D-MAVT Lineare Algebra II
Prof. Dr. N. Hungerbühler

Serie 1

Aufgaben 1-9 ist online auf `https://echo.ethz.ch` zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, den 5. März um 14:00 Uhr** (D-MAVT) bzw. **Montag, den 8. März um 14 Uhr** (D-MATL) ab.
Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag online per Sam-Uploadtool `https://sam-up.math.ethz.ch` abgeben.

Entscheiden Sie bei den folgenden 9 Aufgaben, ob die angegebene Funktion f linear ist oder nicht.

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y)^\top \mapsto (x + y, 2x, 0)^\top$

(a) f ist linear

(b) f ist nicht linear

Prüfe:
Linear, falls:
- $f(x+y) = f(x) + f(y)$
- $f(\alpha x) = \alpha \cdot f(x)$
- Null auf Null abbilden

2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y)^\top \mapsto (x + y, 2x, 1)^\top$

(a) f ist linear

(b) f ist nicht linear

$f(0) = f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

(a) f ist linear

(b) f ist nicht linear

$v \mapsto A \cdot v \rightsquigarrow \begin{matrix} x+2y \\ 0 \\ 2x+y \end{matrix} \Rightarrow$ linear

4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 0$

(a) f ist linear

(b) f ist nicht linear

$0 \mapsto 0$
Rest auch erfüllt $\Rightarrow$ linear
$\hookrightarrow v \mapsto Av$ mit $A = (0)$

5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f die Identität

(a) f ist linear

(b) f ist nicht linear

$v \mapsto Av$ mit $A = (1)$
$\hookrightarrow$ erfüllt $\Rightarrow$ linear

6. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1$

(a) f ist linear

(b) f ist nicht linear

$0 \mapsto 1$

7. $f : C^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ h \mapsto h''(0)$

(a) f ist linear

(b) f ist nicht linear

$h \mapsto h''(0)$

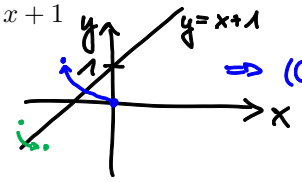
$\hookrightarrow (g+f)'' = g'' + f'' \Rightarrow g+f \mapsto g''(0) + f''(0)$

$(\alpha \cdot f)'' = \alpha \cdot f'' \Rightarrow \alpha \cdot f \mapsto \alpha \cdot f''(0)$

8. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, f die Spiegelung an der Geraden $y = x + 1$

(a) f ist linear

(b) f ist nicht linear



$\Rightarrow (0,0) \to (-1,1)$

$\hookrightarrow$ nicht linear!

9. $f : \mathbb{R}^2 \to C^\infty(\mathbb{R})$, $(x, y)^\top \mapsto h$, wobei h diejenige Linearkombination der Funktionen sin und cos ist, deren Graph durch die Punkte $(-1, x)$ und $(1, y)$ geht.

(a) f ist linear

(b) f ist nicht linear

$h = \alpha \cdot \sin + \beta \cdot \cos$

$(-1, x) : -\alpha \cdot \sin(+1) + \beta \cdot \cos(+1) = x$

$(1, y) : \alpha \cdot \sin(1) + \beta \cdot \cos(1) = y$

$\Rightarrow \beta = \frac{x + \alpha \sin(1)}{\cos(1)} = \frac{y - \alpha \sin(1)}{\cos(1)}$

$\Rightarrow x - y = \alpha \sin(1) \cdot (-2)$

$\Rightarrow \alpha = \frac{y-x}{2 \cdot \sin(1)} \to \beta = \frac{x+y}{2 \cdot \cos(1)}$

$\hookrightarrow h = \frac{y-x}{2 \cdot \sin(1)} \cdot \sin + \frac{x+y}{2 \cdot \cos(1)} \cdot \cos$

$\hookrightarrow$ Prüfe Bedingungen

$\hookrightarrow$ linear

10. Betrachten Sie die folgende Abbildung $\mathcal{F}$ von $\mathbb{R}^2$ in sich:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \xmapsto{\mathcal{F}} x' = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

a) Interpretieren Sie diese Abbildung geometrisch.

b) Durch welche Matrix A wird $\mathcal{F}$ beschrieben?

11. Gegeben sei der 4-dimensionale Vektorraum $\mathcal{P}_3$ der Polynome vom Grad ≤ 3. Zeigen Sie, dass die ersten vier Tschebyscheff-Polynome zweiter Art

$$U_0(x) = 1,\ U_1(x) = 2x,\ U_2(x) = 4x^2 - 1,\ U_3(x) = 8x^3 - 4x$$

eine Basis von $\mathcal{P}_3$ bilden.

12. Die Vektoren $a = (1, -2, 5, -3)^T$, $b = (2, 3, 1, -4)^T$ und $c = (3, 8, -3, -5)^T$ erzeugen einen Unterraum W von $\mathbb{R}^4$.

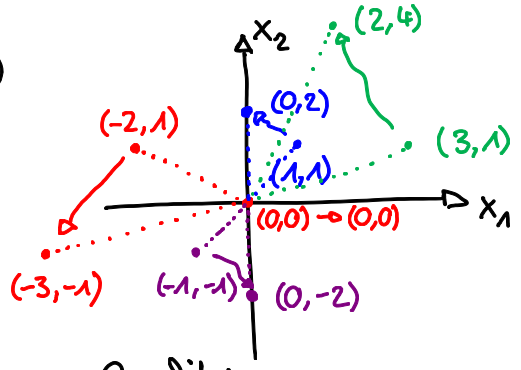
a) Bestimmen Sie $\dim W$ und eine Basis von W.

b) Vervollständigen Sie diese Basis zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$.

c) Geben Sie ein homogenes LGS an, welches W als Lösungsraum hat.

(10) $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \overset{F}{\mapsto} x' = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$

a)



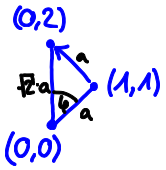
⇝ Rotation um Ursprung

⇝ Streckung

aus Grafik:

⇒ Streckung um Faktor $\sqrt{2}$

↳ Drehung um $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ⟶



mit $a = \sqrt{2}$

↳ $\varphi = \frac{\pi}{4}$

Berechnung:

Betrag in LinAlg mit Doppelstrichen geschrieben

$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

Streckfaktor

$\|x'\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (x_1 + x_2)^2} = \sqrt{2x_1^2 + 2x_2^2} = \sqrt{2} \cdot \|x\|$

Skalarprodukt: $\cos\varphi = \frac{(x', x)}{\|x'\| \cdot \|x\|} = \frac{(x', x)}{\sqrt{2} \cdot \|x\|^2} = \frac{(x_1 - \cancel{x_2}) \cdot \cancel{x_1} + (\cancel{x_1} + x_2) \cdot x_2}{\sqrt{2} \cdot (\cancel{x_1^2 + x_2^2})} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

↳ $\underline{\varphi = \frac{\pi}{4}}$

b) $\underline{A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$ $\left[x' = A \cdot x = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right]$

(11) $U_0(x) = 1$

$U_1(x) = 2x$ ⇝ bilden U_0 bis U_3 eine Basis für Polynome $\leq$ 3. Grades?

$U_2(x) = 4x^2 - 1$

$U_3(x) = 8x^3 - 4x$ ↳ Schreibe in Matrixform und Gausse

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} U_0 & U_1 & U_2 & U_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \rightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \end{array}$$

⇝ Bereits in Zeilenstufenform; keine Nullzeile

⇒ U_0, U_1, U_2, U_3 bilden eine Basis

Dabei folgendes verwendet: Standardbasis: $\{1, x, x^2, x^3\}$

↳ $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $U_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $U_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$; $U_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$

⇒ Es ist also möglich mit U_0, U_1, U_2 und U_3 jedes beliebige Polynom als Linearkombi zu bilden!

(12) a) $a=\begin{pmatrix}1\\-2\\5\\-3\end{pmatrix}$; $b=\begin{pmatrix}2\\3\\1\\-4\end{pmatrix}$; $c=\begin{pmatrix}3\\8\\-3\\-5\end{pmatrix}$

↳ Basis: $\begin{pmatrix}1&2&3\\-2&3&8\\5&1&-3\\-3&-4&-5\end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{III}-5\cdot\text{I}\\ \text{IV}+3\cdot\text{I}}]{\text{II}+2\cdot\text{I}} \begin{pmatrix}1&2&3\\0&7&14\\0&-9&-18\\0&2&4\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

↳ aus jeder Stufe ein Vektor $\Rightarrow$ $\underline{\underline{B=\{a,b\} \text{ oder } B=\{a,c\}}}$

↳ $\underline{\underline{\dim(W)=2}}$ (Anz. Nicht-Nullzeilen)

b) e_3 und e_4 hinzufügen $\Rightarrow$ Basis: a, b, e_3, e_4 $\rightarrow$ $\underline{\underline{B=\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\5\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\\1\\-4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}}}$

(auch a, c, e_3, e_4; ... möglich!)

c) HLGS mit W als Lösungsraum

↳ $\left(\begin{array}{cccc|c}1&-2&5&-3&0\\2&3&1&-4&0\end{array}\right)$ $\rightsquigarrow A\cdot u=0$ und $u=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{pmatrix}$

↳ $\left(\begin{array}{cccc|c}1&-2&5&-3&0\\0&7&-9&2&0\end{array}\right)$

$\Rightarrow \left|\begin{array}{l}u_1-2u_2+5u_3-3u_4=0\\ \quad 7u_2-9u_3+2u_4=0\end{array}\right|$

↳ $\underline{u_2=\frac{9}{7}u_3-\frac{2}{7}u_4}$

$u_1=2u_2-5u_3+3u_4=\frac{18}{7}u_3-\frac{4}{7}u_4-\frac{35}{7}u_3+\frac{21}{7}u_4=-\frac{17}{7}u_3+\frac{17}{7}u_4$

↳ $\underline{u_1=\frac{17}{7}(u_4-u_3)}$

↳ u_3 und u_4 sind freie Parameter

$\Rightarrow$ u_3 und u_4 so einfach wie möglich wählen

↳ bspw $\underline{u_3=u_4=1}$ $\Rightarrow$ $\underline{u_1=0}$ und $\underline{u_2=1}$

und $\underline{u_3=7;\ u_4=0}$ $\Rightarrow$ $\underline{u_1}=\frac{17}{7}(0-7)=\underline{-17}$ und $\underline{u_2=9}$

↳ $\left|\begin{array}{l}u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3+u_4x_4=0\\u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3+u_4x_4=0\end{array}\right|$ $\rightsquigarrow$ $\left|\begin{array}{l}-17x_1+9x_2+7x_3=0\\ \quad x_2+x_3+x_4=0\end{array}\right|$

↑ Es sind ja 2 Gl. erforderlich!

↳ Nun ist x gesucht! $\Rightarrow$ x ist ja jetzt ganz einfach:

x ist also $\begin{pmatrix}1\\-2\\5\\-3\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}2\\3\\1\\-4\end{pmatrix}$ $\longrightarrow$ <u>Basis ist Lsg des Systems!</u>