Übungsstunde 10

DGL 1. Ordnung

$y'(x) = a \cdot y(x)$, $a \in \mathbb{R}$

$\rightarrow$ allg. Lsg: $y(x) = c \cdot e^{ax}$

mit Anfangsbedingung $y(0) = y_0$

$\rightarrow$ spez. Lsg: $y(x) = y_0 \cdot e^{ax}$

11.1 Lösen von homogenem Diff'gleichungssystem

Man sucht eine Lösung für ein System von Differentialgleichungen, gegeben in folgender Form:

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{pmatrix}$$

Die Anfangsbedingungen $y(0)$ sowie die Matrix A sei bekannt, gesucht ist $y(t)$.
Das Problem kann durch Transformation in Eigenbasis (Entkopplung) gelöst werden.

Bsp: $\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

Vorgehen: (Transformation in Eigenbasis $z = T^{-1} \cdot y$)

1. Man diagonalisiere die Matrix $A = TDT^{-1}$ (siehe 6.6) und bestimme die Transformationsmatrix T.
   Bsp: $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
2. Sei $t^{(i)}$ die i-te Spalte von T und d_{ii} der i-te Diagonaleintrag von D.
   Die Lösung des Diff'gleichungssystems lautet dann:
   $y(t) = z_1(0) \cdot t^{(1)} \cdot e^{d_{11}t} + z_2(0) \cdot t^{(2)} \cdot e^{d_{22}t} + \dots$
   Bsp: $\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = z_1(0) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{2t} + z_2(0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{5t}$
3. Variante 1: Bestimme T^{-1}, danach $z(0) = T^{-1} \cdot y(0)$.
   Variante 2: Bestimme $z(0)$ durch Lösen des Gleichungssystems $T \cdot z(0) = y(0)$.
   Falls keine Anfangsbedingungen gegeben, $z_i(0) = C_i$.
   Bsp: $\begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1(0) \\ z_2(0) \end{pmatrix}$

Lineare Systeme 1. Ordnung (homogen)

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= a_{11} \cdot y_1 + a_{12} \cdot y_2 + \dots + a_{1n} \cdot y_n \\ y_2' &= a_{21} \cdot y_1 + a_{22} \cdot y_2 + \dots + a_{2n} \cdot y_n \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1} \cdot y_1 + a_{n2} \cdot y_2 + \dots + a_{nn} \cdot y_n \end{aligned}\right\} \rightarrow y'(x) = A \cdot y(x)$$

mit $y'(x) = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}$, $y(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Vorgehen - Kochrezept $\rightarrow$ ZF 11.1

Achtung: A muss diag'bar sein! $\rightarrow T^{-1}AT = D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

1. Eigenwertproblem lösen $\rightarrow$ T und D
2. $y(t) = z_1(0) \cdot t^{(1)} \cdot e^{d_{11}t} + z_2(0) \cdot t^{(2)} \cdot e^{d_{22}t} + \dots$ $\quad (y = Tz)$
3. Anfangsbedingungen transformieren: $z(0) = T^{-1} \cdot y(0)$

Beispiel

$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 6 \\ 2 & -5 & -6 \\ -2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$, $y' = Ay$, gesucht: allg. Lsg

1) EW: $\det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 6 & 6 \\ 2 & -5-\lambda & -6 \\ -2 & 6 & 7-\lambda \end{pmatrix} = -(1+\lambda)(\lambda-1)^2 \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = 1$ und $\lambda_3 = -1$

EV: $\lambda_{1,2} = 1$: $\begin{pmatrix} -2 & 6 & 6 \\ 2 & -6 & -6 \\ -2 & 6 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left| a = 3b + 3c \right| \Rightarrow E_1 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

$\lambda_3 = -1$: $\begin{pmatrix} 0 & 6 & 6 \\ 2 & -4 & -6 \\ -2 & 6 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left| \begin{matrix} b = -c \\ a = 2b + 3c \end{matrix} \right| \Rightarrow E_{-1} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

$\Rightarrow D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $T = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2) $y(x) = c_1 \cdot e^{x} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \cdot e^{x} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \cdot e^{-x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (allg. Lsg)

gesucht: spez. Lsg: AWP $y(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

3) $y(0) = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (entspricht $T \cdot c = y(0)$)

$\rightarrow$ 3 Gl. und 3 Unbek.

$\Rightarrow \left| \begin{matrix} 3c_1 + 3c_2 + c_3 = 4 \\ c_1 = c_3 \\ c_2 + c_3 = 1 \end{matrix} \right| \rightarrow 3\underbrace{c_3}_{c_1} + 3\underbrace{(1 - c_3)}_{c_2} + c_3 = 4 \Rightarrow c_3 = 1$

$\hookrightarrow c_1 = 1$

$\hookrightarrow c_2 = 0$

$\Rightarrow y(x) = e^{x} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{-x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (spez. Lsg)

gesucht: $\lim_{x \to -\infty} y(x) = 0 \rightarrow$ Anfangsbedingung?

$\rightarrow \lim_{x \to -\infty} y(x) = 0 + 0 + c_3 \cdot e^{\infty} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow c_3 = 0$

$\Rightarrow y(0) = T \cdot \underbrace{z(0)}_{=c} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3c_1 + 3c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ Anfangsbedingung

Lineare Systeme 2. Ordnung (homogen)

$y'' = Ay$, AWP: $y(0) = C$, $y'(0) = K$ und $C, K \in \mathbb{R}$

Vorgehen – Kochrezept

① Eigenwertproblem lösen $\rightarrow T$ und D

② Substitution: $y = Tz \rightarrow y'' = Tz'' = Ay = ATz \rightarrow Tz'' = ATz$

$\Rightarrow z'' = \underbrace{T^{-1}AT}_{=D} z = Dz$

$\rightarrow$ z.B. z_1'' ist nur noch von z_1 abhängig

$\rightarrow z_i'' = \lambda_i z_i$ und setze $\omega_i = \sqrt{-\lambda_i}$ $\Rightarrow z_i'' + \omega_i^2 z_i = 0$

③ Allg. Lsg: $z_i(x) = a\cdot\cos(\omega_i x) + b\cdot\sin(\omega_i x)$ (aus Analysis)

④ Rücksubstitution: $y(x) = Tz(x)$

$$\rightarrow y(x) = [a_1\cos(\omega_1 x) + b_1\sin(\omega_1 x)]\cdot t^{(1)} + \ldots + [a_n\cos(\omega_n x) + b_n\sin(\omega_n x)]\cdot t^{(n)}$$

Homogene DGL n-ter Ordnung

Idee: DGL n-ter Ordnung $\rightarrow$ System 1. Ordnung mit n Gleichungen

Kochrezept $\rightarrow$ ZF 11.2

① $y^{(n)} = a_0\cdot y + a_1\cdot y' + a_2\cdot y'' + \ldots + a_{n-1}\cdot y^{(n-1)}$

② Substitution: $y = y_0,\ y' = y_1,\ y'' = y_2,\ \ldots,\ y^{(n-1)} = y_{n-1}$

$$\Rightarrow y^{(n)} = a_0 y_0 + a_1 y_1 + a_2 y_2 + \ldots + a_{n-1} y_{n-1}$$

$$\hookrightarrow y_{n-1}' = y^{(n)} \rightarrow \left| \begin{array}{l} y_0' = y_1 \\ y_1' = y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} = a_0 y_0 + a_1 y_1 + \ldots + a_{n-1} y_{n-1} \end{array} \right|$$

③ DGL-System 1. Ordnung lösen $\rightarrow$ gesucht ist $y_0 = y$

11.2 Umwandlung höhere Ordnung in System 1. Ordnung

Man will eine Differentialgleichung höherer Ordnung in ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung umwandeln:

Bsp: $y'''(t) + 4\cdot y''(t) + 2\cdot y'(t) - 3y(t) = 0$

$y(0) = 1,\ y'(0) = 3,\ y''(0) = 2$

Vorgehen:

① Man substituiere $y = y_0, y' = y_1$ etc. Die höchste Ableitung lasse man stehen.

Bsp: $y'''(t) + 4\cdot y_2(t) + 2\cdot y_1(t) - 3y_0(t) = 0$

② Man ersetze höchste Ableitung durch einfache Ableitung mit Substitution.

Bsp: $y_2'(t) + 4\cdot y_2(t) + 2\cdot y_1(t) - 3y_0(t) = 0$

③ Durch die Substitution hat man automatisch ein Diff'gleichungssystem erster Ordnung erzeugt:

Bsp: $\begin{array}{lcl} y_0' & = & y_1 \\ y_1' & = & y_2 \\ y_2' & = & 3\cdot y_0 - 2\cdot y_1 - 4\cdot y_2 \end{array}$

④ Zum Schluss substituiere noch die Anfangsbedingungen

Bsp: $y_0(0) = 1,\ y_1(0) = 3,\ y_2(0) = 2$

Beispiel

$y''(x) = -5y(x) + 4y'(x) \rightarrow$ gesucht: allg. Lsg $y(x)$

Sub: $y = y_1,\ y' = y_2 \longrightarrow y'' = -5y_1 + 4y_2$

$y'' = (y')' = y_2' \longrightarrow y_2' = -5y_1 + 4y_2$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} y_1' = y_2 \\ y_2' = -5y_1 + 4y_2 \end{array} \right| \Rightarrow y' = Ay \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},\ y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}$$

EW: $\det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -5 & 4-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 5 \overset{!}{=} 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = 2 \pm i$

EV: $\lambda_1 = 2+i$: $\begin{pmatrix} -2-i & 1 \\ -5 & 2-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left| \begin{array}{l} -(2+i)a = -1\cdot b \\ -5\cdot a = -(2-i)\cdot b \end{array} \right| \Rightarrow a = 1,\ b = 2+i$

$\hookrightarrow$ Kontr.: $-5\cdot 1 \overset{?}{=} -(2-i)(2+i)$

$5 = 4 + 1 - 2i + 2i$ ✓

$\Rightarrow E_{2+i} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \end{pmatrix}\right\}$ und $E_{2-i} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix}\right\}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = c_1 \cdot e^{(2+i)\cdot x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \end{pmatrix} + c_2 \cdot e^{(2-i)\cdot x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix}$$

Rücksub: $\underline{\underline{y = y_1 = c_1 \cdot e^{(2+i)x} + c_2 \cdot e^{(2-i)x}}}$