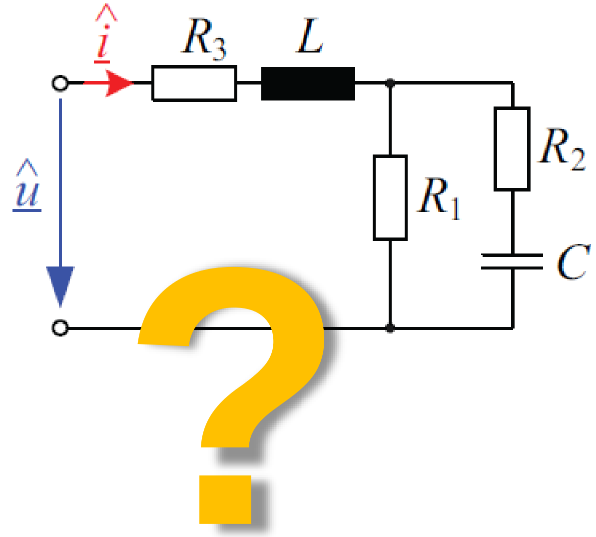
Elektrotechnik 1

Übung 10 – Wechselstrom 1

Komplexe Wechselstromrechnung



→ **Differentialgleichungen?**

Wir erhalten sehr mühsame Differentialgleichungen. Für grössere Netzwerke ist dieser Weg nicht praktikabel!

→ **Komplexe Wechselstromrechnung!**

Diese Methode liefert uns eine einfache Methode, um auch komplizierte Netzwerke ohne DGL zu berechnen. Es werden allerdings komplexe Zahlen benötigt ☺

Der komplexe Zeiger

$$u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

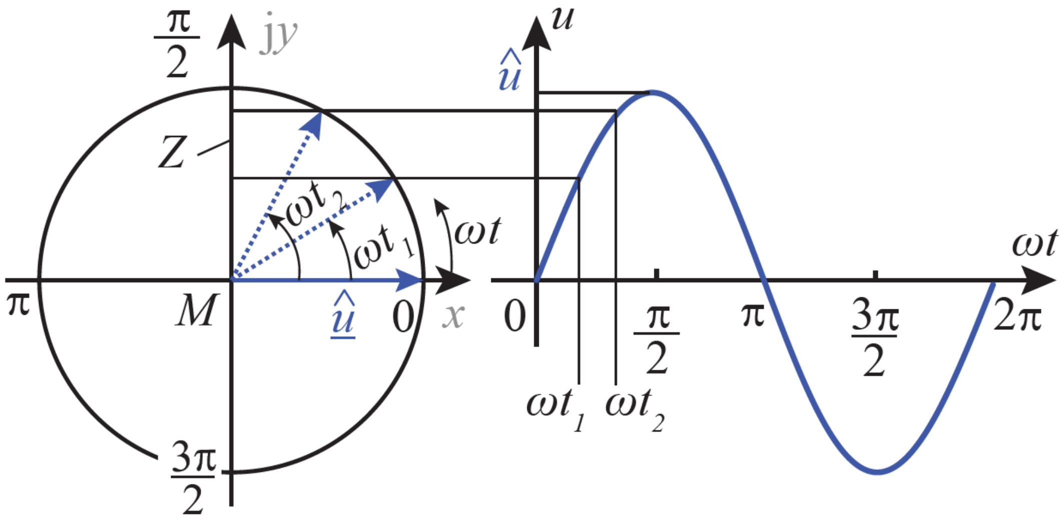
$$u(t) = \mathrm{Im}\{\hat{u} \cdot \underbrace{[\cos(\omega t + \varphi) + j\sin(\omega t + \varphi)]}_{e^{j(\omega t+\varphi)} = e^{j\omega t}e^{j\varphi}}\}$$

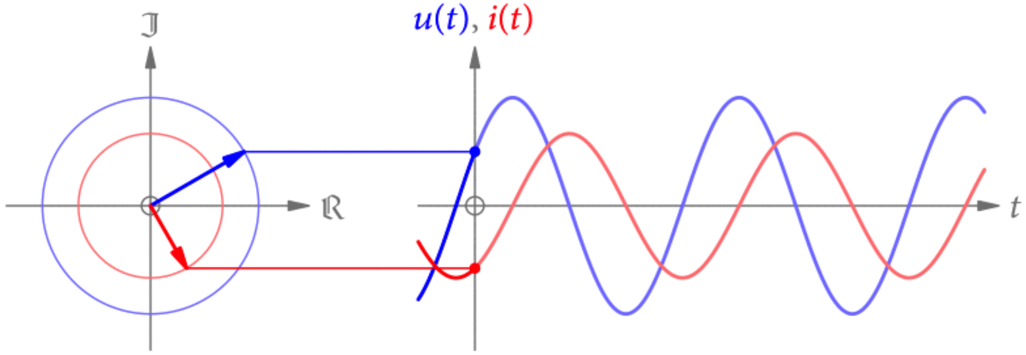
$$\Rightarrow u(t) = \sqrt{2}\,\mathrm{Im}\left\{\underbrace{\frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}}\cdot e^{j\varphi}e^{j\omega t}\right\}$$

Wir nehmen an, dass unser Netzwerk mit genau einer Frequenz ω betrieben wird.

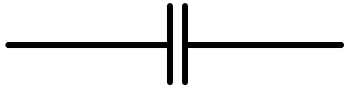
$$\boxed{\textbf{Komplexer Zeiger:}\ \underline{u} := \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\varphi}}$$

unabhängig von Frequenz und Zeit!





Impedanz (der «verallgemeinerte Widerstand»)

	Widerstand R	Induktivität L	Kapazität C
			
Impedanz:	$\underline{Z} = R$	$\underline{Z} = j\omega L$	$\underline{Z} = 1/j\omega C$

Wir weisen den Bauteilen eine Impedanz zu…

Die Admittanz ist immer das Inverse der Impedanz, also $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$

$\omega \to 0$ (Gleichstrom)		Kurzschluss	Leerlauf
$\omega \to \infty$ (Wechselstrom)		Leerlauf	Kurzschluss

Admittanz

$$\underline{Y} = 1/\underline{Z}$$

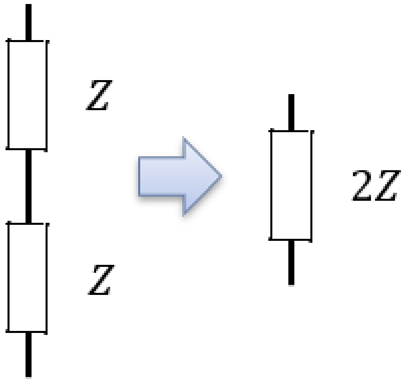
Mit Impedanzen können wir genau gleich rechnen wie mit Widerständen! Es gelten die bekannten Regeln (**Knoten-, Maschen-, Strom- und Spannungsteilerregel** etc.)

Recap: Spannungs- / Stromteiler

Serienschaltung

$$Z_{ges} = \sum Z_i$$

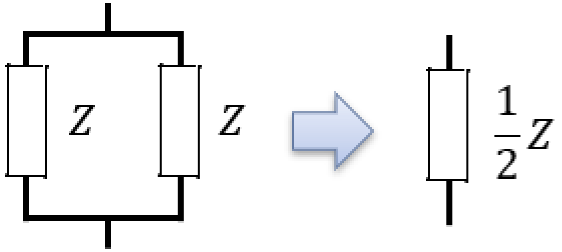
$$Z_{ges} = Z_1 + Z_2 + \cdots Z_n$$



Parallelschaltung

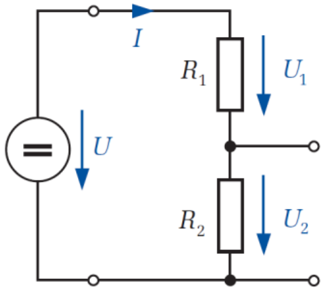
$$Z_{ges}^{-1} = \sum Z_i^{-1}$$

$$\frac{1}{Z_{ges}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \cdots + \frac{1}{Z_n}$$



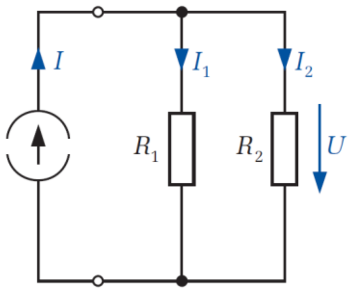
Spannungsteiler

$$U_2 = U_{ges} \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$



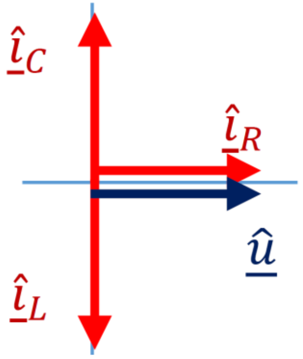
Stromteiler

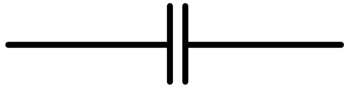
$$I_2 = I_{ges} \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}$$



Phasenverschiebungen

Ohmsches Gesetz für Impedanzen: $\underline{u} = \underline{Z} \cdot \underline{i}$ $\quad$ $\underline{i} = \underline{Y} \cdot \underline{u}$



Widerstand R	Induktivität L	Kapazität C
		
$\underline{Z} = R$	$\underline{Z} = j\omega L$	$\underline{Z} = 1/j\omega C$
Strom und Spannung **in Phase**	In Induktivit**äten** die Ströme sich versp**äten**	Der Strom eilt v**or** im Kondensat**or**
$\Delta\varphi = 0$	$\Delta\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$	$\Delta\varphi = \dfrac{\pi}{2}$

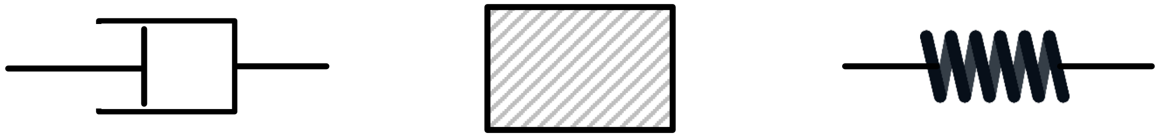
Analogie Impedanz

Widerstand | Induktivität | Kapazität

$\underline{Z} = R$ | $\underline{Z} = j\omega L$ | $\underline{Z} = 1/j\omega C$ | Spannung u | Strom i

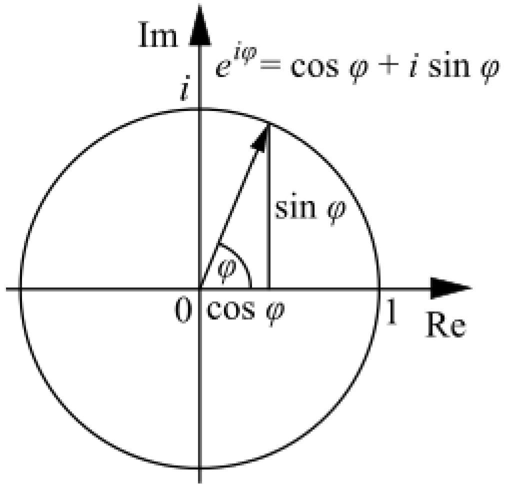
Pendants in der Mechanik:

Dämpfer | Masse | Feder | Kraft F | Geschw. v



Nicht Prüfungsstoff, aber interessanter Link:
https://de.wikipedia.org/wiki/Mechanisches_Filter

Komplexe Zahlen Basics



- Komplexe Einheit $j := \sqrt{-1} \;\Rightarrow\; j^2 = -1$
  Merke gut: $-j = \frac{j}{-1} = \frac{j}{j^2} = \frac{1}{j}$
- Verschiedene Darstellungen:

kartesisch:	$\underline{Z} = x + jy$
polar:	$\underline{Z} = r \cdot e^{i\varphi}$

- Umrechnungen:
  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left(\frac{Im\{\}}{Re\{\}}\right)$$

- $x = \mathrm{Re}(z) = r \cdot \cos\varphi$
  $y = \mathrm{Im}(z) = r \cdot \sin\varphi$

- Umrechnung Impedanz/Admittanz:

$$\underline{Z} := R + jX \qquad \underline{Y} := G + jB$$

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2}, \qquad B = \frac{-X}{R^2 + X^2}$$

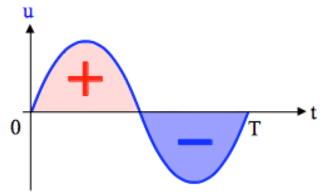
$$R = \frac{G}{G^2 + B^2}, \qquad X = \frac{-B}{G^2 + B^2}$$

Messgrössen

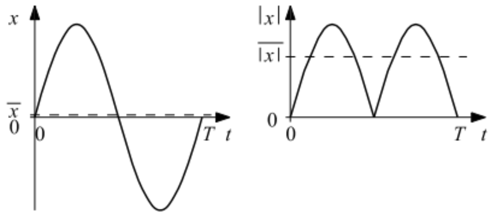
für sin-Grössen

Periodendauer und Frequenz $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$ $\omega = 2\pi f$ $[f] = \mathrm{Hz}$ $[\omega] = \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$

Mittelwert $\overline{u} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} u(t)\,dt \;\; = 0$



Gleichrichtwert $\overline{|u|} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} |u(t)|\,dt \;\; = \frac{2}{\pi}\cdot\hat{u}$



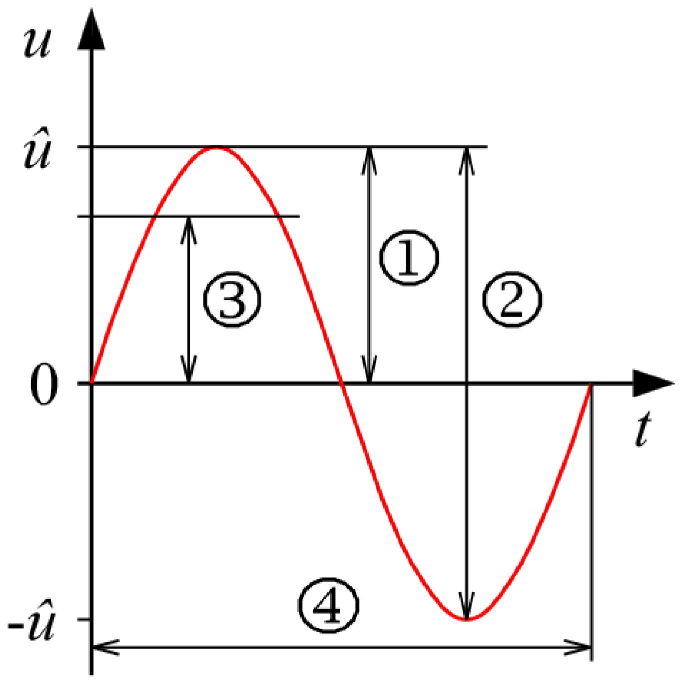
Effektivwert
root mean square (RMS)

$U_{\mathrm{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} u^2(t)\,dt} \;\; = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\hat{u}$

Der RMS-Wert entspricht dem Wert, der in einem Gleichstromnetzwerk dieselbe Verlustleistung verursachen würde.

RMS: 230 V
$\hat{u} = 325\ \mathrm{V}$
$f = 50\ \mathrm{Hz}$

Messgrössen



1. Amplitude oder Spitzenwert $\hat{u}$
2. Spitze-Spitze-Wert
3. Effektivwert (RMS)
4. Periodendauer

Ein Messgerät misst immer den Effektivwert RMS!

Leistung an Impedanzen

$$p(t) = \underbrace{\frac{1}{2}\hat{u}\cdot\hat{\imath}\cdot\cos\varphi\cdot(1+\cos(2\omega t))}_{\text{Wirkleistung (1)}} + \underbrace{\frac{1}{2}\hat{u}\cdot\hat{\imath}\cdot\sin\varphi\cdot\sin 2\omega t}_{\text{Blindleistung (2)}}$$

$U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$ (Effektivwert)

Lassen wir die Zeitabhängigkeiten einfach weg:

Wirkleistung: $P = \frac{1}{2}\,\hat{u}\cdot\hat{\imath}\cdot\cos\varphi = U\cdot I\cdot\cos\varphi$ $\quad \in \mathbb{R} \quad [P] = \mathrm{W}$

$P := \mathrm{Re}\{\underline{S}\}$

Energie, welche von Last **verbraucht** wird

Blindleistung: $Q = \frac{1}{2}\,\hat{u}\cdot\hat{\imath}\cdot\sin\varphi = U\cdot I\cdot\sin\varphi$ $\quad \in \mathbb{R} \quad [Q] = \mathrm{VAr}$

$Q > 0$: induktiv, $Q < 0$: kapazitiv

$Q := \mathrm{Im}\{\underline{S}\}$

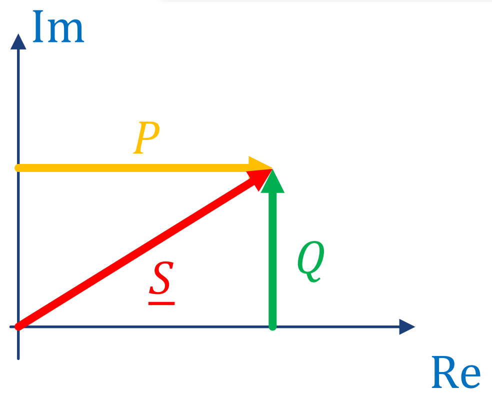
Energie, welche zwischen Last und Quelle hin und her **pendelt**

Packen wir die beiden Grössen wieder in eine komplexe Zahl:

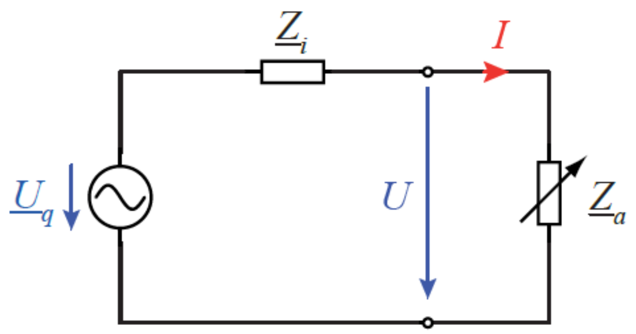
Scheinleistung: $\underline{S} = P + jQ$ $\quad \in \mathbb{C} \quad [S] = \mathrm{VA}$

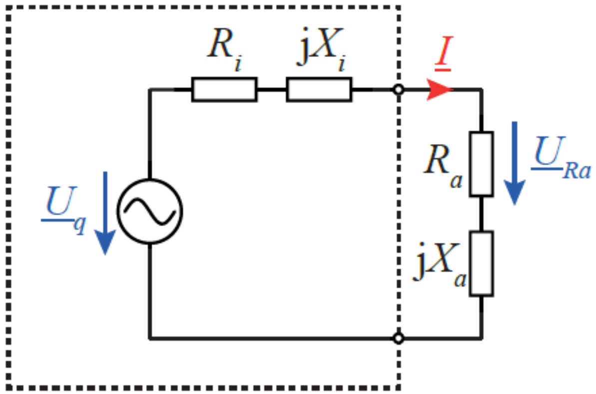
komplex konjugiert

$\underline{S} = \underline{U}\cdot\underline{I}^*$



Leistungsanpassung





Wir wollen die maximale Leistung aus der Quelle ziehen!

Mit reellen Widerständen: $R_i = R_a$

Mit komplexen Impedanzen: $R_i = R_a \qquad X_i = -X_a$

Wir wollen keine Blindleistung!

$$\boxed{\underline{Z}_i = \underline{Z}_a^*} \qquad \Rightarrow P_{\max} = \frac{\hat{u}^2}{8R_i}$$

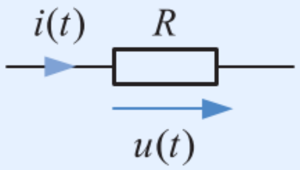
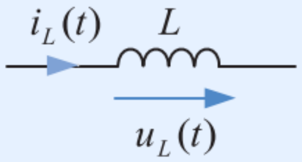
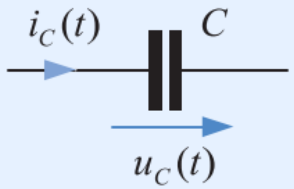
Wir wollen keine Blindleistung!

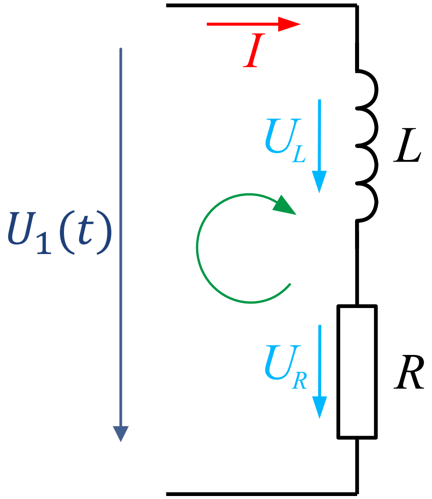
Diff.gleichungen vs. Frequenzbereich

Komponente	Spannung	Strom
$i(t)$, R, $u(t)$	$u(t) = R\, i(t)$	$i(t) = \frac{1}{R}\, u(t)$
$i_L(t)$, L, $u_L(t)$	$u_L(t) = L\,\frac{\mathrm{d}\, i_L(t)}{\mathrm{d}t}$	$i_L(t) = \frac{1}{L}\int u_L(t)\,\mathrm{d}t$
$i_C(t)$, C, $u_C(t)$	$u_C(t) = \frac{1}{C}\int i_C(t)\,\mathrm{d}t$	$i_C(t) = C\,\frac{\mathrm{d}\, u_C(t)}{\mathrm{d}t}$

Komponente	Spannung	Strom	Impedanz
$\underline{\hat{i}}$, R, $\underline{\hat{u}}$	$\underline{\hat{u}} = R\,\underline{\hat{i}}$	$\underline{\hat{i}} = \underline{\hat{u}}\,/\,R$	$\underline{Z}_R = R$
$\underline{\hat{i}}$, L, $\underline{\hat{u}}$	$\underline{\hat{u}} = \mathrm{j}\omega L\,\underline{\hat{i}}$	$\underline{\hat{i}} = \frac{\underline{\hat{u}}}{\mathrm{j}\omega L}$	$\underline{Z}_L = \mathrm{j}\omega L \overset{(8.13)}{=} \mathrm{j}X_L$
$\underline{\hat{i}}$, C, $\underline{\hat{u}}$	$\underline{\hat{u}} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\,\underline{\hat{i}}$	$\underline{\hat{i}} = \mathrm{j}\omega C\,\underline{\hat{u}}$	$\underline{Z}_C = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} = \mathrm{j}X_C$ mit $X_C = -\frac{1}{\omega C}$

Diff.gleichungen (Aufgabe 3)

Komponente	Spannung	Strom
	$u(t) = R\,i(t)$	$i(t) = \frac{1}{R}\,u(t)$
	$u_L(t) = L\,\frac{\mathrm{d}\,i_L(t)}{\mathrm{d}\,t}$	$i_L(t) = \frac{1}{L}\int u_L(t)\,\mathrm{d}\,t$
	$u_C(t) = \frac{1}{C}\int i_C(t)\,\mathrm{d}\,t$	$i_C(t) = C\,\frac{\mathrm{d}\,u_C(t)}{\mathrm{d}\,t}$



1. Masche: $u_1(t) = u_L(t) + u_R(t)$
2. (Diff.)Gleichungen aufstellen:

$$u_L = L\frac{\mathrm{di}}{\mathrm{dt}}; \quad u_R = R \cdot \mathrm{i}$$

3. Ansatz für Strom (mit Phasenverschiebung):

$$u_1 = \hat{u}_1 \sin(\omega t) \rightarrow \mathrm{i} = \hat{\imath} \sin(\omega t + \varphi)$$

Beispiel: Serie 11, Aufgabe 2

Spannung $u(t) = \hat{u}\cos(\omega t + \varphi_u)$ ist in Abbildung 4 gegeben.

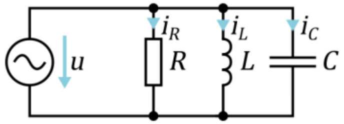
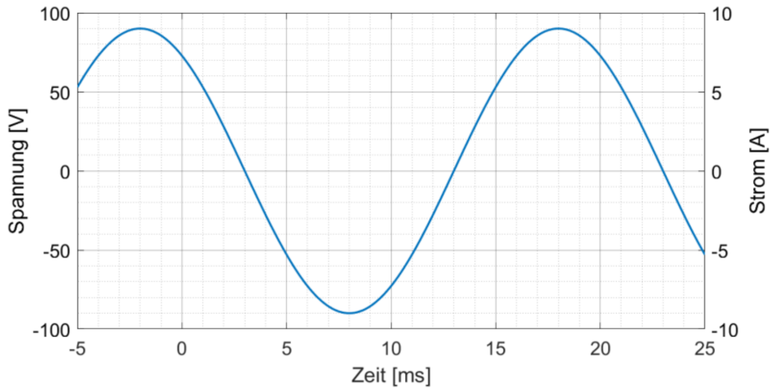


Abbildung 3: Parallelschaltung von Widerstand, Induktivität und Kondensator an einer Wechselspannungsquelle.



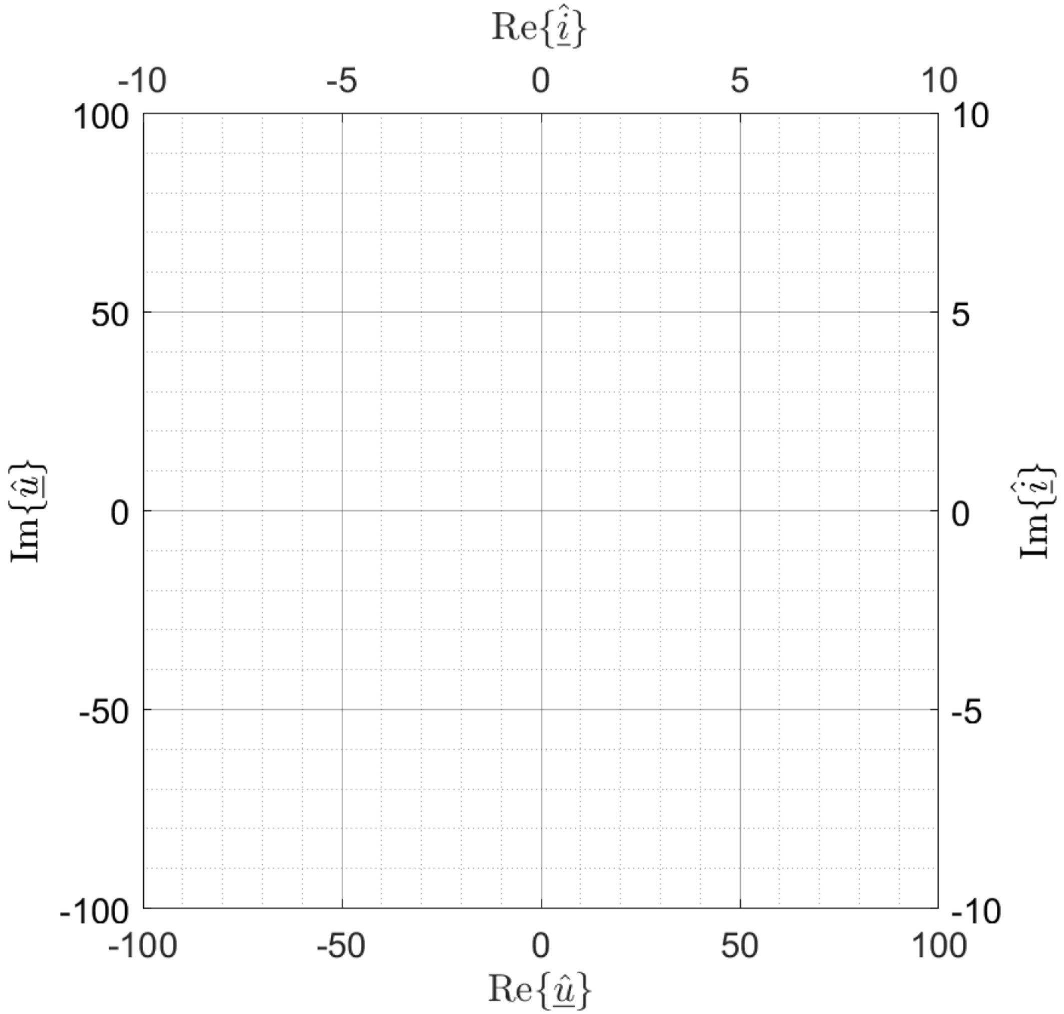
(a) Bestimmen Sie die Amplitude $\hat{u}$, Kreisfrequenz ω und Phasenverschiebung φ_u der Spannung $u(t)$ aus Abbildung 4.

(b) Zeichnen Sie den zur Spannung $u(t)$ gehörenden Zeiger $\underline{\hat{u}}$ in Abbildung 5 ein.

(c) Berechnen Sie die komplexen Impedanzen der in Abbildung 3 eingezeichneten Bauteilen unter Verwendung der Werte $R = 30\ \Omega$, $L = 50$ mH und $C = 250\ \mu$F.

(d) Berechnen Sie die Zeiger $\underline{\hat{\imath}}_R$, $\underline{\hat{\imath}}_L$ und $\underline{\hat{\imath}}_C$ der Ströme i_R, i_L und i_C.

(e) Zeichnen Sie die Zeiger $\underline{\hat{\imath}}_R$, $\underline{\hat{\imath}}_L$ und $\underline{\hat{\imath}}_C$ in Abbildung 5 ein.


Re{$\hat{\underline{i}}$}
-10
-5
0
5
10
100
50
0
-50
-100
10
5
0
-5
-10
-100
-50
0
50
100
Re{$\hat{\underline{u}}$}
Im{$\hat{\underline{u}}$}
Im{$\hat{\underline{i}}$}

Tipps Serie 11

1. Formeln für Kenngrössen (ZF)
2. Zeigerdiagramme (slide 6, Beispiel)
3. Diffgleichung mit Ansatz vs. Lösen im Frequenzbereich