Übungsstunde 4

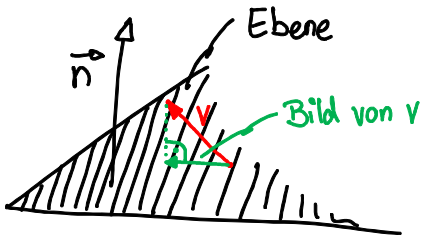
Darstellungsmatrix (Abbildungsmatrix)

Matrix, um von Urbildraum in Zielraum zu gelangen

Beispiel $v \in \mathbb{R}^3$ (Urbildraum) gegeben: $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Darstellungsmatrix: $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Bild und Kern



3D-Vektor auf Ebene abgebildet (je nach Darstellungsmatrix)

→ Abbildung ist Projektion auf Ebene, wenn Projektion nicht vorhanden ⇒ gehört <u>Kern</u> an, also bspw. $\vec{n}$

→ <u>Bild</u> sind Vektoren, die auf Ebene projeziert wurden

Bild: $b \in \mathrm{im}(A) \iff$ Das LGS $Ax = b$ hat eine Lösung

Kern: $x \in \ker(A) \iff Ax = 0$

Dimension von Bild und Kern

$\dim(\ker(A)) + \dim(\mathrm{im}(A)) = m$ [m: Anz. Spalten der Matrix ($\neq \mathrm{Rang}(A)$!)]

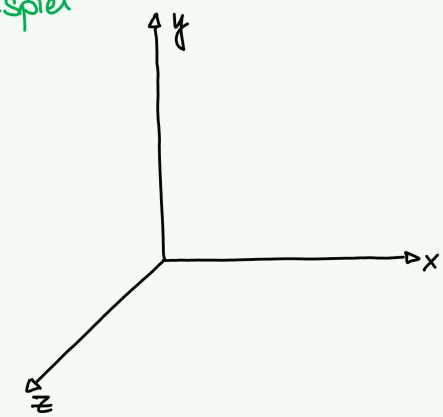
$\dim(\mathrm{im}(A)) = \mathrm{Rang}(A) = \dim(\mathrm{im}(A^T))$

Koordinatentransformation

Ziel: Koordinaten eines Vektors/Punktes bzgl. einer neuen Basis darstellen

Seien A und B zwei verschiedene Basen:

Beispiel



A ist Standardbasis:

$a^{(1)} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad a^{(2)} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad a^{(3)} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$$x_A = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}_A = \cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

B ist neue Basis:

$b^{(1)} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad b^{(2)} = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}, \quad b^{(3)} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$

Übergangsmatrix

Es gilt: $x = Ty$ und $T = [b^{(1)} \dots b^{(n)}]$, $b^{(i)} = T \cdot e^{(i)}$

und Inverse: $S = T^{-1} \longrightarrow y = Sx$

Beispiel

S: Übergangsmatrix von A nach B $\longrightarrow S_{BA}$

T: Übergangsmatrix von B nach A $\longrightarrow T_{AB}$

(Ziel Basis zuerst)