ETH zürich

Übungsstunde W05

Informatik (RW) – HS 23

Übersicht

Heutiges Programm

Feedback zu **code** expert
Ziele
Repetition
Binary Representation
Normalized Floating Point Systems
Floating Point Guidelines
Prüfungsfrage
Outro

`rwko.ch/lily`

1. Feedback zu **code** expert

Kommentieren — aber wie?

- Faustregel: Wenn einfach der Code in Worte gefasst wird, kann man den Kommentar auch weglassen
- Kommentare sollen Kontext hervorheben und den Code verständlicher machen
- Gebt euren Variablen deskriptive Namen und versucht, mit Kommentaren euren Gedankengang und eure Ideen zu schildern
- Alternativ: Schreibt Code, der gut genug ist und keine weiteren Kommentare braucht

How to Comment

```
// Set a to value 6
const unsigned int a = 6;

// Output "Hello World!\n" to the console.
std::cout << "Hello World!";
```

Besser:

```
// resistance of component A to 6 Ohm
const unsigned int resistance_A = 6;

// Greet World
std::cout << "Hello World!";
```

2. Ziele

Ziele

- ☐ Eine Dezimalzahl (insb. nicht Ganzzahl) in ihre Binärdarstellung umwandeln
- ☐ Wissen, welche Elemente in der Menge $F^*(b, p, e_{\text{min}}, e_{\text{max}})$ sind und weshalb
- ☐ Arithmetische Operationen innerhalb von $F^*(b, p, e_{\text{min}}, e_{\text{max}})$ ausführen können

3. Repetition

Expressions

Aufgabe

Evaluierere die folgenden Expressions:

1. `5 < 4 < 1`
2. `true > false`

Lösung 1

```
5 < 4 < 1
(5 < 4) < 1
false < 1
0 < 1
true
```

Lösung 2

```
true > false
1 > 0
true
```

Recap: Binary Representation ...aber welche?

Math. Dec	Math. Bin	`int`	`unsigned int`
42_{10}	101010_2	`0101010`	`101010`
-42_{10}	-101010_2	`1010110`	nope

`int` speichert Zahlen in der *two's complement Representation*, daher die führende `0`.

Binary Arithmetic

Aufgabe

1. Konvertiert die Ganzzahlen $a = 4$ und $b = 7$ in ihre Binärdarstellung (*nicht* Two's Complement)
2. Addiert die zwei in ihren Binärdarstellungen
3. Konvertiert das Resultat zurück in Dezimaldarstellung

Lösung

$a = 4_{10} = 100_2$
$b = 7_{10} = 111_2$
$100_2 + 111_2 = 1011_2$
$1011_2 = 11_{10}$

Fragen/Unklarheiten?

4. Binary Representation

Binary Representation

binary	1	1	1	1	.	1	1	1
decimal	2^3	2^2	2^1	2^0	.	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}
	8	4	2	1	.	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Aufgaben

1. 11.01_2 in decimal
2. 101.1_2 in decimal
3. 7.125_{10} in binary
4. 4.375_{10} in binary
5. 1.1_{10} in binary

Lösungen

1. $2 + 1 + 0 + \frac{1}{4} = 3.25_{10}$
2. $4 + 0 + 1 + \frac{1}{2} = 5.5_{10}$
3. 111.001_2
4. 100.011_2
5. $1.1_{10} = 1.000110\ldots_2$

Binary Representation

Vorgehen 1

1. Berechne die Ganzzahl vor dem Dezimalpunkt
2. Schreibe die Z_2 nieder. Jetzt kommt Z_{10}.REST dran
3. Kann $\frac{1}{2^i}$ von der Zahl Z_{10} abgezogen werden?
   Falls ja, subtrahiere $\frac{1}{2^i}$ von Z_{10} und füge eine 1 am Ende von Z_2 hinzu
   Falls nein, füge eine 0 am Ende von Z_2 hinzu
4. Falls Z_{10} jetzt bei 0 angekommen ist, überprüfe deine Lösung
   Und sonst, führe diesen Algorithmus mit $i + 1$ fort

Binary Representation

Vorgehen 2

Habt ihr in der VL gesehen, funktioniert für Zahlen mit 1 oder 0 am Anfang

1. Zahl aufschreiben
2. Erste Ziffer der Zahl aufschreiben
3. Zahl - erste Ziffer rechnen
4. Mit 2 multiplizieren und in eine neue Zeile schreiben

Fragen/Unklarheiten?

5. Normalized Floating Point Systems

Normalized Floating Point Systems

$F^*(\beta, p, e_{\text{min}}, e_{\text{max}})$

*	normalisiert ($d_0 \neq 0$)
$\beta \geq 2$	Basis
$p \geq 1$	Präzision (Anzahl Ziffern)
e_{min}	kleinstmöglicher Exponent
e_{max}	grösstmöglicher Exponent

… beschreibt Zahlen der Form:

$$\pm d_0.d_1d_2d_3 \ldots d_{p-1} \cdot \beta^e$$

$d_i \in \{0, \ldots, b-1\}$
$d_0 \neq 0$
$e \in [e_{\text{min}}, e_{\text{max}}]$

Fragen/Unklarheiten?

Übungen

Übungen

Sind die folgenden Zahlen im Set $F^*(2, 4, -2, 2)$?

$$0.000_2 \cdot 2^1 = 0_{10}$$
$$1.000_2 \cdot 2^1 = 2_{10}$$
$$1.001_2 \cdot 2^{-1} = 0.5625_{10}$$
$$1.0001_2 \cdot 2^{-1} = 0.53125_{10}$$
$$1.111_2 \cdot 2^{-2} = 0.46875_{10}$$
$$1.111_2 \cdot 2^5 = 60_{10}$$

Lösungen

in F^*

$$1.000_2 \cdot 2^1 = 2_{10}$$
$$1.001_2 \cdot 2^{-1} = 0.5625_{10}$$
$$1.111_2 \cdot 2^{-2} = 0.46875_{10}$$

nicht in F^*

$0.000_2 \cdot 2^1$ nicht "normalisierbar"

$1.0001_2 \cdot 2^{-1}$ $5 > p = 4$

$1.111_2 \cdot 2^5$ $5 \notin [-2, 2]$

Fragen/Unklarheiten?

mehr Übungen

Aufgabe

Nenne die folgenden Zahlen in $F^*(2, 4, -2, 2)$ als Dezimalzahlen

1. die grösste Zahl
2. die kleinste Zahl
3. die kleinste nicht-negative Zahl

Lösung

grösste:	$1.111 \cdot 2^2 = 7.5_{10}$
kleinste:	$-1.111 \cdot 2^2 = -7.5_{10}$
kleinste > 0:	$1.000 \cdot 2^{-2} = 0.25_{10}$

Trick

Für gegebenes $F^*(\beta, p, e_{\text{min}}, e_{\text{max}})$:

Grösste:	$1.11\ldots1 \cdot 2^{e_{\text{max}}}$
Kleinste:	$-$Grösste
Kleinste > 0:	$1.00\ldots0 \cdot 2^{e_{\text{min}}}$

Normalized Floating Point Systems

Frage

Wie viele Zahlen sind in $F^*(2, 4, -2, 2)$?

Antwort

Für einen gefixten Exponenten gibt es immer drei Ziffern, die man frei variieren kann und für alle Zahlen gibt es auch eine jeweils negative in der Menge F^*. Das resultiert in $2 \cdot 2^3 = 16$ Zahlen pro Exponenten. Es gibt 5 mögliche Exponenten, daher also $5 \cdot 16 = 80$ Zahlen. Merke, dass keine Zahl doppelt gezählt wird, da jede NFP eindeutig (*unique*) ist.

Fragen/Unklarheiten?

Arithmetik in F^*

Floats addieren

1. Beide zum gleichen Exponenten umformen
2. In Binärdarstellung addieren
3. Summe renormalisieren
4. Runden, falls nötig

Beispiel

$$F^*(2, 6, -2, 3)$$

$$1.125_{10} + 9.25_{10}$$

$$1.001_2 + 1001.01_2 \quad \text{(bereits gleicher Exponent } (\cdot 2^0))$$

$$1010.011 \quad \text{Addition}$$

$$1.010011 \cdot 2^3 \quad \text{Renormalisierung, } e \text{ und } p \text{ anpassen}$$

$$1.01010 \cdot 2^3 \quad \text{Runden: 1 rauf, 0 runter, und übertragen}$$

$$1.01010_2 \cdot 2_2^3 = 1010.10_2 = 10.5_{10} \quad \neq 10.375_{10}$$

Wieso 10.5 und nicht 10.375?

Einfach, weil die exakte Zahl 10.375 nicht im gegebenen F^* dargestellt werden *kann*. Die nächste Zahl, die in F^* ist, ist 10.5. Das ist der Grund, wieso Floats gefährlich sein können. Deshalb müssen wir auch die *Floating Point Guidelines* befolgen.

Es ist nicht 10.25, weil wir in diesem Fall aufrunden, obwohl die Differenz bei beiden 10.25 und 10.5 zu 10.375 bei 0.125 liegt.

Übung

Übung

addiere $1.001 \cdot 2^{-1} = 0.5625_{10}$
zu $1.111 \cdot 2^{-2} = 0.46875_{10}$
in $F^*(2, 4, -2, 2)$.

Lösung

1. Bringe beide auf den gleichen Exponenten, sagen wir -1
   $1.001 \cdot 2^{-1} + 0.1111 \cdot 2^{-1}$
2. Addiere sie in der Binärdarstellung: $10.0001 \cdot 2^{-1}$
3. Renormalisiere: $1.00001 \cdot 2^0$
4. Runde: $1.000 \cdot 2^0 = 1_{10} \neq 1.03125_{10}$

Fragen/Unklarheiten?

6. Floating Point Guidelines

Floating Point Guidelines

Guidelines

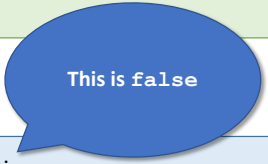
Guideline 1:

> «Do **not** test two floating point numbers for **equality**, if at least one of them was rounded before.»

Guideline 1 – Example

Guideline 1:

«Do **not** test two floating point numbers for **equality**, if at least one of them was rounded before.»



Example:

```
float a = 1.05f;
if (100*a == 105.0f)
    std::cout << "no output\n";
```

Guideline 1 – Example

Guideline 1:

«Do **not** test two floating point numbers for **equality**, if at least one of them was rounded before.»

Example:

```
float a = 1.05f;
if (100*a == 105.0f)
    std::cout << "no output\n";
```

This is `false`

Problem:

`1.05f` not representable

Guideline 1 – Example

Guideline 1:

«Do **not** test two floating point numbers for **equality**, if at least one of them was rounded before.»

This is `false`

Example:

```
float a = 1.05f;
if (100*a == 105.0f)
    std::cout << "no output\n";
```

Problem:

`1.05f` not representable

$$1.05 = \overbrace{1.00001100110011001100110}^{\text{24bit}}\ldots \cdot 2^0$$

(rounding) $\rightarrow 1.049999995231\ldots = 1.00001100110011001100110 \cdot 2^0$

Guidelines

Guideline 1:

«Do **not** test two floating point numbers for **equality**, if at least one of them was rounded before.»

Guideline 2:

«**Avoid** the **addition** of numbers of extremely **different sizes**!»

Guideline 2 – Example

Guideline 2:

«**Avoid** the **addition** of numbers of extremely **different sizes**!»

Example:

```
float a = 67108864.0f + 1.0f;

if (a > 67108864.0f)
    std::cout << "This is not output ... \n";
```

Guideline 2 – Example

Guideline 2:

«**Avoid** the **addition** of numbers of extremely **different sizes**!»

Problem:

Significand too short

Example:

```
float a = 67108864.0f + 1.0f;

if (a > 67108864.0f)
    std::cout << "This is not output ... \n";
```

Guideline 2 – Example

Guideline 2:

«**Avoid** the **addition** of numbers of extremely **different sizes**!»

Problem:

Significand too short

Example:

```
float a = 67108864.0f + 1.0f;

if (a > 67108864.0f)
    std::cout << "This is not output ... \n";
```

$$
\begin{aligned}
67108864 &= \overbrace{1.00000000000000000000000}^{\text{24bit}} \cdot 2^{26} \\
+1 &= 0.00000000000000000000000001 \cdot 2^{26} \\
\hline
67108865 &= 1.00000000000000000000000001 \cdot 2^{26}
\end{aligned}
$$

Guideline 2 – Example

Guideline 2:

«**Avoid** the **addition** of numbers of extremely **different sizes**!»

Problem:

Significand too short

Example:

```
float a = 67108864.0f + 1.0f;

if (a > 67108864.0f)
    std::cout << "This is not output ... \n";
```

24bit

$$
\begin{aligned}
67108864 &= \overbrace{1.00000000000000000000000}\cdot 2^{26} \\
+1 &= 0.00000000000000000000000001 \cdot 2^{26} \\
\hline
67108865 &= 1.00000000000000000000000001 \cdot 2^{26} \\
\text{(rounding)} \rightarrow 67108864 &= 1.00000000000000000000000 \cdot 2^{26}
\end{aligned}
$$

Guidelines

Guideline 1:

«Do **not** test two floating point numbers for **equality**, if at least one of them was rounded before.»

Guideline 2:

«**Avoid** the **addition** of numbers of extremely **different sizes**!»

Guideline 3:

«**Avoid** the **subtraction** of numbers of **similar sizes**!»

Guideline 3 – Example

Guideline 3:

«**Avoid** the **subtraction** of numbers of **similar sizes**!»

Example:

- Consider sequence $\mathrm{x}_{n+1} = 6x_n - 1$

Guideline 3 – Example

Guideline 3:

«**Avoid** the **subtraction** of numbers of **similar sizes**!»

Example:

- Consider sequence $x_{n+1} = 6x_n - 1$
- Computing some sequences for given x_0:

Guideline 3 – Example

Guideline 3:

«**Avoid** the **subtraction** of numbers of **similar sizes**!»

Example:

- Consider sequence $x_{n+1} = 6x_n - 1$
- Computing some sequences for given x_0:
  - e.g. $x_0 = 1$ → $x_1 = 5, \quad x_2 = 29, \quad x_3 = 173, \quad \ldots$

Guideline 3 – Example

Guideline 3:

«**Avoid** the **subtraction** of numbers of **similar sizes**!»

Example:

- Consider sequence $x_{n+1} = 6x_n - 1$
- Computing some sequences for given x_0:
  - e.g. $x_0 = 1$ → $x_1 = 5, \quad x_2 = 29, \quad x_3 = 173, \quad \ldots$
  - e.g. $x_0 = 0.2$ → $x_1 = 0.2, \quad x_2 = 0.2, \quad x_3 = 0.2, \quad \ldots$

Guideline 3 – Example

Guideline 3:

«**Avoid** the **subtraction** of numbers of **similar sizes**!»

Example:

- Consider sequence $x_{n+1} = 6x_n - 1$
- Computing some sequences for given x_0:
  - e.g. $x_0 = 1$ → $x_1 = 5, \quad x_2 = 29, \quad x_3 = 173, \quad \ldots$
  - e.g. $x_0 = 0.2$ → $x_1 = 0.2, \quad x_2 = 0.2, \quad x_3 = 0.2, \quad \ldots$

C++ claims

$x_{14} \approx 622.982$

Guideline 3 – Example

Guideline 3:

«**Avoid** the **subtraction** of numbers of **similar sizes**!»

Example:

- What went wrong?

Guideline 3 – Example

Guideline 3:

«**Avoid** the **subtraction** of numbers of **similar sizes**!»

Example:

- What went wrong?
  - `float` represents 0.2 as 0.20000000298…
  - Thus: $6 \cdot x_0 - 1 \neq 1.2 - 1$

Guideline 3 – Example

Guideline 3:

«**Avoid** the **subtraction** of numbers of **similar sizes**!»

Example:

- What went wrong?
  - `float` represents 0.2 as 0.20000000298…
  - Thus: $6 \cdot x_0 - 1 \neq 1.2 - 1$ but rather:

$$x_1 = 0.20000004768 \ldots$$
$$x_2 = 0.20000028610 \ldots$$
$$x_3 = 0.20000171661 \ldots$$
$$\vdots$$

Guideline 3 – Example

Guideline 3:

«**Avoid** the **subtraction** of numbers of **similar sizes**!»

Example:

- What went wrong?
  - `float` represents 0.2 as 0.20000000298…
  - Thus: $6 \cdot x_0 - 1 \neq 1.2 - 1$ but rather:

$$x_1 = 0.2000000\mathbf{4768} \ldots$$
$$x_2 = 0.2000000\mathbf{28610} \ldots$$
$$x_3 = 0.2000\mathbf{0171661} \ldots$$
$$\vdots$$

Note how error increases!

Guideline 3 – Example

Guideline 3:

«**Avoid** the **subtraction** of numbers of **similar sizes**!»

But why do we subtract two similarly sized floating point numbers when we are comparing them to see if they are (roughly) equal?

In these cases, we do not further use the result from the subtraction in any other calculations. Therefore, the error does not add up over time causing issues as seen in the previous example.

Floating Point Numbers Vergleichen

Kurzgesagt: nicht auf Gleichheit prüfen
lieber auf "innerhalb der Toleranz" prüfen

```
// Beispiel of "equality"-check function for floats
bool equal(double x, double y, double tol){
  double diff = x - y;
  if(diff < 0){
    diff *= -1;
  }
  return (diff < tol);
}
```

Comparing FP-Numbers

The Comparison Problem

- Given `fp1` and `fp2` of type `float` or `double`.

- Guideline 1:

  «Do **not** test two floating point numbers for **equality**, if at least one of them was rounded before.»

The Comparison Problem

- Given `fp1` and `fp2` of type `float` or `double`.
- Guideline 1:

  «Do **not** test two floating point numbers for **equality**, if at least one of them was rounded before.»

- Thus `fp1 == fp2` should be **avoided**.

The Comparison Problem

- How can we compare instead?

The Comparison Problem

- How can we compare instead?

- First idea:
  Allow for small differences!

> Given: tolerance value `c > 0`.
>
> **`fp1`** **"equals"** **`fp2`** whenever **`|fp1 - fp2| < c`**

(Remark: |…| means absolute value. In C++ it's not available using vertical bars.)

The Comparison Problem

Given: tolerance value `c > 0`.

`fp1` "equals" `fp2` whenever **`|fp1 - fp2| < c`**

- Examples (`c` is `0.001`):
  - `fp1 = 10.0` and `fp2 = 12.0`

(Remark: on this slide = is meant in the mathematical sense.)

The Comparison Problem

Given: tolerance value `c > 0`.

`fp1` "equals" `fp2` whenever **`|fp1 - fp2| < c`**

- Examples (`c` is `0.001`):
  - `fp1 = 10.0` and `fp2 = 12.0`
    `|10.0 - 12.0| = 2.0`

(Remark: on this slide = is meant in the mathematical sense.)

The Comparison Problem

Given: tolerance value `c > 0`.

`fp1` "equals" `fp2` whenever **`|fp1 – fp2| < c`**

- Examples (`c` is `0.001`):
  - `fp1 = 10.0` and `fp2 = 12.0`
    `|10.0 – 12.0| = 2.0 > c`
    Thus: **not "equal"**

(Remark: on this slide = is meant in the mathematical sense.)

The Comparison Problem

Given: tolerance value `c > 0`.

`fp1` "equals" `fp2` whenever **`|fp1 – fp2| < c`**

- Examples (`c` is `0.001`):
  - `fp1 = 10.0` and `fp2 = 12.0`
    `|10.0 – 12.0| = 2.0 > c`
    Thus: **not "equal"**
  - `fp1 = 10.0` and `fp2 = 10.000013`

(Remark: on this slide = is meant in the mathematical sense.)

The Comparison Problem

Given: tolerance value `c > 0`.

`fp1` "equals" `fp2` whenever **`|fp1 – fp2| < c`**

- Examples (`c` is `0.001`):
  - `fp1 = 10.0` and `fp2 = 12.0`
    `|10.0 – 12.0| = 2.0 > c`
    Thus: **not "equal"**
  - `fp1 = 10.0` and `fp2 = 10.000013`
    `|10.0 – 10.000013| = 0.000013`

(Remark: on this slide = is meant in the mathematical sense.)

The Comparison Problem

Given: tolerance value `c > 0`.

`fp1` "equals" `fp2` whenever **`|fp1 – fp2| < c`**

- Examples (`c` is `0.001`):
  - `fp1 = 10.0` and `fp2 = 12.0`
    `|10.0 – 12.0| = 2.0 > c`
    Thus: **not "equal"**
  - `fp1 = 10.0` and `fp2 = 10.000013`
    `|10.0 – 10.000013| = 0.000013 < c`
    Thus: **"equal"**

(Remark: on this slide = is meant in the mathematical sense.)

Exercise

Write the following function:

```
// POST: returns true if and only if
//       |x - y| < tol
bool equals (double x, double y, double tol) {
  ...
}
```

Exercise

For example:

```
// POST: returns true if and only if
//       |x - y| < tol
bool equals (double x, double y, double tol) {
  double diff = x - y;
  if (diff < 0)
    diff *= -1; // absolute value
  return diff < tol;
}
```

Remark

- Comparing absolute differences with a tolerance value is a great first idea!

- (But: for example problems when the numbers are large.)

Prüfungsfrage

EURE PRÜFUNG KANN ANDERS AUSFALLEN

Geben Sie ein möglichst knappes normalisiertes Fliesskommazahlensystem an, mit welchem sich die folgenden dezimalen Werte gerade noch genau darstellen lassen: jede Verkleinerung von p, $e_{\max}$ oder $-e_{\min}$ muss dazu führen, dass mindestens eine Zahl nicht mehr dargestellt werden kann.
Hinweis: p zählt auch die führende Ziffer.
Tipp: Schreiben Sie sich die normalisierte Binärzahldarstellung der Werte auf, wenn sie für Sie nicht offensichtlich ist.

Provide a smallest possible normalized floating point number system that can still represent the following values exactly: any decrease of the numbers p, $e_{\max}$ or $-e_{\min}$ must imply that at least one of the numbers cannot be represented any more.
Hint: p does also count the leading digit.
Tip: Write down the normalized binary representation of the values, if it is not obvious for you.

Werte / *Values*: 2.25, $\frac{1}{8}$, 0.5, 16.5, 2^3

$F^*(\beta, p, e_{\min}, e_{\max})$ mit / *with*

$\beta = 2$, $p =$, $e_{\min} =$, $e_{\max} =$.

Prüfungsfrage

EURE PRÜFUNG KANN ANDERS AUSFALLEN

Geben Sie ein möglichst knappes normalisiertes Fliesskommazahlensystem an, mit welchem sich die folgenden dezimalen Werte gerade noch genau darstellen lassen: jede Verkleinerung von p, $e_{\max}$ oder $-e_{\min}$ muss dazu führen, dass mindestens eine Zahl nicht mehr dargestellt werden kann.
Hinweis: p zählt auch die führende Ziffer.
Tipp: Schreiben Sie sich die normalisierte Binärzahldarstellung der Werte auf, wenn sie für Sie nicht offensichtlich ist.

Provide a smallest possible normalized floating point number system that can still represent the following values exactly: any decrease of the numbers p, $e_{\max}$ or $-e_{\min}$ must imply that at least one of the numbers cannot be represented any more.
Hint: p does also count the leading digit.
Tip: Write down the normalized binary representation of the values, if it is not obvious for you.

Werte / *Values*: $2.25,\ \frac{1}{8},\ 0.5,\ 16.5,\ 2^3$

$F^*(\beta, p, e_{\min}, e_{\max})$ mit / *with*

$\beta = 2$, $p = 6$, $e_{\min} = -3$, $e_{\max} = 4$.

8. Outro

Allgemeine Fragen?

Bis zum nächsten Mal

Schöne Woche!