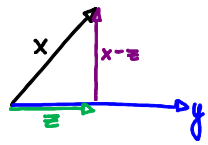
Übungsstunde 3

Orthogonalprojektion

Projeziere x orthogonal auf y



$y \perp (x-z) \longrightarrow \langle y, x-z \rangle = 0$

$z = \lambda \cdot y$

$\Rightarrow \langle y, x-\lambda \cdot y \rangle = \langle y, x \rangle - \lambda \cdot \langle y, y \rangle = 0$

$\Rightarrow \lambda = \dfrac{\langle y, x \rangle}{\langle y, y \rangle}$

↳ Orthogonalprojektion von x auf y ist $z = \lambda \cdot y = \dfrac{\langle y, x \rangle}{\langle y, y \rangle} \cdot y$

Einheitsvektor

$x \in V$ ist Einheitsvektor, falls $\|x\| = 1$

↳ Norm frei wählbar

↳ EHV zur gewählten Norm

Beispiel

$x = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \|x\|_2 = \sqrt{1/9 + 4/9 + 4/9} = 1$

orthogonale EHV $e_1, e_2, \dots, e_n$ sind linear unabhängig voneinander

↳ bilden eine Basis, nämlich die Orthonormalbasis (ONB)

orthogonal ↑ ↑ normiert

$\Rightarrow$ Falls irgendeine Basis existiert $\longrightarrow$ Basis B: $b_1, b_2, \dots, b_n$

dann existiert eine ONB $e_1, e_2, \dots, e_n$

Gram-Schmidt-Verfahren

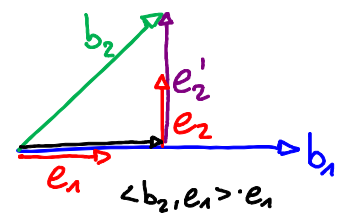
① $e_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|} = \frac{b_1}{\sqrt{\langle b_1, b_1\rangle}}$ ind. Norm — b_1 auf e_1 normieren

② $e_2' = b_2 - \langle b_2, e_1\rangle \cdot e_1$ — e_2' orthogonal zu e_1

$e_2 = \frac{e_2'}{\|e_2'\|} = \frac{e_2'}{\sqrt{\langle e_2', e_2'\rangle}}$ — e_2' auf e_2 normieren

③ $e_i' = b_i - \langle b_i, e_1\rangle \cdot e_1 - \langle b_i, e_2\rangle \cdot e_2 - \ldots - \langle b_i, e_{i-1}\rangle \cdot e_{i-1}$

$e_i = \frac{e_i'}{\sqrt{\langle e_i', e_i'\rangle}}$



Beispiel

$b_1 = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$, $b_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ $\longrightarrow$ konstr. ONB bezüglich Standardskalarprodukt

$$\underline{e_1} = \frac{b_1}{\|b_1\|} = \frac{b_1}{\sqrt{\langle b_1, b_1\rangle}} = \frac{1}{\sqrt{1+1+0}} \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}}$$

$$e_2' = b_2 - \langle b_2, e_1\rangle \cdot e_1 = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} - (-3) \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-3/2\\3/2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\1\end{pmatrix}$$

$$\underline{e_2} = \frac{e_2'}{\|e_2'\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1}} \begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\1\end{pmatrix} = \underline{\sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\1\end{pmatrix}}$$

$$e_3' = b_3 - \langle b_3, e_1\rangle \cdot e_1 - \langle b_3, e_2\rangle \cdot e_2$$

$$= \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - (-1) \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1/2\\1/2\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2/3\\2/3\\2/3\end{pmatrix}$$

$$\underline{e_3} = \frac{1}{\sqrt{3 \cdot (2/3)^2}} \begin{pmatrix}2/3\\2/3\\2/3\end{pmatrix} = \underline{\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}$$

Beispiel

$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x) \cdot q(x)\, dx \quad \longrightarrow$ Finde ONB für VR: $\operatorname{span}\{1, 3x^4\}$

$\longrightarrow \omega_1(x) = 1 \quad$ und $\quad \omega_2(x) = 3x^4$

$$\underline{e_1} = \frac{\omega_1}{\|\omega_1\|} = \frac{1}{\sqrt{\int_0^1 1 \cdot 1\, dx}} = \underline{1}$$

$$e_2' = \omega_2 - \langle \omega_2, e_1 \rangle \cdot e_1 = 3x^4 - \int_0^1 3x^4 \cdot 1\, dx \cdot 1$$

$$= 3x^4 - \left[\frac{3x^5}{5}\right]_0^1 = 3x^4 - \frac{3}{5}$$

$$e_2 = \frac{e_2'}{\|e_2'\|} = \frac{3x^4 - 3/5}{\underbrace{\sqrt{\int_0^1 (3x^4 - \frac{3}{5})^2 dx}}_{*}}$$

$$* = \int_0^1 9x^8 - \frac{18}{5}x^4 + \frac{9}{25}\, dx$$

$$= \left[x^9 - \frac{18}{25}x^5 + \frac{9}{25}x\right]_0^1 = \frac{16}{25}$$

$$\hookrightarrow \underline{e_2} = \frac{3x^4 - 3/5}{\sqrt{16/25}} = \frac{5}{4}(3x^4 - 3/5) = \underline{\frac{15}{4}x^4 - \frac{3}{4}}$$