Übungsstunde 11

Inhomogene Systeme

$$\underbrace{y' = Ay}_{\text{homogen}} + \underset{\uparrow \text{ inhomogen}}{b}$$

11.3 Lösen von inhomogenem Diff'gleichungssystem

Man hat bereits mit dem in 11.1 beschriebenen Verfahren die Lösung $y_h(t)$ für das homogene Diff'gleichungssystem $y' = A \cdot y$ gefunden. Jetzt sucht man die Lösung für das inhomogene System:

$$y' = A \cdot y + b:$$

Das Prinzip ist, dass man eine partikuläre Lösung $y_p(t)$ findet, die die Diff'gleichung sicher erfüllt. Die allgemeine Lösung ist dann $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

Vorgehen:

1. Man nimmt an, dass die partikuläre Lösung $y_p(t)$ konstant ist. Daraus folgt, dass $y_p'(t) = 0$. Man löse also das Gleichungssystem $A \cdot y_p = -b$
2. Man addiere die homogene und die Partikuläre Lösung zusammen: $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

Kochrezept:

1. homogenes System lösen $\rightarrow$ allg. Lsg y_h
2. partikuläre Lsg für $y' = Ay + b$ $\rightarrow y_p$
3. $y = y_h + y_p$

Beispiel

$y' = Ay + b$ mit $A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 6 \\ 2 & -5 & -6 \\ -2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

1. homogene Lösung (bereits in letzter Übungsstd berechnet)

   $\hookrightarrow$ EW und EV von A berechnen

   $$\Rightarrow y_h = c_1 \cdot e^x \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \cdot e^x \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \cdot e^{-x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. partikuläre Lsg $y_p(x) = ?$

   $\hookrightarrow$ Idee: Bestimme irgendeine Lsg $\rightarrow$ z.B. konstante Lösung $\rightarrow y' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

   $$\Rightarrow y' = Ay_p + b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   $$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 6 & 6 \\ 2 & -5 & -6 \\ -2 & 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{p1} \\ y_{p2} \\ y_{p3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   $$\rightarrow \text{Gauss: } \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 6 & 6 & -2 \\ 2 & -5 & -6 & 0 \\ -2 & 6 & 7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III} + \text{II}]{\text{II} + 2 \cdot \text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 6 & 6 & -2 \\ 0 & 7 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[7 \cdot \text{III} - \text{II}]{\text{I} - 6 \cdot \text{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

   $$\Rightarrow y_{p3} = 4; \quad 7y_{p2} + 6y_{p3} = -4 \Rightarrow y_{p2} = -4; \quad y_{p1} = 2$$

   $$\Rightarrow y_p = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

3. $$\Rightarrow \underline{y} = y_h + y_p = \underline{\underline{c_1 \cdot e^x \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \cdot e^x \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \cdot e^{-x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}}}$$

Basisprüfung Sommer 2017

17. Welche der folgenden Aussagen gilt?

(a) Die allgemeine Lösung von $y' = ay$ ist $y(x) = e^{ax}$. allg. Lsg: $y(x) = c \cdot e^{ax}$

(b) Sei $\omega \neq 0$. Dann ist $ae^{\omega x} + be^{-\omega x}$ die allgemeine Lösung von $y'' - \omega^2 y = 0$.

(c) Sind y_1 und y_2 unterschiedliche von Null verschiedene Lösungen von $y''(x) = a(x)y(x) + b(x)y'(x)$, dann sind sie linear unabhängig.

y_1 ist Lsg; bspw. $y_2 = c \cdot y_1$
↳ nicht lin. unabhängig!

(d) $\sin(\omega x)$ und $\cos(\omega x)$ sind Lösungen von $y'' + \omega^2 y = 1$.

b) $y(x) = ae^{\omega x} + be^{-\omega x} \rightarrow y'' - \omega^2 y = \underbrace{a\omega^2 e^{\omega x} + b\omega^2 e^{-\omega x}}_{y''} - \omega^2 \underbrace{(ae^{\omega x} + be^{-\omega x})}_{y} = 0$ ✓

d) $-\omega^2 \sin(\omega x) + \omega^2 \sin(\omega x) = 0 \neq 1$
$-\omega^2 \cos(\omega x) + \omega^2 \cos(\omega x) = 0 \neq 1$

18. Welche Dimension hat der Lösungraum des folgenden Differentialgleichungssystems?

$$\begin{aligned} y_1'' &= y_1 + y_2' \\ y_2''' &= y_1' \end{aligned}$$

Schreibe als Vektor ohne höchste Ableitung

(a) 2

(b) 3

(c) 5

(d) 6

$\rightarrow z' = Az$ mit $z = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \\ y_2 \\ y_2' \\ y_2'' \end{pmatrix} \rightarrow z' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_1'' \\ y_2' \\ y_2'' \\ y_2''' \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

5 Gleichungen $\Rightarrow$ Dimension: $\underline{\underline{5}}$

23. [**10 Punkte**] Gegeben sei die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y''(t) = -8y(t) + 4y'(t). \qquad (*)$$

a) [**2 Punkte**] Verwandeln Sie $(*)$ in ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung. Welche Dimension hat der Lösungsraum dieses Systems?

b) [**6 Punkte**] Geben Sie die allgemeine reelle Lösung des in a) gefundenen Systems an.

c) [**2 Punkte**] Bestimmen Sie die Lösung von $(*)$ zu den Bedingungen $y(0) = 1$, $y(\pi/4) = 1$.

a) Setze $z = y'$ $\rightarrow \begin{cases} y' = z \\ z' = -8y + 4z \end{cases}$ $\Rightarrow \underline{\underline{\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}}}$

$\Rightarrow$ Dimension Lösungsraum: $\underline{\underline{2}}$

b) allg. reelle Lsg

$\rightarrow$ EW: $\det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -8 & 4-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(4-\lambda) + 8 = \lambda^2 - 4\lambda + 8 \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow \underline{\lambda_{1,2}} = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-32}}{2} = 2 \pm \dfrac{\sqrt{-16}}{2} = 2 \pm \dfrac{4i}{2} = \underline{2 \pm 2i}$

$\rightarrow$ EV: E_{2+2i}: $\begin{pmatrix} -2-2i & 1 \\ -8 & 2-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\rightarrow \left| \begin{matrix} (2+2i)a = b \\ 8a = (2+2i)b \end{matrix} \right|$

$\hookrightarrow E_{2+2i} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2+2i \end{pmatrix} \right\}$ $\Rightarrow E_{2-2i} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2-2i \end{pmatrix} \right\}$

$\uparrow$ ergibt selbe reelle Lsg, kann also weggelassen werden

$\rightarrow e^{(2+2i)t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2+2i \end{pmatrix}$ ist Lsg von DGS

$\hookrightarrow e^{(2+2i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2+2i \end{pmatrix} = e^{2t} \cdot \underbrace{(\cos(2t) + i \cdot \sin(2t))}_{\text{cis}(2t)} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2+2i \end{pmatrix}$

$= e^{2t} \begin{pmatrix} \cos(2t) + i\sin(2t) \\ 2\cos(2t) + 2i\sin(2t) + 2i\cos(2t) - 2\sin(2t) \end{pmatrix}$

$= e^{2t} \left[\begin{pmatrix} \cos(2t) \\ 2\cos(2t) - 2\sin(2t) \end{pmatrix} + i \cdot \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ 2\sin(2t) + 2\cos(2t) \end{pmatrix} \right]$

$\rightarrow$ Real und Imaginärteil sind lin. unabhängige reelle Lsg von $y'' = -8y + 4y'$

$\Rightarrow y(t) = e^{2t} \cdot [a \cdot \cos(2t) + b \cdot \sin(2t)]$

c) spez. Lsg: $y(0) = 1$ und $y(\frac{\pi}{4}) = 1$

$t=0$: $y(0) = e^0(a \cdot 1 + b \cdot 0) = \underline{a = 1}$

$t = \frac{\pi}{4}$: $y(\frac{\pi}{4}) = e^{\pi/2} \cdot (a \cdot \cancelto{0}{\cos(\pi/2)} + b \cdot \cancelto{1}{\sin(\pi/2)}) = e^{\pi/2} \cdot b \overset{!}{=} 1 \Rightarrow \underline{b = e^{-\pi/2}}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y(t) = e^{2t} \cdot [\cos(2t) + e^{-\pi/2} \cdot \sin(2t)]}}$$