

Disclaimer: Diese Zusammenfassung wurde im Rahmen der D-ITET Technische Mechanik von Prof. Dual im HS20 hergestellt. Ich kann weder für Vollständigkeit noch für Richtigkeit dieses Dokuments garantieren, bin jedoch froh über Fehler informiert zu werden oder bei Fragen zu helfen:

ldewindt@ethz.ch

Zürich, der 23.10.2021 Lina De Windt

Grundlagen:

Freiheitsgrad: $f = n - b$

n : Summe der Freiheitsgrade der einzelnen Körper

b : # der lin. unabhängigen Bindungsgleichungen

Geschwindigkeit ($\underline{v}$) / Schnelligkeit (v):

$$\underline{v}(t) = \dot{\underline{r}}(t)$$

$$v = |\underline{v}|$$

in Zylinderkoordinaten:

$$\underline{v} = \dot{\rho} \underline{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \underline{e}_\varphi + \dot{z} \underline{e}_z = \dot{\rho} \underline{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \underline{e}_\varphi + \dot{z} \underline{e}_z$$

($\underline{e}_\rho$ hängt von φ ab)

Kartesisch $\leftrightarrow$ Zylinderkoordinaten:

$$\begin{cases} \underline{e}_\rho = \cos(\varphi) \underline{e}_x + \sin(\varphi) \underline{e}_y \\ \underline{e}_\varphi = -\sin(\varphi) \underline{e}_x + \cos(\varphi) \underline{e}_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{e}_x = \cos(\varphi) \underline{e}_\rho - \sin(\varphi) \underline{e}_\varphi \\ \underline{e}_y = \sin(\varphi) \underline{e}_\rho + \cos(\varphi) \underline{e}_\varphi \end{cases}$$

Starre Körper (SK)

$$\text{Sdp G: } \underline{v}_p' = \underline{v}_a'$$

$$\Rightarrow \underline{v}_p \cdot \underline{r}_{pa} = \underline{v}_a \cdot \underline{r}_{pa}$$

$$\Rightarrow (\underline{v}_p - \underline{v}_a) \cdot \underline{r}_{pa} = (\underline{r}_p - \underline{r}_a) \cdot (\underline{v}_p - \underline{v}_a) = 0$$

Δ alle SKs erfüllen Sdp G.

Translation: $\underline{v}_p = \underline{v}$; $\forall P$ ($\underline{v}_p = \underline{v}_a$)

Rotation: $\underline{v}_p = \underline{v}_a = 0$

$\hookrightarrow PQ$ ist Rotationsachse

Ebene Bewegung:

$\rightarrow$ alle $\underline{v}$ parallel zu geg. Ebene ($\underline{v}_z = 0$)

$\rightarrow$ alle Pkte auf Normalen zur Ebene besitzen gleiche $\underline{v}$.

Satz vom Momentanzentrum:

$$\underline{v}_p = \underline{w} \times \underline{r}_p; \quad \underline{v}_p = \underline{w} \cdot \underline{r}_p \quad \text{wenn } \underline{w} \perp \underline{r}_p \text{ (immer in 2D.)}$$

$\underline{w}$ = Rotationsgeschwindigkeit

$\underline{r}_p$ = Verbindungsgerade vom MZ zu P.
($\underline{v}$ ist immer $\perp$ zu $\underline{r}$ und $\underline{w}$.)

$$\text{2D: } \underline{v}_p = \begin{pmatrix} y \underline{w} \\ x \underline{w} \end{pmatrix} \leftarrow \text{Vorzeichen aufpassen.}$$

Polbahn = Bewegung des MZ.

Räumliche Bewegungen:

Kreiselung: momentan eine Rotation (ein Pkt. bleibt fix).

$$\text{SK-Formel: } \underline{v}_A = \underline{v}_B + \underline{w} \times \underline{r}_{BA} \quad \text{ABBA-Formel}$$

Kinematik: $\{\underline{v}_B, \underline{w}\}$

$\underline{v}_B$: Translationsgeschwindigkeit (bezüglich Pkt. auf SK)

$\underline{w}$: Rotationsgeschwindigkeit (unabhängig vom Bezugssystem.)

Invarianten: überall gleich im SK $\rightarrow$ bzw. unabhängig vom Pkt. auf SK.

vektorielle Invariante:

$$\underline{I}_1 = \underline{w}$$

skalare Invariante:

$$\underline{I}_2 = \underline{w} \cdot \underline{v}_B$$

$\rightarrow$ Translation: $\underline{I}_1 = \underline{w} = 0$

$\rightarrow$ Rotation: $\underline{I}_1 = \underline{w} \neq 0$; $\underline{I}_2 = 0$

$\rightarrow$ Schraubung: $\underline{I}_2 \neq 0$

Zentralachse = Achse in Richtung von $\underline{w}$.

Kräfte: Resultierende Kraft $\underline{R}$:

$$\underline{R} = \sum_i \underline{F}_i \quad (\text{unabhängig vom Bezugspunkt}).$$

Moment & Leistung: Moment = "Rotation, die von Kräften verursacht wird".

$$\underline{M}_0(P) = \underline{r}_{op} \times \underline{F}_p \quad (\text{M von P bezüglich O})$$

$\underline{r}$: OP

P: Angriffspunkt der Kraft

O: Bezugspunkt

Δ Momente sind vom Bezugssystem und vom Bezugspunkt abhängig.

$$\underline{M}_0 = \pm d F$$

d : Abstand von O zu P
wenn $d \perp$ Wirkungsline von F
 $\rightarrow$ fast nur in 2D brauchbar. $\uparrow$
F verschieben!

$$\underline{M}_0 = \sum_{i=1}^n \underline{r}_i \times \underline{F}_i = \left(\sum_{i=1}^n \underline{M}_0(P_i) \right) + \underline{M}_{\text{Körper}}$$

$\hookrightarrow$ res. Moment bezüglich Pkt. O.

$$\underline{M}_p = \underline{M}_0 + \underline{r}_{p0} \times \underline{R} \quad \text{Transformationsregel}$$

$\underline{R}$: Resultierende Kraft

Leistung einer Kraft: $P = \underline{F} \cdot \underline{v}_a$

$\underline{Q}$: Angriffspunkt der Kraft

$$\text{Leistung eines Moments: } P = \underline{M}_0 \cdot \underline{w}$$

im Falle einer Reine Rotation

$$\text{Gesamtleistung: } P_{\text{tot}} = \sum_i \underline{F}_i \cdot \underline{v}_i + \sum_i \underline{M}_i \cdot \underline{w}_i$$

falls Kinematik $\{\underline{v}_B, \underline{w}\}$ bekannt: $= \sum_i \underline{P}_i$

$$P_{\text{tot}} = \underline{R} \cdot \underline{v}_B + \underline{M}_B \cdot \underline{w}$$

Äquivalenz & Reduktion v. Kräftegruppen:

$$\text{statische Äquivalenz: } P(\{\underline{F}_i\}) = P(\{\underline{G}_i\})$$

für $\forall$ SK-Bewegungen

2 Kräftegruppen sind statisch äquivalent wenn:

- Die Resultierende & das resultierende Moment gleich sind
- Sie vektoriell gleich sind & ihre Wirkungslinien übereinstimmen.

Dynamik einer Kräftegruppe: $\{\underline{R}, \underline{M}_0\}$

bezüglich Pkt. O

$\underline{R}$: Resultierende Kraft, unabhängig vom Bezugspunkt

$\underline{M}_0$: Moment bzgl. des Pkt O (abhängig vom Bezugspunkt, ausser in Statikaufgaben.)

Invarianten: (überall gleich im SK)

vektorielle Invariante: $\underline{I}_1 = \underline{R}$

skalare Invariante: $\underline{I}_2 = \underline{R} \cdot \underline{M}_0$

$\rightarrow$ Nullsystem: $\underline{R} = 0$; $\underline{M}_0 = 0$ ($\underline{I}_1 = 0, \underline{I}_2 = 0$)

$\rightarrow$ Kräftepaar / Moment: $\underline{R} = 0$; $\underline{M}_0 \neq 0$ ($\underline{I}_2 = 0$)

$\rightarrow$ Einzelkraft: $\underline{R} \neq 0$; $\underline{I}_2 = 0$

$\rightarrow$ Schraube: $\underline{I}_2 \neq 0$

Hauptsatz der Statik:

In einer Ruhelage muss gelten:

$$\underline{R} = 0; \quad \underline{M}_0 = 0 \quad *$$

$\underline{R} = 0$: Komponentenbedingungen

$\underline{M}_0 = 0$: Momentenbedingungen

$\hookrightarrow$ Bezugspunkt egal!

Zusatzbedingungen: Reibung, Seil, Kippen...

* Bedingung ist für bewegliche/deformierbare Körper notwendig, für SK hinreichend

GGW:

$$\begin{cases} \text{KB}(x) = 0 = \dots \\ \text{KB}(y) = 0 = \dots \\ \text{KB}(z) = 0 = \dots \end{cases} \quad \begin{cases} \text{MB}(x) = 0 = \dots \\ \text{MB}(y) = 0 = \dots \\ \text{MB}(z) = 0 = \dots \end{cases}$$

Blau = nur in 3D. * Moment ist nicht

mehr bezüglich Pkt. Es ist für $\forall$ Pkte im SK gleich, da $\underline{R} = 0$ gilt.

$\rightarrow$ geeigneter Pkt. aussuchen für Berechnung.

n = # lin. unabhängige GGW-Gleichungen m = # Unbekannte

• statisch bestimmt: $m = n$

$\rightarrow$ gleich viele Unbekannte wie lin. unabhängige Gl.en

• statisch unbestimmt: $m > n$

$\rightarrow$ mehr Unbekannte als lin. unabhängige Gl.en

$\rightarrow$ Grad der Unbestimmtheit: $m - n$

$\rightarrow$ System klemmt ("zu viele Bindungen")

$\rightarrow$ Lagerreaktionen können nicht (alle) bestimmt werden.

• kinematisch unbestimmt:

$\rightarrow$ mehr lin. unabhängige Gl.en als Unbekannte

$\rightarrow$ zulässige momentane Bewegungen sind möglich

$\rightarrow$ Δ statisch bestimmt

$\rightarrow$ triviale Gl.en = Indiz einer kin. Unbestimmtheit.

$\rightarrow$ Momentbedingungen nicht aufstellbar ... not too sure.

Anpassen:

kinematisch unbestimmt Δ statisch bestimmt

z.B. Pendel Δ statisch unbestimmt (im Allgemeinen)

Ein System ist genau dann statisch bestimmt wenn es als Ganzes und in jedem Teil weder statisch unbestimmt noch kinematisch unbestimmt ist.

In diesem Fall kann man alle inneren und äusseren (Lager-) Kräfte aus den GGW-Gleichungen ermitteln.

(GGW = Gleichgewicht.)

Prinzip der virtuellen Leistungen (PdvL):
 System befindet sich in Ruhe wenn:
 $\tilde{P} = \tilde{P}(i) + \tilde{P}(a) = 0, \forall \{v\}$
 $\{ \tilde{v}_0, \tilde{\omega} \}$: virtueller Bewegungszustand
 PdvL: $\tilde{P} = \sum \tilde{u}_i \cdot E_i = 0$
 $\tilde{P}_{tot} = \sum_i F_i \cdot \tilde{u}_i + \sum_i M_i \cdot \tilde{\omega}_i = 0$
 $\tilde{P} = R \cdot \tilde{u}_0 + M_0 \cdot \tilde{\omega} = 0 \quad \forall \{ \tilde{u}_0, \tilde{\omega} \}$
 Kräfte / Momente dort einzeichnen, wo Bewegung / Drehung durch Lager / System gestoppt wird.
 Bei PdvL: egal, in welche Richtungen wir die Kräfte einzeichnen (an Prüfung wird Skizze berücksichtigt). einfach konsistent bleiben!
 Auch egal, in Bezug zu welchem Pkt. im Einzel SK wir das Moment berechnen. (Kommt schlussendlich sowieso auf dasselbe hinaus).
 → Ein geeigneter, einfach & gut positionierter Pkt auswählen!

Stabkräfte:

System wird gezogen / Stab wird gezogen (Zugstab)
 System wird gedrückt / Stab wird gedrückt (Druckstab)

⊗ Man zeichnet Kräfte ein, welche auf das System wirken. ("wird" benutzen) gezogen / gedrückt

PdvL: (zulässige / unzulässige Bewegungen) virtueller Zustand kann beliebig gewählt werden. D.h. Zustand so wählen, dass es am einfachsten ist für die Berechnung. (Lager müssen nicht unbedingt respektiert werden).
 → D.h. z.B.

 auch wenn es da eig. festgelagert ist ...
 Man kann System so freischneiden und A "beweglich" machen und z.B. B als MZ nehmen.
 Oder wenn man Spc bestimmen möchte... kann man System z.B. so freischneiden
 Diesen Teil "unbeweglich" machen.

Statikaufgaben: Moment ist überall gleich auf (Einzel-) SK. (wegen $R=0$).
 $(M_P = M_0 + r_{p0} \times R)$. D.h. ein Pkt. nehmen, bei der die Momentberechnung am einfachsten geht.
 Auch: wenn ein Moment schon angegeben ist, z.B. so:

 & man berechnet Moment für Pkt. A
 → angegebenes M darf man einfach so übernehmen. D.h.
 $M_A = \sum_i r_i \times F_i + M$
 M ist ja auch $\sum_i r_i \times F_i + M$

PdvL, Vorgehensweise:
 1. $\tilde{\omega}$ einführen & MZ der SK bestimmen (SdpG)
 2. Relevante $\tilde{v}$ berechnen (SvM)
 3. $\tilde{P} = \sum_{i=1}^N \tilde{F}_i \cdot \tilde{u}_i + \tilde{M} \cdot \tilde{\omega} \stackrel{!}{=} 0 \leftrightarrow$ Ruhelage
 4. Stabkraft berechnen → Zug oder Druck?

Momentanzentrum finden:
 ⇒ Mittels Normalen von $\tilde{v}$ von Pkten, die zu mehreren SK's gehören, die MZ's der weiteren SK's finden (durch Konstruktion) → $\tilde{v}$ ist immer $\perp$ zur Verbindungsgeraden vom MZ zum Punkt.

Lager:

 MZ auf Linie.

SK-Bedingung: $v'_1 = v'_2$ & $\overline{PR} = \text{konst.}$

$v'_1 = v'_2$

$v'_1 + v'_3 = v'_2 + v'_4 \Rightarrow v'_1 = v'_3$

Dipolmoment: $N = \sum_{i=1}^N F_i r_i$
 $\underline{M} = \underline{N} \times \underline{e}$ ($\underline{e}$ von R.)
 N / Moment unabhängig vom Bezugspkt.

Schwerpunkt berechnung:

$r_{os} = \begin{pmatrix} R \\ R \end{pmatrix} \quad A = \pi R^2$

$r_{os} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4R}{3\pi} \end{pmatrix} \quad A = \frac{1}{2} \pi R^2$

$r_{os} = \begin{pmatrix} a/2 \\ b/2 \end{pmatrix} \quad A = a \cdot b$

$r_{os} = \frac{a+b+c}{3} \quad A = \frac{1}{2} a \cdot h_b$

Wenn S vom Gesamtkörper berechnen:
 da hom. Massenverteilung
 $r_m = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i r_i \Leftrightarrow L_A = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^n A_i r_i$
 aufschreiben!
 $x_s = \frac{\sum_i x_i \cdot A_i}{\sum_i A_i} \quad y_s = \frac{\sum_i y_i \cdot A_i}{\sum_i A_i}$

Kräftenmittelpunkt C: ($\underline{r}_A = \underline{r}_{on}$)
 $\underline{r}_c = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^N \underline{F}_i \underline{r}_i$ mit $R = \sum_{i=1}^N F_i$
 auch Schwerpunkt / Massenmittelpunkt

Kräftepaar Skizze:

 $R=0 \quad M \neq 0$
 Moment = Drehwirkung einer Kraft auf einen Körper.

⊗ eine Kraft, die $\perp$ auf $\tilde{v}$ steht, ist leistungslos.
 $P=0$. ($\underline{F} \perp \underline{v} \Rightarrow P = \underline{v} \cdot \underline{F} = 0$)

Reibung: Haften/Gleiten

⇒ Kräfte

$$|\vec{F}| \leq \mu_0 |\vec{N}|$$

Haftreibungsgesetz: μ_0 : Haftreibungskoeffizient; ($v_B=0$)

$$|\vec{F}| = \mu_1 |\vec{N}|$$

Gleitreibungsgesetz: μ_1 : Gleitreibungskoeffizient; ($v_B \neq 0$)

$$\vec{F} = -\mu_1 |\vec{N}| \frac{\vec{v}_B}{|\vec{v}_B|}$$

Vektoriell: $\vec{v}_B = \vec{v}$ des Berührungspunktes

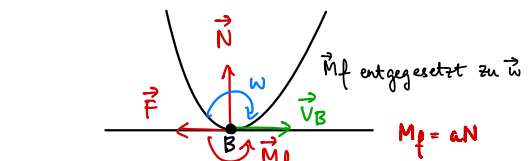
Rollwiderstandsgesetz → rollen / nicht rollen

$$|\vec{M}_f| \leq \mu_z |\vec{N}|$$

$$|\vec{M}_f| = \mu_z |\vec{N}|$$

im Fall der Bewegung: μ_z : Rollwiderstandstänge

$$\vec{M}_f = -\mu_z |\vec{N}| \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}$$



ideal rau: $\mu_0 = \infty$; $\mu_z = 0$ (z.B. Zahnrad)

$$|\vec{M}_f| = |\vec{a}_N| = |\vec{a}| |\vec{N}| \leq a_{\max} |\vec{N}|$$

Für Fall der Bewegung: $a_{\max} = \mu_z$

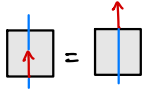
Lagerreibung:

$$|\vec{M}_f| \leq \mu_0 r_L \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$|\vec{M}_f| = \pm \mu_1 r_L \sqrt{A^2 + B^2}$$

A, B: Zapfenkräfte
 r_L : Lagerradius

Kräfte können entlang der Wirkungslinie verschoben werden.



Gleichung erfüllt: Haftet.

→ liefert erst nachträglich ein Kriterium dafür, dass Ruhe wirklich möglich ist.

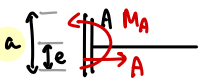
liefert zusätzliche Gleichungen zum bestimmen der Unbekannten.

Freiheitsgrad des Gesamtsystems:

unabhängiger Bewegungen, die das Gesamtsystem machen kann. (= geringste # an Koordinaten, die nötig ist, um das Gesamtsystem zu beschreiben.)

→ Federn, die am System angebracht sind, verringern den Freiheitsgrad nicht.

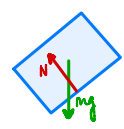
Nicht kippen:



$$M_A = e \cdot A \Leftrightarrow e = \frac{M_A}{A} = \dots \quad (e = \frac{a}{2})$$

$$|\dots| \leq \frac{a}{2} \Rightarrow a \geq \dots \cdot 2 \quad e \in [-1, 1] \frac{a}{2}$$

Wenn a schon bekannt, und e besteht aus einer nach bestimmten Kräften aufgelöste Gleichung, mit diesem Ansatz rechnen.



kippt!! → N darf sich nicht außerhalb des Körpers befinden

Dynamik:

$$\text{Beschleunigung: } \underline{a} = \underline{\dot{v}} = \underline{\ddot{r}}$$

$$\underline{\dot{a}} = \underline{\ddot{x}} \underline{e}_x + \underline{\ddot{y}} \underline{e}_y + \underline{\ddot{z}} \underline{e}_z$$

in Zylinderkoordinaten:

$$\underline{a} = \underline{\dot{v}} = \underline{\ddot{r}} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \underline{e}_\rho + (\rho \ddot{\varphi} + 2 \dot{\rho} \dot{\varphi}) \underline{e}_\varphi + \ddot{z} \underline{e}_z$$

in ebenen Polarkoordinaten:

$$\underline{v} = \dot{r} \underline{e}_r + r \dot{\varphi} \underline{e}_\varphi$$

$$\underline{a} = (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \underline{e}_r + (r \ddot{\varphi} + 2 \dot{r} \dot{\varphi}) \underline{e}_\varphi \quad r = \text{Radius } (= \rho)$$

Kreisbewegung: ($r = \text{konstant}$) $\dot{r} = \ddot{r} = 0$

$$\underline{v} = r \dot{\varphi} \underline{e}_\varphi$$

$$\underline{a} = -r \dot{\varphi}^2 \underline{e}_r + r \ddot{\varphi} \underline{e}_\varphi$$

$r \dot{\varphi}^2 = \frac{v^2}{r}$: radial nach innen gerichtet

$r \ddot{\varphi}$: tangentielle Komponente

Trägheitskräfte, PdvL:

↳ fiktiv. verletzen das Reaktionsprinzip.

$$\text{Trägheitskraftdichte: } \vec{f}^{(t)} = -\rho \vec{a}$$

ρ : spezifische Masse, Dichte $\rho = \rho(\vec{r})$

$$\text{Trägheitskraft: } d\vec{F} = -\rho \vec{a} dV = -\vec{a} dm$$

$$\text{PdvL: } \vec{p}^{(1)} + \vec{p}^{(a)} + \vec{p}^{(t)} = 0, \forall \{\vec{v}\}$$

Inertialsystem: wenn $v = \text{konst.}$ (kein a)

↳ wie Statikaufgabe behandeln.

↳ PdvL gilt.

Masselose Systeme: Methoden der Statik ✓

Newton'sches Bewegungsgesetz:

$$\vec{m} \vec{a} = \vec{R}$$

Komponentenweise:

$$\sum F_x = m \ddot{x}$$

$$\sum F_y = m \ddot{y}$$

→ ergeben DGL.

↳ Anfangsbedingungen nötig!

↳ oft: $\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$ oder $\dot{x}(0) = v_0$

→ falls mehrere Körper → für jeden Körper aufstellen!

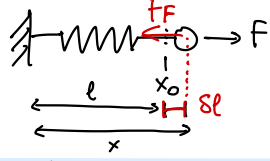
Feder:

$$\text{Federgesetz: } |\vec{F}| = c |\vec{s}|$$

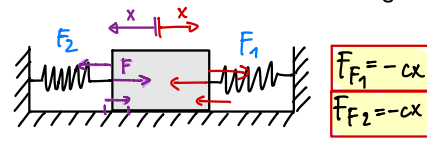
s_L : Verlängerungsstrecke ($s_L = x - l$)

c : Federkonstante

$$F_F = \pm cx$$



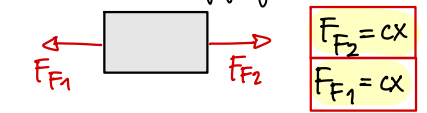
• Wenn F_F & x in gleiche Richtung:



$$F_{F1} = -cx$$

$$F_{F2} = -cx$$

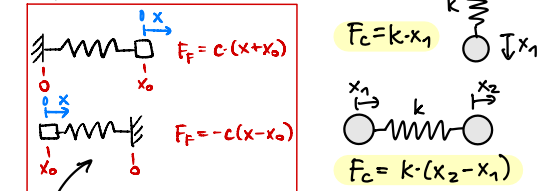
• Wenn F_F & x entgegengesetzt



$$F_{F2} = cx$$

$$F_{F1} = cx$$

• aufpassen, wo die Koordinate ist:



$$F_c = k \cdot x_1$$

$$F_c = -c(x - x_0)$$

$$F_c = k \cdot (x_2 - x_1)$$

* Jede beidseitig belastete Feder erhöht den Freiheitsgrad um 1.

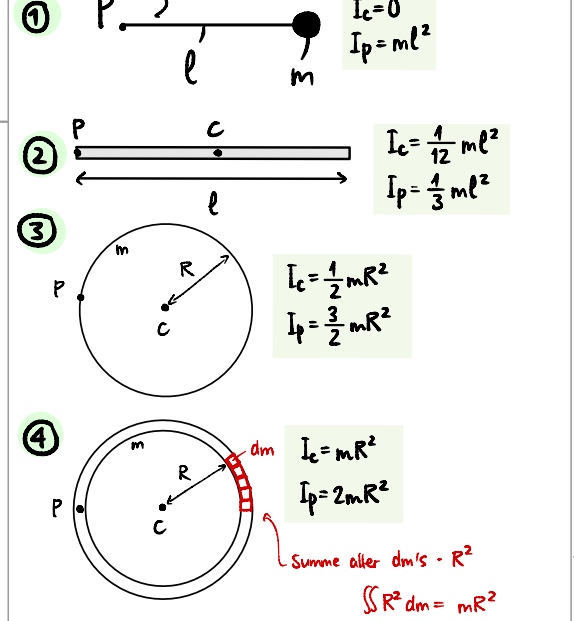
hier ist die entspannte Länge der Feder 0.
Wichtig wo die Koordinate ist, nicht die Box.

Impuls:
Impulssatz: $\vec{p} = \vec{R} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$
 $\vec{p}$.. Impuls
Impuls: $p = m \cdot v$
Erhaltungssatz: wenn $\vec{p} = 0$:
 $\Rightarrow$ Impuls bleibt erhalten
 $E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$ $\vec{R} = m\vec{a}$
 Anwendung: gleich wie Newton'sches Bewegungsgesetz.
Massenmittelpunktsatz: $\vec{R} = m\vec{a}_c$
 $\vec{a}_c$.. $\vec{a}$ von MMPkt. C
 m .. Masse
 $= m\ddot{x}$
 $\Rightarrow$ beide unabhängig vom Bezugspunkt.

Kinetik ebener Bewegungen
Drallsatz: $\vec{L}_0 = \vec{M}_0 = I_c \ddot{\psi} = I_c \dot{\omega}$
 $\vec{L}_0$.. Drall bezüglich Inertialpkt. 0
Drallsatz $\approx$ Newton für Rotation
 aus $M_0 = \iint_B \vec{r} \times \vec{a} dm$ $L_0 = \iint_B \vec{r} \times \vec{v} dm$
relativer Drallsatz:
 Drall bezüglich C: $\vec{L}_c = \vec{M}_c$
 C=Massenmittelpkt.
Drallsatz, Impulssatz & Massenmittelpunktsatz
 gelten ganz allgemein (also nicht nur für SKs).

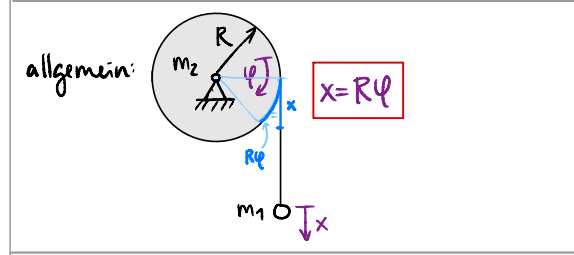
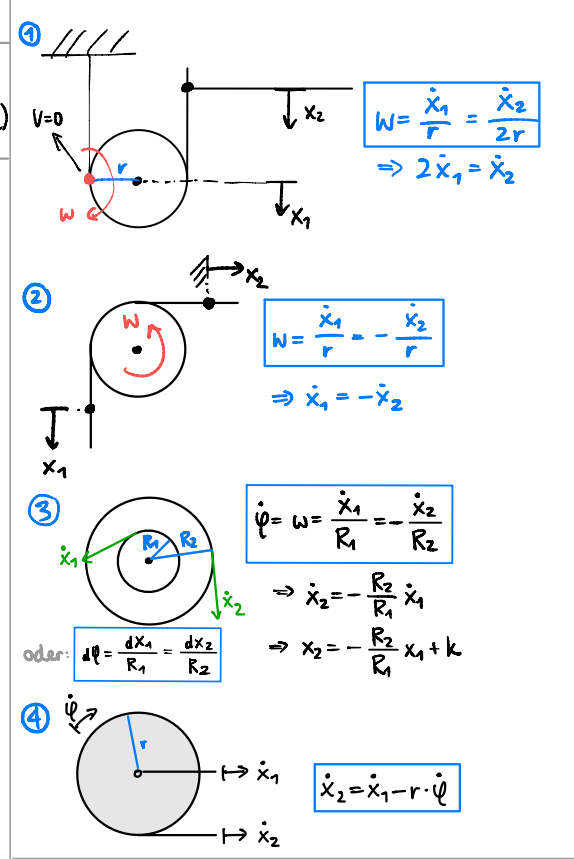
Drehimpuls: (Drallsatz) $\vec{L}_0 = I_0 \dot{\omega}$
 $L_0 = I_0 \omega = I_0 \dot{\psi} \rightarrow \dot{L}_0 = I_0 \ddot{\psi} = M_0$
 $L_c = I_c \omega = I_c \dot{\psi} \rightarrow \dot{L}_c = I_c \ddot{\psi} = M_c$
 $I_0, I_c =$ **Massenträgheitsmoment**
 $\otimes$ Drall = wie ω .
 $\vec{L}_0 \perp$ aus Ebene heraus

Massenträgheitsmoment
 $I_0 = \iint_B r^2 dm$ $O = \text{Fixpunkt}$
 $r = r_{odm}$
 $I_c = \iint_B r'^2 dm$ $C = \text{Schwerpunkt}$
 $r' = r_{cdm}$
Satz von Steiner (Bezugspktwechsel):
 $I_p = I_c + m a^2 \rightarrow \vec{L}_0 = \vec{r}_c \times \vec{p} + \vec{L}_c$ ($\vec{p} = m\vec{v}$)
Wichtige Massenträgheitsmomente:
 masselos $\rightarrow$ konstant bei ebener SK-Bewegung.



$\rightarrow$ Massenträgheitsmoment eines aus homogenen Teilen zusammengesetzten Körpers = Addition der einzelnen Massenträgheitsmomente.

Kinematische Relationen:
 $\rightarrow$ mehr Koordinaten als Freiheitsgrad, so sind diese voneinander abhängig.
 $\rightarrow$ Punkte finden, wo man kinematische Relationen aufstellen kann. Oft bei Rollen.



$\omega = \dot{\psi}$ = Rotationsgeschwindigkeit = Kreisfrequenz.
 $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \dot{\psi} = \frac{d\psi}{dt}$ $\omega = \frac{\psi}{t} \rightarrow \psi(t) = \omega t$
 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ = Periodendauer, [T]=s

Bewegungsdiff'gleichungen:
 Lösungsansatz für DGL:
 falls DGL in diese Form umformbar:

(Schwingung): $\ddot{x} + \omega^2 x = k$ $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = k$ in diese Form bringen. (Werte vor x mit ω^2 ersetzen)
 $x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) + \frac{k}{\omega^2}$
 löst dieser Ansatz die DGL. oft: $\omega = \sqrt{\frac{F}{m}}$
Kinematik:
 $m\ddot{x} = R$ (kein ω) e^{xx}
 $x(t) = c_1 \frac{1}{2} x^2 + c_2 x + c_3$

Herangehensweise einer Dynamikaufg.:

- Drallsatz: $L_c = M_c = I_c \ddot{\psi} = \dots$
- Massenmittelpunktsatz $m\vec{a}_c = \vec{R}$
 $\rightarrow m\ddot{x} = \dots$
 $\rightarrow$ go to move alerstes!
- Kinematische Relationen:
 $x = R\psi$, $\dot{x} = R\dot{\psi} \Rightarrow \ddot{x} = R\ddot{\psi}$
 $\rightarrow$ aufstellen für: $\begin{cases} x, y, \dots \text{ (Strecken)} \\ \psi, \alpha, \gamma, \dots \text{ (Winkel)} \end{cases}$

Tipp:
 Wenn $\begin{cases} m\ddot{x}_1 = \dots \\ I_1 \ddot{\psi}_1 = \dots \end{cases}$ das schon aufgestellt, und wir müssen eine Kraft von der rechten Seite bestimmen
 $\Rightarrow$ mit $I_1 \ddot{\psi}_1 + r \cdot m\ddot{x}_1 = \dots$ probieren.

$\ddot{\psi} + \omega^2 \psi = 0$
 $\downarrow$
 $\psi(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$
 (allg. Lösung)

Sonstiges:

Trigonometrie:

DEG	0°	30°	45°	60°	90°
RAD	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-

- $\tan = \frac{\sin}{\cos}$
- $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$
- $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$
- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$
- $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$

Trigonometrische Ableitungen:

$\frac{d}{dx} \sin = \cos$
 $\frac{d}{dx} \cos = -\sin$

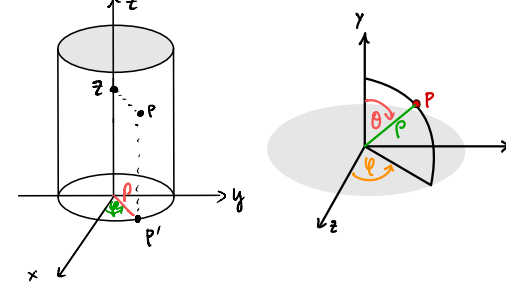
Koordinatenumwandlungen:

Kartesisch $\leftrightarrow$ Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned} x &= \cos(\varphi) \cdot \rho \\ y &= \sin(\varphi) \cdot \rho \\ z &= z \end{aligned} \quad \leftrightarrow \quad \begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ z &= z \end{aligned}$$

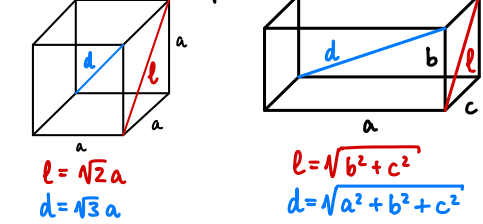
Kartesisch $\leftrightarrow$ Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi) \\ y &= \rho \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi) \\ z &= \rho \cdot \cos(\theta) \end{aligned} \quad \leftrightarrow \quad \begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ \theta &= \arccos\left(\frac{z}{\rho}\right) \end{aligned}$$

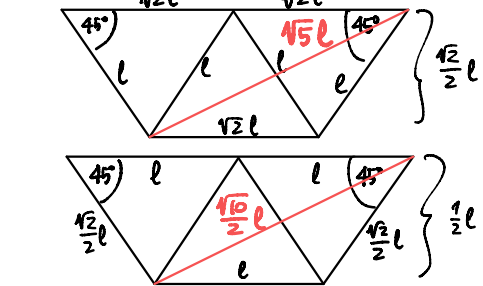


Geometrien:

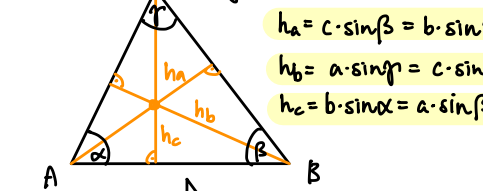
Quader / Würfel:



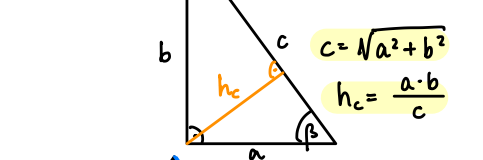
Fachwerke:



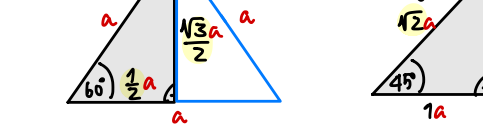
Dreiecke:



Rechtwinklig:



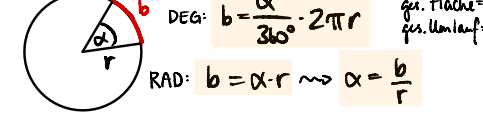
gleichseitig:



Kreis:

Kreisgleichung: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$

Kreisbogen:



Vektoren & Einheitsvektoren:

$$\underline{e}_x = \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|} ; \underline{x} = \underline{e}_x \cdot \|\underline{x}\|$$

d.h. z.B. $\underline{F} = \underline{e}_F \cdot F$

$\Rightarrow \underline{F} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} F$ (keine 1, a usw.)

Skalarprodukt / Kreuzprodukt:

$\underline{a} \cdot \underline{b} = \|\underline{a}\| \cdot \|\underline{b}\| \cdot \cos \theta$

$|\underline{a} \times \underline{b}| = \|\underline{a}\| \cdot \|\underline{b}\| \cdot \sin \theta$ $\underline{a} \times \underline{b} = \underline{c} : \underline{c} \perp \underline{a} \ \& \ \underline{c} \perp \underline{b}$

Anwendungen:

- $|\underline{a} \times \underline{b}| = \text{Fläche!}$
- $|\text{Skalarprodukt}| = \text{Volumen des Parallelepipeds:}$
 $(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c} = (\underline{b} \times \underline{c}) \cdot \underline{a} = (\underline{c} \times \underline{a}) \cdot \underline{b}$

Abstand einer Geraden AB zum Punkt O:

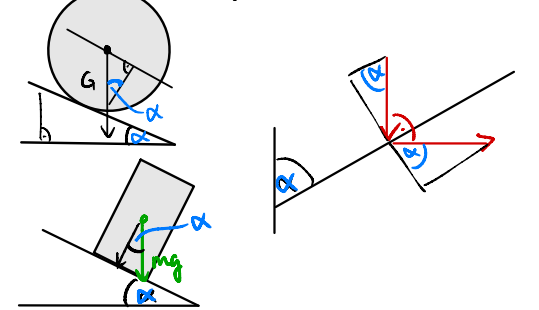
$d_{OAB} = |\underline{r}_{OA} \times \underline{e}_{AB}| = |\underline{r}_{OB} \times \underline{e}_{AB}|$

oder:

$P = (P_x, P_y, P_z) \quad \underline{g} = \underline{Q}(s) = \underline{A} + s \underline{v}$

Abstand: $\frac{|\underline{v} \times \underline{AP}|}{|\underline{v}|}$

Winkelbeziehungen:



Betrag:

$|x| \geq 0$
 $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
 $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
 $|a^n| = |a|^n$ für $n \in \mathbb{N}$
 $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ für $b \neq 0$
 $\left|\frac{1}{a^n}\right| = \frac{1}{|a|^n}$ für $n \in \mathbb{N}, a \neq 0$
 $|a + b| \leq |a| + |b|$

Wurzelapproximationen:

$\sqrt{2} \approx 1.41$
 $\sqrt{3} \approx 1.73$
 $\sqrt{5} \approx 2.24$
 $\sqrt{7} \approx 2.65$
 $\sqrt{3} < 2 < 2\sqrt{2} < 3$

Ungleichungen:

$|x| < a \Leftrightarrow \begin{cases} x < a \\ -x > a \end{cases} \Leftrightarrow x > -a \Leftrightarrow -a < x < a$

Umformungen:

$|\underline{F}_T| \leq \mu_0 |\underline{F}_N|$ $e \in [-1, 1] \frac{a}{2}$
 $\Leftrightarrow F_T \in [-1, 1] \mu_0 F_N$

Physikalische Gleichungen:

- Physikalischer Pendel:
 $\ddot{\varphi} + \frac{3}{2} \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$
- Mathematischer Pendel:
 $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$
- freier Fall:
 $y(t) = \frac{1}{2} g t^2$
- Amplitude:
 $\sim \cos(\dots)$
 $\sim \sin(\dots)$

Lagerreaktionen (2D):

3D:

Auflager (einseitig) <i>Loslager</i>		
Auflager (beidseitig) <i>Loslager</i>		
Auflager (beidseitig) <i>Kurzes Querlager Loslager</i>		
Gelenk <i>Festlager</i>		
Gelenk		
Gelenk (zwei gelenkig verbundene Balken)		
Einspannung		
Faden / Seil		
Pendelstütze (Modellannahme: äussere Kräfte nur in den Gelenken)		
Parallelführung		
Langes Querlager, Schiebehülse		
Längs- und kurzes Querlager		

Statikaufgaben:

1. Materielles System abgrenzen; freigeschnittenes System zeichnen (Kräfte statt Lager!)
2. Äussere Lasten & Bindungskräfte einführen
3. Zweckmässiges KS wählen
4. Gleichungen & Unbekannte zählen
→ ist System statisch bestimmt oder unbestimmt?
5. GGW und evtl. weitere Gleichungen (z.B. Reibung) komponentenweise formulieren
6. Falls nötig System trennen, Schnittkräfte einführen & Schritte 1-3 wiederholen
7. Gleichungen nach den Unbekannten auflösen
8. Resultate & evtl. Zusatzbedingungen diskutieren

Dynamikaufgaben:

1. Modellbildung, materielles System abgrenzen.
2. Für die Berechnung von inneren Bindungskräften: einzelne Körper freischeiden.
3. In allgemeiner Lage (nicht in der Anfangslage!) alle angreifenden Kräfte einführen.
4. Freiheitsgrad ermitteln, Wahl von zweckmässigen KS.
5. **Kinematische Relationen aufstellen** (= Bindungen Rollen)
→ Massenmittelpunktsatz, Drallsatz
6. Bewegungsdiff'gleichungen für alle Komponenten formulieren
7. Bindungskräfte bestimmen, aus den Bewegungsgleichungen eliminieren, # Gleichungen entsprechend reduzieren.
8. Anfangsbedingungen formulieren; gesuchte Grössen berechnen
9. Resultate diskutieren

allgemeine Tipps; an Prüfung:

> **Formeln aufschreiben!**
(vor dem Rechnen → nur Formel aufschreiben gibt Punkte!)

Begriffe:

Dynamik

- **Kinematik**: Studium der Beschleunigungen und Geschwindigkeiten
- **Kinetik**: Frage nach Zusammenhang zw. den angreifenden Kräften & seiner Bewegung (also Dynamik & Kinematik)
→ Kräfte verändern Bewegungszustand

Inertialpunkt:

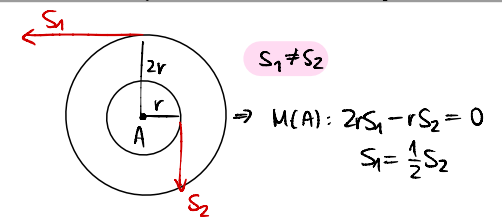
> Pkt., der in einem Inertialsystem ruht (d.h. darf nicht beschleunigt sein).

Massenträgheitsmoment (= Inertialmoment):

> Trägheit eines Körpers gegenüber einer Änderung seiner Winkelgeschwindigkeit bei der Drehung um eine gegebene Achse

Aufpassen!

- **Kräftefrei**: $\underline{R}=0, \underline{M}=0$
- $\underline{S}dpG \neq$ Vektoraddition
- **Bindungskräfte nicht vergessen!**



Bei **Dynamikaufgaben** ist i. A.

