Übungsstunde 2

Norm: ist Abb., die einem $\left|\begin{array}{l}\text{Vektor}\\ \text{Matrix}\\ \text{Folge}\\ \text{Funktion}\end{array}\right|$ eine reelle, nicht-negative Zahl zuordnet.

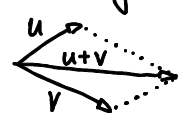
↳ Zahl beschreibt auf gewisse Weise das Objekt

Darstellung: $\|\cdot\|_2$ ← welche Norm

↑ Norm von

Bedingungen, die eine Norm erfüllen muss ⇝ Axiome

Axiome:
- Definitheit: $\|v\| \geq 0$ und $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
- Homogenität: $\|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$
- Subadditivität: $\|u\| + \|v\| \geq \|u+v\|$ ⇝ Dreiecksungleichung



Euklidische Norm: ⇝ beschreibt Länge des Vektors

$$\|v\|_2 = \sqrt{v_1^2 + \ldots + v_n^2}$$

↳ Spezialfall der p-Norm: $\|v\|_p = \sqrt[p]{v_1^p + \ldots + v_n^p}$

⇝ Prüfe die Axiome für eukl. Norm

Äquivalente Norm:

hier für Nummerierung

2 Normen $\|x\|_1$ und $\|x\|_2$ sind äquivalent, wenn es 2 positive Zahlen a und b gibt, sodass: $a \cdot \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b \cdot \|x\|_1$

Beispiel

Normierter VR

Norm auf VR V

Hilbert-Schmidt-Norm

$$\|A\|_2 := \left(\sum_i \|A \cdot e_i\|^2 \right)^{1/2}$$

Spalten-/Zeilenmaximierungsnorm

→ ordnet Spalte/Zeile sein Maximum zu

Operatornorm

ordnet einem Objekt eine Länge zu

Skalarprodukt

→ ordnet $V \times V$ eine $\mathbb{R}$ Zahl zu ⇝ ähnlich wie Norm
vergleicht jedoch 2 Objekte

$V \times V \to \mathbb{R}$

Skalarprodukt, falls:

1) linear:
   - $\langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
   - $\langle \lambda \cdot x, y \rangle = \lambda \cdot \langle x, y \rangle$

2) symmetrisch:
   - $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

3) positiv definit:
   - $\langle x, x \rangle \geq 0$
   - $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

induzierte Norm

$$\|a\| = \sqrt{\langle a, a \rangle}$$

Orthogonalität

bzgl. Skalarprodukt orthogonal (rechtwinklig), falls

$$\langle u, v \rangle = 0 \Rightarrow u \perp v$$

Parallelogrammregel / Polarisationsidentität

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

mit $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ (also induzierter Norm)