Übungsstunde 7

Diagonalisierbarkeit von symmetrischen Matrizen

Symmetrische Matrizen sind immer diagonalisierbar.

Es existiert jeweils eine orthonormale Matrix T, sodass:

$$T^{-1}AT = T^{T}AT = D$$

Ziel: orthonormales T finden $\rightarrow$ Gram-Schmidt-Verfahren

$\hookrightarrow$ orthogonale <u>und</u> normierte Vektoren

Achtung: gilt nur für symmetrische Matrizen

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \text{EW und EV:} \quad \begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \rightarrow E_1 = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\} \\ \lambda_{2,3} = -5 \rightarrow E_{-5} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\} \end{array}$$

Matrixpotenz

Falls Matrix diag'bar/halbeinfach $\Rightarrow A^k$ auch diag'bar/halbeinfach

$T^{-1}AT = D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ $\Rightarrow T^{-1}A^kT = D^k = \mathrm{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$

wobei λ_i: EW von A $\longrightarrow \lambda_i^k$ sind EW von A^k

$\Rightarrow$ EV bleiben unverändert

$$T^{-1}AT = D \Leftrightarrow A = TDT^{-1} \Rightarrow A^k = TD\underbrace{T^{-1}\cdot T}_{=\mathbb{I}}DT^{-1} \dots TDT^{-1} = TD^kT^{-1}$$

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \text{ und } T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

Exponentialfunktion einer Matrix

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{TD^kT^{-1}}{k!} = T\underbrace{\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k}{k!}\right)}_{=e^D}T^{-1} = Te^DT^{-1} = T\cdot\mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_n})\cdot T^{-1}$$

$$\boxed{e^A = Te^DT^{-1}} \quad \boxed{(e^A)^T = e^{A^T}} \quad \boxed{(e^A)^{-1} = e^{-A}} \quad \boxed{\det(e^A) = e^{\mathrm{Spur}(A)} = e^{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}}$$

Beispiel

Berechne e^A und $\det(e^A)$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \text{ und } T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

Matrixnorm

7.4 Matrixoperatornormen

$$\boxed{||A|| = \max_{\{||x||_2=1\}} = ||Ax||_2}$$

Beispiele

- A quadratisch: $||A|| = \sqrt{\lambda_{max}\{A^T \cdot A\}}$
- A symmetrisch: $||A|| = |\lambda_{max}\{A\}|$
- A orthogonal: $||A|| = 1$
- A regulär: $||A^{-1}|| = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{min}\{A^T \cdot A\}}}$

Für jede $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\mu_{max}} = \sqrt{\text{maximale } |EW| \text{ von } A^TA}$$

i) Falls A orthogonal: $A^T = A^{-1} \Rightarrow A^TA = \mathbb{I} \Rightarrow \|A\|_2 = 1$

ii) Falls A symmetrisch: $A^T = A \Rightarrow A^TA = A^2$ (EW von A sind EW^2 von A^2)

$\Rightarrow \|A\|_2 = \max(|\lambda_i|)$, mit λ_i als EW von A

iii) $\|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\sqrt{\mu_{min}}} = \frac{1}{\sqrt{\text{min. } |EW| \ A^TA}}$

iv) Falls A symm. und invertierbar: $\|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\min(|\lambda_i|)}$

v) $\|A\|_1 \hat{=}$ maximale Spaltensummennorm (Addition der Beträge von Spalteneinträgen)

vi) $\|A\|_\infty \hat{=}$ maximale Zeilensummennorm

Beispiel Berechne $\|A\|_1$, $\|A\|_\infty$ und $\|A\|_2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 \\ 2 & -3 & 3 \\ -12 & 4 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{MATLAB}} D \approx \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 52.0 & 0 \\ 0 & 0 & 2838 \end{pmatrix}$$

(D von A^TA)

Beispiel Berechne e^A

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$