT ist $O(N \cdot \log(N))$!

Lineare Faltung: für zwei Signale endlicher Länge

d.h. nicht zyklisch → die Signale werden nicht periodisch fortgesetzt gefaltet.





nicht periodisch fortsetzen!

lin. Faltung: $$\boxed{x_3[n] = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} x_1[\ell]\, x_2[n-\ell] = \sum_{\ell=0}^{L-1} x_1[\ell]\, x_2[n-\ell]}$$

$$\begin{cases} x_1[n] = 0 & \forall n \notin \{0, L-1\} \quad \text{Länge } L \\ x_2[n] = 0 & \forall n \notin \{0, P-1\} \quad \text{Länge } P \\ x_3[n] = 0 & \forall n \notin \{0, P+L-2\} \quad \text{Länge } P+L-1 \end{cases}$$

Kochrezept lineare Faltung durch DFT:

N-Pkte DFT mit $N < P+L-1$ ist falsch, da so $x_3[n]$ zu wenig Pkte aufweist (N Pkt. DFT hat als Resultat ein N-periodisches Signal)!

1. Zero-Padding (durch Nullen auffüllen) der Signale $x_1[n]$ und $x_2[n]$ auf die Länge $N \geq P+L-1$
2. Berechnen der N-Pkte DFT $\hat{x}_1[k]$ und $\hat{x}_2[k]$ $O(N \cdot \log(N))$
3. Berechnen von $\hat{x}_3[k] = \hat{x}_1[k] \cdot \hat{x}_2[k]$ $O(N)$
4. Invertieren der DFT: $x_3[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}_3[k]\, e^{2\pi i nk/N}$ $O(N\log(N))$

Fast Fourier Transform (FFT)

Schneller Algo für die Berechnung der DFT.
Annahme: jede arithmetische Op. benötigt gleich viel Zeit.

$$\hat{x}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, w_N^{kn} \qquad x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}[k]\, w_N^{-kn} \quad \rightarrow O(N^2)$$

FFT: Rekursives Aufteilen in gerade & ungerade Subelemente:

$$\hat{x}[k] = \sum_{n \text{ gerade}} x[n]\, w_N^{kn} + \sum_{n \text{ ungerade}} x[n]\, w_N^{kn} = \ldots = \hat{g}[k] + w_N^k\, \hat{u}[k]$$

⇒ DFT einer Fkt. x mit Länge N kann in zwei DFT's von Fktionen g und u der Länge $\frac{N}{2}$ aufgeteilt werden. Der Aufwand der DFT kann durch den Aufwand der Subelemente ausgedrückt werden:

$$\boxed{\#(N) \leq 2\#(N/2) + 3N}$$

d.h. also: nach $\boxed{\log_2(N) - 1}$ Schritten müssen nur noch DFT's der Länge 2 berechnet & anschliessend summiert werden.

Theorem: FFT Algorithmus von Cooley und Tuckey 1956:

Für $w_N = e^{-2\pi i/N}$ gegeben, mit $N = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$ ist es möglich $\hat{x}[k]$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$ mit einer Komplexität von höchstens $\boxed{4N\log_2 N = O(N\log_2(N))}$ zu berechnen.

Sonstiges

Deltafunktion auf einen Blick:

Definition: $\delta(t, \varepsilon) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} & |t| \leq \varepsilon \\ 0 & |t| > \varepsilon \end{cases}$ mit $\varepsilon \rightarrow 0 \Rightarrow \delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$

Integral über die Deltafunktion: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1$

Siebeigenschaft: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)\, x(t)\, dt = x(t_0)$

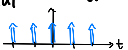
Deltafkt. ist gerade: $\delta(t) = \delta(-t)$

Multiplikation mit der Deltafunktion: $x(t)\,\delta(t) = x(0)\,\delta(t)$

Faltung mit Deltafkt: $(x * \delta)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)\, x(t - \tau)\, d\tau = x(t)$

Verkettung: $\delta(at + b) = \frac{1}{|a|}\, \delta(t + \frac{b}{a})$ $\quad \left(x * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\cdot - kT)\right)(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t - kT)$

Deltakamm: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$



Deltafunktion im Diskreten: $\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

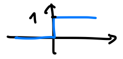
Signafunktion:

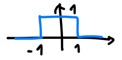
Analog: $\sigma(t) := \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ Diskret: $\sigma[n] := \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

Ableitung: $\sigma'(t) = \delta(t)$

Faltung berechnen (Graphische Faltung):

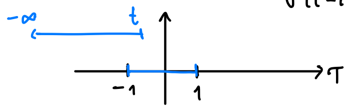
Bsp: Sei $x(t) = \sigma(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$, $h(t) = \begin{cases} 1 & t \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$





$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau)\, h(\tau)\, d\tau$$

1. Wo gibt das Integral $\neq 0$: $h(\tau) \neq 0$ für $\tau \in [-1, 1]$
2. Bereich zeichnen: $\sigma(t - \tau) \neq 0$ für $t - \tau \geq 0 \Leftrightarrow \tau \leq t$



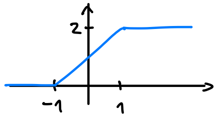
$\Rightarrow \tau \in [-1, 1] \cap \underbrace{(-\infty, t]}_{\text{Unser Cursor}}$

3. Integrationsbereiche bestimmen:

ϕ	$t \leq -1$
$[-1, t]$	$-1 < t \leq 1$
$[-1, 1]$	$t > 1$

4. Integrieren:

$$y(t) \begin{cases} 0 & t \leq -1 \\ \int_{-1}^{t} 1\, d\tau = t + 1 & -1 < t \leq 1 \\ \int_{-1}^{1} 1\, d\tau = 2 & t > 1 \end{cases} \Rightarrow$$



Wichtige Reihen und Summen:

Geometrische Reihe: $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad \forall |q| < 1$

Geometrische Summe: $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

Arithmetische Summe: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

Wichtigste Sachen:

Impulsantwort: $(H\delta)(t)$ w. $\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Sprungantwort: $(H\sigma)(t)$ w. $\sigma(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

Ausgangssignal LTI: $y = (Hx)(t) = (x * h)(t)$

Satz von Pythagoras:

$$\|x_1 + x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 \quad \text{für } \langle x_1, x_2 \rangle = 0$$

Die Punktnotation: