

Serie 6

Die Aufgaben 1–5 sind online zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, den 3. April um 14:00 Uhr** ab.

Die Abgabe der Serie erfolgt als Scan per E-mail (oder via polybox, falls angeboten) an ihre/ihren Übungsgruppenleiterin/Übungsgruppenleiter.

- 1.** Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ so, dass $Ax = 0$ nur die triviale Lösung hat. Dann gilt:

- (a) $\dim(\text{Bild } A) = n$
- (b) ~~$\dim(\text{Bild } A) = 1$~~
- (c) $\dim(\text{Kern } A) = 0$
- (d) ~~$\dim(\text{Kern } A) = 1$~~

$$\dim(\text{im}) + \dim(\text{ker}) = n$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & & 0 \\ & n & \end{array}$$

- 2.** Seien A und B Darstellungsmatrizen einer Funktion $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dann gilt $\det A = \det B$.

- (a) Richtig
- (b) Falsch

$$\begin{aligned} A \text{ und } B \text{ sind sich ähnlich} \\ \Rightarrow B = TAT^{-1}, \text{ für reguläre Matrix } T \\ \Rightarrow \det B = \det(TAT^{-1}) = \det(T)\det(A)\det(T)^{-1} = \det(A) \end{aligned}$$

- 3.** Ein Vektor habe bezüglich der Basis $B := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ die Koordinaten $(-1, -1)$. Die Koordinaten bezüglich der Standardbasis sind ...

- (a) $(\frac{1}{2}, 0)$
- (b) $(-1, -1)$
- (c) $(0, -2)$
- (d) $(2, 0)$
- (e) $(1, 1)$

$$\rightsquigarrow (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + 2 \\ -2 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. Das Bild von

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{J+}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

wird aufgespannt von den Vektoren ...

(a) ~~$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$~~ .

(b) ~~$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$~~ .

(c) ~~$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$~~ .

(d) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(e) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- müssen 2 Vektoren sein
- 3 dimensionaler Vektor

5. Eine Basis des Kerns von

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{cccc} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

ist gegeben durch ...

- (a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
- (b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$
- (c) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
- (d) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$
- (e) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$

\hookrightarrow Kern: 2 Vektoren, 4 D

$$\rightarrow \begin{cases} 2a + b - c + 2d = 0 \\ b + c + 2d = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \text{setze: } c=1, d=1$$

$$\begin{aligned} \rightarrow b &= -3, a=1 \\ \rightarrow &\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \text{setze: } c=1, d=0$$

$$\rightarrow b=-1, a=1$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{ker}(A) = \overline{\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}$$

6. Gegeben sei der Vektorraum $V^3 = \mathbb{R}^3$ mit der Standardbasis \mathcal{B} . Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

definiert eine lineare Abbildung von V^3 nach V^3 .

- a) Durch die Wahl der neuen Basis

$$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

werden neue Koordinaten eingeführt. Bestimmen Sie die Übergangsmatrix T von \mathcal{B} nach \mathcal{B}' .

- b) Durch welche Matrix B wird die lineare Abbildung in den neuen Koordinaten beschrieben?
 c) Interpretieren Sie die Abbildung geometrisch.

7. Gegeben seien zwei lineare Gleichungssysteme $Ax = b_i$, $i = 1, 2$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie mit Hilfe der *Fredholm-Alternative*, ob die beiden Gleichungssysteme jeweils eine Lösung besitzen.

8. Darstellung eines vierdimensionalen Würfels:

Sei $W := \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^\top \in \mathbb{R}^4 : 0 \leq x_i \leq 1\}$ der Einheitswürfel in \mathbb{R}^4 . Wir betrachten die Projektionen $P_1 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ entlang von $(1, 1, 1, -2)^\top$ auf den Unterraum mit $x_4 = 0$ und $P_2 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ entlang von $(2, 1, -4, 0)^\top$ auf den Unterraum mit $x_3 = 0$, sowie die Abbildung

$$E : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x_1, x_2, x_3, x_4)^\top \mapsto (x_1, x_2)^\top.$$

- a) Man bestimme die Darstellungsmatrizen von P_1 , P_2 und E .
 b) Man bestimme die Darstellungsmatrizen der zusammengesetzten Abbildungen $P_2 \circ P_1$ und $\phi := E \circ P_2 \circ P_1$.
 c) Man skizziere das Bild der Kanten von W unter ϕ .

(6)

$$S = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$S^{-1} : \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & +\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow S^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b) B = S^{-1} A S = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{36} \begin{pmatrix} -12 & -12 & 12 \\ 6 & -30 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{36} \begin{pmatrix} -36 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}}$$

c) geometrische Interpretation

→ Projektion auf Ebene, die durch $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird, mit Punktsymmetrie (da -1)

→ $b_1' \rightarrow -b_1', b_2' \rightarrow -b_2', b_3' \rightarrow 0$

$$\textcircled{7} \quad Ax = b_i, \quad i = 1, 2$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Fredholm: Ein Gleichungssystem $Ax = b$ ist genau dann lösbar, wenn b senkrecht auf allen Lösungen des adjungierten Gleichungssystems $A^T y = 0$ steht.

\Rightarrow wenn also b senkrecht auf den Vektoren einer Basis des Lösungsraumes von $A^T y = 0$ stehen

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \rightarrow \left| \begin{array}{l} 2a + 3b + 2d = 0 \\ b = 2c \end{array} \right|$$

$$\rightsquigarrow c=0, d=1: \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow c=1, d=0 \rightarrow \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Basis: } \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$\rightarrow Ax = b_1$ hat Lösung, falls $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot b_1 = 0$ und $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot b_1 = 0$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 + 1 = 0 \quad \checkmark$$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -3 + 2 + 1 = 0 \quad \checkmark \quad \rightarrow \underline{\underline{Ax = b_1 \text{ hat Lsg}}}$$

$$\rightarrow Ax = b_2: \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \quad \checkmark$$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = -6 + 2 + 2 = \underline{\underline{-2 \neq 0}} \quad \times \quad \rightarrow \underline{\underline{Ax = b_2 \text{ hat keine Lsg}}}$$

8) Sei $W := \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4 : 0 \leq x_i \leq 1\}$

Projektionen $P_1 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ entlang von $(1, 1, 1, -2)^T$ auf UR mit $x_4 = 0$

$P_2 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ entlang von $(2, 1, -4, 0)^T$ auf UR mit $x_3 = 0$

Abbildung $E : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \mapsto (x_1, x_2)^T$

a) Darstellungsmatrizen von P_1, P_2, E

$$P_1 : P_1(e_1) = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P_1(e_2) = e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P_1(e_3) = e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_1(e_4) = e_4 + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 1 - 2 \cdot \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow P_1 : \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{L}} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_2 : P_2(e_1) = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P_2(e_2) = e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P_2(e_3) = e_3 + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_2(e_4) = e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P_2 : \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{L}} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E : E(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, E(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, E(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, E(e_4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow E : \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{L}}$$

$$b) P_2 \circ P_1 = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{L}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 3/4 \\ 0 & 1 & 1/4 & 5/8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E \circ P_2 \circ P_1 = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 3/4 \\ 0 & 1 & 1/4 & 5/8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{L}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 3/4 \\ 0 & 1 & 1/4 & 5/8 \end{pmatrix}$$

c) Berechne Eckpunkte (16)

→ vgl. Log