

Übungsstunde 2

Norm: ist Abb., die einem

Vektor
Matrix
Folge
Funktion

 eine reelle, nicht-negative Zahl zuordnet.

↪ Zahl beschreibt auf gewisse Weise das Objekt

Darstellung: $\| \cdot \|_2$ welche Norm
 ↑ Norm von

Bedingungen, die eine Norm erfüllen muss → Axiome

Axiome: • Definitheit: $\| v \| \geq 0$ und $\| v \| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

• Homogenität: $\| \lambda \cdot v \| = |\lambda| \cdot \| v \|$

• Subadditivität: $\| u \| + \| v \| \geq \| u + v \|$ → Dreiecksungleichung



Euklidische Norm: → beschreibt Länge des Vektors

$$\| v \|_2 = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}$$

↪ Spezialfall der p-Norm: $\| v \|_p = \sqrt[p]{v_1^p + \dots + v_n^p}$

→ Prüfe die Axiome für eukl. Norm

$$\textcircled{1} \quad \| v \|_2 \geq 0 \quad \checkmark \quad \text{und} \quad \| v \| = 0 \Leftrightarrow v = 0 \quad \checkmark$$

$$\textcircled{2} \quad \| \lambda \cdot v \|_2 = \sqrt{(\lambda \cdot v_1)^2 + \dots + (\lambda \cdot v_n)^2} = \sqrt{\lambda^2 \cdot (v_1^2 + \dots + v_n^2)} = |\lambda| \cdot \| v \|_2 \quad \checkmark$$

$$\textcircled{3} \quad \text{ewige Rechnerei} \rightarrow \text{daher an simpler Bsp.: } v = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow \| v \|_2 + \| u \|_2 = \sqrt{2^2 + 2^2 + 3^2} + \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{17} + \sqrt{9}$$

$$\| u + v \|_2 = \sqrt{3^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{10} \Rightarrow \sqrt{17} + \sqrt{9} \geq \sqrt{10} \quad \checkmark$$

Aquivalente Norm:

2 Normen $\|x\|_1$ und $\|x\|_2$ sind äquivalent, wenn es 2 positive Zahlen a und b gibt, sodass: $a \cdot \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b \cdot \|x\|_1$

Beispiel

Maximumsnorm: $\|x\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

Summennorm: $\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$

$$\Rightarrow n \cdot \|x\|_\infty \geq \|x\|_1 \quad (\text{da } |x_i| \leq \max|x_i|)$$

$$\Rightarrow \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \quad (\text{da } \max|x_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|)$$

$$\Rightarrow \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \cdot \|x\|_\infty$$

Normierter VR

Norm auf VR V

Hilbert - Schmidt - Norm

$$\|A\|_2 := \left(\sum_i \|A \cdot e_i\|^2 \right)^{1/2}$$

Spalten- / Zeilenmaximierungsnorm

→ ordnet Spalte / Zeile sein Maximum zu

Operatorsnorm

ordnet einem Objekt eine Länge zu

Skalarprodukt

→ ordnet $V \times V$ eine \mathbb{R} Zahl zu → ähnlich wie Norm
 $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ vergleicht jedoch 2 Objekte

Skalarprodukt, falls:

1) linear: • $\langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

• $\langle \lambda \cdot x, y \rangle = \lambda \cdot \langle x, y \rangle$

2) symmetrisch: • $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

3) positiv definit: • $\langle x, x \rangle \geq 0$

• $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

induzierte Norm

$$\|a\| = \sqrt{\langle a, a \rangle}$$

Orthogonalität

bzgl. Skalarprodukt orthogonal (rehtwinklig), falls

$$\langle u, v \rangle = 0 \Rightarrow u \perp v$$

Parallelogrammregel / Polarisationsidentität

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

mit $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ (also induzierter Norm)