Serie 4

Aufgaben 1–6 sind online auf `https://echo.ethz.ch` zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, den 26. März um 14:00 Uhr** (D-MAVT) bzw. **Montag, den 29. März um 14 Uhr** (D-MATL) ab.
Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag online per Sam-Uploadtool `https://sam-up.math.ethz.ch/?lecture=401-0172-00&serie=s04` abgeben.

---

1. Bezüglich des euklidischen Skalarprodukts in $\mathbb{R}^2$ ist die Orthogonalprojektion von $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$ der Vektor $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

$$\frac{\langle v,w\rangle}{\langle w,w\rangle}\cdot w = \frac{6+9}{36+9}\cdot\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

(a) richtig

(b) falsch

2. $A \in \mathbb{M}^{n\times n}$ ist eine orthogonale Matrix genau dann, wenn ihre Spalten eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ bezüglich des euklidischen Skalarprodukts bilden.

(a) richtig

(b) falsch

3. Falls sich die Graphen zweier Funktionen f und g senkrecht schneiden, so sind f und g orthogonal bezüglich des Skalarprodukts $\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$.

(a) richtig

(b) falsch

$f(x) = x$

$g(x) = -x$

$$\rightarrow \langle f,g\rangle = \int_a^b -x^2\,dx = -\frac{b^3}{3} + \frac{a^3}{3} \neq 0$$

4. Ist f eine ungerade Funktion und g eine gerade Fuktion, so sind f und g orthogonal bezüglich des Skalarprodukts $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)\,dx$.

(a) richtig

(b) falsch

$$\int_1^{-1} +f(+y)\,g(+y)\,(+dy)$$

$f(-x) = -f(x)$

$g(-x) = g(x)$

$x = -y$ $\quad dx = -dy$

$$\underline{\langle f,g\rangle} = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx = \underline{\int_1^{-1} +f(y)\,g(y)\,(+dy)}$$

$$= -\int_{-1}^{1} f(y)g(y)\,dy = \underline{-\langle f,g\rangle}$$

$$F\Big|_{-1}^{1} = F(1) - F(-1) = -(F(-1) - F(1))$$

$$\Rightarrow \langle f,g\rangle = 0$$

5. In einem Vektorraum mit Skalarprodukt können zwei Einheitsvektoren ein beliebig grosses Skalarprodukt haben.

(a) richtig

(b) falsch

Cauchy-Schwarz: $\langle v,w\rangle^2 \leq \langle v,v\rangle \cdot \langle w,w\rangle = 1\cdot 1 = 1$

6. In jedem Vektorraum mit Skalarprodukt können wir beliebig viele paarweise orthogonale Einheitsvektoren finden.

(a) richtig

(b) falsch

paarweise orthogonal
$\Rightarrow$ linear unabhängig
$\Rightarrow$ nur so viele wie Dimension des Raums

7.

a) Gegeben seien die drei Vektoren

$$a^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Konstruieren Sie mit Hilfe des Gram-Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahrens aus $a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}$ eine orthonormale Basis $b^{(1)}, b^{(2)}, b^{(3)}$. Benützen Sie das Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^3$.

b) Finden Sie die Koordinaten x_1, x_2, x_3 des Vektors

$$v = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

bezüglich der in a) berechneten orthonormalen Basis $b^{(1)}$, $b^{(2)}$, $b^{(3)}$, d.h.

$$v = x_1 b^{(1)} + x_2 b^{(2)} + x_3 b^{(3)}.$$

8. Gegeben seien die drei Vektoren $p^{(1)} = x^2$, $p^{(2)} = x$, $p^{(3)} = 1$ in $\mathcal{P}_2$. Konstruieren Sie mit Hilfe des Gram-Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahrens aus $p^{(1)}, p^{(2)}, p^{(3)}$ eine orthonormale Basis $q^{(1)}$, $q^{(2)}$, $q^{(3)}$ (respektieren Sie die Reihenfolge!). Benützen Sie als Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx, \text{ für } f, g \in \mathcal{P}_2.$$

8 $\quad q^{(1)} = \dfrac{p^{(1)}}{\|p^{(1)}\|} = \dfrac{x^2}{\sqrt{\int_{-1}^{1} x^4\,dx}} \overset{(*)}{=} \sqrt{\frac{5}{2}}\,x^2$ $\qquad (*) \int_{-1}^{1} x^4\,dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$

$q^{(2)'} = p^{(2)} - \langle p^{(2)}, q^{(1)}\rangle \cdot q^{(1)} = x - \int_{-1}^{1} x^3\,dx \cdot \frac{5}{2}x^2 = x - \frac{5}{2}x^2 \cdot \underbrace{\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1}}_{=0} = x$

$q^{(2)} = \dfrac{q^{(2)'}}{\|q^{(2)'}\|} = \dfrac{x}{\sqrt{\int_{-1}^{1} x^2\,dx}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\,x$

$q^{(3)'} = p^{(3)} - \langle p^{(3)}, q^{(1)}\rangle \cdot q^{(1)} - \underbrace{\langle p^{(3)}, q^{(2)}\rangle}_{0} \cdot q^{(2)} = 1 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} \cdot \frac{5}{2} \cdot x^2 = 1 - \frac{5}{3}x^2$

$q^{(3)} = \dfrac{q^{(3)'}}{\|q^{(3)'}\|} = \dfrac{1 - \frac{5}{3}x^2}{\sqrt{\int_{-1}^{1} (1 - \frac{5}{3}x^2)^2\,dx}} = \sqrt{\frac{9}{8}}\left(1 - \frac{5}{3}x^2\right) = \frac{3}{\sqrt{8}} - \frac{5}{\sqrt{8}}x^2$

$$\int_{-1}^{1} 1 + \frac{25}{9}x^4 - \frac{10}{3}x^2 \, dx = \left[x + \frac{5x^5}{9} - \frac{10}{9}x^3\right]_{-1}^{1} = 2 + \frac{10}{9} - \frac{20}{9} = \frac{8}{9}$$

---

7 a) $a^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; a^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \; a^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\underline{\underline{b^{(1)}}} = \frac{a^{(1)}}{\|a^{(1)}\|} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

$$b^{(2)'} = a^{(2)} - \langle a^{(2)}, b^{(1)} \rangle \cdot b^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot (-3) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{b^{(2)}}} = \frac{b^{(2)'}}{\|b^{(2)'}\|} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

$$b^{(3)'} = a^{(3)} - \langle a^{(3)}, b^{(1)} \rangle \cdot b^{(1)} - \langle a^{(3)}, b^{(2)} \rangle \cdot b^{(2)}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \cdot (1/2) \cdot \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/6 \\ -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{b^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

b) $v = x_1 \cdot b^{(1)} + x_2 \cdot b^{(2)} + x_3 \cdot b^{(3)}$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 5 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 3 \\ 0 & \sqrt{2}/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II}+\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 5 \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 2/\sqrt{3} & 8 \\ 0 & \sqrt{2}/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{III}+\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 5 \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 2/\sqrt{3} & 8 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 15 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \underline{\underline{x_3}} = \frac{15}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot 5}{\sqrt{3}} = \underline{\underline{\sqrt{3} \cdot 5}}$$

$$\hookrightarrow \underline{\underline{x_2}} = -\frac{\sqrt{6}}{2}\left(8 - \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} \cdot 5\right) = \underline{\underline{\sqrt{6}}}$$

$$\hookrightarrow \underline{\underline{x_1}} = -\sqrt{2}\left(5 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 5 \cdot \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{6}\right) = \underline{\underline{-\sqrt{2}}}$$

9.

a) Gegeben seien die Funktionen $f_n(x) := \alpha_n \cos(nx)$ und $g_m(x) := \beta_m \sin(mx)$ für $m, n \in \mathbb{N}_0, m \geq 1$ und $\alpha_n, \beta_m > 0$ wie in Aufgabe 8 der Serie 3, im Vektorraum $C^0([0, 2\pi])$. Man berechne für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Orthogonalprojektion der Funktion

$$\phi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}, x \mapsto x - \pi$$

auf den von $\{f_0, \ldots, f_k, g_1, \ldots, g_k\}$ aufgespannten Unterraum, versehen mit dem Skalarprodukt $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx$. Die Aufgabe darf mit MATLAB gelöst werden.

b) Man stelle mit Hilfe von MATLAB die Funktion ϕ, sowie die gefundenen Projektionen für einige Werte von k als Graphen im selben Koordinatensystem dar.

Bemerkung: Die gefundenen Projektionen heissen Fourier-Polynome der Funktion ϕ. Für $k \to \infty$ erhält man die sogenannte Fourier-Reihe von ϕ.