Übungsstunde 6

Matrix hat Eigenwerte und Eigenvektoren

- Matrix → Abbildung
- Eigenwerte → Streckfaktor von EV
- Eigenvektoren → Richtung wird durch Abb. nicht verändert

Eigenbasis

Eine Basis nur aus Eigenvektoren einer Matrix, heisst Eigenbasis der Matrix

Beispiel Bestimme die Eigenbasis von A:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -4 \\ 0 & 5 & -8 \\ 0 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

→ char. Polynom: $(-3-\lambda)\cdot\underbrace{\left(\underbrace{(5-\lambda)(-7-\lambda)}_{\lambda^2+2\lambda-35}+32\right)}_{\lambda^2+2\lambda-3} \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow (\lambda+3)\cdot(\lambda+3)(\lambda-1) = (\lambda+3)^2\cdot(\lambda-1) = 0$

$\Rightarrow$ EW: $\lambda = -3 \longrightarrow E_{-3} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$

$\lambda = 1 \longrightarrow E_1 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$

(vgl. Übungsstunde 1)

$\Rightarrow$ Eigenbasis: $E_A = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$

↳ diese ist auch erzeugend für den 3D-Raum.

Was passiert, wenn geom. $V_{f_{-3}} = 1$?

↳ Dimension von Eigenbasis nur noch 2

⇒ Eine Dimension im Kern

⇒ geht in der Abbildung „verloren"

6.3 Eigenvektoren bestimmen

Nach dem Bestimmen der Eigenwerte können die zugehörigen Eigenvektoren bestimmt werden.

1. Setze einen Eigenwert λ_k in $(A - \lambda_k \cdot I)$ ein
2. Löse das Gleichungssystem $(A - \lambda_k \cdot I) \cdot x = 0$
3. Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen. Man erhält einen oder mehrere mit freien Parametern multiplizierte Eigenvektoren v_k.

Eigenschaften

- Eigenvektoren sind per Definition $\neq 0$
- Eigenvektoren sind linear unabhängig.

Einfachheit

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ (quadr. Matrix)

A ist **einfach**, falls: alg. Vf von jedem EW = 1

A ist **halbeinfach**, falls: alg.Vf = g.Vf. $\Rightarrow$ „Kern = 0"

EV EW

Reminder: $\boxed{1 \leq \text{geom. Vf.} \leq \text{alg. Vf.}}$

6.4 Algebraische und geometrische Vielfachheit

$$\boxed{1 \leqslant \text{gVfh. von } \lambda \leqslant \text{algVfh. von } \lambda \leqslant n}$$

Algebraische Vielfachheit
Die algebraische Vielfachheit ist die Vielfachheit einer Nullstelle im charakteristischen Polynom $p(\lambda)$ beim jeweiligen Eigenwert λ.

Bsp: $p(\lambda) = (\lambda - 3)^2 \cdot (\lambda - 2)$
$\Longrightarrow \lambda = 3$ hat algVfh. 2 und $\lambda = 2$ hat algVfh. 1

Geometrische Vielfachheit
Die geometrische Vielfachheit von λ ist die Anzahl der zum EW gehörigen EV = Anzahl der freien Parameter.

6.5 (Halb)einfache Matrizen und Eigenbasis

Einfachheit

- Eine Matrix ist halbeinfach $\Leftrightarrow$ jedes λ hat algVh = gVfh

Eigenbasis: Die Eigenvektoren einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ bilden einen Basis für $\mathbb{C}^n \Longleftrightarrow$ die Matrix ist halbeinfach.

Es folgt:
- Falls A einfach $\Rightarrow$ A halbeinfach
- Falls A halbeinfach $\Rightarrow$ A^n, A^T halbeinfach
- Falls A einfach $\Rightarrow$ A^n halbeinfach (aber nicht zwingend einfach)

Beispiel Ist B halbeinfach/einfach

$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow$ char. Pol.: $(1-\lambda)(4-\lambda)+2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda-2)(\lambda-3) \overset{!}{=} 0$

$\rightarrow \lambda_1 = 2 \Rightarrow$ alg. $Vf_2 = 1 \Rightarrow$ g. $Vf_2 = 1$

$\rightarrow \lambda_2 = 3 \Rightarrow$ alg. $Vf_3 = 1 \Rightarrow$ g. $Vf_3 = 1$

$\Rightarrow$ A ist einfach

Ist A halbeinfach/einfach?

$\rightarrow \lambda_1 = -3 \Rightarrow$ alg. $Vf_{-3} = 2$ und geom. $Vf_{-3} = 2$

$\rightarrow \lambda_2 = 1 \Rightarrow$ alg. $Vf_1 = 1 \Rightarrow$ geom. $Vf_1 = 1$

$\Rightarrow$ A ist halbeinfach

Diagonalisierbarkeit

- Eine quadr. Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heisst **diagonalisierbar**, falls

$$T^{-1} A T = D = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$$

- Sei A diagonalisierbar, so sind die Spalten von T $(t^{(1)}, t^{(2)}, \dots)$ die Eigenvektoren von A zu den Eigenwerten d_i

$\rightarrow$ Spalten von T bilden also eine Eigenbasis von A

Achtung: $t^{(i)}$ gehört zu d_i $\Rightarrow$ Position muss gleich sein

6.6 Diagonalisierbarkeit

Eine quadratische Matrix A heisst diagonalisierbar, falls eine reguläre Matrix T existiert, sodass $D = T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix ist.

$$\boxed{A \text{ halbeinfach} \iff A \text{ diagonalisierbar}}$$

Matrix diagonalisieren

1. Bestimme die Eigenwerte λ_i und die Eigenvektoren v_i
2. Die Matrix $D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ist eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten auf der Diagonalen.
3. Die Matrix $T = (v_1, \dots, v_n)$ hat die Eigenvektoren als Spalten **(Gleiche Reihenfolge wie bei D!)**.
4. Bestimme T^{-1}. Falls EV orthogonal $T^{-1} = T^T$

Potenzen und Exponentialfunktion

Potenzen/Exponentialfunktionen von diagonalisierbaren Matrizen können einfach berechnet werden:

- $A^k = (TDT^{-1})^k = T \cdot diag(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k) \cdot T^{-1}$
- $e^A = e^{TDT^{-1}} = T \cdot diag(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) \cdot T^{-1}$

$$\boxed{\text{A ist halbeinfach} \iff \text{A ist diagonalisierbar} \iff \text{A besitzt Eigenbasis}}$$

Beispiel Ist A diagonalisierbar?

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -4 \\ 0 & 5 & -8 \\ 0 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow \lambda_1 = -3$; alg. Vf_{-3} = g. $Vf_{-3} = 2$

$\rightarrow \lambda_2 = 1$; alg. Vf_1 = g. $Vf_1 = 1$

$\Rightarrow$ A ist halbeinfach

$\Rightarrow$ A ist diagonalisierbar

$\rightarrow$ Bestimme D und T, sodass $T^{-1}AT = D$

$$\Rightarrow D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel Ist C diagonalisierbar? Bestimme allenfalls D und T.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ char. Pol.: $(1-\lambda)\left[\underbrace{(2-\lambda)(2-\lambda)}_{4-4\lambda+\lambda^2} - 9\right] \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda - 5) = (\lambda-1)(\lambda-5)(\lambda+1) = 0$

EW: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$, $\lambda_3 = -1$

EV: $\lambda_1 = 1$: $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left| \begin{matrix} 2b + 3c = 0 \\ b + c = 0 \end{matrix} \right| \Rightarrow E_1 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

analog dazu: $E_5 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 11/4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$ und $E_{-1} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 7/2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}\right\}$

$$\Rightarrow D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 11/4 & 7/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Symmetrische Matrizen $(A = A^T)$

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch, dann gilt:

- Eigenwerte müssen reell sein
- Eigenvektoren zu versch. EW sind orthogonal
- A ist halbeinfach (also diagonalisierbar)
- A besitzt eine ONB (man muss Spalten normieren!)
- Es gibt eine orthogonale Matrix T, sodass

$$T^{-1}AT = \boxed{T^T A T = D} = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n)$$

Reminder: orth. Matrix: Spalten und Zeilen sind orthonormal bzgl. St.sk.pr.

2.7 Symmetrische Matrizen

Eine symmetrische Matrix ist eine quadratische Matrix, deren Einträge spiegelsymmetrisch bezüglich der Hauptdiagonalen sind.
Dies ist der Fall, wenn sie gleich ihrer Transponierten ist:

$$\boxed{S^T = S}$$

Eigenschaften:

- $A^T A$ und AA^T sind immer symmetrisch.
- Die Eigenwerte von S sind alle reell.
- Ist x ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ, so sind auch $konj(x)$, $Re(x)$, $Im(x)$ Eigenvektoren zum selben Eigenwert λ
- Die Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten sind orthogonal zueinander.
- A ist halbeinfach, also diagonalisierbar.
- A besitzt eine orthonormale Eigenbasis.
- Transformationsmatrix in Eigenbasis T orthogonal.

Beispiel Bestimme T und D, sodass $T^{-1}AT = D$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 4 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \text{symmetrische Matrix!}$$

$\rightarrow$ EW: $(1-\lambda)\big((2-\lambda)(4-\lambda) - 3\big) \overset{!}{=} 0$

$$(1-\lambda)(8 - 6\lambda + \lambda^2 - 3) = 0$$

$$(1-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 5) = 0$$

$$(1-\lambda)(\lambda-5)(\lambda-1) = 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1$ mit alg. $Vf_1 = 2$ und $\lambda_2 = 5$ mit alg. $Vf_5 = 1$

$\rightarrow$ EV: $\lambda_1 = 1$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left| \begin{matrix} b = -\sqrt{3}c \\ \sqrt{3}b = -3c \end{matrix} \right|$

$$\Rightarrow E_1 = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\lambda_2 = 5$: $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left| \begin{matrix} a = 0 \\ 3b = \sqrt{3}c \end{matrix} \right| \Rightarrow E_5 = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \right\}$

$$\Rightarrow T^{-1}AT = D \Rightarrow D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \; T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \Rightarrow T^{-1} = T^T$$