D-MAVT Lineare Algebra II
Prof. Dr. N. Hungerbühler

Serie 5

Aufgaben 1–5 sind online auf `https://echo.ethz.ch` zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, den 2. April um 14:00 Uhr** (D-MAVT) bzw. **Montag, den 12. April um 14 Uhr** (D-MATL) ab.
Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag online per Sam-Uploadtool `https://sam-up.math.ethz.ch/?lecture=401-0172-00&serie=s05` abgeben.

---

1. Die Abbildung $V^n \to \mathbb{R}^n$, $v \mapsto [v]_{\mathcal{B}}$, die jedem Vektor seinen Koordinatenvektor bezüglich einer Basis $\mathcal{B}$ zuordnet, ist linear.

(a) richtig

(b) falsch

2. Bezüglich der Standardbasis e_1, e_2, e_3 im $\mathbb{R}^3$ ist die Orthogonalprojektion $\mathcal{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto \langle x, e_1 \rangle e_1$ gegeben durch die Darstellungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\langle x, e_1 \rangle \cdot e_1$

$\langle e_1, e_1 \rangle \cdot e_1 = 1 \cdot e_1 = e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3$

$\langle e_2, e_1 \rangle \cdot e_1 = 0 \cdot e_1 = 0$

$\langle e_3, e_1 \rangle \cdot e_1 = 0 \cdot e_1 = 0$

$\Rightarrow$ Richtig

(a) richtig

(b) falsch

3. Sei $\mathcal{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ linear. Dann existiert ein Vektor, der gleichzeitig im Kern und im Bild von $\mathcal{F}$ liegt.

$Ax = b$ ← Bild $b \in \mathrm{im}(A)$

Kern $x \in \ker(A)$

(a) richtig

(b) falsch

$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

Kern ist teil davon

Bild ist teil hiervon

↳ also nicht derselbe Vektor!

4. Sei x eine Linearkombination von Spalten der Matrix A und y eine Lösung von $A^\top y = 0$. Dann stehen x und y bezüglich des Standardskalarproduktes senkrecht aufeinander.

$x \in \mathrm{im}(A)$

↳ $y \in \ker(A^T)$

(a) richtig

(b) falsch

Bild und Kern stehen senkrecht zueinander
$\mathrm{im}(A)$ $\ker(A^T)$

5. Falls der Kern einer linearen Abbildung $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ nur aus dem Nullvektor besteht, so ist die Abbildung invertierbar.

(a) richtig

(b) falsch

$\Rightarrow$ keine Nullzeile bei Gauss
$\Rightarrow$ Matrix invertierbar!

6. Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie Basen für Kern A und Bild A.

7. Wir betrachten die Ebene E in $\mathbb{R}^3$, gegeben durch $x_1 = 0$, und die lineare Abbildung $\mathcal{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die jedes $x \in \mathbb{R}^3$ orthogonal auf E projiziert.

a) Durch welche Matrix A wird $\mathcal{F}$ bezüglich der Standardbasis beschrieben?

b) Bestimmen Sie Kern A und $\dim(\text{Kern } A)$.

c) Bestimmen Sie Bild A und $\dim(\text{Bild } A)$.

8. Sei $\mathcal{P}_2$ der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2. Betrachten Sie die folgende Abbildung $\mathcal{F}$ von $\mathcal{P}_2$ in sich:

$$P(x) \in \mathcal{P}_2 \quad \xmapsto{\mathcal{F}} \quad Q(x) = (2-x)\,P'(x) \in \mathcal{P}_2.$$

$\mathcal{F}$ ordnet jedem Polynom $P(x)$ das Polynom $Q(x) = (2-x)\,P'(x)$ zu ($P'(x)$ bedeutet die Ableitung von $P(x)$ nach x).

a) Zeigen Sie: $\mathcal{F}$ ist eine lineare Abbildung.

b) Durch welche Matrix A wird $\mathcal{F}$ bezüglich der Basis 1, x, x^2 von $\mathcal{P}_2$ beschrieben?

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

⑥ $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\longrightarrow$ Basis von Bild und Kern von A

↳ Gauss: $\xrightarrow[\text{III}-\text{I}]{\text{II}+2\cdot\text{I}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Basis von Bild: $\underline{\underline{\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}}$

$\Rightarrow$ Basis von Kern: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ GS: $\left| \begin{array}{l} 2a + b + c = 0 \\ 2b + 3c = 3d \end{array} \right|$ $\xrightarrow{①} a = 1, b = -2, c = 0$

$\xrightarrow{②} -4 = 3d \Rightarrow d = -\frac{4}{3}$

↳ $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -4/3 \end{pmatrix}$

2. Lsg: $d = 0 \rightarrow 2b = -3c$

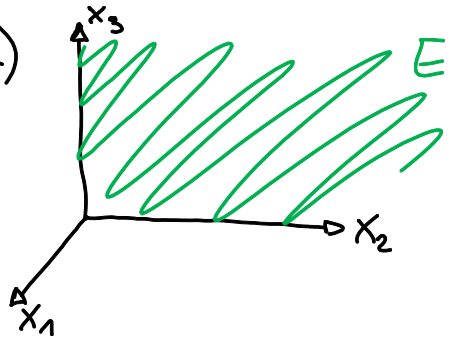
$\Rightarrow b = -3, c = 2$

$\Rightarrow 2a = 3 - 2 = 1 \Rightarrow a = 1/2$

$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1/2 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Basis Kern: $\underline{\underline{\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -4/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}}}$

⑦ a)



weil $x_1 = 0$

Bild der Abb. soll auf E liegen!

$$x = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \xrightarrow{F} \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad [F]_E = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A}}$$

b) $\ker(A) = ?$ und $\dim(\ker(A)) = ?$

$\longrightarrow \quad b \overset{!}{=} 0$ und $c \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \underline{\underline{\ker(A) = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}}}$

oder: $\underline{\underline{\ker(A) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}}}$

$\underline{\underline{\dim(\ker(A)) = 1}}$

c) $\operatorname{im}(A) = ?$ und $\dim(\operatorname{im}(A)) = ?$

$\hookrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \underline{\underline{\operatorname{im}(A) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = E}}$

$\hookrightarrow \underline{\underline{\dim(\operatorname{im}(A)) = 2}}$

⑧ a) $Q(x) = (2-x)\cdot P'(x)$

$$\mathcal{F}(S(x)+T(x)) = (2-x)\cdot(S'(x)+T'(x)) = \mathcal{F}(S(x))+\mathcal{F}(T(x))$$

$$\mathcal{F}(\alpha\cdot S(x)) = (2-x)\cdot\alpha\cdot S'(x) = \alpha\cdot\mathcal{F}(S(x))$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ ist linear!

b) Basis: $\{1, x, x^2\}$

$$\Rightarrow F(b^{(1)}) = F(1) = 0 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$F(b^{(2)}) = F(x) = (2-x)\cdot 1 = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$F(b^{(3)}) = F(x^2) = (2-x)\cdot 2x = 4x-2x^2 = \begin{pmatrix}0\\4\\-2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A}} = (b^{(1)}, b^{(2)}, b^{(3)}) = \underline{\underline{\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\0 & -1 & 4\\0 & 0 & -2\end{pmatrix}}}$$