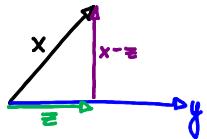


## Übungsstunde 3

### Orthogonalprojektion

Projiziere  $x$  orthogonal auf  $y$



$$y \perp (x-z) \longrightarrow \langle y, x-z \rangle = 0$$

$$z = \lambda \cdot y$$

$$\Rightarrow \langle y, x - \lambda \cdot y \rangle = \langle y, x \rangle - \lambda \cdot \langle y, y \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\langle y, x \rangle}{\langle y, y \rangle}$$

↪ Orthogonalprojektion von  $x$  auf  $y$  ist  $z = \lambda \cdot y = \frac{\langle y, x \rangle}{\langle y, y \rangle} \cdot y$

### Einheitsvektor

$x \in V$  ist Einheitsvektor, falls  $\|x\| = 1$

↑ Norm frei wählbar

↪ EHV zur gewählten Norm

### Beispiel

orthogonale EHV  $e_1, e_2, \dots, e_n$  sind linear unabhängig voneinander

↪ bilden eine Basis, nämlich die Orthonormalbasis (ONB)

↑  
orthogonal      ↑ normiert

$\Rightarrow$  Falls irgendeine Basis existiert  $\rightarrow$  Basis  $B: b_1, b_2, \dots, b_n$

dann existiert eine ONB  $e_1, e_2, \dots, e_n$

## Gram-Schmidt-Verfahren

$$\textcircled{1} \quad e_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|} = \frac{b_1}{\sqrt{\langle b_1, b_1 \rangle}} \quad b_1 \text{ auf } e_1 \text{ normieren}$$

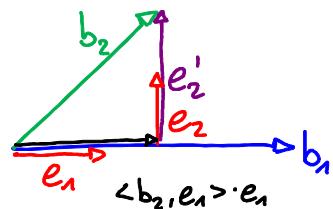
ind. Norm

$$\textcircled{2} \quad e_2' = b_2 - \langle b_2, e_1 \rangle \cdot e_1 \quad e_2' \text{ orthogonal zu } e_1$$

$$e_2 = \frac{e_2'}{\|e_2'\|} = \frac{e_2'}{\sqrt{\langle e_2', e_2' \rangle}} \quad e_2' \text{ auf } e_2 \text{ normieren}$$

$$\textcircled{3} \quad e_i' = b_i - \langle b_i, e_1 \rangle \cdot e_1 - \langle b_i, e_2 \rangle \cdot e_2 - \dots - \langle b_i, e_{i-1} \rangle \cdot e_{i-1}$$

$$e_i = \frac{e_i'}{\|e_i'\|}$$



### Beispiel

$$b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \text{konstr. ONB bezüglich Standardskalarprodukt}$$

Beispiel

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x) \cdot q(x) dx \quad \rightarrow \text{Finde ONB für VR: } \text{span}\{1, 3x^4\}$$